

Ryszard GESSING
Politechnika Śląska

UKŁAD CIĄGŁY RÓWNOWAŻNY UKŁADOWI ZE STEROWANIEM POŚLIZGOWYM

Streszczenie. W pracy pokazuje się, jak utworzyć układ ciągły równoważny układowi ze sterowaniem poślizgowym, przy małej histerezie przełącznika. Układ ten powstaje przez zastąpienie przełącznika odpowiednim elementem z nasyceniem. Ten ostatni może być zrealizowany przez wzmacniacz o dużym wzmocnieniu połączony szeregowo z elementem z nasyceniami sterowania określonymi przez przełączane amplitudy przełącznika. W równoważnym układzie ciągłym efekt szarpania charakterystyczny dla układów ze sterowaniem poślizgowym nie występuje. Zasada konstrukcji obu układów została sformułowana w postaci Podstawowej zasady sterowania.

THE CONTINUOUS SYSTEM EQUIVALENT TO THE SYSTEM WITH SLIDING MODE CONTROL

Summary. It is shown how to create the continuous system equivalent to the system with sliding mode control (under small hysteresis of the relay). The system arises from the replacement of the relay by some appropriate saturation-type nonlinearity. The latter may be implemented by the amplifier with high gain in series connected with saturation, with constraints of the control determined by the switched magnitudes of the relay. In the equivalent continuous systems the chattering effect, related with sliding mode control doesn't exist. The principle of construction of both the systems is formulated in the form of the Basic principle of control.

1. Wprowadzenie

Układy ze sterowaniem poślizgowym są przedmiotem zarówno wyczerpujących opracowań teoretycznych [5, 6], jak i udanych zastosowań (na przykład powszechnie stosowany układ stabilizacji napięcia alternatorów samochodowych). Układy te pracują dobrze zarówno z obiektami liniowymi, jak i obiektami nieliniowymi.

Wiadomo, że układy ze sterowaniem poślizgowym charakteryzują się odpornością na duże i szybkie zmiany parametrów. Jednak z przełączaniem przełącznika związany jest tak zwany efekt szarpania (ang. chattering effect [1]), który czasami może być nieakceptowany przez użytkowników i stwarza trudne warunki pracy dla elementów wykonawczych. Dlatego zmniejszenie efektu szarpania jest interesujące z punktu widzenia zastosowań.

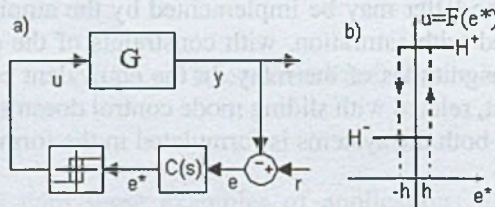
Było wiele prac poświęconych zmniejszeniu efektu szarpania, na przykład przez stosowanie różnych przełączanych amplitud przekaźnika dla różnych wartości uchybu [1]. Inne podejście bazuje na wprowadzeniu tzw. warstw granicznych (ang. boundary layers [5]), w których zależność pomiędzy przekształconym uchybem i sterowaniem jest ciągła. Zauważono, że sterowanie zrealizowane na tej zasadzie aproksymuje sterowanie poślizgowe.

Rozważania niniejszej pracy są związane z tym ostatnim podejściem. Dla przypadku obiektów nieminimalnofazowych, dla których sterowanie poślizgowe może być stosowane, proponuje się układ ciągły o odpowiedniej strukturze i parametrach, który z punktu widzenia przebiegów wyjścia obiektu jest równoważny układowi ze sterowaniem poślizgowym.

W opisanych ciągłych układach sterowania, które są równoważne układowi ze sterowaniem poślizgowym, efekt szarpania nie występuje, chociaż z punktu widzenia wyjścia obiektu oba układy mają takie same własności. Jest to zaleta rozpatrywanych tutaj układów ciągłych. W związku z tym powstaje pytanie, czy stosowanie układów ze sterowaniem poślizgowym jest uzasadnione?

2. Sterowanie poślizgowe

Schemat blokowy układu ze sterowaniem poślizgowym i charakterystyka przekaźnika pokazane są odpowiednio na rysunku 1 a i b. Sygnały u , y , r , $e = r - y$ są odpowiednio wejściem i wyjściem obiektu, wartością zadaną i uchybem regulacji. Mówiąc swobodnie, sterowanie poślizgowe opiera się na szybkim przełączaniu przekaźnika, takim że występujące w sygnale u wyższe harmoniczne są filtrowane przez dynamikę obiektu, a wyjście obiektu y zależy głównie od uśrednionej wartości sterowania u . Szybkie przełączenia występują dzięki wyborowi wielomianu $C(s)$ i przełączanych amplitud przekaźnika H^- i H^+ . Ten wybór zapewnia skokową zmianę pochodnej sygnału e^* w chwili skokowej zmiany sygnału u .



Rys. 1. a) Układ ze sterowaniem poślizgowym; b) charakterystyka przekaźnika

2.1. Przypadek obiektu liniowego

Rozważmy obiekt liniowy G opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (1)$$

gdzie: $Y(s)$ i $U(s)$ są transformatami Laplace'a odpowiednio wyjścia y i wejścia u obiektu, a $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami odpowiednio m -tego i n -tego rzędu, $m < n$; $d = n - m$ jest rzędem względnym transmitancji $G(s)$. Zakładamy, że transmitancja $G(s)$ ma zera minimalnofazowe.

Blok $C(s)$ na rysunku 1a opisany jest następującym wielomianem

$$C(s) = c_0 s^{d-1} + c_1 s^{d-2} + \dots + c_{d-2} s + 1, \quad (2)$$

tak że wynikające stąd równanie

$$e^* = c_0 e^{(d-1)} + c_1 e^{(d-2)} + \dots + c_{d-2} e^{(1)} + e, \quad (3)$$

dla $e^* = 0$ ma stabilne i dostatecznie szybko zanikające przebiegi nieustalone. Może być, na przykład, $C(s) = (Ts + 1)^{d-1}$, z wielokrotnym pierwiastkiem $-1/T$, gdzie $T > 0$ jest możliwie małą stałą czasową, dającą szybkie zanikanie przebiegów nieustalonych.

Zauważmy, że przy dostatecznie wolno zmieniającym się sygnale r (leżącym w odpowiednim przedziale) i przy histerezie przekaźnika $h \rightarrow 0$ występują szybkie przełączenia i mamy $e^* \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$ i $y \rightarrow r$. Ponieważ przekaźnik ma wtedy szybkie przełączenia (nagłe zmiany od H^- do H^+ i odwrotnie), więc przy $h \rightarrow 0$ może być on zastąpiony wzmacniaczem liniowym o wzmocnieniu $k \rightarrow \infty$. Stabilność liniowego układu zamkniętego, wynikającego z takiego rozumowania, może być łatwo przeanalizowana. Rzeczywiście, równanie charakterystyczne układu ma postać:

$$M(s) + kL(s)C(s) = 0 \quad (4)$$

Zauważmy, że jeżeli $k \rightarrow \infty$, wtedy m pierwiastków równania (4) dąży do zer wielomianu $L(s)$, a $d - 1$ pierwiastków – do zer wielomianu $C(s)$. Oznacza to, że rozważany liniowy układ zamknięty z dużym wzmocnieniem k (i analizowany układ ze sterowaniem poślizgowym) może być stabilny tylko wtedy, gdy transmitancja $G(s)$ ma zera nieminimalnofazowe. Jest to proste uzasadnienie sformułowanego wyżej i znanego założenia o nieminimalnofazowych zerach transmitancji $G(s)$. Co więcej, transmitancja $C(s)G(s)$ układu otwartego ma rząd względny równy jeden, zatem rozważany liniowy układ zamknięty może być stabilny nawet dla bardzo dużego k [3]. W zastosowaniach pochodne wyższego rzędu występujące w (3) mogą być realizowane w przybliżeniu przez podstawienie $s \approx s/(1 + s\tau)$. Tutaj $\tau > 0$ oznacza bardzo małą stałą czasową.

Zauważmy, że podczas bardzo szybkiego przełączania przekaźnika przebiegi nieustalone układu ze sterowaniem poślizgowym są opisane równaniem różniczkowym (3) (dla $e^* = 0$) i parametrami c_i , $i = 1, 2, \dots, d - 2$ niezależnymi w pewnym zakresie od parametrów obiektu. Dlatego też układ jest odporny na zmiany (w pewnym zakresie) parametrów obiektu. Wybierając odpowiednio parametry c_i , możemy otrzymać bardzo dobre przebiegi nieustalone.

2.2. Przypadek obiektu nieliniowego

Rozważmy teraz obiekt nieliniowy G z minimalnofazowymi zerami [5] opisany przez następujące równania stanu

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = g(x) \quad (5)$$

gdzie x jest n -wymiarowym stanem, a u i y jest odpowiednio skalarnym wejściem i wyjściem obiektu; odpowiednio funkcja $f(x, u)$ i funkcja $g(x)$ jest wektorową i skalarną funkcją wymienionych argumentów. Również dla takiego obiektu sterowanie poślizgowe może być zrealizowane w układzie przedstawionym na rysunku 1, z tymi samymi wzorami (2), (3) opisującymi wielomian $C(s)$ i zmienną e^* . Różnica w porównaniu do układu z obiektem liniowym polega na wyznaczaniu rzędu względnego d – pojęcia,

które jest również stosowane dla obiektu nieliniowego (5). Podobnie jak w przypadku obiektu liniowego d jest liczbą naturalną, taką że występuje skokowa zmiana pochodnej $y^{(d)}$ w chwili, gdy występuje skokowa zmiana wejścia u . Liczbę d można otrzymać z następującego kolejnego różniczkowania sygnału y z uwzględnieniem równania (5)

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x, u) = g^1(x) \\ y^{(2)} &= \frac{\partial g^1}{\partial x} f(x, u) = g^2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(d-1)} &= \frac{\partial g^{d-2}}{\partial x} f(x, u) = g^{d-1} \\ y^{(d)} &= \frac{\partial g^{d-1}}{\partial x} f(x, u) = g^d(x, u) \end{aligned} \quad (6)$$

Zauważmy, że zastosowane oznaczenie $g^j(x)$ $j = 1, 2, \dots, d - 1$ pokazuje, że pochodne y^j , $j = 1, 2, \dots, d - 1$ nie zależą bezpośrednio od u , podczas gdy $y^{(d)}$ – zależy, czyli mamy

$$\frac{\partial g^j}{\partial u} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, d - 1 \quad (7)$$

i

$$\frac{\partial g^d}{\partial u} \neq 0. \quad (8)$$

Zauważmy także, że większość uwag sformułowanych w poprzednim podrozdziale, również tych dotyczących realizacji sterowania poślizgowego, zachowuje ważność w przypadku obiektów nieliniowych.

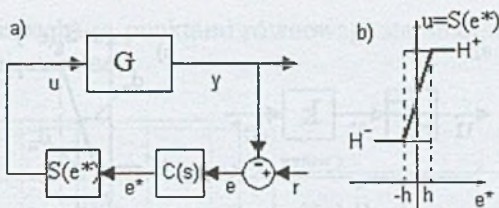
Układ z rysunku 1a z obiektem liniowym lub nieliniowym będziemy nazywać układem przekaźnikowym ze sterowaniem poślizgowym, lub krótko – układem przekaźnikowym. W tym układzie, gdy $h \rightarrow 0$, to częstotliwość oscylacji wynikających z przełączeń przekaźnika dąży do nieskończoności i są one filtrowane przez dynamikę obiektu. Oznaczmy przez $\bar{y}(t)$, $\bar{u}(t)$, $\bar{e}(t)$ odpowiednio sygnały wyjścia i wejścia obiektu oraz uchybu w układzie przekaźnikowym, z odfiltrowanymi wyższymi harmonicznymi wynikającymi z szybkich przełączeń przekaźnika.

3. Równoważny układ ciągły

Rozważmy teraz układ ciągły pokazany na rysunku 2. Porównując ten układ z układem przekaźnikowym z rysunku 1, widzimy, że przekaźnik opisany przez funkcję $u = F(e^*)$ jest zastąpiony na rysunku 2 przez odpowiednią nieliniowość z nasyceniem opisaną przez funkcję $u = S(e^*)$, określoną na rysunku 2b. Poza przedziałem $|e^*| < h$ obie funkcje $F(e^*)$ i $S(e^*)$ przyjmują takie same wartości H^- lub H^+ , podczas gdy w przedziale $|e^*| \leq h$ $F(e^*)$ przyjmuje wartości H^- lub H^+ , a $S(e^*)$ jest opisana przez

$$\begin{aligned} u &= d_u + \bar{k}e^*, \quad \text{dla } |e^*| \leq h, \\ d_u &= (H^+ + H^-)/2, \quad \bar{k} = (H^+ - H^-)/2h \end{aligned} \quad (9)$$

W układzie przekaźnikowym sygnał e^* pozostaje w przedziale $|e^*| < h$ dzięki szybkiemu przełączaniu przekaźnika i filtracji obiektu (jest to możliwe przy dostatecznie wolnej zmianie $r(t)$). Gdy $h \rightarrow 0$, wtedy $e^* \rightarrow 0$ i $\bar{y}(t) \rightarrow r(t)$. W układzie ciągłym sygnał e^* pozostaje w przedziale $|e^*| < h$ dzięki działaniu sterowania ciągłego $u(t)$,



Rys. 2. a) Układ ciągły z pochodnymi wyższego rzędu w regulatorze i b) nieliniowością typu nasycenie

$H^- < u(t) < H^+$. Także w tym układzie, gdy $h \rightarrow 0$, to $\bar{k} \rightarrow \infty$ i $e^* \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$, oraz $y(t) \rightarrow r(t)$. Ponieważ w obu układach przy tym samym pobudzeniu $r(t)$ mamy $e^* \rightarrow 0$, zatem musi być $\bar{u}(t) \rightarrow u(t)$ i $\bar{y}(t) \rightarrow y(t)$. Natomiast gdy $|e^*| \geq h$, wtedy w obu układach generowane są takie same wartości sterowań H^- lub H^+ , co również powoduje, że $\bar{y}(t) \rightarrow y(t)$.

Wniosek 1. Jeżeli $h \rightarrow 0$, wtedy z punktu widzenia przebiegów wyjścia obiektu y układ ciągły z rysunku 2 jest równoważny układowi przekaźnikowemu z rysunku 1. Oznacza to, że dla tych samych pobudzeń zewnętrznych (wartości zadanych lub zakłóceń) wyjście $y(t)$ w układzie ciągłym dąży do wyjścia $\bar{y}(t)$ w układzie przekaźnikowym.

Oznacza to również, że dla małej histerezy h i dużego wzmocnienia k wyjście $y(t)$ jest bardzo bliskie wyjściu $\bar{y}(t)$. Równocześnie można zauważyć, że sterowania $u(t)$ w obu układach są całkowicie różne. Sterowanie $u(t)$ w układzie przekaźnikowym ma wysokoczęstotliwościowe składowe harmoniczne. Po ich odfiltrowaniu otrzymujemy sterowanie efektywne $\bar{u}(t)$, które jest bardzo bliskie sterowaniu $u(t)$, występującemu w układzie ciągłym.

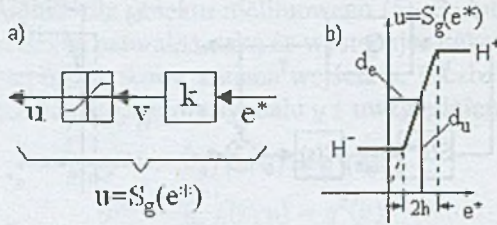
Dla układu ze sterowaniem poślizgowym pokazanego na rysunku 1 Fillipov [2] wprowadził pojęcie równoważnego sterowania ciągłego, które utrzymuje sygnał e^* na poziomie zero.

Wniosek 2. Załóżmy że w obu układach pokazanych na rysunku 1 i rysunku 2 $h \rightarrow 0$, a sygnał e^* jest utrzymywany na poziomie zero. Wtedy w równoważnym układzie ciągłym (rysunek 2) generowane jest sterowanie ciągłe równoważne w sensie Fillipova sterowaniu występującemu w układzie przekaźnikowym (rysunek 1).

Zauważmy, że nieliniowość $u = S(e^*)$ przedstawiona na wykresie pokazanym na rysunku 2b może być zrealizowana przez liniowy wzmacniacz o wzmocnieniu k i element z nasyceniem opisany przez

$$u = \begin{cases} u_{mx} & \text{dla } v \geq u_{mx} \\ v & \text{dla } u_{min} \leq v \leq u_{mx} \\ u_{min} & \text{dla } v \leq u_{min}, \end{cases} \quad (10)$$

jak to pokazano na rysunku 3a. Rzeczywiście, jeżeli ograniczenia elementu z nasyceniem przyjmiemy jako $u_{min} = H^-$ i $u_{mx} = H^+$, a za wzmocnienie k podstawimy $k = \bar{k} = (H^+ - H^-)/2h$, wtedy układ z rysunku 3a opisany jest przez funkcję $S_g(e^*)$



Rys. 3. a) Połączenie szeregowe wzmacniacza z dużym wzmocnieniem k i elementu z nasyceniem (10), b) jego charakterystyka

określona na rysunku 3b. Z rysunku 2b i 3b wynika

$$S(e^*) = S_g(e^* + d_e), \quad d_e = d_u/\bar{k} = \frac{H^+ + H^-}{H^+ - H^-}h \quad (11)$$

Zauważmy, że jeżeli $H^- = H^+$, wtedy $d_e = 0$. Także gdy $h \rightarrow 0$, mamy $d_e \rightarrow 0$. Tak więc gdy $h \rightarrow 0$, wtedy funkcja $S(e^*)$ może być zrealizowana w układzie składającym się z szeregowego połączenia wzmacniacza o wzmocnieniu $k = \bar{k} \rightarrow \infty$ i elementu z nasyceniem opisanego zależnościami (11), gdzie $u_{min} = H^-$ i $u_{mx} = H^+$.

Wniosek 3. Niechaj przekaźnik w układzie z rysunku 1 zostanie zastąpiony szeregowym połączeniem wzmacniacza liniowego o wzmocnieniu $k = \bar{k}$ i elementu z nasyceniem (10) o parametrach $u_{min} = H^-$ i $u_{mx} = H^+$. Jeżeli $h \rightarrow 0$, wtedy przy tych samych pobudzeniach obu układów wyjście $y(t)$ otrzymanego w ten sposób układu ciągłego dąży do wyjścia $\bar{y}(t)$ układu przekaźnikowego.

Otrzymaliśmy w ten sposób układ ciągły z pochodnymi wyższego rzędu w regulatorze, z dużym wzmocnieniem i elementem z nasyceniem (10) omawiany w [3]. Jak to pokazano w [3], takie układy są bardzo odporne na duże i szybkie zmiany parametrów obiektu.

4. Przykład

Rozważmy model ramienia robota zastosowany w programie demonstracyjnym `mrefrobotarm.mdl` MATLABa, opisany następującym równaniem

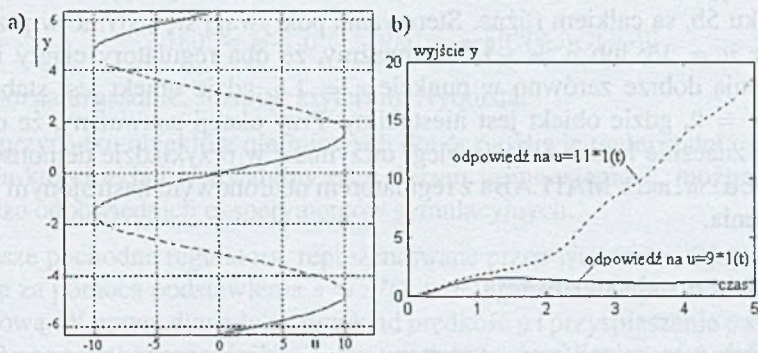
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10\sin(y) = u \quad (12)$$

gdzie: wejście u jest momentem, a wyjście y kątem wychylenia ramienia. Z (12) wynika następująca charakterystyka statyczna obiektu

$$y = \arcsin(u/10), \quad |u| \leq 10, \quad (13)$$

Z wykresu tej charakterystyki pokazanego na rysunku 4a widać, że jest ona niejednoznaczna. Części narysowane linią ciągłą określają punkty równowagi stabilnej, a linią kreskowaną – punkty równowagi niestabilnej. W punkcie równowagi stabilnej sam obiekt (w układzie otwartym), przy stałym wejściu $|u| < 10$, może pozostawać, a w punkcie równowagi niestabilnej – nie. Na przykład, przy $u = 5$ punkty $y = \pi/6$ i

$y = \pi/6 + 2\pi$ (w radianach) są punktami równowagi stabilnej, a punkt $y = 5\pi/6$ jest punktem równowagi niestabilnej.



Rys. 4. a) Charakterystyka statyczna i b) odpowiedzi czasowe obiektu (12)

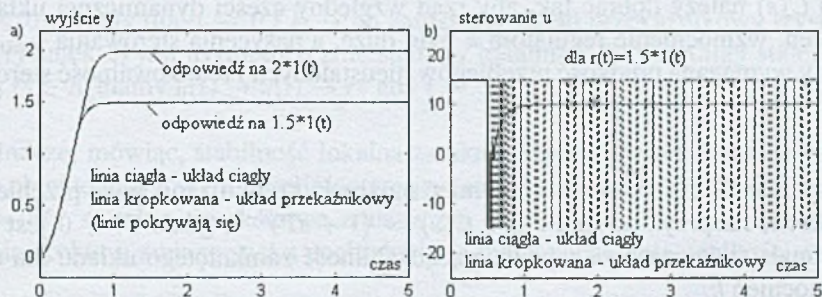
Dla $|u| > 10$ charakterystyka statyczna obiektu nie istnieje i obiekt ma charakter nieliniowego elementu dynamicznego z całkowaniem. Odpowiedzi czasowe obiektu na skokowe zmiany wejścia w postaci $u(t) = 9 \cdot 1(t)$ i $u(t) = 11 \cdot 1(t)$ ($1(t) = 0$ dla $t < 0$ i $1(t)=1$ dla $t \geq 0$) pokazane są na rysunku 4b. Dla obu przypadków mają one różny charakter.

Bezpośrednio z równania (12) widać, że $d = 2$. Dlatego wybieramy

$$C(s) = Ts + 1, \quad T = 0.1 \tag{14}$$

choć można sprawdzić, że jest znaczna swoboda w wyborze parametru T (mniejsze T – szybsza odpowiedź).

W badaniach symulacyjnych przeprowadzonych przy wykorzystaniu programu SIMULINK wielomian $C(s)$ (14) był aproksymowany za pomocą podstawienia $s \approx s/(1 + s\tau)$, $\tau = 0.01$. Przeprowadzono porównanie działania dwóch układów: przekaźnikowego ze sterowaniem poślizgowym i równoważnego ciągłego z pochodną w regulatorze, dużym wzmocnieniem i elementem z nasyceniem (10). Dla obu układów symulacje przeprowadzono dla następujących danych: $u_{max} = H^+ = 15$, $u_{min} = H^- = -15$, $h = 0.01$. $k = 1500$, $r(t) = 1.5 \cdot 1(t)$ i $r(t) = 2 \cdot 1(t)$.



Rys. 5. Przebiegi: a) wyjścia obiektu y i b) sterowania u dla układu ciągłego i przekaźnikowego

Na rysunku 5a porównane są przebiegi wyjścia $y(t)$ obiektu dla układu przekaźnikowego i ciągłego. Widać, że dla przyjętych danych spełniających warunki Wniosku 2 przebiegi wyjścia y dla obu układów są takie same, chociaż sterowania u , pokazane na rysunku 5b, są całkiem różne. Sterowania pokrywają się jedynie w przedziałach czasu, gdzie $u = 15$, lub $u = -15$. Zauważmy, że oba regulatory ciągły i przekaźnikowy pracują dobrze zarówno w punkcie $r = 1.5$, gdzie obiekt jest stabilny, jak i w punkcie $r = 2$, gdzie obiekt jest niestabilny. Przy okazji zauważmy, że otrzymane przebiegi są znacznie lepsze niż przebiegi otrzymane w przykładzie demonstracyjnym `mrefrobotarm.mdl` MATLABa z regulatorem neuronowym nastrojonym w wyniku procesu uczenia.

5. Podstawowa zasada sterowania

Jak już wspominaliśmy, otrzymany w niniejszej pracy równoważny układ ciągły z pochodnymi wyższego rzędu w regulatorze, dużym wzmocnieniem i nasyceniem sterowania posiada bardzo dobre własności i może być z powodzeniem stosowany zarówno do sterowania obiektami liniowymi, jak i nieliniowymi z minimalnofazowymi zerami [3]. Z przeprowadzonych przez autora niniejszej pracy symulacji takiego układu z obiektami nieliniowymi wziętymi z przykładów demonstracyjnych MATLABa `narmamaglev.mdl`, `mrefrobotarm.mdl`, `predcstr.mdl`, `tank.mdl` (do trzech pierwszych zastosowano w MATLABie regulatory neuronowe, do ostatniego – regulatory rozmyte) wynika, że rozważany układ ciągły radzi sobie znacznie lepiej ze sterowaniem występującymi tam nieliniowymi obiektami niż rozpatrywane w tych przykładach regulatory neuronowe ze strojeniem przez uczenie i regulatory rozmyte. Warto więc poświęcić nieco więcej uwagi temu układowi.

Zauważmy, że dla obu układów – przekaźnikowego (rysunek 1) i ciągłego (rysunek 2) część dynamiczna składająca się z szeregowego połączenia obiektu G i bloku $C(s)$ regulatora jest taka sama (z zachowaniem wymienionej kolejności, która w przypadku obiektu nieliniowego ma znaczenie). Co więcej, część dynamiczna zarówno w przypadku obiektu liniowego, jak i nieliniowego ma rząd względny równy jeden. Oznacza to, że w chwili, w której występuje skokowa zmiana sygnału u , występuje również skokowa zmiana sygnału \dot{e}^* (tzn. skokowa zmiana nachylenia e^*). Warto to podsumować.

Podstawowa zasada sterowania w układzie ze sprzężeniem zwrotnym. Dla obiektów liniowych lub nieliniowych z minimalnofazowymi zerami wielomian Hurwitza (stabilny) $C(s)$ należy dobrać tak, aby rząd względny części dynamicznej układu był równy jeden, wzmocnienie regulatora k było duże, a nasycenia sterowania u_{min} i u_{mx} zapewniały wymaganą prędkość przebiegów nieustalonych i realizowalność sterowania.

Uwagi

- Równanie (3) z $e^* = 0$ powinno mieć możliwie szybko zanikające przebiegi nieustalone, na przykład może być $C(s) = (1 + sT)^{d-1}$, gdzie $T > 0$ jest możliwie małą stałą czasową zapewniającą stabilność zamkniętego układu dla dużych wzmocnień k .
- Zmniejszenie u_{min} i zwiększenie u_{mx} powoduje zwiększenie prędkości działania układu.

- Dla obiektów liniowych minimalnofazowych o transmitancji $G(s)$ stabilność zamkniętego układu dla dużego k można zapewnić przez taki wybór możliwie małego $T > 0$, dla którego

$$-180^\circ < \varphi \leq 0^\circ, \quad \varphi(\omega) = \arg[C(j\omega)G(j\omega)]$$

co można uzasadnić, stosując kryterium Nyquista.

- Dla przypadku obiektów nieliniowych dobór możliwie małej stałej czasowej $T > 0$, dla której układ jest stabilny przy dużym wzmacnieniu k , można uzyskać na drodze odpowiednich eksperymentów symulacyjnych.
- Wyższe pochodne regulatora, reprezentowane przez wielomian $C(s)$, aproksymuje się za pomocą podstawienia $s \approx s/(1 + s\tau)$, gdzie $\tau > 0$ jest bardzo małą stałą czasową. W przypadku gdy na przykład prędkość \dot{y} i przyspieszenie \ddot{y} sygnału wyjściowego y są bezpośrednio mierzone, wtedy można te wielkości wykorzystywać bezpośrednio w algorytmie sterowania.
- Zarówno w układzie przekąźnikowym, jak i ciągłym problemem jest wzmacnianie szumów pomiarowych przez wyższe pochodne regulatora. W przypadku układu ciągłego stawia to dodatkowe wymagania elementowi wykonawczemu, który musi akceptować szybkie i "nerwowe" zmiany sygnału sterującego (przekąźnik spełnia te wymagania). Dodatkowym warunkiem stosowania tych układów, w przypadku występowania szumów pomiarowych, jest, aby te szumy zawierały częstotliwości, które są tłumione przez dynamikę obiektu.
- Oba omawiane układy są bardzo odporne na duże i szybkie zmiany parametrów obiektu liniowego i nieliniowego. Warto zatem znać, choć ze względu na wymienione wymagania nie zawsze można stosować, Podstawową zasadę sterowania.

Oznaczmy przez $\mathcal{R} = \{r : r_{min} \leq r \leq r_{mx}\}$ zbiór dopuszczalnych wartości zadanych r . Na podstawie dotychczasowych rozważań zawartych w punktach 2 i 3 niniejszej pracy otrzymujemy:

Wystarczający warunek stabilności lokalnej. Jeżeli dla dowolnej skokowej zmiany wartości zadanej, z wartości r_1 do wartości r_2 , $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, w chwili t_1 w której $e^*(t_1) = r_2 - h$ i w której mamy przełączenie z $u = u_{mx}$ na $u = u_{min}$ następuje zmiana nachylenia z $e^*(t_1^-) < 0$ na $e^*(t_1^+) > 0$ (lub w chwili t_2 , w której $e^*(t_2) = r_2 + h$ i w której mamy przełączenie z $u = u_{min}$ na $u = u_{mx}$ następuje zmiana nachylenia z $e^*(t_2^+) > 0$ na $e^*(t_2^-) < 0$), wtedy dla $h \rightarrow 0$ i $\bar{k} \rightarrow \infty$ zamknięty układ przekąźnikowy (rysunek 1) i ciągły (rysunek 2) jest asymptotycznie stabilny lokalnie i dla dowolnej stałej wartości zadanej $r_2 \in \mathcal{R}$ mamy $\bar{y}(t) \rightarrow y(t) \rightarrow r_2$ gdy $t \rightarrow \infty$.

Inaczej mówiąc, stabilność lokalna zamkniętego układu przekąźnikowego i ciągłego z obiektem liniowym i nieliniowym jest zapewniona, jeżeli wartości $u_{min} = H^-$ i $u_{mx} = H^+$ są takie, że skokowa zmiana z $u = u_{min}$ na $u = u_{mx}$, lub odwrotnie, zapewnia skokową zmianę znaku pochodnej \dot{e}^* (znaku nachylenia wielkości e^*).

Uwagi

- Stosowane przybliżenie pochodnej określone przez wzór $s \approx s/(1 + s\tau)$ powoduje że rząd względny części dynamicznej układu jest równy d (czyli dla $d > 1$ jest on większy od jeden). Zatem, ściśle rzecz biorąc, dla $d > 1$, przy skokowej zmianie sterowania u , wielkość \dot{e}^* nie zmienia się skokowo. Jeżeli jednak τ przyjmuje bardzo małe wartości, to przy skokowej zmianie u wielkość \dot{e}^* zmienia się w przybliżeniu skokowo i powyższe założenia wystarczającego warunku stabilności są w przybliżeniu spełnione.
- Jeżeli τ nie jest dostatecznie małe, to stosowanie powyższego przybliżenia dla pochodnej może nawet zdestabilizować układ.

6. Wnioski końcowe

Dla przypadku obiektów z minimalnofazowymi zerami, dla których można stosować sterowanie poślizgowe, pokazano, jak tworzyć układ ciągły równoważny układowi ze sterowaniem poślizgowym. Oba układy mają takie same przebiegi wyjścia obiektu dla takich samych pobudzeń zewnętrznych. W układzie równoważnym przekaźnik jest zastąpiony przez odpowiednią nieliniowość z nasyceniem, która może być zrealizowana przez wzmacniacz o dużym wzmocnieniu połączony szeregowo z elementem z nasyceniem (10), dla którego $u_{min} = H^-$ i $u_{mx} = H^+$. Równoważność obu układów ma miejsce, gdy histereza przekaźnika jest mała, a wzmocnienie wzmacniacza – duże. Oba układy są bardzo odporne na duże i szybkie zmiany parametrów obiektu.

Dla obu układów pewnym problemem jest występowanie szumów pomiarowych, które są wzmacniane przez wyższe pochodne regulatora. W tym przypadku układy te mogą być stosowane wtedy, gdy szумы te są tłumione przez dynamikę obiektu. W przypadku układu ciągłego dodatkowym warunkiem jest wymagane stawiane elementowi wykonawczemu, który powinien akceptować szybkie i "nerwowe" zmiany sygnału sterowania (przekaźnik spełnia ten warunek).

Effekt szarpania, charakterystyczny dla układu ze sterowaniem poślizgowym, nie występuje w równoważnym układzie ciągłym. Dlatego też na pierwszy rzut oka wydaje się, że układ ze sterowaniem poślizgowym przestaje być konkurencyjny. Jednak czasami prostota elementu wykonawczego realizującego przełączanie może przeważać nad nieznacznym pogorszeniem sterowania wynikającym z efektu szarpania. Może to decydować o zastosowaniu układu ze sterowaniem poślizgowym.

* * *

Praca zawiera wyniki projektu badawczego, częściowo finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w roku 2008.

BIBLIOGRAFIA

1. Åström, K. J., Wittenmark B.: Adaptive Control. Addison-Wesley, 1989.
2. Filipov A. F.: Differential equations with discontinuous right-hand sides. Matematicheskii Sbornik, 51, 1 1960, in Russian. Translated in English, Am. Math. Soc. Trans., 62, 199, 1964.

3. Gessing R.: A Feedback Structure with Higher Order Derivatives in Regulator. Proceedings of the International Control Conference ICC2006, Glasgow, Scotland United Kingdom, 30 Aug.-1 Sept. 2006, CD-Rom.
4. Gessing R.: Parallel Compensator for Continuous and Relay Control Systems with Difficult Plants. Proceedings of American Control Conference ACC'07, New York, USA, July 11-13 2007, p. 5810-5815.
5. Slotine J. J. E., Li W.: Applied Nonlinear Control, Englewood Cliffs, Printice Hall, NJ, 1991.
6. Utkin V. I.: Sliding Modes in Control and Optimization. Springer Verlag, New York 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Abstract

In the paper it is shown how to create the continuous system equivalent to the system with sliding mode control. With small hysteresis of the relay, the continuous system arises from the replacement of the relay by some appropriate saturation-type nonlinearity. The latter may be implemented by the amplifier with high gain connected in series with saturation, including constraints on the control value determined by the switched magnitudes of the relay. Both systems – with continuous and sliding control – use approximation of higher order derivatives which gain fast measurement noises. This may create some limitations in their possible applications. In the equivalent continuous systems the chattering effect, related with sliding mode control, doesn't exist. However, this does not cancel the meaning of the systems with sliding mode control, because the simplicity of the actuator may affect their applications. The principle of construction of both systems is formulated as the Basic principle of control. Additionally a sufficient condition of local stability of the systems with continuous and sliding control, valid for linear and nonlinear plants, has been formulated.