ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ 2008
Seria: AUTOMATYKA z. 151 Nr kol. 1797

Aneta D. BAL*
Politechnika Śląska

O STABILNOŚCI DYSKRETNYCH I CIĄGŁYCH UKŁADÓW LINIOWYCH O ZMIENNYCH SKOKOWO WSPÓŁCZYNNIKACH*

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem stabilności dla dyskretnych i ciągłych układów liniowych o zmiennych współczynnikach w czasie, w których funkcja przełączająca jest przedziałami stała. Dla takich układów wyznaczone zostały warunki stabilności za pomocą wykładników Lapunowa.

ABOUT STABILITY OF LINEAR TIME-VARYING SYSTEMS WITH DISCRETE AND CONTINUOUS TIME

Summary. In this paper stability of discrete and continuous time-varying linear systems with piecewise constant switching signal is presented. For such systems the stability conditions are proposed with the aid of Lapunov exponent.

1. Wprowadzenie

W układach automatyki jednym z kluczowych zagadnień podczas konstruowania, budowania, a następnie podczas badań lub symulacji i określania nastaw parametrów jest sprawdzenie, czy badany układ jest stabilny, oraz określenie zakresu nastaw parametrów, dla których układ jest stabilny.

W pracy omówione zostaną układy liniowe o zmiennych skokowo współczynnikach. Określone zostaną warunki stabilności dla takich układów zarówno dyskretnych, jak i ciągłych opisanych równaniami postaci:

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad \text{dla} \quad n \geq 0 \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{2}$$

z odpowiadającym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Dla funkcji przełączającej σ przedziałami stałej, gdzie w danym przedziale działanie układu opisane jest przez stałą macierz stanu A zależną od chwili n, rozwiązaniem równania (1) jest:

$$x(n+1, x_0) = A(n)A(n-1)A(n-2)\cdot \ldots \cdot A(0)x(0). \tag{3}$$

---

* Adres e-mail: Aneta.Bal@polsl.pl.

* Praca finansowana ze środków na działalność statutową Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej w 2008 roku — nr pracy: BK-209/RAu1/2008 t.1.

Przy tych samych założeniach o funkcji σ w przypadku równań różniczkowych rozwiązanie (2) ma postać:

$$x(t, x_0) = \left[e^{A(t_k)(t-t_k)} e^{A(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})} \cdot \ldots \cdot e^{A(0)(t_1)}\right] x(0), \tag{4}$$

gdzie chwile t_i, $i = 1,2,\ldots$ są chronologicznymi chwilami czasu, w których następują kolejne przełączenia.

Dla układów ciągłych warunki stabilności wyznaczone zostaną zgodnie z podaną poniżej definicją. Dla układów dyskretnych podać można analogiczną definicję.

Definicja 1. Układ (2) nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\underset{x_0}{\forall} \quad \lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0\,. \tag{5}$$

W układach liniowych stacjonarnych równania opisujące działanie układu mają stałe współczynniki. Oznacza to, że w dowolnej chwili czasu badany układ opisany jest tylko jedną, niezmienną w czasie macierzą stanu. Dla takich układów, zarówno ciągłych, jak i dyskretnych, znane są warunki stabilności [1,2,3]. Jedna z metod określania stabilności układów wyrażona jest przez wartości własne macierzy opisującej działanie całego układu stacjonarnego. W przypadku układów dyskretnych warunek stabilności jest taki, aby wszystkie wartości własne macierzy znajdowały się we wnętrzu koła jednostkowego, natomiast dla układów ciągłych warunek stabilności jest taki, aby wszystkie one leżały w lewej półpłaszczyźnie.

W przypadku rozpatrywania układów liniowych niestacjonarnych opisanych wzorami (1) lub (2), opisanych nie jedną, lecz wieloma macierzami stanu, określenie, czy dany układ jest czy nie jest stabilny, nie jest zadaniem trywialnym, a znalezione warunki stabilności są bardziej skomplikowane. O ile w literaturze podawane są warunki stabilności dla układów stacjonarnych, dla układów niestacjonarnych są one cały czas poszukiwane. Problem określenia warunków stabilności dla zdefiniowanych układów (1) i (2) staje się problemem znacznie bardziej złożonym i wymaga większych nakładów obliczeniowych. Stabilność układów z przełączeniami zależy m.in. od rodzaju macierzy, między którymi układ się przełącza, czasu przebywania układu w każdym ze stanów czy kolejności przełączeń.

W pracy określone zostaną warunki stabilności za pomocą odpowiednio zdefiniowanych wykładników Lapunowa.

Definicja 2. Wykładnikiem Lapunowa dla układów dyskretnych nazywamy wartość

$$\lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\| x(n, x_0) \right\|^{\frac{1}{n}}, \tag{6}$$

gdzie $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}$ oznacza granicę górną.

Twierdzenie 1. Układ dyskretny (1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy [4]:

$$\underset{x_0}{\forall} \quad \lambda_d(x_0) < 1\,. \tag{7}$$

Definicja 3. Wykładnikiem Lapunowa dla układów ciągłych nazywamy wartość

$$\lambda_c(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)|. \tag{8}$$

Twierdzenie 2. Układ ciągły (2) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy [4]:

$$\forall_{x_0} \quad \lambda_c(x_0) < 0. \tag{9}$$

2. Liniowy układ ciągły — przypadek jednowymiarowy

Rozpatrzmy przypadek skalarny równania (2), gdzie układ opisany jest przez:

$$\dot{x}(t) = a_\sigma(t)x(t) \quad \text{dla} \quad t \ge 0 \tag{10}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \neq 0$, w którym funkcja przełączająca $\sigma : [0,\infty) \to \{1,\dots,k\}$ jest lewostronnie ciągła i przedziałami stała. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ oznaczają kolejne punkty nieciągłości funkcji σ, które będziemy nazywać również chwilami przełączeń. Wówczas na każdym z przedziałów $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ funkcja σ jest stała i przyjmuje wartość $a_\sigma(\alpha_{i+1}) \in \{a_1, a_2 \dots, a_k\}$, $i = 0,1,\dots$.

Dla ustalonego $t > 0$ oznaczmy przez $n(t_0)$ liczbę elementów zbioru $\{i \in N : \alpha_i \le t\}$, tzn. $n(t_0)$ jest liczbą przełączeń do chwili t_0. Ponadto zbiór $\{t : \sigma(t) = i\}$, dla $i = 1,\dots,k$ jest sumą przedziałów; oznaczmy ich łączną długość przez $\tau_i(t)$. Liczbę $\tau_i(t)$ będziemy nazywać czasem przebywania w stanie i do chwili t.
Dla tych oznaczeń rozwiązanie równania (10) ma postać:

$$x(t, x_0) = e^{\tau_1(t)a_1} \cdot e^{\tau_2(t)a_2} \cdot \ldots \cdot e^{\tau_k(t)a_k} \cdot x_0. \tag{11}$$

Logarytmując obie strony i korzystając z własności logarytmów, otrzymamy:

$$\ln|x(t, x_0)| = \tau_1(t)a_1 + \tau_2(t)a_2 + \ldots + \tau_k(t)a_k + \ln|x_0|. \tag{12}$$

Zatem dzieląc obustronnie przez t i przechodząc do granicy $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \frac{1}{t} \ln|x_0| \right]. \tag{13}$$

Ponieważ

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (f(t) + g(t)) \le \overline{\lim_{t\to\infty}} f(t) + \overline{\lim_{t\to\infty}} g(t), \tag{14}$$

więc

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \frac{1}{t} \ln|x_0| \right] \le \overline{\lim_{t\to\infty}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x_0| \tag{15}$$

i dalej

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|x(t,x_0)| \le \sum_{i=1}^{k}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\tau_i(t)a_i + \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|x_0| = \sum_{i=1}^{k}a_i\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\tau_i(t) + \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|x_0|. \quad (16)$$

Oznaczając przez $\tau_i = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\tau_i(t)$ średni czas przebywania układu w stanie i do chwili t, otrzymujemy:

$$\lambda_c(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|x(t,x_0)| \le \sum_{i=1}^{k}a_i\tau_i. \quad (17)$$

Na mocy twierdzenia 2 oznacza to, że układ (10) jest stabilny, jeżeli zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\tau_i < 0. \quad (18)$$

Ponieważ $\tau_i > 0$, dlatego głównym czynnikiem decydującym o stabilności całego układu jest wartość oraz znak a_i.

3. Liniowy układ dyskretny – przypadek jednowymiarowy

Podobne rozważania jak dla układów ciągłych można przeprowadzić dla układów dyskretnych. Rozważmy przypadek skalarny równania (1), gdzie działanie układu opisane jest przez:

$$x(n+1) = a_\sigma(n)x(n) \quad \text{dla} \quad n \ge 0 \quad (19)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \ne 0$, w którym $a_\sigma : N \to \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_i \in R$. Oznaczmy liczbę elementów zbioru przez $l_i(n) = \{k \le n : a_\sigma(n) = i\}$ - jest to liczba wystąpień danego stanu w układzie; będziemy ją nazywać czasem przebywania w stanie a_i do chwili n. Dla tych oznaczeń rozwiązanie równania (19) ma postać:

$$x(n,x_0) = a_1^{l_1(n)} \cdot a_2^{l_2(n)} \cdot \ldots \cdot a_k^{l_k(n)} \cdot x_0. \quad (20)$$

Zatem pierwiastkując i przechodząc do granicy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|x(n,x_0)|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_{i=1}^{k} a_i^{l_i(n)}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}|x_0|^{\frac{1}{n}}. \quad (21)$$

Oznaczmy przez $l_i = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}l_i(n)$ średni czas przebywania układu w stanie i do chwili n; wówczas

$$\lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}|x(n,x_0)|^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{k}|a_i|^{l_i}. \quad (22)$$

Zatem na mocy twierdzenia 1 układ (19) jest stabilny, jeżeli zachodzi:

$$\prod_{i=1}^{k}|a_i|^{l_i} < 1. \quad (23)$$

4. Stabilność układów dyskretnych wielowymiarowych

Dany jest wielowymiarowy układ dyskretny postaci:

$$y(n+1) = A_\sigma(n) y(n) \quad \text{dla} \quad n \geq 0 \tag{24}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0 \neq 0$ oraz dowolna norma macierzowa $\|\cdot\|$ mająca własność:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \tag{25}$$

Rozwiązanie $y(n, y_0)$ równania (24) wyrażone jest:

$$y(n, y_0) = A_\sigma(n) \cdot A_\sigma(n-1) \cdot \ldots \cdot A_\sigma(0) \cdot y_0. \tag{26}$$

Stosując (25), otrzymamy:

$$\|y(n, y_0)\| \leq \|A_\sigma(n)\| \cdot \|A_\sigma(n-1)\| \cdot \ldots \cdot \|A_\sigma(0)\| \cdot \|y_0\|. \tag{27}$$

Wówczas z (27) i (23) dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Układ dyskretny (24) jest stabilny, jeżeli:

$$\|A_1\|^{l_1} \cdot \|A_2\|^{l_2} \cdot \ldots \cdot \|A_k\|^{l_k} < 1, \tag{28}$$

gdzie: wykładniki l_i, $i = 1,2,\ldots,k$ są analogiczne do wykładników z układów dyskretnych jednowymiarowych (19).

Analogiczne twierdzenie można podać dla układów ciągłych.

5. Stabilność układów ciągłych wielowymiarowych

Dany jest wielowymiarowy układ ciągły postaci:

$$\dot{y}(t) = A_\sigma(t) y(t) \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{29}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0 \neq 0$ oraz dowolna norma macierzowa $\|\cdot\|$ mająca własność (25). Rozwiązanie $y(t, y_0)$ równania (29) wyrażone jest:

$$y(t, y_0) = \left[e^{A_\sigma(t_k)(t-t_k)} e^{A_\sigma(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})} \cdot \ldots \cdot e^{A_\sigma(0)(t_1)}\right] y_0. \tag{30}$$

Stosując (25), otrzymamy:

$$\|y(t, y_0)\| \leq \left\|e^{A_\sigma(t_k)(t-t_k)}\right\| \cdot \left\|e^{A_\sigma(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}\right\| \cdot \ldots \cdot \left\|e^{A_\sigma(0)(t_1)}\right\| \cdot \|y_0\|. \tag{31}$$

Wówczas z (31) i (18) dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Układ ciągły (29) jest stabilny, jeżeli:

$$\|A_1 \tau_1\| + \|A_2 \tau_2\| + \ldots + \|A_k \tau_k\| < 0, \tag{32}$$

gdzie: czasy τ_i, $i = 1,2,\ldots,k$ są analogiczne do czasów z układów ciągłych jednowymiarowych (10).

6. Przykład

Załóżmy, że układ ciągły opisany równaniem (10) przełącza się między dwoma stanami $\sigma = \{a_1, a_2\}$, przy czym odpowiednio średnie czasy przebywania w każdym ze stanów wynoszą τ_1, τ_2. Rozwiązanie równania ma postać $x(t, x_0) = e^{a_1\tau_1(t)} \cdot e^{a_2\tau_2(t)} \cdot x_0$. Przykładowe wyniki działania układu przełączającego się między dodatnimi (D) i ujemnymi (U) współczynnikami dla różnych średnich czasów przedstawia tabela 1. Podstawiając do warunku na stabilność (18), otrzymujemy:

$$\sum_{l=1}^{k} a_l \tau_l = a_1\tau_1 + a_2\tau_2 . \tag{33}$$

O stabilności (s) lub też niestabilności (n) układu decyduje znak oraz wartość stanu, w którym układ działa, oraz czas przebywania w tym stanie.

Rozpatrzmy teraz układ dyskretny opisany równaniem (19), który przełącza się między dwoma stanami $\sigma = \{a_1, a_2\}$, przy czym odpowiednio średnie czasy przebywania w każdym ze stanów wynoszą l_1, l_2. Rozwiązanie równania ma postać

Tabela 1

Wyniki działania układu ciągłego o zmiennych skokowo współczynnikach

a_1	Czy a_1 stabilne	a_2	Czy a_2 stabilne	τ_1	τ_2	Czy spełnione $a_1\tau_1 + a_2\tau_2 < 0$		Stabilność układu
–2	U	–2	U	1	2	–6/3	tak	s
–	U	–	U	–	–	–		n
–1	U	7	D	10	4	18/14	nie	n
–2	U	1	D	10	4	–16/14	tak	s
–2	U	1	D	4	10	2/14	nie	n
7	D	–1	U	4	10	18/14	nie	n
2	D	–1	U	4	10	–2/14	tak	s
2	D	–1	U	10	4	16/14	nie	n
–	D	–	D	–	–	–		s
2	D	3	D	1	2	8/3	nie	n

$x(n, x_0) = a_1^{l_1(n)} \cdot a_2^{l_2(n)} \cdot x_0$. Przykładowe wyniki działania układu przełączającego się między mniejszymi (M) i większymi (W) od jedności współczynnikami dla różnych średnich czasów przedstawia tabela 2. Podstawiając do warunku na stabilność (23), otrzymujemy:

$$\prod_{l=1}^{k} |a_l|^{l_l} = |a_1|^{l_1} \cdot |a_2|^{l_2} . \tag{34}$$

Przykład pokazuje, że jak dla układów ciągłych, dla układów dyskretnych o stabilności (s) lub też niestabilności (n) całego układu decyduje wartość iloczynu poszczególnych współczynników stanów oraz liczba wystąpień w każdym z nich.

Tabela 2

Wyniki działania układu dyskretnego o zmiennych skokowo współczynnikach

a_1	Czy $\|a_1\|$ stabilne	a_2	Czy $\|a_2\|$ stabilne	l_1	l_2	Czy spełnione $\|a_1\|^{l_1} \cdot \|a_2\|^{l_2} < 1$		Stabilność układu
–1/2	M	–1/3	M	2	1	1/12	tak	s
–	M	–	M	–	–	–	–	n
–1/2	M	6	W	2	1	6/4	nie	n
1/2	M	2	W	2	1	2/4	tak	s
1/2	M	2	W	1	2	4/2	nie	n
6	W	–1/2	M	1	2	6/4	nie	n
2	W	1/2	M	1	2	2/4	tak	s
2	W	1/2	M	2	1	4/2	nie	n
–	W	–	W	–	–	–	–	s
2	W	3	W	1	2	18	nie	n

7. Podsumowanie

Wyprowadzone warunki stabilności dla rozpatrywanych układów o zmiennych skokowo parametrach są bardziej złożone niż w przypadku układów stacjonarnych. Dla układu ciągłego (dyskretnego) jednowymiarowego tabela 1 (tabela 2) przedstawiająca wyniki składa się jedynie z dwóch stanów, między którymi następuje przełączanie. Widać, że już dla tak prostego przypadku w zależności od stabilności czy niestabilności podukładów wyznaczenie stabilności układu z przełączeniami jest zadaniem trudnym i złożonym. Dla przypadku jednowymiarowego powiększanie jedynie liczby stanów przełączeń znacznie komplikuje i zwiększa nakłady obliczeniowe, liczba rozpatrywanych przypadków znacznie rośnie. Zarówno dla układów ciągłych, jak i dyskretnych w tabelach 1, 2 kolorem szarym wyróżnione zostały wiersze przedstawiające przypadki, które w układach skalarnych nie wystąpią, natomiast w układach wielowymiarowych, gdzie stany opisane są przez macierze, zaznaczone przypadki są jak najbardziej możliwe do osiągnięcia. Dodatkowo w oparciu o warunki stabilności układu 1-wymiarowego dyskretnego i ciągłego zaproponowano warunki stabilności dla układów wielowymiarowych.

BIBLIOGRAFIA

1. Demidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności. WNT, Warszawa 1972.
2. Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: Podstawy teorii sterowania. WNT, Warszawa 2005.

3. Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, wydanie 3, Warszawa 1999.

4. Lapunov A.M.: Stability of motion. Academic Press, New York and London 1966.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

Abstract

Stability and stability conditions are one of the most important problem in a system projecting process. For stationary systems stability conditions are well known. There are many methods described in the literature for such systems that determine conditions for the system stability. For complex systems where state depends on switching signal the stability conditions are not so obvious. In this paper stability problem of discrete and continuous time-varying linear systems is presented. For such systems the stability conditions, using the Lapunov exponent, are proposed. The results are demonstrated by numerical examples.