ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: AUTOMATYKA z. 151 Nr kol. 1797

Mikołaj BUSŁOWICZ
Politechnika Białostocka

PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ I PUNKTOWA DEGENERACJA LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU

Streszczenie. W pracy podano definicje oraz warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji liniowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu, standardowych oraz dodatnich. Rozważania zilustrowano przykładem.

POINTWISE COMPLETENESS AND POINTWISE DEGENERACY OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER

Summary. Definitions and necessary and sufficient conditions for the pointwise completeness and the pointwise degeneracy for discrete-time linear systems of fractional order, standard and positive, have been given. Considerations have been illustrated by example.

1. Wstęp

Układ dynamiczny jest nazywany punktowo zupełnym, jeżeli dowolny zadany stan końcowy tego układu można osiągnąć przy braku sterowań przez odpowiedni dobór warunku początkowego. Układ, który nie jest punktowo zupełny, jest nazywany układem punktowo zdegenerowanym.

Zagadnieniom punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji ciągłych układów z opóźnieniami są poświęcone prace [4, 5, 9, 10].

Problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych układów z opóźnieniami został sformułowany i rozwiązany w pracach [1, 2] dla układów standardowych oraz w pracy [3] dla układów dodatnich.

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji liniowych dyskretnych układów ułamkowego rzędu. Podamy najpierw definicje punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych układów ułamkowych w przypadku ogólnym, a następnie, uwzględniając specyfikę układów dodatnich, sformułujemy definicje dla takich układów oraz podamy odpowiednie warunki. Przy ich formułowaniu wykorzystamy rezultaty prac [7, 8] poświęconych dyskretnym układom dodatnim ułamkowego rzędu.

2. Główny rezultat

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^{n}=\Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_{+}^{n\times m}$, przy czym $\Re_{+}^{n}=\Re_{+}^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_{+}.

Weźmy pod uwagę układ dyskretny ułamkowego rzędu $\alpha\in(0,1)$, opisany jednorodnym równaniem stanu [7, 8]

$$\Delta^{\alpha}x_{i+1}=Ax_i,\ i\in Z_{+},\quad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

gdzie $x_i\in\Re^{n}$ jest wektorem stanu, natomiast

$$\Delta^{\alpha}x_i=x_i+\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}x_{i-j}, \tag{2}$$

jest różnicą ułamkowego rzędu $\alpha\in(0,1)$, przy czym

$$\binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!},\quad j\geq 1. \tag{2a}$$

Uwzględniając (2), równanie (1) napiszemy w postaci

$$x_{i+1}=A_{\alpha}x_i+\sum_{j=1}^{i}c_j(\alpha)x_{i-j},\quad i\in Z_{+}, \tag{3}$$

przy czym

$$A_{\alpha}=A+I\alpha,\quad c_j=c_j(\alpha)=(-1)^{j}\binom{\alpha}{j+1}>0,\quad j=1,2,\ldots. \tag{4}$$

Rozwiązanie równania (3) ma postać [7]

$$x_i=\Phi_i x_0, \tag{5}$$

przy czym macierz fundamentalną Φ_i oblicza się ze wzoru

$$\Phi_{i+1}=(A+I\alpha)\Phi_i+\sum_{j=2}^{i+1}(-1)^{j+1}\binom{\alpha}{j}\Phi_{i-j+1},\quad \Phi_0=I. \tag{6}$$

Uwzględniając wzory (4), otrzymamy

$$\Phi_{i+1}=A_{\alpha}\Phi_i+\sum_{j=1}^{i}c_j\Phi_{i-j},\quad \Phi_0=I. \tag{7}$$

Definicja 1. Układ ułamkowy (3) będziemy nazywać punktowo zupełnym w dyskretnej chwili $i=N\geq 1$, jeżeli dla każdego wektora $x_f\in\Re^{n}$ można tak dobrać warunek początkowy $x_0\in\Re^{n}$, że $x_N=x_f$.

Definicja 2. Układ ułamkowy (3) będziemy nazywać punktowo zdegenerowanym w kierunku v w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \Re^n$, taki że dla wszystkich warunków początkowych $x_0 \in \Re^n$ rozwiązanie równania (3) dla $i = N$ spełnia warunek $v^T x_N = 0$.

Z powyższych definicji i postaci (5) rozwiązania równania (3) wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Układ ułamkowy (3) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, \Phi_N = n. \tag{8}$$

Natomiast jest on punktowo zdegenerowany w chwili $i = N$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (8) nie jest spełniony. W takim przypadku kierunek degeneracji v oblicza się ze wzoru $v^T \Phi_N = 0$.

Rozpatrzymy teraz problemy punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dodatniego układu (3). W pracy [7] wykazano, że układ ułamkowy (3) jest dodatni (tj. $x_i \in \Re_+^n$, $i \in Z_+$, dla dowolnego nieujemnego warunku początkowego $x_0 \in \Re_+^n$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_\alpha = A + I\alpha \in \Re_+^{n \times n}. \tag{9}$$

Uogólniając definicję 1 na dyskretne dodatnie układy ułamkowe, otrzymamy następującą definicję.

Definicja 3. Dodatni układ ułamkowy (3) będziemy nazywać punktowo zupełnym w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, jeżeli dla dowolnego wektora $x_f \in \Re_+^n$ można tak dobrać warunek początkowy $x_0 \in \Re_+^n$, że $x_N = x_f$.

Ze wzoru (5) oraz powyższej definicji wynika, że (8) jest tylko warunkiem koniecznym punktowej zupełności w chwili $i = N$ dodatniego układu (3).

Twierdzenie 2. Dodatni układ ułamkowy (3) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_\alpha = A + I\alpha$ jest nieosobliwą macierzą diagonalną. Jeżeli natomiast macierz $A_\alpha = A + I\alpha$ o nieujemnych elementach jest osobliwą macierzą diagonalną, to układ ułamkowy (3) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 2$.

Dowód. Z równania (5) dla $i = N \geq 1$ mamy $x_0 = (\Phi_N)^{-1} x_N$. Aby uzyskać $x_0 \in \Re_+^n$ przy $x_f \in \Re_+^n$, musi być spełniony warunek $(\Phi_N)^{-1} \in \Re_+^{n \times n}$, który zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy Φ_N jest macierzą monomialną, tzn. w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe [6].

Dla dowodu należy zatem wykazać, że Φ_N przy $N \geq 1$ jest macierzą monomialną wtedy i tylko wtedy, gdy $A_\alpha = A + I\alpha$ też jest macierzą monomialną.

Ze wzoru (7) mamy

$$\Phi_1 = A_\alpha, \quad \Phi_2 = A_\alpha \Phi_1 + c_1 I, \quad \Phi_3 = A_\alpha \Phi_2 + c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_0, \ldots \tag{10}$$

Ze wzorów (10) oraz z faktu, że $c_j > 0$, $\forall j \geq 1$, zaś $A_\alpha \in \Re_+^{n\times n}$, w układach dodatnich wynika, że aby Φ_i była macierzą monomialną dla dowolnego $i \geq 1$, macierz A_α musi być macierzą monomialną. Z kolei ze struktury nieujemnej macierzy $A_\alpha = A + I\alpha$ wynika, że jest ona monomialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwą macierzą diagonalną. Jeżeli natomiast macierz $A_\alpha = A + I\alpha$ jest osobliwą macierzą diagonalną (wtedy $\Phi_1 = A_\alpha$ nie jest macierzą monomialną), to ze wzorów (10) wynika, że Φ_i jest nieosobliwą macierzą diagonalną dla dowolnego $i \geq 2$ i rozpatrywany układ ułamkowy (3) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 2$. ■

Z twierdzenia 2 wynika, że macierz stanu A musi być diagonalna, aby dodatni układ ułamkowy (3) był punktowo zupełny.

Przeciwieństwem punktowej zupełności jest punktowa degeneracja. Dla dodatniego układu ułamkowego (3) definicję punktowej degeneracji sformułujemy w sposób podany poniżej.

Definicja 4. Dodatni układ ułamkowy (3) będziemy nazywać punktowo zdegenerowanym, jeżeli istnieje przynajmniej jeden stan $x_f \in \Re_+^n$, który nie może być osiągnięty z dowolnego warunku początkowego $x_0 \in \Re_+^n$, tzn. nie istnieje liczba naturalna N i nieujemny warunek początkowy takie, że $x_N = x_f$.

Z twierdzenia 1 wynika, że prosty warunek dostateczny punktowej degeneracji ma postać rząd $\Phi_N < n$.

Warunek konieczny i wystarczający punktowej degeneracji, wynikający z powyższych rozważań i twierdzenia 2, jest następujący.

Twierdzenie 3. Dodatni układ ułamkowy (3) jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ_N nie jest macierzą monomialną.

3. Przykład

Należy zbadać punktową zupełność układu (3) ułamkowego rzędu $0 < \alpha < 1$, rozpatrywanego w pracy [8], o macierzy stanu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Obliczając współczynniki c_j ze wzoru (4) oraz macierze Φ_i ze wzoru (7), otrzymamy odpowiednio

$$c_1 = \alpha(1-\alpha)/2, \quad c_2 = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)/6, \ldots$$

$$\Phi_1 = A_\alpha = A + I\alpha = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = A_\alpha \Phi_1 + c_1 \Phi_0 = \begin{bmatrix} (1+\alpha)^2 + c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = A_\alpha \Phi_2 + c_1\Phi_1 + c_2\Phi_0 = \begin{bmatrix} [(1+\alpha)^2 + c_1](1+\alpha) + c_1(1+\alpha) + c_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \ldots$$

Rozpatrywany układ jest dodatni, bowiem $A_\alpha \in \Re_+^{2\times 2}$. Ponadto, macierze Φ_i są nieosobliwymi diagonalnymi macierzami o nieujemnych elementach dla $i \geq 2$.

Z powyższego, wzoru (7) oraz twierdzeń 2 i 3 wynika, że analizowany układ ułamkowy:

- nie jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N = 1$, bowiem macierz Φ_1 jest osobliwa. W takim przypadku układ jest punktowo zdegenerowany w kierunku $v = [0, 1]^T$ dla $i = N = 1$,
- jest punktowo zupełny dla chwili $i = N \geq 2$, bowiem Φ_i jest nieosobliwą macierzą diagonalną dla każdego $i = N \geq 2$.

Oznacza to, że w rozpatrywanym układzie ułamkowym możliwe jest osiągnięcie dowolnego zadanego nieujemnego stanu końcowego $x_N = x_f$ z nieujemnego warunku początkowego $x_0 = (\Phi_N)^{-1} x_N$ tylko wtedy, gdy $N \geq 2$.

Przyjmując np. $\alpha = 0.5$, z powyższych wzorów otrzymamy $c_1 = 0.125$ oraz

$$\Phi_1 = A_\alpha = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = A_\alpha \Phi_1 + c_1\Phi_0 = \begin{bmatrix} 2.375 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}.$$

Dowolny nieujemny stan końcowy $x_f = [x_{f1} \ x_{f2}]^T$ można osiągnąć najwcześniej w chwili $i = N = 2$, wychodząc z warunku początkowego

$$x_0 = (\Phi_2)^{-1} x_f = \begin{bmatrix} 0.4211 & 0 \\ 0 & 8.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4211 x_{f1} \\ 8 x_{f2} \end{bmatrix}.$$

4. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji liniowych dyskretnych układów ułamkowych, opisanych równaniem stanu (1), które może być zapisane w postaci (3).

Najpierw sformułowano podstawowe definicje (definicje 1 i 2) oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji standardowego (tj. 'niedodatniego') układu ułamkowego (3) (twierdzenie 1). Następnie podano definicje (definicje 3 i 4) oraz warunki punktowej zupełności (twierdzenie 2) oraz punktowej degeneracji (twierdzenie 3) dodatnich układów ułamkowych opisanych równaniem stanu (3).

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M.: Cotrollability of linear discrete-delay systems. Proc. Intern. Conf. Functional Differential Systems and Related Topics, Błażejewko, 1981, p.47-51.
2. Busłowicz M.: O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektrotechnika nr 1, 1983, s. 17-29.
3. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W.: Punktowa zupełność i punktowa degeneracja dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami. Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, seria Automatyka, z. 145, 2006, s. 51-56.
4. Choundhury A. K.: Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems. Int. J. Control, vol. 16, no. 6, 1972, p. 1083-1100.
5. Olbrot A.: On degeneracy and related problems for linear constant time-lag systems. Ricerche di Automatica, vol. 3, no. 3, 1972, p. 203-220.
6. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London 2002.
7. Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems. Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, no. 4, 2007.
8. Kaczorek T.: Minimum energy control problem of positive fractional discrete-time systems. Proc. 22nd European Conference on Modelling and Simulation, Nikosia, Cypr 2008 (in press).
9. Popov V. M.: Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations. J. Diff. Equation, vol. 11, 1972, p. 541-561.
10. Weiss L.: Controllability for various linear and nonlinear systems models. Lecture Notes in mMathematics, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer Verlag 1970, p. 250-262.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Abstract

The paper considers the problem of pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear discrete-time systems of fractional order, described by the homogeneous equation (1), which can be written in the form (3). First, the definitions of the pointwise completeness and pointwise degeneracy of the standard (i.e. non-positive) fractional systems have been introduced (Definitions 1 and 2) and necessary and sufficient conditions have been proposed in Theorem 1. Next, the definitions (Definitions 3 and 4) and necessary and sufficient conditions of the pointwise completeness (Theorem 2) and pointwise degeneracy (Theorem 3) of the positive fractional systems have been given.