

Grzegorz FILCEK
Politechnika Wrocławska

ALGORYTM ŁĄCZNEGO ROZDZIAŁU SUROWCÓW ORAZ TRANSPORTU W SIECI DOSTAW

Streszczenie. W pracy podano sformułowanie problemu jednoczesnego rozdziału surowców między równoległe pracujące jednostki produkcyjne oraz transportu surowców i produktów jako problemu optymalizacyjnego. Przedstawiono dokładny algorytm rozwiązania tego problemu dla przypadku dwóch jednostek produkcyjnych. Rozważania są zilustrowane przykładowymi uruchomieniami algorytmu oraz wynikającymi z nich wnioskami dotyczącymi jego własności.

ALGORITHM FOR A JOINT ALLOCATION OF RAW MATERIAL AND TRANSPORTATION IN A SUPPLY NETWORK

Summary. The paper concerns a problem of an optimal allocation of a raw material among parallel and independent production units and transportation of the raw material and a product. An exact algorithm which solves the problem for a case of two production units is proposed. A numerical example illustrating the properties of the solution algorithm is given.

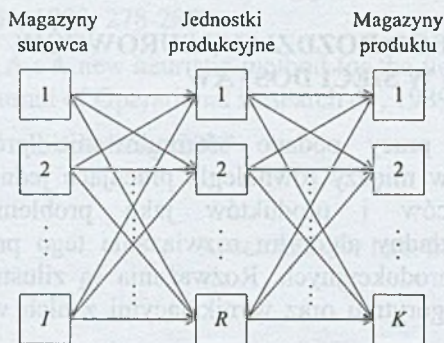
1. Wstęp

Problematyka podejmowania decyzji na potrzeby sieci dostaw jest w ostatnich latach intensywnie rozwijana. W literaturze można znaleźć wiele różnych modeli sieci dostaw, dla których rozpatruje się różnorodne problemy projektowania sieci oraz zarządzania nią, a także odpowiednie algorytmy rozwiązania, np. [1]-[5]. W pracy rozważana jest sieć o strukturze złożonej z trzech części: transportu surowca z magazynów do równoległe i niezależnie pracujących jednostek produkcyjnych, przetwarzania surowca w produkt oraz dystrybucji wytworzonego produktu do magazynów produktu. Dokładniejszy opis struktury można znaleźć w [3].

W punkcie 2 przedstawiono sformułowanie problemu. W następnych punktach kolejno zaprezentowano ogólny algorytm rozwiązania dla dwóch jednostek produkcyjnych, przykład obliczeniowy oraz krótkie podsumowanie.

2. Sformułowanie problemu

Jest rozpatrywana sieć, w której występują tylko dwie jednostki produkcyjne. Schemat systemu produkcyjnego ze ścieżkami transportowymi dla ogólnego przypadku przedstawia rys. 1. Surowiec może być transportowany od każdego dostawcy do dowolnej jednostki produkcyjnej, z której następnie wytworzone produkty mogą być dystrybuowane do dowolnego odbiorcy.



Rys. 1. Schemat systemu produkcyjnego z połączeniami transportowymi

Przyjęto następujące oznaczenia:

$i = 1, 2, \dots, I$ – indeks dostawcy, I – liczba dostawców,

$k = 1, 2, \dots, K$ – indeks odbiorcy, K – liczba odbiorców,

$x'_{i,r}$ – ilość surowca transportowanego od i -tego dostawcy do r -tej jednostki produkcyjnej, $\mathbf{x}' = [x'_{i,r}]_{\substack{i=1,2,\dots,I \\ r=1,2,\dots,R}}$ – macierz ilości surowca,

$c'_{i,r}$ – jednostkowy koszt transportu surowca od i -tego dostawcy do r -tej jednostki produkcyjnej, element macierzy $\mathbf{c}' = [c'_{i,r}]_{\substack{i=1,2,\dots,I \\ r=1,2,\dots,R}}$,

$\bar{x}_{r,k}$ – ilość produktu transportowanego od r -tej jednostki produkcyjnej do k -tego odbiorcy, element macierzy $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_{r,k}]_{\substack{r=1,2,\dots,R \\ k=1,2,\dots,K}}$,

$\bar{c}_{r,k}$ – jednostkowy koszt transportu od r -tej jednostki produkcyjnej do k -tego odbiorcy, element macierzy $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{c}_{r,k}]_{\substack{r=1,2,\dots,R \\ k=1,2,\dots,K}}$,

w_i – pojemność i -tego magazynu surowca (ilość surowca dostępna w magazynie),

\bar{v}_k – pojemność k -tego magazynu produktu (ilość produktu, na jaką jest zapotrzebowanie w magazynie),

$r = 1, 2, \dots, R$ – indeks jednostki produkcyjnej, R – liczba jednostek produkcyjnych,

v_r – nieujemna ilość surowca alokowana do r -tej jednostki produkcyjnej, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_R]^T$ – wektor alokacji surowca, V – całkowita ilość surowca do rozdziału,

\bar{w}_r – ilość produktu planowana do wytworzenia w r -tej jednostce produkcyjnej,

$\bar{\mathbf{w}} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_R]^T$ – wektor opisujący plan produkcji,

\bar{W} – ilość produktu spełniająca zapotrzebowanie, W – całkowita dostępna ilość surowca,

$0 < e_r \leq 1$ – współczynnik produkcji na r -tej jednostce produkcyjnej,

$T_r = \gamma_r(v_r) = \gamma_r\left(\frac{\bar{w}_r}{e_r}\right) \triangleq \bar{\gamma}_r(\bar{w}_r)$ – czas przetwarzania na r -tej jednostce produkcyjnej,

gdzie γ_r to ciągła wypukła funkcja, która spełnia warunek $\gamma_r(0) = 0$.

Czas przetwarzania T na wszystkich jednostkach produkcyjnych jest zależny od wszystkich czasów przetwarzania T_r zgodnie ze wzorem:

$$T(\bar{w}) = \max(T_1, T_2, \dots, T_R) = \max_{r=1,2,\dots,R} \bar{\gamma}_r(\bar{w}_r).$$

W formułowanym problemie można wyróżnić dwa podproblemy: alokacji i transportu, które połączone są przez ograniczenia, a mianowicie:

$$W = \sum_{i=1}^I w_i \geq \sum_{r=1}^R v_r = V, \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^R x'_{i,r} \leq w_i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^I x'_{i,r} = v_r, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad \sum_{k=1}^K \bar{x}_{r,k} = \bar{w}_r, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad \sum_{r=1}^R \bar{x}_{r,k} = \bar{v}_k, \quad k = 1, 2, \dots, R, \quad (3)$$

$$\bar{W} \triangleq \sum_{r=1}^R \bar{w}_r = \sum_{r=1}^R e_r v_r = \sum_{k=1}^K \bar{v}_k. \quad (4)$$

$$\exists r \in \overline{1, R}. (\bar{W} \leq e_r W). \quad (5)$$

Odpowiednie koszty transportu surowca i produktu zdefiniowane są następująco:

$$J_1(\bar{w}, x') = \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R c'_{i,r} x'_{i,r}, \quad J_3(\bar{w}, \bar{x}) = \sum_{r=1}^R \sum_{k=1}^K \bar{c}_{r,k} \bar{x}_{r,k}.$$

Natomiast koszt produkcji jest wprost proporcjonalny do czasu produkcji i określony przez wyrażenie $J_2(\bar{w}) = \pi T$, gdzie π jest dodatnim współczynnikiem czasowo-kosztowym.

W pracy przyjęto wskaźnik jakości w postaci sumy wymienionych wskaźników cząstkowych, tzn.:

$$J'(\bar{w}, x', \bar{x}) = J_1(\bar{w}, x') + J_2(\bar{w}) + J_3(\bar{w}, \bar{x}), \quad (6)$$

gdzie: J_1 i J_3 są zależne od \bar{w} odpowiednio przez ograniczenia (3) i (4). Te wskaźniki jakości powinny być minimalizowane ze względu na wektor decyzyjny \bar{w} i macierze x' , \bar{x} . Tak więc problem optymalizacyjny, oznaczany dalej jako **P1**, jest następujący:

Dla danych: $I, R, K, w_i, i = 1, 2, \dots, I, \bar{v}_k, k = 1, 2, \dots, K, e_r, \bar{\gamma}_r(\bar{w}_r), r = 1, 2, \dots, R, c', \bar{c}, \pi$ wyznaczyć wartości \bar{w}, x' i \bar{x} dopuszczalne w sensie ograniczeń (3)-(6), tak aby minimalizować (6), tzn.:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{w}, x', \bar{x}} J'(\bar{w}, x', \bar{x}) &\triangleq \min_{\bar{w}, x', \bar{x}} (J_1(\bar{w}, x') + J_2(\bar{w}) + J_3(\bar{w}, \bar{x})) = \min_{\bar{w}} \min_{x', \bar{x}} (J_1(\bar{w}, x') + J_2(\bar{w}) + J_3(\bar{w}, \bar{x})) = \\ &= \min_{\bar{w}} (\min_{x'} J_1(\bar{w}, x') + J_2(\bar{w}) + \min_{\bar{x}} J_3(\bar{w}, \bar{x})) \triangleq \min_{\bar{w}} J(\bar{w}). \end{aligned} \quad (7)$$

W rezultacie otrzymujemy $\hat{\bar{w}}, \hat{x}'$ i $\hat{\bar{x}}$. Prostsza wersja problemu, oznaczana jako **P2**, polega na dekompozycji problemu **P1**, gdzie w pierw rozwiązuje się problem minimalizacji $J_2(\bar{w})$ ze względu na \bar{w} , w wyniku otrzymując wartość \bar{w}^* , a następnie

wyznacza się wartości x^{**} i \bar{x}^* jako wynik niezależnych minimalizacji $J_1(\bar{w}^*, x')$ i $J_3(\bar{w}^*, \bar{x})$. W ogólności rozwiązania \hat{w} , \hat{x}' i $\hat{\bar{x}}$ różnią się od rozwiązań \bar{w}^* , x^{**} i \bar{x}^* . W punkcie 4 dokonano porównania P1 oraz P2 na przykładzie obliczeniowym.

3. Algorytm rozwiązania

W pracy zaproponowano algorytm dokładny rozwiązania rozważanego problemu, w przypadku gdy liczba jednostek produkcyjnych wynosi dwa.

Ponieważ wektor decyzyjny \bar{w} składa się z dwóch wartości \bar{w}_1 oraz \bar{w}_2 , to przy wykorzystaniu warunku (4) decyzja staje się zależna tylko od \bar{w}_1 , gdyż $\bar{w}_2 = \bar{W} - \bar{w}_1$. Wykazano, iż funkcje kosztów $J_1(\bar{w}_1, x')$, $J_2(\bar{w}_1)$ i $J_3(\bar{w}_1, \bar{x})$ są wypukłe ze względu na \bar{w}_1 , a więc również ich suma jest funkcją wypukłą, która posiada jedno minimum, określone przez ciągły zbiór punktów (w szczególności jeden punkt). Ze względu na to, iż funkcje te nie są różniczkowalne w całej swojej dziedzinie, nie jest możliwe analityczne wyznaczenie optymalnego rozwiązania wprost.

Algorytm podzielony jest na 6 części, a jego działanie polega na stopniowym zawężaniu dziedziny możliwych rozwiązań, dopóki wszystkie funkcje kosztów transportu, czyli $J_1(\bar{w}_1, x')$ i $J_3(\bar{w}_1, \bar{x})$, nie będą w aktualnej dziedzinie różniczkowalne. Po osiągnięciu żądanej dziedziny rozwiązanie optymalne można już wyznaczyć metodami analitycznymi. W pierwszych krokach algorytmu (rys. 2) rozwiązywany jest problem P2 (część I) oraz dwa inne problemy minimalizacji (część II i III): $\min_{\bar{w}}(\min_{x'} J_1(\bar{w}, x'))$, $\min_{\bar{w}}(\min_{\bar{x}} J_3(\bar{w}, \bar{x}))$, skąd otrzymuje się trzy zbiory rozwiązań optymalnych ze względu na: koszt transportu surowca $D_{A, \bar{w}_1} = \{\bar{w}_a \in D_{\bar{w}} : J_1(x', \bar{w}_a) = \min_{\bar{w}_1 \in D_{\bar{w}}} \min_{x' \in D_{x'}(\bar{w}_1)} J_1(x', \bar{w}_1)\}$, koszt transportu produktu $D_{C, \bar{w}_1} = \{\bar{w}_c \in D_{\bar{w}} : J_3(\bar{x}, \bar{w}_c) = \min_{\bar{w}_1 \in D_{\bar{w}}} \min_{\bar{x} \in D_{\bar{x}}(\bar{w}_1)} J_3(\bar{x}, \bar{w}_1)\}$, oraz koszt produkcji $D_{B, \bar{w}_1} = \{\bar{w}_b \in D_{\bar{w}} : J_2(\bar{w}_b) = \min_{\bar{w}_1 \in D_{\bar{w}}} J_2(\bar{w}_1)\}$. Na ich podstawie określa się pierwsze

zawężenie dziedziny określonej przez przedział $[\bar{w}_{1, \min}^*, \bar{w}_{1, \max}^*]$. Zawężona dziedzina może być ostatecznym rozwiązaniem, jeśli spełnione zostaną odpowiednie warunki (np. $D_{ABC} = \emptyset$), które będziemy nazywać warunkami równoważności. Jeśli warunki nie zostaną spełnione, algorytm bada kolejne punkty nieróżniczkowalności funkcji $J_3(\bar{w}_1, \bar{x})$ (część IV), a następnie $J_1(\bar{w}_1, x')$ (część V), zawężając przy tym dziedzinę. Na koniec określa rozwiązanie optymalne dla zawężonej dziedziny w sposób analityczny (część VI). Ogólny schemat blokowy algorytmu przedstawiony został na rysunku 2, gdzie uwzględniono jeden warunek równoważności. W przedstawionych algorytmach zmienne decyzyjne muszą spełniać ograniczenia: $D_{\bar{w}} = [w_{\min}, w_{\max}]$, gdzie

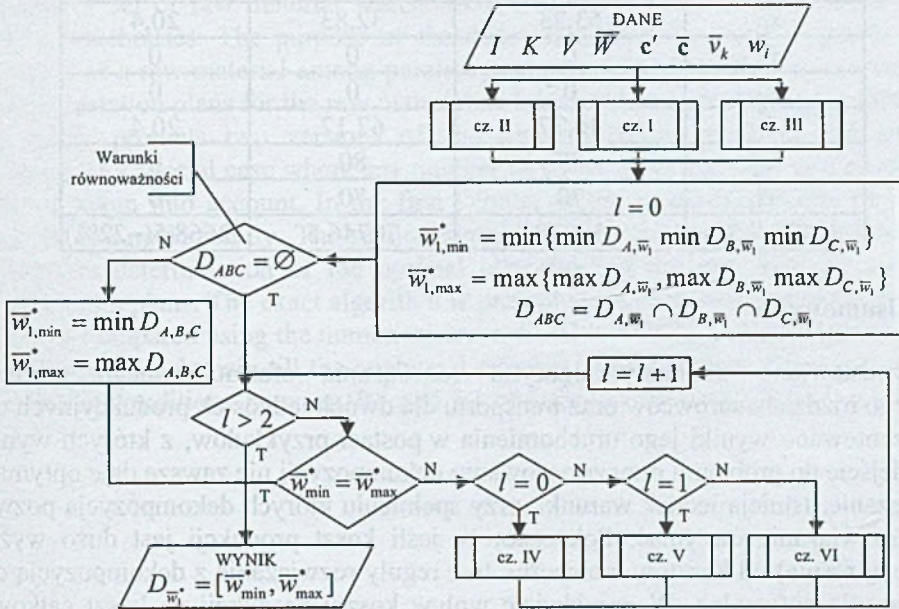
$$w_{\min} = \begin{cases} \frac{W a_1 a_2 - \bar{W} a_1}{a_2 - a_1} & \text{dla } a_1 > a_2 \\ 0 & \text{dla } a_1 \leq a_2, \end{cases} \quad w_{\max} = \begin{cases} \frac{W a_1 a_2 - \bar{W} a_1}{a_2 - a_1} & \text{dla } a_1 < a_2 \\ \bar{W} & \text{dla } a_1 \geq a_2, \end{cases}$$

oraz

$$D_x(\bar{w}_1) = \{x' = [x'_{i,r} \in [0, w_i]]_{k=1,2,\dots,l} : a_1 \sum_{i=1}^l x'_{i,1} = \bar{w}_1 \wedge a_2 \sum_{i=1}^l x'_{i,2} = \bar{W} - \bar{w}_1 \wedge \forall_{i \in \{1,2\}} (x'_{i,1} + x'_{i,2} \leq w_i)\}$$

i

$$D_{\bar{x}}(\bar{w}_1) = \{\bar{x} = [\bar{x}_{r,k} \in [0, \bar{v}_k]]_{r=1,2,\dots,K} : \sum_{k=1}^K (\bar{x}_{1,k} + \bar{x}_{2,k}) = \bar{w}_1 \wedge \forall_{k \in \{1,2\}} (\bar{x}_{1,k} + \bar{x}_{2,k} = \bar{v}_k)\}$$



Rys. 2. Ogólny schemat blokowy algorytmu

4. Przykład obliczeniowy

Do obliczeń przyjęto dane: $I = 2, R = 2, K = 3, c' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 15 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$\gamma_1(\bar{w}_1) = 2\bar{w}_1^3, \gamma_2(\bar{w}_2) = 1,5\bar{w}_2^2 = 1,5(\bar{W} - \bar{w}_1)^2 \triangleq \tilde{\gamma}_2(\bar{w}_1), \pi = 1/2000, e_1 = 1/2, e_2 = 2/3, w_1 = 275, w_2 = 225, \bar{v}_1 = 100, \bar{v}_2 = 80, \bar{v}_3 = 70.$

Wyniki działania algorytmu dla problemu P1 zostały zestawione w tabeli 1, w której porównano je z wynikami rozwiązania problemu P2. Z przedstawionych danych wynika, że dla prezentowanego przypadku nie jest opłacalne stosowanie podejścia z dekompozycją do rozwiązania problemu, gdyż jest ono o ok. 22% gorsze od optymalnego. Okazuje się jednak, że jeśli przyjąć $\pi = 1/2$, to wówczas rozwiązania problemów P1 i P2 nie różnią się, w szczególności wartości kryteriów jakości wynoszą w obu przypadkach 106095,6.

Tabela 1
Porównanie wyników rozwiązania problemów P1 i P2

	P1	P2	P1 - P2
\bar{w}_1^*	53,23	32,83	20,4
x'_{11}	106,46	65,63	40,83
x'_{12}	70,16	100,76	30,6
x'_{21}	0	0	0
x'_{22}	225	225	0
\bar{x}_{11}	53,23	32,83	20,4
\bar{x}_{12}	0	0	0
\bar{x}_{13}	0	0	0
\bar{x}_{21}	46,77	67,17	20,4
\bar{x}_{22}	80	80	0
\bar{x}_{23}	70	70	0
$J(\bar{w}^*, x'^*, \bar{x}^*)$	58078	70746,5	12668,5 (~22%)

5. Podsumowanie

Przedstawiono dokładny algorytm rozwiązania sformułowanego problemu łącznego rozdziału surowców oraz transportu dla dwóch jednostek produkcyjnych oraz zaprezentowano wyniki jego uruchomienia w postaci przykładów, z których wynika, że podejście do problemu przy zastosowaniu dekompozycji nie zawsze daje optymalne rozwiązanie. Istnieją jednak warunki, przy spełnieniu których dekompozycja pozwala takie rozwiązanie otrzymać. Pokazano, że jeśli koszt produkcji jest dużo wyższy (szybciej rośnie) od kosztów transportu, to z reguły rozwiązanie z dekompozycją daje rozwiązanie optymalne. W przykładzie wpływ kosztu produkcji na koszt całkowity zwiększono przez zmianę wartości współczynnika π , jednakże podobne efekty można uzyskać, modyfikując funkcje produkcji $\bar{y}_i(\bar{w}_i)$ lub jednostkowe koszty transportu. Dalsze badania będą dotyczyć wykorzystania przedstawionego algorytmu do budowy przybliżonego algorytmu rozwiązania ogólnego problemu z dowolną liczbą jednostek produkcyjnych, magazynów surowca oraz magazynów produktu.

BIBLIOGRAFIA

1. Beamon B. M.: Measuring supply chain performance. International Journal of Operations & Production Management, vol. 19, No. 8, 1994, p. 275-292.
2. Bubnicki Z.: Application of Uncertain Variables to Knowledge-Based Decision Making in a Class of Production Systems. Proceedings of 18th International Conference on Production Research, [cd-rom], Salerno 2005.
3. Filcek G., Józefczyk J.: Decision-making for supply chains with transportation and production units. Systems Science, Vol. 33, No. 1, 2007, p. 53-59.
4. Meixell M. J., Gargeya V. B.: Global supply chain design: A literature review and critique. Transportation Research Part E, 41, 2005, p. 531-550.

5. Yeh W. C.: A hybrid heuristic algorithm for the multistage supply chain network problem. *International Journal Advanced Manufacturing Technology*, 26, 2005, p. 675-685.

Recenzent: Dr inż. Jolanta Krystek

Abstract

The paper concerns a supply network that consists of three interconnected sets of elements: a set of raw material warehouses, a set of production units and a set of product warehouses. The purpose of the decision-making for such a system is the allocation of a raw material among parallel production units and the determination of the transportation plans for the raw material and the product to minimize the total cost. This paper presents two versions of the decision-making problem and solution algorithm of a special case where any number of warehouses and only two production units are taken into account. In the first version of the problem, denoted by **P1**, all decisions are made jointly. The second simplified one, denoted by **P2**, consists in a consecutive determination of the optimal allocation of the raw material and both transportation plans. The exact algorithm is presented for both versions of the problem which are compared using the numerical example. The main idea of the algorithm is to narrow down the domain till the analytical solution can be applied. Some remarks on equivalence conditions between **P1** and **P2** and further research plans conclude the paper.