ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2008
Seria: AUTOMATYKA z. 151 Nr kol. 1797

Adam CZORNIK
Politechnika Śląska

DYNAMIKA UKŁADÓW HYBRYDOWYCH

Streszczenie. Badanie dynamiki układów hybrydowych jest źródłem wielu interesujących i trudnych problemów matematycznych. Celem tej pracy jest zreferowanie postępów w badaniach własności dynamiki układów hybrydowych ze szczególnym uwzględnieniem problemu stabilności. Z problemem stabilności ściśle związane są problemy eksponencjalnego wzrostu i twierdzenia odwrotne do twierdzenia Lapunowa. Oba te zagadnienia zostaną zreferowane. W pracy zostanie zasygnalizowanych również kilka otwartych problemów.

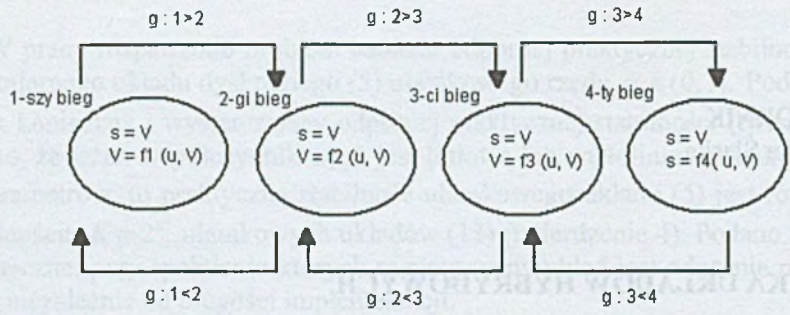
HYBRID SYSTEMS DYNAMICS

Summary. The study of the hybrid systems dynamics gives rise to a number of interesting and challenging mathematical problems. The objective of this paper is to review progress made in research of hybrid systems dynamics. We concentrate our attention on stability. Closely related to the concept of stability are the notations of exponential growth and converse Lyapunov theorems, both of which are discussed. We also point out some problems that remain open.

1. Wprowadzenie

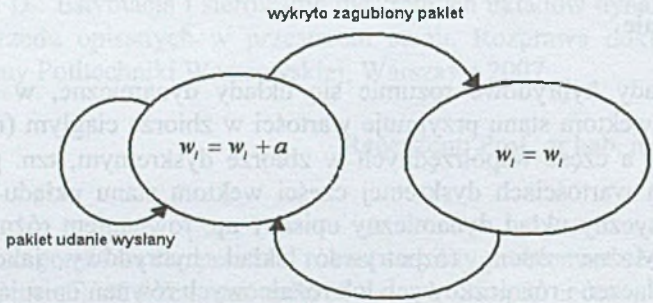
Przez układy hybrydowe rozumie się układy dynamiczne, w których część współrzędnych wektora stanu przyjmuje wartości w zbiorze ciągłym (np. podzbiorze przestrzeni R^n), a część współrzędnych w zbiorze dyskretnym, tzn. przeliczalnym. Przy ustalonych wartościach dyskretnej części wektora stanu układu hybrydowego otrzymamy klasyczny układ dynamiczny opisany np. równaniem różniczkowym lub różnicowym. Można zatem rozpatrywać układ hybrydowy jako kombinację logicznych przełączeń i różniczkowych lub różnicowych równań opisujących ewolucję ciągłej części wektora stanu. Poniższe przykłady pokazują, że z takim układami możemy się spotkać w wielu praktycznych zastosowaniach.

Przykład 1 ([1] Samochód z ręczną skrzynią biegów)
Prędkość samochodu (v) poruszającego się po ustalonej trajektorii zależy od dwóch zmiennych - ciągłej: kąta otwarcia przepustnicy (u) i dyskretnej: numer wrzuconego biegu (g). Przy każdym wrzuconym biegu dynamika części ciągłej (v) opisana jest odpowiednim równaniem różniczkowym. Dynamika samochodu może być zatem uznana za dynamikę natury hybrydowej.



Rys. 1. Model hybrydowy samochodu z manualną skrzynią biegów

Przykład 2 ([2] - model protokołu TCP)
Protokół transmisji kontroli TCP został opracowany w celu kontroli przepływu danych w sieci. Przesyłane dane dzielone są na pakiety i wysyłane w takiej postaci ze źródeł do celów. Aby zapewnić prawidłowy przepływ pełnowartościowych danych, cel, do którego trafia pakiet danych, informuje o tym źródło, z którego te dane pochodzą. Informacje te wykorzystywane są przez i–te źródło do sprawdzania liczby niedostarczonych pakietów ($w(i)$) wysłanych przez źródło i. Po otrzymaniu potwierdzenia otrzymania informacji zmienna $w(i)$ jest uaktualniana zgodnie z regułą: ($w(i) \leftarrow w(i) + a$), gdzie a jest liczbą nowych pakietów wysłanych przez źródło. Dodatkowo protokół TCP pozwala na to, by z informacji o utraconych pakietach wyciągnąć wniosek o ewentualnej konieczności redukcji liczby pakietów przeznaczonych do wysłania. Dzieje się to według zasady $w(i) \leftarrow w(i)\ \beta$, gdzie $\beta \in (0,1)$.



Rys. 2. Model hybrydowy protokołu TCP

Inne przykłady układów biologicznych modelowanych za pomocą układów hybrydowych można znaleźć w [3] i [4]. Z powyższych przykładów wynika, że układy hybrydowe są wygodnym sposobem opisu szerokiej klasy złożonych systemów dynamicznych. Mimo że budowa modelu układu hybrydowego jest na ogół zadaniem stosunkowo prostym, to jego analiza jest już daleka od prostoty. Podczas analizy układów hybrydowych powstaje wiele ciekawych i trudnych problemów matematycznych, które w większości pozostały do dziś nierozwiązane. Wiele z nich

związanych jest z dynamiką, a w szczególności ze stabilnością takich modeli. Część z nich będzie opisana w pracy.

2. Modele matematyczne i podstawowe definicje

W dalszej części pracy skupimy się na układach hybrydowych modelowanych za pomocą równań

$$U: \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) \qquad A(t) \in \Lambda = \{A_1, ..., A_m\}, \tag{1}$$

gdzie: Λ jest zbiorem macierzy wymiaru n na n, $A:[0,\infty) \to \Lambda$ jest funkcją przedziałami stałą. Dla ustalonej funkcji A oznaczmy przez $\sigma:[0,\infty) \to \{1,...,m\}$ taką funkcję, że $A(t) = A_{\sigma(t)}$ dla wszystkich $t \geq 0$. Funkcję σ nazywać będziemy funkcją przełączającą, a punkty nieciągłości A chwilami przełączeń. Oznaczmy przez S zbiór wszystkich funkcji przełączających. Dla ustalonego $1 \leq i \leq m$ rozważać będziemy układ stacjonarny

$$U_i: \quad \dot{x}(t) = A_i x(t). \tag{2}$$

Przez rozwiązanie układu (1) będziemy rozumieli każdą absolutnie ciągłą funkcję $x:[0,\infty) \to R^n$, dla której istnieje funkcja przełączająca $\sigma \in S$ taka, że

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \tag{3}$$

dla wszystkich t, z wyjątkiem chwil przełączeń. Rozwiązanie takie nazywać będziemy również trajektorią U.

Definicja 1. Układ U nazywamy absolutnie stabilnym, jeżeli istnieją stałe $M > 1$ i $\beta > 0$ takie, że

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\beta t}\|x(0)\|$$

dla wszystkich $t \geq 0$ i wszystkich rozwiązań U. Układ U nazywamy selektywnie stabilnym, jeżeli istnieją stałe $M > 1$ i $\beta > 0$ oraz funkcja $\sigma_0 \in S$ takie, że dla odpowiadającego σ_0 rozwiązania mamy

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\beta t}\|x(0)\|$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Funkcję σ_0 nazywamy wówczas stabilizującą strategią przełączeń.

Jest jasne, że warunkiem koniecznym absolutnej stabilności jest, aby każda macierz A_i, $i=1,...,m$ była macierzą Hurwitza, tzn. macierzą o wartościach własnych o ujemnej części rzeczywistej. Znane są jednak przykłady (np. [5]) układów U, które nie są absolutnie stabilne, pomimo że każdy z układów U_i jest asymptotycznie stabilny. Podobnie warunkiem wystarczającym selektywnej stabilności jest, aby co najmniej jedna z macierzy A_i, $i=1,...,m$ była macierzą Hurwitza, ale nie jest to warunek konieczny [6]. Absolutna stabilność stosowana jest do układów, w których nie mamy wpływu na funkcję przełączającą, np. opisuje ona występujące w układzie awarie. Natomiast selektywna stabilność odpowiada sytuacji, w której mamy wpływ na funkcję przełączającą, np. przez zmiany nastaw regulatora.

3. Selektywna stabilność

W tej części pracy przedstawimy kryterium selektywnej stabilności i metody konstrukcji stabilizującej strategii przełączeń dla przypadku, gdy żaden z układów U_i nie jest asymptotycznie stabilny. Ściśle związane z problemem selektywnej stabilności są problemy osiągalności [7], sterowania optymalnego przez wybór funkcji przełączającej [7], obserwowalność [8], nadążania [9]. Warunki wystarczające selektywnej stabilności podaje następujące twierdzenie zaczerpnięte z [6].

TWIERDZENIE 1. Jeżeli dla pewnych stałych dodatnich $\alpha_i, i=1,...,m$ takich, że $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$, macierz $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i$ jest macierzą Hurwitza, a macierze $A_i, i=1,...,m$ nie są macierzami Hurwitza, to układ U jest selektywnie stabilny.

Analizując dowód tego twierdzenia, można wzmocnić tezę w dwóch kierunkach. Po pierwsze, stabilizująca strategia przełączeń ma postać sprzężenia zwrotnego, po drugie, stabilność układu (3) odpowiadającego stabilizującej strategii przełączeń może być zweryfikowana za pomocą kwadratowej funkcji Lapunowa. Taki typ stabilności nazywany jest w literaturze kwadratową stabilnością (ang. *quadratic stable*). Ponadto w pracy [6] pokazano, że w przypadku $m=2$ warunek z twierdzenia jest również konieczny dla kwadratowej stabilności. Nie wiadomo natomiast, czy warunek ten jest również konieczny w przypadku $m>2$. W literaturze był też rozważany problem selektywnej stabilności, w przypadku gdy zbiór funkcji przełączających jest szerszy niż S. W pracy [10] podano warunki na selektywną stabilność w klasie funkcji mających nieskończenie wiele przełączeń na przedziale ograniczonym. Dla układów dyskretnych selektywna stabilność badana była w pracy [11].

4. Absolutna stabilność

W pracy [12] pokazano, że absolutna stabilność jest równoważna istnieniu wspólnej funkcji Lapunowa dla wszystkich układów U_i. Ta wspólna funkcja Lapunowa jest ściśle wypukła, jednorodna rzędu 2, ale nie musi być funkcją kwadratową. W wielu pracach zajmowano się problemem istnienia wspólnej kwadratowej funkcji Lapunowa (WKFL) dla układu stabilnych macierzy, ale pełnego rozwiązania tego problemu nie znaleziono. Znane są tylko częściowe wyniki, np. przy założeniu specjalnej struktury macierzy. Jeżeli wszystkie macierze A_i są górnotrójkątne i stabilne, to - jak pokazano w [13] - istnieje dla nich WKFL, w której macierz jest diagonalna. Daleko idącym uogólnieniem tego faktu jest następujące twierdzenie podające warunki na istnienie WKFL w języku algebry Liego $g = \{I, A_1,..., A_m\}_{LA}$ generowanej przez macierze $A_1,..., A_m, I$.

TWIERDZENIE 2 [14]. Jeżeli $A_1,..., A_m$ są macierzami Hurwitza, a $g = t \oplus s$ dekompozycją Lewiego algebry g, w której t jest radykałem, wówczas, jeżeli s jest zwarty, to istnieje WKFL. Ponadto jeżeli t nie jest zwarty, to istnieje zbiór macierzy generujących wraz z I algebrę g, a odpowiadający jemu układ U nie jest absolutnie stabilny.

Dla dwóch układów drugiego rzędu warunki konieczne i wystarczające dla istnienia WKFL podaje następujące twierdzenie zaczerpnięte z [15].

TWIERDZENIE 3. Jeżeli A_1 i A_2 są macierzami Hurwitza wymiaru 2 na 2, wówczas WKFL istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A_1A_2 i $A_1A^{-1}{}_2$ nie mają ujemnych wartości własnych.

W przypadku większej liczby macierzy 2 na 2 nie są znane warunki WKW na istnienie WKFL. W pracy [15] udowodniono, że jeżeli dla układu macierzy wymiaru 2 na 2 istnieje WKFL dla każdych trzech macierzy, to istnieje WKFL dla całego zbioru.

Na zakończenie odnotujmy, że w literaturze poszukiwano również wspólnych funkcji Lapunowa w postaci innej niż kwadratowe, np. przedziałami liniowej [16].

5. Otwarte problemy

Dla problemu selektywnej stabilności twierdzenie 1 dostarcza prostego warunku wystarczającego, nie są jednak znane warunki konieczne i wystarczające poza zreferowanymi w punkcie 3 specjalnymi przypadkami. Również problem absolutnej stabilności jest daleki od kompletnego rozwiązania. Znane warunki wystarczające opierają się na poszukiwaniu wspólnej funkcji Lapunowa w szczególnej postaci, np. kwadratowej lub przedziałami liniowej, ale warunki WKW, kiedy taka funkcja istnieje, nie są również znane. Wiadomo, że jeżeli w układzie U wszystkie podukłady U_i są asymptotycznie stabilne, to układ przełączający pozostanie stabilny, gdy przełączenia będą dostatecznie wolne. Prowadzi to do problemu oszacowania takiego czasu nazywanego w literaturze *dwell time*. Znane są w literaturze jedynie bardzo zgrubne oszacowania tej wielkości, np. [17].

BIBLIOGRAFIA

1. Johansson K. H., Lygeròs J. i Sastry S.: Modeling hybrid systems, in H. Unbehauen, Ed., Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), 2004.
2. Hespanha J.: Stochastic Hybrid Systems: Application to Communication Networks (Extended Version). Technical Report, Dept. of Electrical and Computer Eng., University of California, Jan. 2004.
3. de Jong H., Geiselmann J., Batt G., Hernandez C. and Page M.: Qualitative simulation of the initiation of sporulation in Bacillus Subtilis, Bulletin of Mathematical Biology, 66 (2004), p. 261-299.
4. de Jong H., Hernandez C., Page M., Sari T. and Geiselmann J.: Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models, Bulletin of Mathematical Biology, 66 (2004), p. 301-340.
5. Chase C., Serrano J., and Ramadge P.: Periodicity and chaos from switched on systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 38 (1993), p. 70-83.
6. Feron E.: Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback, Tech. Report CIS-P-468, Center for Intelligent Control Systems, MIT, 1996.
7. Leoparo K. A., Aslanis J. T. i Hajek O.: Analysis of switching linear systems in the plane, J. Optim. Theory Appl., vol. 52, p. 395-427,1987

8. Liu Y.: Switching observer design for uncertain nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 42, p. 1699-1703, 1997.
9. Jirstrand M.: On switched polynomial systems and exact output tracing, Tech. Report LiTH-ISY-R-2044, Linkoping University, Sweden, 2004.
10. Wicks M. A., Peleties P., and DeCarlo R.: Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilising switched systems, in Proc. 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, 1994, p. 3492-3497.
11. Czornik A.: On the generalized spectral subradius, Linear Algebra and its Applications 407: 242-248 SEP 15 2005
12. Molczanov A. P., Pyatnistskiy E. S.: Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, Systems & Control Letters, 13 (1989), p. 59-64.
13. Shorten R. N., Narendra K. S.: On the stability and existence of common Lyapunov functions for linear stable switching systems, in proceedings 37th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, 1998.
14. Agrachev A. A., Liberzon D.: Lie-algebraic stability criteria for switched systems, SIAM Journal of Control and Optimization, 40 (2001), p. 253-269.
15. Shorten R. N., Narendra K. S.: Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 16 (2003), p. 709-728.
16. Polański A.: On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions, Automatica, 36 (2000), p. 573-578.
17. Hespanha J. and Morse S.: Stability of switched systems with average dwell-time, in proceedings of 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, 1999.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

Abstract

This paper starts with some examples of applications of hybrid systems for modeling real phenomenon. Next we reviewed progress made in research of hybrid systems dynamics. We concentrated our attention on selectable stability and absolute stability. Some sufficient/necessary conditions are for each type of stability. These conditions are formulated in terms of Lyapunov functions, Lie algebras and eigenvalues of subsystems. We also discussed briefly the problem called converse Lyapunov theorems. At the end of our paper there are some open problems.