ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: AUTOMATYKA z. 151 Nr kol. 1797

Mikołaj BUSŁOWICZ
Politechnika Białostocka

PRAKTYCZNA ODPORNA STABILNOŚĆ DODATNICH UŁAMKOWYCH SKALARNYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie. Podano proste warunki konieczne i wystarczające praktycznej odpornej stabilności liniowych dodatnich skalarnych układów dyskretnych ułamkowego rzędu.

PRACTICAL ROBUST STABILITY OF POSITIVE FRACTIONAL SCALAR DISCRETE-TIME SYSTEMS

Summary. Simple necessary and sufficient conditions for the practical robust stability of scalar positive discrete-time linear systems of fractional order have been given.

1. Wstęp

Układy dynamiczne ułamkowego rzędu są tematem wielu publikacji od kilkunastu lat, patrz np. prace [2, 3, 4] oraz cytowana tam literatura. Są one w zdecydowanej większości poświęcone układom 'niedodatnim'.

Problematyka analizy i syntezy dodatnich układów ułamkowych jest w ostatnich latach intensywnie rozwijana przez Prof. T. Kaczorka. Wykaz prac z tego zakresu można znaleźć w spisie literatury podanym w [2].

Problem badania stabilności układów ułamkowych jest równoważny z problemem badania stabilności odpowiadających im układów dyskretnych naturalnego rzędu z nieskończoną liczbą rosnących opóźnień [2, 4]. W równaniach stanu takich układów macierze występujące przy opóźnionych wartościach wektora stanu są macierzami diagonalnymi o elementach szybko malejących wraz ze wzrostem wielkości opóźnień. Z tego powodu w pracy [2] w przypadku dyskretnych układów dodatnich zaproponowano rozpatrywanie równoważnego układu dodatniego ze skończoną liczbą opóźnień, wprowadzono pojęcie praktycznej stabilności oraz podano odpowiednie kryteria.

Celem niniejszej pracy jest podanie prostego warunku koniecznego i wystarczającego odpornej praktycznej stabilności liniowych dodatnich skalarnych układów dyskretnych ułamkowego rzędu. Problem badania odpornej stabilności dyskretnych dodatnich układów ułamkowych nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze.

2. Sformułowanie problemu

W pracy będziemy korzystać z poniższej definicji różnicy ułamkowego rzędu α:

$$\Delta^{\alpha} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 \text{ dla } j = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \text{ dla } j > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Weźmy pod uwagę dodatni skalarny układ dyskretny ułamkowego rzędu o niepewnych parametrach, opisany jednorodnym równaniem stanu

$$\Delta^{\alpha} x_{i+1} = a(q)x_i + bu_i, \quad i \in Z_+ \text{ (zbiór liczb całkowitych nieujemnych)}, \tag{3}$$

gdzie zmienna stanu $x_i \in \Re$ (zbiór liczb rzeczywistych), zmienna sterująca $u_i \in \Re$, $b \in \Re$, zaś $q = [q_1, q_2, ..., q_m]$ jest wektorem niepewnych parametrów, przy czym

$$Q = \{q: q_r \in [q_r^-, q_r^+], q_r^- \le 0, q_r^+ \ge 0, r = 1,2,...,m\} \tag{4}$$

jest zbiorem wartości tych parametrów. Nie zmniejszając ogólności rozważań, będziemy przyjmować, że $a(q)$ jest rzeczywistą ciągłą funkcją niepewnych parametrów.

Uwzględniając (1), równanie (3) po przekształceniach napiszemy w postaci

$$x_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} c_j(\alpha) x_{i-j} = a_{\alpha}(q)x_i + bu_i, \quad i \in Z_+. \tag{5}$$

$$a_{\alpha}(q) = a(q) + \alpha, \quad c_j(\alpha) = (-1)^j \binom{\alpha}{j+1}, \quad j = 1,2,.... \tag{6}$$

Uogólniając rezultaty pracy [2], dla układu ułamkowego (5) otrzymamy, że jest on dodatni (tj. $x_i \ge 0$, $i \in Z_+$, dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych i dowolnych nieujemnych sterowań u_i) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{\alpha}(q) = a(q) + \alpha > 0 \text{ dla każdego } q \in Q, \ b > 0. \tag{7}$$

Z drugiego wzoru (6) wynika, że przy $0 < \alpha \le 1$ wartości współczynników $c_j(\alpha)$ są dodatnie i szybko zanikają do zera przy rosnących wartościach $j = 1,2,...$. Dlatego też możemy przyjąć, że w równaniu (5) wartości j są ograniczone przez pewną liczbę naturalną h, którą w pracy [4] nazwano długością implementacji. W takiej sytuacji równanie (5) można napisać w postaci skalarnego równania z opóźnieniami o niepewnych parametrach

$$x_{i+1} = a_\alpha(q)x_i + \sum_{j=1}^{h} c_j(\alpha)x_{i-j} + bu_i, \quad i \in Z_+. \tag{8}$$

Uogólniając rezultaty pracy [2] na klasę rozpatrywanych układów ułamkowych o niepewnych parametrach, otrzymamy poniższą definicję oraz twierdzenie.

Definicja 1. Dodatni układ ułamkowy (5) nazywać będziemy odpornie praktycznie stabilnym, jeżeli dodatni układ (8) z opóźnieniami jest odpornie stabilny.

Twierdzenie 1. Dodatni układ ułamkowy (5) jest odpornie praktycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(z,q) = z^{h+1} - a_\alpha(q)z^h - \sum_{j=1}^{h} c_j(\alpha)z^{h-j} \neq 0, \ |z| \geq 1, \ \forall q \in Q. \tag{9}$$

Celem pracy jest podanie prostych warunków koniecznych i wystarczających odpornej praktycznej stabilności dodatniego ułamkowego skalarnego układu (5). Wykorzystamy przy tym rezultaty pracy [1], w której podano warunki odpornej stabilności dodatnich skalarnych układów dyskretnych z opóźnieniami.

3. Rozwiązanie problemu

Twierdzenie 2. Dodatni układ (5), przy zadanym $0 < \alpha \leq 1$ oraz zadanej długości implementacji $h \geq 1$, jest praktycznie odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vartheta(q) = \delta_h(\alpha) - a(q) > 0, \ \forall q \in Q, \text{ gdzie } \delta_h(\alpha) = 1 - \alpha - \sum_{k=1}^{h} c_k(\alpha). \tag{10}$$

Dowód. Z pracy [1] wynika, że dodatni układ (8) z opóźnieniami, którego wielomian charakterystyczny ma postać podaną w (9), jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - a_\alpha(q) - \sum_{k=1}^{h} c_k(\alpha) > 0, \ \forall q \in Q$. Uwzględniając ostatni ze wzorów (10) oraz zależność $a_\alpha(q) = a(q) + \alpha$, otrzymamy warunek (10). Dowód wynika zatem z powyższych rozważań i definicji 1. ■

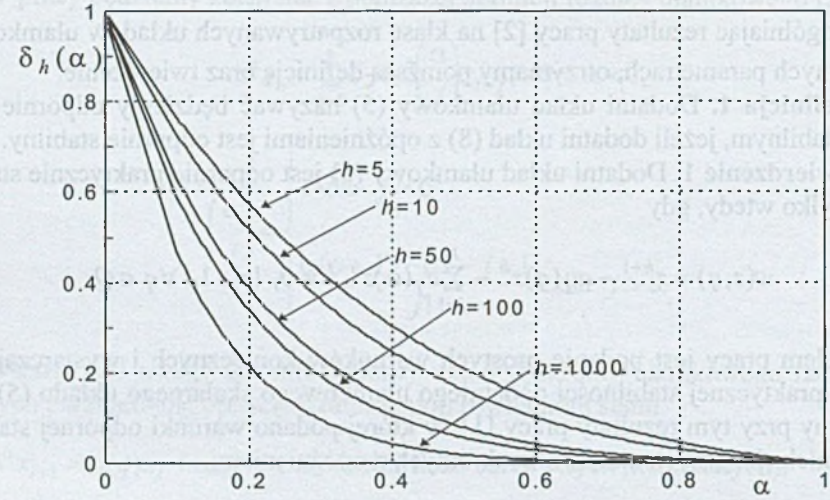
Z twierdzenia 2 wynika bezpośrednio następujący lemat.

Lemat 1. Dodatni ułamkowy układ (5) nie jest odpornie praktycznie stabilny, jeżeli dodatni układ bez opóźnień opisany równaniem stanu $x_{i+1} = a_\alpha(q)x_i, \ q \in Q$, nie jest odpornie stabilny, tj. $a(q) \geq 1 - \alpha$ dla pewnego $q \in Q$.

Z (10) wynika, że wartość $\delta_h(\alpha)$ maleje wraz ze wzrostem wartości współczynnika $\alpha \in (0,1]$ oraz liczby naturalnej h (długości implementacji), przy czym $\delta_h(\alpha) < 1$. Aby układ (5) był dodatni i była spełniona nierówność (10), niezbędne jest spełnienie warunku $-\alpha < a(q) < \delta_h(\alpha), \ \forall q \in Q$.

Wykresy funkcji $\delta_h(\alpha)$ w zależności od wartości parametru $\alpha \in (0,1]$, wyznaczone dla pięciu wartości parametru h, równych odpowiednio $5, 10, 50, 100$ oraz 1000, są pokazane na rysunku 1. Wynika z niego, że największe dopuszczalne (ze względu

na spełnienie warunku (10)) wartości współczynnika $a(q)$, $q \in Q$, odpowiadają małym wartościom parametru α, będącego różnicą ułamkowego rzędu w równaniu (3).



Rys. 1. Wykresy funkcji $\delta_h(\alpha)$ w zależności od parametru $\alpha \in (0,1]$

Aby układ (5) był dodatni, musi być spełniony warunek (7). Oznacza to, że wartości współczynnika $a(q)$ mogą być ujemne. Zauważmy, że jeżeli $a(q) < 0$, $\forall q \in Q$, to warunek (10) jest spełniony dla każdego $h \geq 1$. Słuszny jest więc następujący lemat.

Lemat 2. Jeżeli $a(q) < 0$ dla każdego $q \in Q$, to dodatni układ (5) jest praktycznie odpornie stabilny dla dowolnej długości implementacji $h \geq 1$.

Warunek konieczny i wystarczający (10) praktycznej odpornej stabilności przy zadanych wartościach α i h można sprawdzić bezpośrednio, stosując obliczenia komputerowe z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania służącego do wyznaczania minimum funkcji wielu zmiennych przy ograniczeniach. Przy liniowej lub wieloliniowej zależności $a(q)$ od niepewnych parametrów warunek (10) można sprawdzić znacznie prościej.

W przypadku najprostszym, gdy (3) jest układem przedziałowym, w którym $m = 1$ oraz $a(q) = a = q \in [a^-, a^+]$, przy czym $a^- + \alpha > 0$ zgodnie z (7), z twierdzenia 2 i lematu 2 otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Dodatni skalarny przedziałowy układ ułamkowy

$$x_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} c_j(\alpha) x_{i-j} = (a+\alpha)x_i + bu_i, \quad a \in [a^-, a^+], \ \alpha \in (0,1], \tag{11}$$

jest odpornie praktycznie stabilny przy ustalonej długości implementacji h wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_h(\alpha) - a^+ > 0$. Jeżeli zaś $a^+ \leq 0$, to układ ten jest odpornie praktycznie stabilny dla każdego $h \geq 1$, tj. niezależnie od długości implementacji.

Rozpatrzymy teraz przypadek, w którym $a(q)$ jest liniową lub wieloliniową funkcją niepewnych parametrów $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Zbiór (4) (jest hiperprostopadłościanem w przestrzeni niepewnych parametrów) ma $K = 2^m$ wierzchołków. Oznaczmy przez $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, ..., $\overline{q}_K$, gdzie $\overline{q}_j = [q_1^j, \ldots, q_m^j]$, zaś $q_r^j = q_r^-$ lub $q_r^j = q_r^+$, $r = 1,2,\ldots,m$, wierzchołki zbioru (4). Każdemu wierzchołkowi $\overline{q}_j$ tego zbioru odpowiada wierzchołkowa wartość współczynnika $a(\overline{q}_j)$.

Współczynnik $a(q)$ zależy liniowo lub wieloliniowo od niepewnych parametrów, zatem przy $q \in Q$ osiąga on wartości ekstremalne w jednym z wierzchołków zbioru Q. To zaś oznacza, że rozpatrywany układ jest dodatni (jest spełniony warunek (7)) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_\alpha(\overline{q}_j) = a(\overline{q}_j) + \alpha > 0$, $j = 1,2,\ldots,K$, oraz funkcja $\vartheta(q)$ (pierwszy wzór (10)) osiąga wartość minimalną w jednym z wierzchołków zbioru Q.

Postępując jak w pracy [1], w przypadku odpornej stabilności dodatnich skalarnych dyskretnych układów z opóźnieniami otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4. Jeżeli współczynnik $a(q)$ dodatniego układu (5) zależy liniowo lub wieloliniowo od niepewnych parametrów, to układ ten przy zadanym $0 < \alpha \le 1$ oraz zadanym $h \ge 1$ jest praktycznie odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vartheta_j = \delta_h(\alpha) - a(\overline{q}_j) > 0 \text{ dla } j = 1,2,\ldots,K. \tag{12}$$

Jeżeli zaś $a(\overline{q}_j) \le 0$ dla $j = 1,2,\ldots,K$, to rozpatrywany układ ułamkowy jest odpornie praktycznie stabilny niezależnie od długości implementacji $h \ge 1$.

Spełnienie warunku (12) jest równoważne ze stabilnością dodatnich układów dyskretnych

$$x_{i+1} = a_\alpha(\overline{q}_j)x_i + \sum_{j=1}^{h} c_j(\alpha)x_{i-j} + bu_i, \quad j = 1,2,\ldots,K = 2^m. \tag{13}$$

4. Przykład

Należy zbadać praktyczną odporną stabilność układu (5) ułamkowego rzędu $\alpha = 0.2$ przy $a(q) = -0.1 - 0.2q_1 + 0.1q_1q_2$, $Q = \{q: q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.5, 1.0]\}$.

Zbiór Q ma 4 wierzchołki: $\overline{q}_1 = [q_1^-, q_2^-] = [-0.1, -0.5]$, $\overline{q}_2 = [q_1^-, q_2^+] = [-0.1, 0.5]$, $\overline{q}_3 = [q_1^+, q_2^+] = [0.1, 0.5]$, $\overline{q}_4 = [q_1^+, q_2^-] = [0.1, -0.5]$. Odpowiadają im wierzchołkowe wartości $a(q)$: $a(\overline{q}_1) = -0.075$, $a(\overline{q}_2) = -0.085$, $a(\overline{q}_3) = -0.115$, $a(\overline{q}_4) = -0.125$, przy czym $a_\alpha(\overline{q}_j) = a(\overline{q}_j) + \alpha > 0$, $j = 1,2,\ldots,K = 4$.

Zauważmy, że $a(\overline{q}_j) < 0$, $j = 1,\ldots,4$, co oznacza (zgodnie z twierdzeniem 4), że rozpatrywany układ ułamkowy jest odpornie praktycznie stabilny niezależnie od długości implementacji $h \ge 1$.

5. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem badania odpornej praktycznej stabilności dodatniego skalarnego układu dyskretnego (5) ułamkowego rzędu $\alpha \in (0, 1)$. Podano prosty warunek konieczny i wystarczający odpornej praktycznej stabilności (twierdzenie 2). Pokazano, że jeżeli współczynnik $a(q)$ jest liniową lub wieloliniową funkcją niepewnych parametrów, to praktyczna stabilność ułamkowego układu (5) jest równoważna ze stabilnością $K = 2^m$ ułamkowych układów (13) (twierdzenie 4). Podano też warunki dostateczne, przy spełnieniu których rozpatrywany układ jest odpornie praktycznie stabilny niezależnie od długości implementacji.

Rozważania można rozszerzyć na ogólną klasę dodatnich dyskretnych układów ułamkowych o niepewnych parametrach.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M.: Robust stability of scalar positive discrete-time linear systems with delays, Proc. Int. Conf. on Power Electronics and Intelligent Control, Warszawa 2005, Paper 163 (on CD-ROM).
2. Kaczorek T.: Practical stability of positive fractional discrete-time systems, 2008 (w przygotowaniu).
3. Ostalczyk P.: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów - teoria i zastosowania w automatyce. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej 2007 (w druku).
4. Sierociuk D.: Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu. Rozprawa doktorska, Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.

Recenzent: Prof. dr hab. inż: Jerzy Klamka

Abstract

The paper considers the practical robust stability problem of scalar positive discrete-time system (5) of fractional order $0 < \alpha < 1$. Simple necessary and sufficient condition for practical robust stability has been established (Theorem 2). It has been shown that if the coefficient $a(q)$ is linear or multilinear function of uncertain parameters then practical robust stability of the fractional system (5) is equivalent to stability of $K = 2^m$ fractional systems (13) (Theorem 4). Moreover, sufficient conditions for robust practical stability independent of length of the implementation have been given.

Considerations can be extended for the general class of positive fractional discrete-time systems with uncertain parameters.