Witold Około-Kułak

Trójczynnikowe wymienniki ciepła

S t r e s z c z e n i e: Tematem pracy, poświęconej zagadnieniu trójczynnikowych wymienników ciepła, jest omówienie zależności pomiędzy powierzchnią, wzdłuż której odbywa się wymiana ciepła, i spadkiem temperatury czynnika ogrzewającego. W podanych rozważaniach uwzględniono poszczególne przypadki dla jednokierunkowego oraz różnokierunkowego przepływu czynników, biorąc pod uwagę przebieg i zmienność temperatur wzdłuż powierzchni ogrzewalnej przy dwu- i trójprzegrodowym przenikaniu ciepła. Osobno omówiono grupę wymienników z punktem zwrotnym, dla których dołączono tabelę, ilustrującą schematycznie rozważane przypadki. W tekście podano pięć metod operacyjnych, znajdujących zastosowanie do kontroli poprawności obliczeń cieplnych wymienników trój- i dwuprzegrodowych.

Wstęp

Wymienniki trójczynnikowe, będące przedmiotem niniejszej pracy, są to aparaty, w których przepływają trzy czynniki o zasadniczo różnych równoważnikach wodnych natężenia przepływu. Czynniki te są ze sobą sprzężone cieplnie na skutek możliwości przenikania ciepła poprzez rozdzielające je ścianki. Dzięki temu, że czynniki nie mieszają się ze sobą w czasie przepływu przez aparat, wymienniki tego typu należą do grupy tzw. rekuperatorów ciepła.

Wymienniki trójczynnikowe znajdują coraz szersze zastosowanie w przemyśle. Wymiennik złożony z elementów Fielda zastosowano np. w części kotłowej siłowni parowej wodno-rtęciowej. Dzięki zupełnej swobodzie wydłużania się rurek utwierdzonych tylko z jednej strony wymiennik Fielda nadaje się do użycia przede wszystkim tam, gdzie wchodzą w grę wysokie temperatury oraz duże obciążenia cieplne. Element Fielda stosowano również z powodzeniem w budowie nagrzewnic powietrza. Nagrzewnice te początkowo budowano jako zwykłe wymienniki dwuczynnikowe, wskutek dużych natężeń ulegały one jednak szybkiemu niszczeniu. Element Fielda zastosowany w tym przypadku usunął w zupełności tę poważną wadę.

Inną odmianą wymiennika trójczynnikowego jest wymiennik zbudowany z rurek wygiętych w kształcie litery „U". Wymienniki tego typu znajdują zastosowanie w chłodnicach olejowych dużych silników spalinowych (np. w okrętowych). Literatura przedmiotu nie posiada wzorów ścisłych, służących do rozwiązywania tego typu wymienników.

Nie sposób również pominąć milczeniem faktu, że w r. 1946 zbudowano rekuperator hutniczy, w którym elementem konstrukcyjnym był układ złożony z trzech koncentrycznych rurek. W wymienniku tym gorące spaliny rozdzielały się na dwa strumienie, ogrzewając od zewnątrz i od wewnątrz powietrze płynące pierścieniowym przekrojem. Wymiennik tego typu może służyć za typowy przykład wymiennika ciepła trójczynnikowego.

Brak teoretycznego rozwiązania zagadnienia trójczynnikowych wymienników ciepła stanowi poważną lukę w literaturze z tej dziedziny, którą praca niniejsza ma na celu wypełnić.

Jeżeli chodzi o literaturę przedwojenną z zakresu ruchu ciepła, to należy wziąć pod uwagę publikacje H. Gröbera [1], Ten Boscha [2], A. Schacka [3], H. Gröbera i S. Erka [4].

W dziełach tych istnieje skąpo potraktowany dział, obejmujący jedynie najprostsze przypadki wymienników dwuczynnikowych. Podane są wzory Hudlera dotyczące współprądu i przeciwprądu, wzór na średnią różnicę temperatur oraz uproszczone wzory dla prądu krzyżowego.

W sposób oryginalny, szczegółowo i gruntownie rozwiązuje problem prądu krzyżowego o dwóch czynnikach W. Nusselt [5].

W pracach różnych autorów z lat 1940—1949 [6], [7], [8] i [9] znajdujemy wzory na spadki temperatur dla współprądu i przeciwprądu a ponadto wykresy i schematy służące do rozwiązania wieloczynnikowych wymienników ciepła, między innymi dla wymiennika złożonego z rurek wygiętych w kształcie litery „U".

W tym samym okresie G. M. Klujew i W. S. Czyrkin [11] wydali książkę zawierającą m. in. streszczenie pracy N. I. Gelperina [10], który rozróżnia dwa warianty wymienników Fielda. W pierwszym nagrzewanie gazu odbywa się w ten sposób, że ogrzewany gaz wchodzi do wewnętrznej rurki elementu Fielda. W tej odmianie istnieją dwa typy wymienników: przeciwprądowy i współprądowy (zależnie od kierunku przepływu czynnika w rurce zewnętrznej w stosunku do kierunku przepływu czynnika ogrzewającego). W drugim wariancie wlot czynnika ogrzewanego jest skierowany do rury zewnętrznej elementu Fielda. W tym drugim przypadku istnieją również dwie odmiany: przeciwprądowa i współprądowa. Autor podaje wyjściowe równania oparte na wzorze Pecleta oraz ogólne równania różniczkowe, określające przebieg temperatury jednego z czynników jako funkcję długości rury „x". Jako szczegół charakterystyczny podkreślamy, że dla każdej z czterech odmian autor podaje inne równania różniczkowe. Dla każdej z czterech odmian autor podaje wzory służące do obliczania długości rur.

Poczuwam się do miłego mi obowiązku złożenia gorących podziękowań prof dr inż. Stanisławowi Ochęduszko za niezwykle cenne wskazówki, które umożliwiły mi pokonanie poważnych trudności związanych z mą pracą. Niezawodna metoda bilansowania energetycznego, opracowana przez prof. Ochęduszko, stanowi główną podstawę niniejszej pracy.

Ważniejsze oznaczenia

a) *Równoważniki wodne*

W_1, W_2, W_3 kcal/hl° — bezwzględne wartości równoważników wodnych natężenia przepływu czynników 1, 2, 3.

w_1, w_2, w_3 „ — wartości algebraiczne równoważników wodnych natężenia przepływu czynników 1, 2, 3.

b) *Współczynniki przenikania ciepła*

k_{I-II} kcal/m²hl° — współczynnik (Pecleta) przenikania ciepła pomiędzy czynnikami 1 i 2.

k_{II-III} „ — współczynnik (Pecleta) przenikania ciepła pomiędzy czynnikami 2 i 3.

k_{I-III} „ — współczynnik (Pecleta) przenikania ciepła pomiędzy czynnikami 1 i 3.

k_{1-2} „ — zredukowany do powierzchni porównawczej współczynnik przenikania ciepła pomiędzy czynnikami 1 i 2: $k_{1-2} = k_{I-II} \cdot F_{1-2}/F$.

k_{2-3} „ — detto dla 2 i 3: $k_{2-3} = k_{II-III} \cdot F_{2-3}/F$.

k_{1-3} „ — detto dla 1 i 3: $k_{1-3} = k_{I-III} \cdot F_{1-3}/F$.

k_c^2 (kcal/m²hl°)² — wielkość określona równaniem $k_c^2 = k_{1-2}\,k_{2-3} + k_{2-3}\,k_{1-3} + k_{1-2}\,k_{1-3}$.

c) *Powierzchnie*

F_{1-2} m² — całkowita powierzchnia styku czynników 1 i 2 z przegrodą 1—2 rozdzielającą te czynniki przy założeniu że przegroda ta jest płaska.

F_{2-3} „ — detto dla 2—3.

F_{1-3} „ — detto dla 1—3.

f „ — powierzchnia porównawcza (zmienna niezależna); jest to powierzchnia liczona od przekroju początkowego wymiennika do rozpatrywanego przekroju.

F „ — całkowita wielkość powierzchni porównawczej, liczonej od przekroju początkowego do końcowego.

F_0 „ — wielkość podstycznej, mierzonej na asymptocie krzywej wykładniczej przebiegu temperatur.

d) *Temperatury*

x, y, z °C — temperatury czynników 1, 2, 3 jako funkcje zmiennej niezależnej f.

x_p, y_p, z_p „ — temperatury czynników 1, 2, 3 w przekroju początkowym p—p wymiennika.

x_k, y_k, z_k „ — temperatury czynników 1, 2, 3 w przekroju końcowym wymiennika (w przekroju k—k).

t_1, t_2, t_3 „ — temperatury czynników 1, 2, 3, w przypadku gdy czynniki te nie zmieniają swej temperatury w wymienniku.

t_w „ — wartość graniczna, do której zdąża temperatura czynnika 1, gdy F dąży do nieskończoności w wymienniku trójczynnikowym o dowolnym kierunku prądów (V).

ϑ „ — temperatura poziomu odniesienia.

e) *Nadwyżki temperatur ponad poziomem odniesienia*

t_x, t_y, t_z 1° — nadwyżki temperatur czynników 1, 2, 3 ponad poziomem odniesienia jako funkcje zmiennej niezależnej f.

t „ — nadwyżka temperatury danego czynnika ponad poziomem odniesienia jako funkcja zmiennej f.

t_{px}, t_{py}, t_{pz} „ — nadwyżki temperatur czynników 1, 2, 3 ponad poziomem w przekroju początkowym p—p wymiennika.

t_{kx}, t_{ky}, t_{kz} „ — nadwyżki temperatur czynników 1, 2, 3 ponad poziomem odniesienia w przekroju końcowym k—k wymiennika.

f) *Różnice temperatur*

Θ 1° — najwyższa różnica temperatur, jaka w ogólności istnieje w wymienniku z punktem zwrotnym. Jest to zatem różnica temperatur na dolocie pomiędzy czynnikiem najgorętszym i najchłodniejszym.

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ „ — różnice temperatur czynników w przeciwprądach prostoliniowych dwuczynnikowych (gdy jest ich 3).

Θ_{1-2} „ — różnica temperatur czynników 1 i 2 w przeciwprądzie prostoliniowym trójczynnikowym.

Θ_{2-3} „ — różnica temperatur czynników 2 i 3 w przeciwprądzie prostoliniowym trójczynnikowym.

Θ_{1-3} „ — różnica temperatur czynników 1 i 3 w przeciwprądzie prostoliniowym trójczynnikowym.

Δt_1 „ — spadek temperatury czynnika 1 w obrębie wymiennika dwuczynnikowego z punktem zwrotnym.

Δt_2 „ — wzrost temperatury czynnika 2 w obrębie wymiennika dwuczynnikowego z punktem zwrotnym.

g) *Pochodne temperatur*

x', t'_x $1°/m^2$ — pochodna temperatury czynnika 1 względem f.
y', t'_y „ — pochodna temperatury czynnika 2 „ f.
z', t'_z „ — pochodna temperatury czynnika 3 „ f.
t' „ — pochodna temperatury danego czynnika względem powierzchni f.
t'_{px}, x'_p „ — pochodna temperatury czynnika 1 w przekroju początkowym p—p (dla $f=0$).
t'_{py}, y'_p „ — pochodna temperatury czynnika 2 w przekroju początkowym p—p (dla $f=0$).
t'_{pz}, z'_p „ — pochodna temperatury czynnika 3 w przekroju początkowym p—p (dla $f=0$).
t'_{kx}, x'_k „ — pochodna temperatury czynnika 1 w przekroju końcowym k—k (dla $f=F$).
t'_{ky}, y'_k „ — pochodna temperatury czynnika 2 w przekroju końcowym k—k (dla $f=F$).
t'_{kz}, z'_k „ — pochodna temperatury czynnika 3 w przekroju końcowym k—k (dla $f=F$).
t'' $1°/m^4$ — druga pochodna temperatury danego czynnika względem powierzchni f.
x'' „ — druga pochodna temperatury czynnika 1 względem powierzchni f.

h) *Wielkości pomocnicze*

$$s = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k_{1-2}+k_{1-3}}{w_1}+\frac{k_{1-2}+k_{2-3}}{w_2}+\frac{k_{2-3}+k_{1-3}}{w_3}\right) \quad \frac{1}{m^2}$$

$$b = \frac{w_1+w_2+w_3}{w_1\cdot w_2\cdot w_3}\cdot k_c^2 \quad \frac{1}{m^4}$$

$$p = \sqrt{s^2-b} \quad \frac{1}{m^2}$$

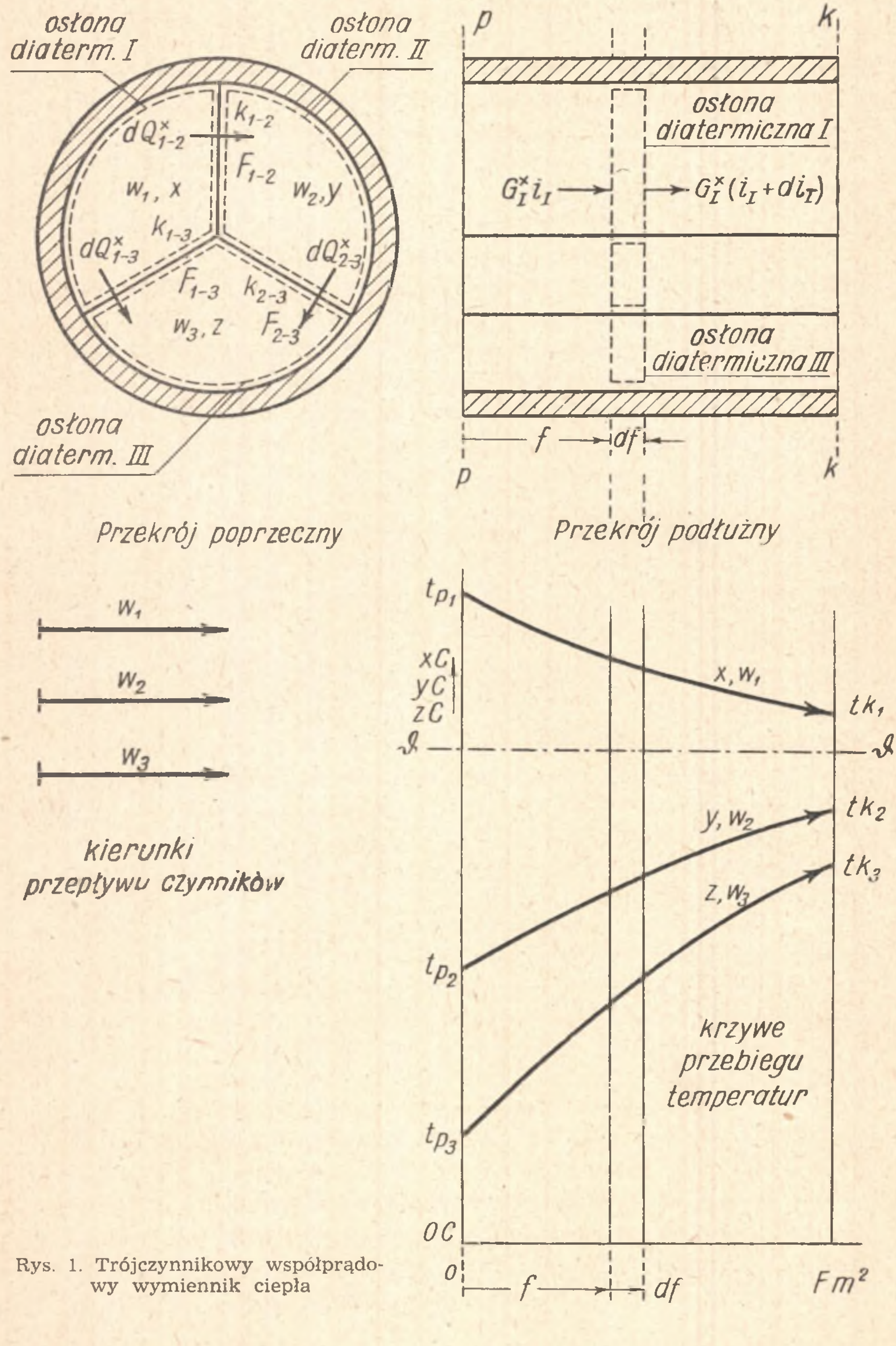
$$d = \frac{k_c^2}{w_1\cdot w_2\cdot w_3}\cdot(w_1\cdot x_p + w_2\cdot y_p + w_3\cdot z_p) \quad \frac{1°}{m^4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{W_1}{W_2}\right) \quad \text{bez wymiaru.}$$

$$\zeta = \frac{W_1\cdot p}{k_{1-2}+k_{1-3}} \quad \text{bez wymiaru.}$$

I. Trójprzegrodowy współprąd

Schemat trójprzegrodowego wymiennika ciepła przedstawia rysunek 1. Przez wymiennik przepływają równolegle (w tym samym kierunku) trzy różne czynniki: 1, 2, 3 o natężeniach przepływu masy G_1, G_2, G_3 kg/h



Rys. 1. Trójczynnikowy współprądowy wymiennik ciepła

i o ciepłach właściwych pod stałym ciśnieniem c_{p1}, c_{p2}, c_{p3} kcal/kg 1°. Wymiennik jest okryty doskonałą izolacją, dzięki czemu wymiana ciepła z otoczeniem nie zachodzi. Wewnątrz wymiennika przepływają trzy czynniki rozdzielone pomiędzy sobą za pomocą trzech przegród, tak że wymiana ciepła pomiędzy czynnikami może się odbywać w trzech możliwych kombinacjach: 1—2, 2—3, 1—3. Wymiennik tego typu jest najogólniejszym przypadkiem trójczynnikowego współprądowego wymiennika ciepła.

Weźmy pod uwagę dwa nieskończenie bliskie przekroje m—m oraz n—n (rys. 1) obrane w dowolnym miejscu wymiennika. Poprowadźmy trzy różne osłony diatermiczne w ten sposób, aby każda z nich wyodrębniała warstwę jednego z trzech czynników w obrębie przekrojów m—m oraz n—n. Do otrzymanych w ten sposób trzech elementarnych układów diatermicznych stosujemy równanie wyrażające bilans energetyczny w myśl I zasady termodynamiki:

$$E_1 = \Delta E_u + E_2 \tag{I}$$

W rozpatrywanym zagadnieniu rozważamy wyłącznie stany równowagi cieplnej, dla których $\Delta E_u = 0$, zatem bilans energetyczny uprości się do następującej formy:

$$E_1 = E_2 \tag{Ia}$$

W powyższym równaniu wyrażenie E_1 oznacza sumę energii doprowadzonych do układu, natomiast E_2 sumę energii odprowadzonych.

Do każdego z trzech elementarnych układów diatermicznych energia dopływa jedynie wraz ze strumieniem czynnika, natomiast odpływ energii odbywa się trzema drogami: 1) wraz ze strumieniem czynnika opuszczającego układ, 2) i 3) w formie ciepła przenikającego poprzez dwie przegrody oddzielające pozostałe dwa czynniki.

Transport ciepła przez przegrodę jest określony równaniem Pecleta:

$$Q^* = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot F \tag{II}$$

W naszym przypadku mamy do czynienia z elementarnymi układami diatermicznymi, zatem użyjemy równania Pecleta w formie różniczkowej

$$dQ^* = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dF \tag{IIa}$$

Ponadto uczynimy umowne założenie, iż odprowadzone ciepło ma znak dodatni. W równaniu (IIa) t_1 będzie oznaczać temperaturę tego czynnika, dla którego układamy bilans w obrębie rozważanej elementarnej osłony diatermicznej, natomiast temperatura t_2 dotyczy sąsiadującego czynnika, do którego przenika ciepło poprzez przegrodę. Przy powyższych założeniach, w przypadku gdy temperatura t_1 będzie większa od t_2, prawa strona równania (IIa) będzie miała znak dodatni. Kierunek przepływu ciepła jest określony za pomocą II zasady termodynamiki: *Swobodny transport ciepła odbywa się w kierunku od ciała o temperaturze wyższej do ciała o temperaturze niższej*. W myśl przyjętych oznaczeń lewa strona równania (IIa) wyraża elementarne ciepło odprowadzone z układu na drodze przenikania przez jedną z przegród. Nie trudno się przekonać. że równanie (IIa) jest w pełnej zgodzie z wyżej przytoczoną definicją II zasady termodynamiki.

Przed przystąpieniem do ułożenia równań, wyrażających bilanse cieplne dla elementarnych układów diatermicznych, należy ustalić kwestię obioru zmiennej niezależnej. Dążymy do znalezienia temperatur wszystkich czynników jako funkcyj jednej tylko, wspólnej zmiennej niezależnej. Niechaj tą zmienną niezależną będzie powierzchnia porównawcza f, zmieniająca się w granicach od 0 do F.

Dla elementarnego układu diatermicznego I (rys. 1) będzie słuszne następujące równanie Pecleta:

$$dQ^*_{1-2} = k_{I-II} \cdot (x - y) \cdot dF_{1-2} \tag{a}$$

Wyrażenie dQ^*_{1-2} oznacza, że chodzi tu o elementarny transport ciepła przez przegrodę 1—2. Ciepło to przenika w kierunku od czynnika 1 do czynnika 2.

W celu wyrażenia elementarnego natężenia przepływu ciepła dQ^*_{1-2} przy pomocy zmiennej niezależnej f, układamy następujące równanie:

$$dQ^*_{1-2} = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df \tag{a'}$$

Równania (a) oraz (a') muszą być identyczne, ponieważ wyrażają tę samą wielkość, zatem:

$$k_{I-II} \cdot dF_{1-2} = k_{1-2} \cdot df \tag{b}$$

Z powyższej zależności wynika związek:

$$k_{1-2} = k_{I-II} \cdot \frac{dF_{1-2}}{df} \tag{b'}$$

Wielkość k_{1-2} oznacza zredukowany do elementarnej powierzchni porównawczej df współczynnik przenikania ciepła. Dla pozostałych współczynników otrzymamy analogicznie:

$$k_{II-III} \cdot dF_{2-3} = k_{2-3} \cdot df \tag{c}$$

$$k_{2-3} = k_{II-III} \cdot \frac{dF_{2-3}}{df} \tag{c'}$$

oraz

$$k_{I-III} \cdot dF_{1-3} = k_{1-3} \cdot df \tag{d}$$

$$k_{1-3} = k_{I-III} \cdot \frac{dF_{1-3}}{df} \tag{d'}$$

Wyznaczenie zredukowanych współczynników przenikania ciepła k_{1-2}, k_{2-3}, k_{1-3} przy pomocy rzeczywistych k_{I-II}, k_{II-III}, k_{I-III} nie stanowi żadnego kłopotu, różniczki bowiem powierzchni zawartych pomiędzy przekrojami *m*—*m*, *n*—*n* mają się do elementarnej powierzchni *df*, jak powierzchnie całkowite:

$$\frac{dF_{1-2}}{df} = \frac{F_{1-2}}{F}\,; \quad \frac{dF_{2-3}}{df} = \frac{F_{2-3}}{F}\,; \quad \frac{dF_{1-3}}{df} = \frac{F_{1-3}}{F}$$

Dalsze równania wyrażające przepływ ciepła przez przegrody 1—3, 2—3 w myśl równania Pecleta mają następującą formę:

$$dQ^*_{1-3} = k_{I-III} \cdot (x - z) \cdot dF_{1-3}$$
$$dQ^*_{2-3} = k_{II-III} \cdot (y - z) \cdot dF_{2-3}$$
$$dQ^*_{2-1} = k_{I-II} \cdot (y - x) \cdot dF_{1-2}$$
$$dQ^*_{3-2} = k_{II-III} \cdot (z - y) \cdot dF_{2-3}$$
$$dQ^*_{3-1} = k_{I-III} \cdot (z - x) \cdot dF_{1-3}$$

Pierwszy indeks przy każdym z wyrażeń dQ^* oznacza liczbę czynnika, od którego ciepło odpływa, następny zaś, oddzielony od pierwszego kreseczką, oznacza liczbę czynnika, do którego to ciepło dopływa.

Po zastosowaniu do powyższych równań zależności (c) oraz (d) otrzymamy we wszystkich równaniach tę samą zmienną niezależną *df*:

$$dQ^*_{1-3} = k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df$$
$$dQ^*_{2-3} = k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df$$
$$dQ^*_{2-1} = k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df$$
$$dQ^*_{3-2} = k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df$$
$$dQ^*_{3-1} = k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df$$

Wartość energii dopływającej do układu wraz z czynnikiem mierzy się iloczynem natężenia przepływu czynnika G^* kg/h i entalpii właściwej oraz kcal/kg. Przyjmując że ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem c_p kcal/kg 1° ma wartość stałą (co jest słuszne dla gazów doskonałych) entalpia właściwa wyraża się iloczynem:

$$i = c_p \cdot T$$

Energia dopływająca do układu wraz ze strumieniem masy E^*_r (dla prędkości o wiele mniejszych niż prędkość głosu) da się wyrazić następująco:

$$E_r^* = G^* \cdot i = G^* \cdot c_p \cdot T$$

Po wprowadzeniu pojęcia równoważnika wodnego natężenia przepływu $W = G^* \cdot c_p$ otrzymamy:

$$E_r^* = G^* \cdot c_p \cdot T = W \cdot T \qquad \text{(e)}$$

oraz po zróżniczkowaniu względem temperatury T:

$$dE_r^* = W \cdot dT = W \cdot dt \tag{f}$$

Przechodzimy obecnie do ułożenia bilansów cieplnych dla wspomnianych trzech elementarnych układów diatermicznych:

$$G_1^* \cdot i_1 = dQ^*_{1-2} + G_1^* \cdot (i_1 + di_1) + dQ^*_{1-3}$$

$$G_2^* \cdot i_2 = dQ^*_{2-1} + dQ^*_{2-3} + G_2^* \cdot (i_2 + di_2)$$

$$G_3^* \cdot i_3 = dQ^*_{3-1} + dQ^*_{3-2} + G_3^* \cdot (i_3 + di_3)$$

lub też po uproszczeniu

$$-G^*_1 \cdot di_1 = dQ^*_{1-2} + dQ^*_{1-3}$$

$$-G^*_2 \cdot di_2 = dQ^*_{2-1} + dQ^*_{2-3}$$

$$-G^*_3 \cdot di_3 = dQ^*_{3-1} + dQ^*_{3-2}$$

Wstawiając w powyższy układ równań odpowiednie wartości na podstawie wzorów (f), (a), (a′) otrzymamy:

$$-W_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df \tag{1a}$$

$$-W_2 \cdot dy = k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df \tag{1b}$$

$$-W_3 \cdot dz = k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df \tag{1c}$$

Podzielmy teraz każde z powyższych równań przez df i wprowadźmy następujące symbole:

$$\frac{dx}{df} = x'; \quad \frac{dy}{df} = y'; \quad \frac{dz}{df} = z'$$

Po wstawieniu powyższych oznaczeń równania (1a), (1b), (1c) przyjmą następującą formę:

$$-W_1 \cdot x' = k_{1-2} \cdot (x - y) + k_{1-3} \cdot (x - z) \tag{2a}$$

$$-W_2 \cdot y' = k_{1-2} \cdot (y - x) + k_{2-3} \cdot (y - z) \tag{2b}$$

$$-W_3 \cdot z' = k_{1-3} \cdot (z - x) + k_{2-3} \cdot (z - y) \tag{2c}$$

Dodając te równania stronami i upraszczając otrzymamy:

$$W_1 \cdot x' + W_2 \cdot y' + W_3 \cdot z' = 0 \tag{3}$$

Równanie (3) po scałkowaniu przybiera następującą postać:

$$W_1 \cdot x + W_2 \cdot y + W_3 \cdot z = C \tag{3a}$$

Stałą całkowania C wyznaczymy biorąc pod uwagę warunki brzegowe: dla $f = 0$ jest $x = x_p$, $y = y_p$, $z = z_p$, zatem:

$$C = W_1 \cdot x_p + W_2 \cdot y_p + W_3 \cdot z_p \tag{4}$$

W dalszym ciągu należy rozwiązać układ równań (2a), (2b), (2c). Po rozwiązaniu ze względu na zmienną x oraz jej pochodne dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$x'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{W_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{W_3} \right) \cdot x' +$$
$$+ \frac{W_1 + W_2 + W_3}{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3} \cdot k_c^2 \cdot (x - \vartheta) = 0 \qquad (5)$$

Równanie różniczkowe (5) określa przebieg zmienności temperatury czynnika 1 jako funkcji powierzchni porównawczej f. W równaniu tym symbole k_c^2 oraz ϑ odpowiadają wyrażeniom:

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3} + k_{2-3} \cdot k_{1-3} + k_{1-2} \cdot k_{1-3} \qquad (6)$$

$$\vartheta = \frac{C}{W_1 + W_2 + W_3} = \frac{W_1 \cdot x_p + W_2 \cdot y_p + W_3 \cdot z_p}{W_1 + W_2 + W_3} \qquad (7)$$

W dotychczasowych rozważaniach nie uczyniliśmy zastrzeżeń co do gradacji wysokości temperatur początkowych. Równania wyjściowe (2a), (2b), (2c) są ważne zarówno dla kolejności temperatur początkowych przyjętej na rysunku 1, jak i dla każdej innej dowolnej kolejności. Ten fakt upewnia nas, że nie ma już potrzeby rozwiązywać w dalszym ciągu układu równań wyjściowych w celu otrzymania równań różniczkowych, zawierających zmienną y wraz z jej pochodnymi czy zmienną z z jej pochodnymi; wystarczy po prostu w równaniu (5) zamiast x, x', x'' położyć odpowiednio y, y', y'' czy z, z', z''.

Równanie (5) możemy zatem uogólnić dla dowolnego z trzech czynników, albowiem podaje ono pewną rodzinę krzywych o własnościach określonych naszymi założeniami. Ponieważ każdy z czynników będzie posiadał te własności, zatem musi podporządkować się równaniu różniczkowemu (5). Wielkość ϑ posiada wymiar stopni mierzonych na skali Celsiusa. Jest rzeczą dogodną posługiwać się nadwyżkami temperatur ponad temperaturą ϑ. Możemy zatem zgodnie z przyjętymi oznaczeniami (por. str. 10) w stosunku do równania (5) wyrazić związek między temperaturami x, ϑ, t w postaci:

$$t = x - \vartheta \qquad (g)$$

Obie pochodne z wyrażeń x i t będą identyczne, ponieważ ϑ jest wielkością stałą, zależną tylko od warunków brzegowych:

$$x' = t', \quad x'' = t'' \qquad (h)$$

Wstawiając zależności (g) oraz (h) w równaniu (5) otrzymamy:

$$t'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{W_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{W_3} \right) \cdot t' +$$
$$+ \frac{W_1 + W_2 + W_3}{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3} \cdot k_c^2 \cdot t = 0 \qquad (8)$$

Otrzymane równanie jest równaniem różniczkowym II rzędu. Przy znanych wielkościach W_1, W_2, W_3, k_{1-2}, k_{2-3}, k_{1-3} równanie to sprowadza się ostatecznie do postaci:

$$t'' - 2s \cdot t' + b \cdot t = 0 \tag{8a}$$

Wielkości s oraz b są stałe i wynoszą:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{W_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{W_3} \right) \tag{9}$$

$$b = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3} \cdot k_r^2 \tag{10}$$

Rozwiązanie równania (8a) nie przedstawia trudności. Całką szczegółową tego równania jest:

$$t = e^{\lambda \cdot f} \tag{i}$$

Różniczkując powyższe wyrażenie znajdziemy:

$$t' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot f} \tag{j}$$

$$t'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot f} \tag{k}$$

Po wstawieniu zależności (i), (j), (k) w równanie (8a) otrzymamy:

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot f} - 2s \cdot e^{\lambda \cdot f} + b \cdot e^{\lambda \cdot f} = 0$$

Po uproszczeniu przez $e^{\lambda \cdot f}$ dochodzimy do tzw. *równania charakterystycznego* względem równania (8a):

$$\lambda^2 - 2s \cdot \lambda + b = 0 \tag{11}$$

Otrzymane równanie jest równaniem drugiego stopnia, którego pierwiastki wyrażamy następująco:

$$\lambda_1 = s + p \tag{12a}$$

$$\lambda_2 = s - p \tag{12b}$$

Wielkość p figurująca w powyższych równaniach oznacza:

$$p = \sqrt{s^2 - b} \tag{13}$$

Całką ogólną równania (8a) będzie suma całek szczegółowych:

$$t = c_1 \cdot e^{(s+p)f} + c_2 \cdot e^{(s-p)f} \tag{14}$$

Przy określaniu przebiegów temperatur wzdłuż powierzchni f dla każdego z czynników 1, 2, 3 będziemy się posługiwać nadwyżkami temperatur ponad poziomem odniesienia temperatur ϑ. Wstawiając w równanie (14) wielkości t_x, t_y, t_z w miejsce zmiennej t otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} t_x &= A_1 \cdot e^{(s+p)f} + A_2 \cdot e^{(s-p)f} \\ t_y &= B_1 \cdot e^{(s+p)f} + B_2 \cdot e^{(s-p)f} \\ t_z &= C_1 \cdot e^{(s+p)f} + C_2 \cdot e^{(s-p)f} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Układ równań (15) określa przebieg zmienności temperatur poszczególnych czynników wzdłuż powierzchni porównawczej f wymiennika.

Przechodzimy obecnie do znalezienia zależności, które umożliwiłyby obliczenie stałych A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. W tym celu weźmy pod uwagę warunki brzegowe, panujące w przekroju początkowym p—p wymiennika. W przekroju tym zachodzi:

$$f = 0, \quad t_x = t_{px}, \quad t_y = t_{py}, \quad t_z = t_{pz}$$

Wstawiając powyższe zależności w grupę równań (15) otrzymamy trzy następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= t_{px} \\ B_1 + B_2 &= t_{py} \\ C_1 + C_2 &= t_{pz} \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Potrzebne nam są jeszcze dalsze trzy równania, albowiem szukamy wartości 6 niewiadomych. Weźmy pod uwagę równania wyjściowe (2a), (2b), (2c), w których w miejsce x, y, z, x', y', z' wprowadzimy zmienne t_x, t_y, t_z, t_x', t_y', t_z' na podstawie zależności:

$$\left.\begin{aligned} x &= t_x + \vartheta & x' &= t'_x \\ y &= t_y + \vartheta & y' &= t'_y \\ z &= t_z + \vartheta & z' &= t'_z \end{aligned}\right| \qquad (17)$$

w rezultacie otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} -W_1 \cdot t'_x &= k_{1-2} \cdot (t_x - t_y) + k_{1-3} \cdot (t_x - t_z), \\ -W_2 \cdot t'_y &= k_{1-2} \cdot (t_y - t_x) + k_{2-3} \cdot (t_y - t_z), \\ -W_3 \cdot t'_z &= k_{1-3} \cdot (t_z - t_x) + k_{2-3} \cdot (t_z - t_y). \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

Z równań (18) wyznaczamy wartości pochodnych t'_{px}, t'_{py}, t'_{pz} dla przekroju początkowego p—p kładąc $t_x = t_{px}$, $t_y = t_{py}$, $t_z = t_{pz}$:

$$\left.\begin{aligned} t'_{px} &= -\frac{k_{1-2}}{W_1} \cdot (t_{px} - t_{py}) - \frac{k_{1-3}}{W_1} \cdot (t_{px} - t_{pz}) \\ t'_{py} &= -\frac{k_{1-2}}{W_2} \cdot (t_{py} - t_{px}) - \frac{k_{2-3}}{W_2} \cdot (t_{py} - t_{pz}) \\ t'_{pz} &= -\frac{k_{1-3}}{W_3} \cdot (t_{pz} - t_{px}) - \frac{k_{2-3}}{W_3} \cdot (t_{pz} - t_{py}) \end{aligned}\right| \qquad (19)$$

Różniczkując równanie (15) oraz kładąc $f = 0$, $t'_x = t'_{px}$, $t'_y = t'_{py}$, $t'_z = t'_{pz}$ otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} t'_{px} &= (s + p) \cdot A_1 + (s - p) \cdot A_2 \\ t'_{py} &= (s + p) \cdot B_1 + (s - p) \cdot B_2 \\ t'_{pz} &= (s + p) \cdot C_1 + (s - p) \cdot C_2 \end{aligned}\right| \qquad (20)$$

Grupy równań (19) oraz (20) dostarczają nam trzech dalszych równań potrzebnych do wyznaczenia stałych całkowania A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2.

P r z y k ł a d 1

Trójprzegrodowy, trójczynnikowy współprąd

Dane: $F = 1$ m²

$$W_1 = 100 \frac{\text{kcal}}{1^\circ \cdot \text{h}}; \quad k_{1-2} = 10 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad x_p = 100\ ^\circ\text{C}$$

$$W_2 = 50 \quad ,, \quad k_{2-3} = 10 \quad ,, \quad y_p = 20\ ^\circ\text{C}$$

$$W_3 = 10 \quad ,, \quad k_{1-3} = 20 \quad ,, \quad z_p = 0\ ^\circ\text{C}$$

Obliczyć temperatury końcowe x_k, y_k, z_k °C.

Rozwiązanie:

Obliczenie wielkości pomocniczych na podstawie równań (6) — (20) z rozdziału pierwszego:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{30}{100} + \frac{20}{50} + \frac{30}{10}\right) = -1{,}85 \qquad \text{(I, 9)}$$

$$k_c^2 = 100 + 200 + 200 = 500 \qquad \text{(I, 6)}$$

$$b = \frac{100 + 50 + 10}{100 \cdot 50 \cdot 10} \cdot 500 = 1{,}6 \qquad \text{(I, 10)}$$

$$p = \sqrt{1{,}85^2 - 1{,}6} = 1{,}35 \qquad \text{(I, 13)}$$

$$s + p = -1{,}85 + 1{,}35 = -0{,}5$$

$$s - p = -1{,}85 - 1{,}35 = -3{,}2$$

$$\vartheta = \frac{100 \cdot 100 + 50 \cdot 20 + 10 \cdot 0}{100 + 50 + 10} = 68{,}8\ ^\circ\text{C} \qquad \text{(I, 7)}$$

$$t_{px} = 100 - 68{,}8 = 31{,}2^\circ$$

$$t_{py} = 20 - 68{,}8 = -48{,}8^\circ$$

$$t_{pz} = 0 - 68{,}8 = -68{,}8^\circ$$

$$A_1 + A_2 = 31{,}2 \qquad \text{(I, 16)}$$

$$t'_{px} = -\frac{10}{100} \cdot (31{,}2 + 48{,}8) - \frac{20}{100} \cdot (31{,}2 + 68{,}8) = -28 \qquad \text{(I, 19)}$$

$$-28 = -0{,}5 \cdot A_1 - 3{,}2 \cdot A_2 \qquad \text{(I, 20)}$$

$$A_1 = 26{,}6^\circ; \quad A_2 = 4{,}6^\circ$$

$$t_{kx} = 26{,}6 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 1} + 4{,}6 \cdot e^{-3{,}2 \cdot 1} = 16{,}18^\circ \qquad \text{(I, 15)}$$

$$x_k = 16{,}18 + 68{,}8 = 85{,}6\ ^\circ\text{C} \qquad \text{(I, g)}$$

$$t'_{py} = -\frac{10}{50} \cdot (-48 - 31{,}2) - \frac{10}{50} \cdot (-48{,}8 + 68{,}8) = 12 \qquad \text{(I, 19)}$$

$$12 = -0{,}5 \cdot B_1 - 3{,}2 \cdot B_2 \qquad \text{(I, 20)}$$

$$B_1 + B_2 = -48{,}8 \qquad \text{(I, 16)}$$

$$B_1 = -53{,}4^\circ; \quad B_2 = 4{,}6^\circ$$

$$t_{ky} = -53{,}4 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 1} + 4{,}6 \cdot e^{-3{,}2 \cdot 1} = -31{,}9^\circ \qquad \text{(I, 15)}$$

$$y_k = -31{,}9 + 68{,}8 = 36{,}9\ ^\circ\text{C}$$

$$t'_{pz} = -\frac{20}{10}(-68{,}8 - 31{,}2) - \frac{10}{10}(-68{,}8 + 48{,}8) = 220 \qquad \text{(I, 19)}$$

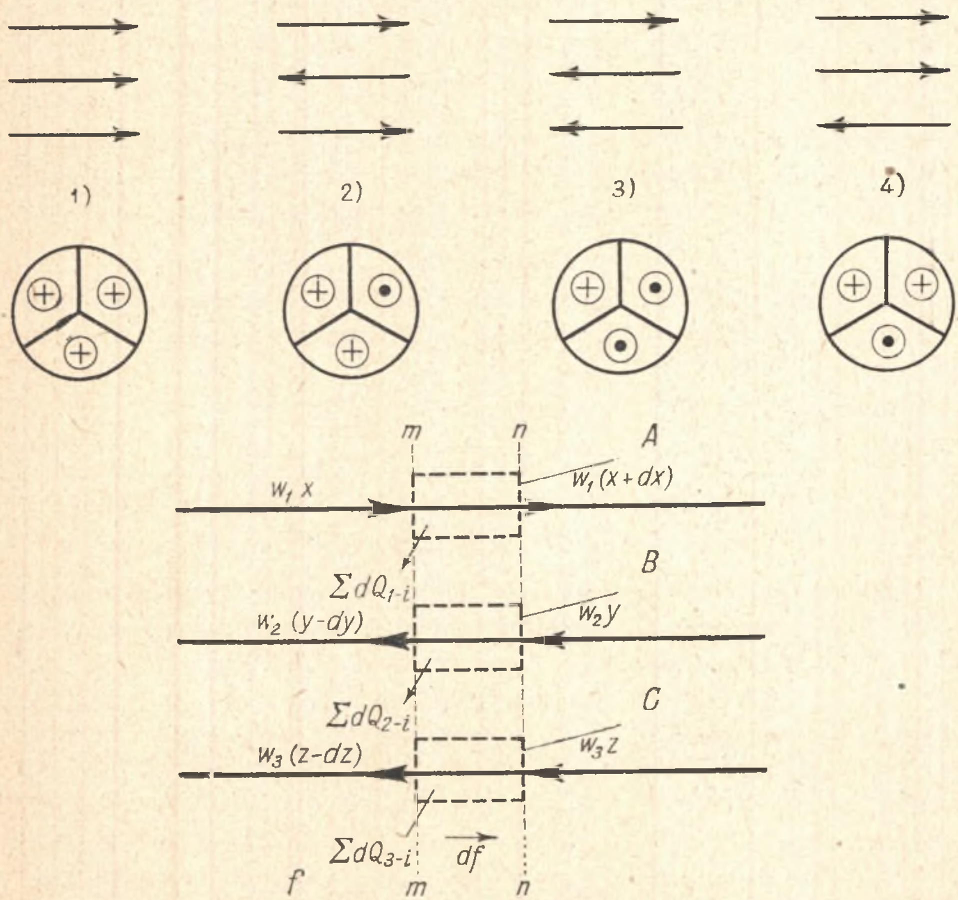
$$220 = -0{,}5\, C_1 - 3{,}2\, C_2 \ldots \text{(I, 20)}, \quad C_1 + C_2 = -68{,}8 \qquad \text{(I, 16)}$$

$$C_1 = 0\,; \quad C_2 = -68{,}8^\circ$$

$$t_{k2} = -68{,}8 \cdot e^{-3{,}2 \cdot 1} = -2{,}75^\circ \qquad z_k = 66\ ^\circ\text{C}$$

II. Wymiennik trójprzegrodowy o różnokierunkowym przepływie czynników

Wymiennik omówiony poprzednio odznaczał się zgodnym (jednokierunkowym) przepływem trzech czynników. W ogólności jednak w wymienniku trójczynnikowym mogą istnieć 4 odmiany (rys. 2) różniące się zasadniczo od siebie kierunkiem przepływu czynników.



Rys. 2. Odmiany wymienników trójprzegrodowych

Obecnie udowodnimy, że równania (I, 1a, 1b, 1c) są ważne również dla wszystkich typów wymienników trójczynnikowych trójprzegrodowych, z tym jednak, że wartości równoważników wodnych natężenia przepływu zmieniają znak wraz ze zmianą kierunku przepływu czynnika w stosunku do klasycznego współprądu.

Weźmy pod uwagę np. odmianę 3 (rys. 2). Analogicznie jak w rozdziale I ujmujemy w osłony diatermiczne trzy elementarne układy A, B, C zawarte pomiędzy nieskończenie bliskimi przekrojami $m—m$ i $n—n$. Elementarne ciepła dQ^* odprowadzone od czynników poprzez przegrody nie zależą od kierunku przepływu czynników, lecz jedynie od różnic temperatur i od współczynników Pecleta. Możemy zatem korzystać przy ich wyznaczaniu z równań Pecleta w niezmienionej postaci.

Elementarny bilans cieplny dla wymiennika typu 3 będzie miał następującą postać:

$$W_1 \cdot x = W_1 \cdot (x + dx) + k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df \qquad \text{(A)}$$

$$W_2 \cdot y = W_2 \cdot (y - dy) + k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df \qquad \text{(B)}$$

$$W_3 \cdot z = W_3 \cdot (z - dz) + k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df \qquad \text{(C)}$$

W równaniach (B) i (C) byliśmy zmuszeni przyrost temperatury opatrzyć znakiem minus. Przyczyną tego jest fakt, iż od przekroju $n—n$ do przekroju $m—m$ powierzchnia f zmniejszyła się; ponieważ szukamy zależności

$$x = \varphi_1(f), \qquad y = \varphi_2(f), \qquad z = \varphi_3(f)$$

musimy podporządkować przyrostowi powierzchni f przyrost temperatury dx, dy, dz i odwrotnie ubytkowi powierzchni — ubytek temperatur: $-dy$, $-dz$.

Po uporządkowaniu równań (A), (B) i (C) otrzymamy:

$$-W_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df$$

$$W_2 \cdot dy = k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df$$

$$W_3 \cdot dz = k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df$$

Skonfrontujemy teraz powyższy układ równań z układem równań (I, 1a, 1b, 1c) ważnym dla współprądowego trójprzegrodowego wymiennika:

$$-W_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df$$

$$-W_2 \cdot dy = k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df$$

$$-W_3 \cdot dz = k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df$$

Różnica polega jedynie na tym, że wartości równoważników wodnych natężenia przepływu zmieniły znak, w tym przypadku gdy kierunek przepływu czynnika uległ zmianie.

Z powyższego wynika, iż wolno nam przyjąć następującą umowę: *Równoważnik wodny natężenia przepływu uważamy za dodatni wówczas, gdy kierunek przepływu czynnika jest zgodny z kierunkiem wzrostu powierzchni, gdy natomiast kierunek przepływu czynnika jest przeciwny kierunkowi wzrostu powierzchni — wartość równoważnika wodnego natężenia przepływu traktujemy jako ujemną.*

Tego rodzaju umowa upoważnia zatem do traktowania równoważnika wodnego natężenia przepływu jako wartości algebraicznej. Jeśli więc wprowadzimy w miejsce równoważników wodnych natężenia przepływu W_1, W_2, W_3 wartości algebraiczne w_1, w_2, w_3, których znak jest w myśl naszej umowy uzależniony od kierunku przepływu, to tym samym uogólniamy podstawowe równania (I, 1a, 1b, 1c, 5, 8, 9 i 10) czyniąc je ważnymi także i dla przepływu różnokierunkowego czynników. Wyżej wymienione równania przyjmą wówczas następującą postać:

$$-w_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df \tag{1a}$$

$$-w_2 \cdot dy = k_{1-2} \cdot (y - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (y - z) \cdot df \tag{1b}$$

$$-w_3 \cdot dz = k_{1-3} \cdot (z - x) \cdot df + k_{2-3} \cdot (z - y) \cdot df \tag{1c}$$

$$x'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3} \right) \cdot x' + \\ + \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot k_c^2 \cdot (x - \vartheta) = 0 \tag{2}$$

$$t'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3} \right) \cdot t' + \\ + \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot k_c^2 \cdot t = 0 \tag{3}$$

$$t'' - 2 \cdot s \cdot t' + b \cdot t = 0 \tag{3a}$$

$$s = -\frac{1}{2} \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3} \right) \tag{4}$$

$$b = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot k_c^2 \tag{5}$$

$$p = \sqrt{s^2 - b} \tag{6}$$

W wymienniku o różnokierunkowym przepływie czynników kwestia obliczenia wartości poziomu odniesienia temperatur ϑ komplikuje się wskutek tego, że wlot czynników do wymiennika następuje z różnych stron wymiennika. W przypadku wymiennika ciepła o różnokierunkowym przepływie czynników we wzorze (I, 7) należy wprowadzić algebraiczne wartości równoważników wodnych natężenia przepływu.[1]

[1] Zakładamy tu: $w_1 + w_2 + w_3 \neq 0$. Przypadek, gdy $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ będzie przedmiotem rozważań w następnym rozdziale.

$$\vartheta = \frac{w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p}{w_1 + w_2 + w_3} \tag{7}$$

Jednak i wzór (7) nie umożliwia bezpośredniego obliczenia wartości ϑ, albowiem co najmniej jedna spośród temperatur x_p, y_p, z_p nie jest podana w założeniu.

Sprawa obliczenia stałych A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 występujących we wzorach:

$$\left.\begin{aligned} t_x &= x - \vartheta = A_1 \cdot e^{(s+p)f} + A_2 \cdot e^{(s-p)f} \\ t_y &= y - \vartheta = B_1 \cdot e^{(s+p)f} + B_2 \cdot e^{(s-p)f} \\ t_z &= z - \vartheta = C_1 \cdot e^{(s+p)f} + C_2 \cdot e^{(s-p)f} \end{aligned}\right| \tag{8}$$

również nie przedstawia się prosto, bowiem poza równaniami

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= t_{px} = x_p - \vartheta \\ B_1 + B_2 &= t_{py} = y_p - \vartheta \\ C_1 + C_2 &= t_{pz} = z_p - \vartheta \end{aligned}\right| \tag{9}$$

nie mamy chwilowo dalszych trzech równań potrzebnych do obliczenia 6 stałych.

Metoda, która pomimo tych trudności prowadzi do rozwiązania oparta jest na następujących przesłankach:

1) przekrój krańcowy, w którym są znane temperatury dolotowe dwóch czynników, obieramy za przekrój początkowy p—p. Nie znaną temperaturę t_{np} °C trzeciego czynnika w tym przekroju wprowadzamy do obliczeń w formie niewiadomej.

2) korzystamy ze wzorów (I, 19 i 20), które modyfikujemy w taki sposób, aby uczynić je ważnymi dla wymiennika różnoprądowego, to znaczy kładąc zamiast W_i wartości algebraiczne w_i

$$\left.\begin{aligned} t'_{px} &= x'_p = -\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot (x_p - y_p) - \frac{k_{1-3}}{w_1} \cdot (x_p - z_p) \\ t'_{py} &= y'_p = -\frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (y_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_2} \cdot (y_p - z_p) \\ t'_{pz} &= z'_p = -\frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot (z_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_3} \cdot (z_p - y_p) \end{aligned}\right| \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} t'_{px} &= x'_p = (s+p) \cdot A_1 + (s-p) \cdot A_2 \\ t'_{py} &= y'_p = (s+p) \cdot B_1 + (s-p) \cdot B_2 \\ t'_{pz} &= z'_p = (s+p) \cdot C_1 + (s-p) \cdot C_2 \end{aligned}\right| \tag{11}$$

W grupie równań (10) jedna spośród temperatur x_p, y_p, z_p °C nie jest podana w założeniu. Dzięki temu zarówno 6 stałych jak i temperatura ϑ będą mogły być wyznaczone jedynie jako funkcje tej nieznanej wartości t_{np} °C.

3) Spośród równań (10) obieramy to równanie, które dotyczy czynnika o nieznanej temperaturze w przekroju początkowym p—p (t_{np} °C), wyznaczamy stałe figurujące w tym równaniu (przy tym stałe te będą funkcjami temperatury t_{np} °C) za pomocą odpowiednich równań wybranych z grup (11) i (9), po czym stałe te wprowadzamy do odpowiedniego równania z grupy (8).

4) Jeżeli w równaniu otrzymanym w ten sposób położymy $f = F$, to otrzymamy wartość t_{nk} °C, która podana jest w założeniu Ta nowa zależność pozwoli nam ostatecznie obliczyć wartości t_{np} °C oraz 6 szukanych stałych całkowania.

P r z y k ł a d 2

Trójprzegrodowy, trójczynnikowy różnoprąd

Dane: $F = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$

$$\begin{array}{llll}
w_1 = 20\ \dfrac{\mathrm{kcal}}{1^\circ \cdot \mathrm{h}} & k_{1-2} = 20\ \dfrac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{h} \cdot 1^\circ}; & x_p = 100\ ^\circ\mathrm{C} \\
w_2 = -10\ \ ,, & k_{2-3} = 10\ \ ,, & y_k = 20\ ^\circ\mathrm{C} \\
w_3 = 10\ \ ,, & k_{1-3} = 10\ \ ,, & z_p = 0\ ^\circ\mathrm{C}
\end{array}$$

Obliczyć temperatury x_k, z_k, y_p °C

Rozwiązanie:

Obliczenie wielkości pomocniczych:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{30}{20} + \frac{30}{-10} + \frac{20}{10}\right) = -0{,}25 \qquad \text{(II, 4)}$$

$$k_c^2 = 20 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 500 \qquad \text{(I, 6)}$$

$$b = \frac{20 - 10 + 10}{20\,(-10)\,10}\ 500 = -5 \qquad \text{(II, 5)}$$

$$p = \sqrt{(-0{,}25)^2 + 5} = 2{,}25 \qquad \text{(II, 6)}$$

$$s + p = -0{,}25 + 2{,}25 = 2$$

$$s - p = -0{,}25 - 2{,}25 = -2{,}5$$

$$\vartheta = \frac{20 \cdot 100 - 10 \cdot y_p + 0}{20 - 10 + 10} = 100 - 0{,}5 \cdot y_p \qquad \text{(II, 7)}$$

$$\left.\begin{aligned}
2 \cdot A_1 - 2{,}5 \cdot A_2 &= -\frac{20}{20}\,(100 - y_p) - \frac{10}{20} \cdot (100 - 0) \\
2 \cdot B_1 - 2{,}5 \cdot B_2 &= -\frac{20}{-10}\,(y_p - 100) - \frac{10}{-10} \cdot (y_p - 0) \\
2 \cdot C_1 - 2{,}5 \cdot C_2 &= -\frac{10}{10}\,(0 - 100) - \frac{10}{10} \cdot (0 - y_p)
\end{aligned}\right| \qquad \text{(II, 11, 10)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 100 - 100 + 0{,}5 \cdot y_p = 0{,}5 \cdot y_p \\ B_1 + B_2 &= y_p - 100 + 0{,}5 \cdot y_p = 1{,}5 \cdot y_p - 100 \\ C_1 + C_2 &= 0 - 100 + 0{,}5 \cdot y_p = 0{,}5 \cdot y_p - 100 \end{aligned}\right| \qquad \text{(II, 9)}$$

$$2 \cdot A_1 - 2{,}5 \cdot A_2 = y_p - 150$$

$$2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 = y_p$$

$$A_1 = 0{,}5 \cdot y_p - 33{,}3$$

$$A_2 = 33{,}3\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$2 \cdot B_1 - 2{,}5 \cdot B_2 = 3 \cdot y_p - 200$$

$$2 \cdot B_1 + 2 \cdot B_2 = 3 \cdot y_p - 200$$

$$B_1 = 1{,}5 \cdot y_p - 100,$$

$$B_2 = 0$$

$$t_y = y - \vartheta = (1{,}5 \cdot y_p - 100) \cdot e^{2 \cdot f} + 0 \cdot e^{-2{,}5 \cdot f} \qquad \text{(II, 8)}$$

$$t_{ky} = y_k - \vartheta = (1{,}5 \cdot y_p - 100) \cdot e^{2 \cdot 0{,}5}$$

$$20 - 100 + 0{,}5 \cdot y_p = (1{,}5 \cdot y_p - 100) \cdot 2{,}718$$

stąd:

$$y_p = 53{,}7\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$B_1 = 1{,}5 \cdot y_p - 100 = 1{,}5 \cdot 53{,}7 - 100 = -19{,}4^\circ$$

$$A_1 = 0{,}5 \cdot y_p - 33{,}3 = 0{,}5 \cdot 53{,}7 - 33{,}3 = -6{,}48^\circ$$

$$\vartheta = 100 - 0{,}5 \cdot y_p = 100 - 0{,}5 \cdot 53{,}7 = 73{,}15^\circ$$

$$2 \cdot C_1 - 2{,}5 \cdot C_2 = y_p + 100 = 153{,}7$$

$$2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 = y_p - 200 = 146{,}3$$

$$C_1 = -6{,}48^\circ$$

$$C_2 = -66{,}67^\circ$$

$$t_x = -6{,}48\, e^{2 \cdot f} + 33{,}3 \cdot e^{-2{,}5 \cdot f} \qquad \text{(II, 8)}$$

$$t_{kx} = -6{,}48 \cdot e^{2 \cdot 0{,}5} + 33{,}3 \cdot e^{-2{,}5 \cdot 0{,}5} = -8{,}05^\circ$$

$$x_k = \vartheta + t_{kx} = 73{,}15 - 8{,}05 = 65{,}1\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$t_z = -6{,}48\, e^{2f} - 66{,}67 \cdot e^{-2{,}5f} \qquad \text{(II, 8)}$$

$$t_{kz} = -6{,}48 \cdot e^{2 \cdot 0{,}5} - 66{,}67 \cdot e^{-2{,}5 \cdot 0{,}5} = -36{,}7^\circ$$

$$z_k = \vartheta + t_{kz} = 73{,}15 - 36{,}7 = 36{,}45\ ^\circ\mathrm{C}$$

Zestawienie:

temperatury w przekroju p—p	temperatury w przekroju k—k
$x_p = 100\ ^\circ\mathrm{C}$	$x_k = 65{,}1\ ^\circ\mathrm{C}$
$y_p = 53{,}7\ ^\circ\mathrm{C}$	$y_k = 20\ ^\circ\mathrm{C}$
$z_p = 0\ ^\circ\mathrm{C}$	$z_k = 36{,}45\ ^\circ\mathrm{C}$

Kontrola (II, 7):

$$\vartheta = \frac{w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{20{,}0 \cdot 100 + (-10)\,53{,}7 + 10 \cdot 0}{20 - 10 + 10} = \mathbf{73{,}15}\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$\vartheta = \frac{w_1 \cdot x_k + w_2 \cdot y_k + w_3 \cdot z_k}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{20 \cdot 65{,}1 - 10 \cdot 20 + 10 \cdot 36{,}45}{20 - 10 + 10} = \mathbf{73{,}32}\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$\text{błąd:}\quad \frac{73{,}32 - 73{,}15}{73{,}15} \cdot 100 = 0{,}232\,\%$$

III. Wymiennik trójprzegrodowy trójczynnikowy, w którym algebraiczna suma równoważników wodnych natężenia przepływu wynosi zero

Przejdziemy teraz do omówienia szeczególnego przypadku wymiennika, w którym algebraiczna suma równoważników wodnych natężenia przepływu jest równa zeru:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \tag{a}$$

Warunek powyższy pociąga za sobą fakt, że równanie różniczkowe określające przebieg zmienności temperatur czynników wzdłuż powierzchni czynnej wymiennika zmienia swój charakter. Przyczyną tego jest, że poziom odniesienia temperatur ϑ określony równaniem (II, 7)

$$\vartheta = \frac{w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p}{w_1 + w_2 + w_3} \tag{1}$$

zdąża do nieskończoności, gdy suma algebraiczna $w_1 + w_2 + w_3$ zdąża do zera.

Weźmy pod uwagę równanie (II, 2). Trzeci wyraz tego równania po uwzględnieniu zależności (1) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot k_c^2 \cdot \left(x - \frac{w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p}{w_1 + w_2 + w_3}\right) \tag{b}$$

Otóż wyraz ten przybiera postać nieoznaczoną typu $0 \cdot \infty$ dla $(w_1 + w_2 + w_3) \to 0$.

W celu znalezienia granicy, do której zdąża wyrażenie (b), dla warunku (a) przekształcamy to wyrażenie:

$$\frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}\left[x \cdot (w_1 + w_3 + w_2) - \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3}(w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p)\right]$$

upraszczając je i kładąc $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ otrzymamy:

$$-\frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot (w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p)$$

Równanie różniczkowe przybiera zatem następujący charakter dla rozważanego przypadku:

$$x'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3}\right) \cdot x' =$$

$$= \frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot (w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p) \tag{2}$$

Jak widać w równaniu powyższym nie figuruje zupełnie zmienna x, natomiast występują jej obie pochodne x', x''.

Przystępujemy do obliczenia całki ogólnej równania (2). Równanie to jest typu:

$$x'' - 2 \cdot s \cdot x' - d = 0 \tag{a}$$

gdzie s oraz d są to współczynniki stałe. Zastosujemy tu następujące podstawienie:

$$x' = u' - \frac{d}{2s} \tag{b}$$

Różniczkujemy zależność (b):

$$x'' = u'' \tag{c}$$

Wstawiamy równania (b) oraz (c) do równania (a):

$$u'' - 2\, su' = 0 \tag{d}$$

Całką ogólną równania (d) jest:

$$u = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot f} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot f} \tag{e}$$

gdzie λ_1 i λ_2 są to pierwiastki równania:

$$\lambda^2 - 2 \cdot s \cdot \lambda = 0 \tag{f}$$

Z równania (f) obliczamy λ_1 i λ_2:

$$\lambda \cdot (\lambda - 2\, s) = 0\,; \quad \lambda_1 = 2\, s\,; \quad \lambda_2 = 0$$

Wstawiamy powyższe wartości z powrotem do równania (e)

$$u = c_1 \cdot e^{2 \cdot sf} + C_2 \tag{g}$$

Wracamy do równania (b), w którym podstawiamy:

$$x' = \frac{dx}{df}\,; \quad u' = \frac{du}{df}$$

Równanie (b) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dx}{df} + \frac{d}{2\, s} = \frac{du}{df} \quad \text{lub} \quad dx + \frac{d}{2\, s} \cdot df = du \tag{h}$$

po scałkowaniu powyższego będzie:

$$x + \frac{d}{2s} \cdot f = u + c_3, \text{ skąd } u = x + \frac{d}{2s} \cdot f + c_3 \tag{i}$$

Wstawiając równanie (i) w równanie (g) otrzymamy:

$$x = c_1 \cdot e^{2 \cdot sf} - \frac{d}{2s} \cdot f + c_2 + c_3$$

Zatem całka ogólna równania (2) przedstawia się następująco:

$$x = A_1 \cdot e^{2 \cdot s \cdot f} - \frac{d}{2s} \cdot f + A_2 \tag{3a}$$

Postępując analogicznie jak poprzednio, lecz względem zmiennych y oraz z otrzymamy:

$$y = B_1 \cdot e^{2s \cdot f} - \frac{d}{2s} \cdot f + B_2 \tag{3b}$$

$$z = C_1 \cdot e^{2s \cdot f} - \frac{d}{2s} \cdot f + C_2 \tag{3c}$$

Jak widzimy przebieg zmienności temperatur ma tu inny charakter jak dla różnoprądu o $w_1 + w_2 + w_3 \neq 0$, omówionego w poprzednim rozdziale.

Jeśli chodzi o wyznaczenie stałych w równaniach (3a), (3b), (3c), to należy zauważyć, że metoda ich wyznaczania jest podobna do metody zastosowanej dla różnoprądu. Bierzemy pod uwagę warunki brzegowe: dla $f=0$, $x=x_p$, $y=y_p$, $z=z_p$, które wstawione w równania (3a), (3b), (3c) dają:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_p \\ B_1 + B_2 &= y_p \\ C_1 + C_2 &= z_p \end{aligned} \right| \tag{4}$$

Jeśli za przekrój początkowy p—p obierzemy ten przekrój krańcowy, w którym znane są temperatury dolotowe dwóch czynników, to w równaniach (4) będzie nie znana tylko jedna wielkość spośród x_p, y_p, z_p.

Grupa równań (II, 10) zachowuje tutaj ważność, ponieważ równania te wynikają z prawa Pecleta zastosowanego w przekroju początkowym p—p wymiennika:

$$\left. \begin{aligned} x_p' &= -\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot (x_p - y_p) - \frac{k_{1-3}}{w_1} \cdot (x_p - z_p) \\ y_p' &= -\frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (y_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_2} \cdot (y_p - z_p) \\ z_p' &= -\frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot (z_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_3} \cdot (z_p - y_p) \end{aligned} \right| \tag{5}$$

Dalszą zależność potrzebną do wyznaczenia stałych całkowania otrzymamy różniczkując równania (3a), (3b), (3c) i kładąc następnie $f = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x'_p &= A_1 - \frac{d}{2s} \\ y'_p &= B_1 - \frac{d}{2s} \\ z'_p &= C_1 - \frac{d}{2s} \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

Ponieważ sposób postępowania i kolejność obliczeń są takie same jak dla różnoprądu o $w_1 + w_2 + w_3 \neq 0$, przeto nie ma potrzeby jeszcze raz tego powtarzać. Przykład liczbowy na str. 30 ilustruje najlepiej metodę obliczania stałych dla omawianego przypadku.

W równaniu (6) wartości d oraz s oznaczają:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3}\right) \qquad (7)$$

$$d = \frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} \cdot (w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p) \qquad (8)$$

P r z y k ł a d 3

Trójprzegrodowy, trójczynnikowy różnoprąd, w którym algebraiczna suma równoważników wodnych natężenia przepływu jest równa zeru

Dane: $F = 1$ m²

$w_1 = -20 \frac{\text{kcal}}{1^\circ \cdot \text{h}}$; $k_{1-2} = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{h} \cdot 1^\circ}$, $x_k = 100$ °C

$w_2 = 10$,, $k_{2-3} = 10$,, $y_p = 50$ °C

$w_3 = 10$,, $k_{1-3} = 10$,, $z_p = 0$ °C

Obliczyć: x_p, y_k, z_k °C.

Rozwiązanie:

Obliczenie wielkości pomocniczych:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20 + 10}{-20} + \frac{20 + 10}{10} + \frac{10 + 10}{10}\right) = -1{,}75 \qquad \text{(III, 7)}$$

$$\mathbf{2\,s = -3{,}5,}$$

$$k_c^2 = 20 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 500 \qquad \text{(I, 6)}$$

$$d = \frac{500}{-20 \cdot 10 \cdot 10} \cdot (-20 \cdot x_p + 10 \cdot 50 + 10 \cdot 0) = 5 \cdot x_p - 125 \qquad \text{(III, 8)}$$

$$-\frac{d}{2s} = \frac{125 - 5 \cdot x_p}{-3{,}5} = 1{,}43 \cdot x_p - 35{,}7$$

$$\left.\begin{aligned} x'_p &= -\frac{20}{20}\cdot(x_p - 50) - \frac{10}{-20}\cdot(x_p - 0) = 1{,}5\cdot x_p - 50 \\ y'_p &= -\frac{20}{10}\cdot(50 - x_p) - \frac{10}{10}\cdot(50 - 0) = 2\cdot x_p - 150 \\ z'_p &= -\frac{10}{10}\cdot(0 - x_p) - \frac{10}{10}\cdot(0 - 50) = x_p + 50 \end{aligned}\right| \quad \text{(III, 5)}$$

$$x'_p = -3{,}5\cdot A_1 + 1{,}43\cdot x_p - 35{,}7 \qquad \text{(III, 6)}$$

$$(5) \rightarrow (6)$$

$$1{,}5\cdot x_p - 50 = -3{,}5\, A_1 + 1{,}43\cdot x_p - 35{,}7$$

$$A_1 = 4{,}085 - 0{,}0206\cdot x_p$$

$$A_2 = A_1 + x_p = x_p - 4{,}085 + 0{,}0206\cdot x_p \qquad \text{(III, 4)}$$

$$A_2 = 1{,}0206\cdot x_p - 4{,}085,$$

dla
$$f = F = 1\ \mathrm{m}^2, \quad x = x_k = 100\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$100 = (4{,}085 - 0{,}0206\cdot x_p)\, e^{3{,}5\cdot 1} + 1{,}43\cdot x_p - 35{,}7 +$$
$$+ 1{,}0206\cdot x_p - 4{,}085 \qquad \text{(III, 3a)}$$

stąd
$$x_p = 57\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$-\frac{d}{2s} = 1{,}43\cdot x_p - 35{,}7 = 1{,}43\cdot 57 - 35{,}7 = 45{,}9$$

$$y'_p = 2\cdot x_p - 150 = 2\cdot 57 - 150 = -36$$

$$-36 = -3{,}5\cdot B_1 + 45{,}9 \qquad \text{(III, 6)}$$

$$B_1 = 23{,}4$$

$$B_1 + B_2 = y_p \qquad \text{(III, 4)}$$

$$B_2 = 50 - 23{,}4 = 26{,}6$$

$y_k = 23{,}4\cdot e^{-3{,}5\cdot 1} + 45{,}9 + 26{,}6$ z (III, 3b) dla $f = F = 1\ \mathrm{m}^2$

$$y_k = 73{,}2\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$z'_p = x_p + 50 = 57 + 50 = 107$$

$$107 = -3{,}5\cdot C_1 + 45{,}9 \qquad \text{(III, 6)}$$

$$C_1 = -17{,}46$$

$$C_1 + C_2 = z_p \qquad \text{(III, 4)}$$

$$C_2 = 0 + 17{,}46 \qquad C_2 = 17{,}46$$

$z_k = -17{,}46\cdot e^{-3{,}5\cdot 1} + 45{,}9 + 17{,}46\ldots$ z (III, 3b) dla $f = F = 1\ \mathrm{m}^2$

$$z_k = 62{,}84\ ^\circ\mathrm{C}$$

Zestawienie:

temperatury w przekroju p—p	temperatury w przekroju k—k
$x_p = 57\ ^\circ\mathrm{C}$	$x_k = 100\ ^\circ\mathrm{C}$
$y_p = 50\ ^\circ\mathrm{C}$	$y_k = 73{,}2\ ^\circ\mathrm{C}$
$z_p = 0\ ^\circ\mathrm{C}$	$z_k = 62{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$

Kontrola: na podstawie bilansu wymiennika musi być spełnione:

$$\Sigma w_1 \cdot t_{p1} = \Sigma w_1 \cdot t_{k1}$$

$$-20 \cdot 57 + 10 \cdot 50 = 20 \cdot 100 + 10 \cdot 73{,}2 + 10 \cdot 62{,}8$$

$$640 = 640$$

IV. Różnoprąd trójprzegrodowy o prostoliniowym przebiegu temperatur

Jak wiemy z wywodów zawartych na str. 27—30 dla różnoprądu, w którym

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \tag{1}$$

równania krzywych przebiegu temperatur (III, 3a, 3b, 3c) mają następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cdot e^{2sf} - \frac{d}{2s} \cdot f + A_2 \\ y &= B_1 \cdot e^{2sf} - \frac{d}{2s} \cdot f + B_2 \\ z &= C_1 \cdot e^{2sf} - \frac{d}{2s} \cdot f + C_2 \end{aligned}\right| \tag{2}$$

Otóż jeśli współczynniki A_1, B_1, C_1 uczynimy równymi zeru:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0 \tag{3}$$

to linie przebiegu temperatur będą prostymi przebiegającymi równolegle do siebie:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{d}{2s} \cdot f + A_2 \\ y &= -\frac{d}{2s} \cdot f + B_2 \\ z &= -\frac{d}{2s} \cdot f + C_2 \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Postawimy sobie teraz zadanie znaleźć warunki, które muszą być spełnione, aby otrzymać taki właśnie przebieg temperatury (różnoprąd prostoliniowy).

Rozważany rodzaj wymiennika jest szczególnym przypadkiem różnoprądu, dla którego zachodzi równość (1), zatem słuszne są tu także wzory (III, 5):

$$x'_p = -\frac{k_{1-2}}{w_1}\cdot(x_p - y_p) - \frac{k_{1-3}}{w_1}\cdot(x_p - z_p)$$

$$y'_p = -\frac{k_{1-2}}{w_2}\cdot(y_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_2}\cdot(y_p - z_p)$$

$$z'_p = -\frac{k_{1-3}}{w_3}\cdot(z_p - x_p) - \frac{k_{2-3}}{w_3}\cdot(z_p - y_p)$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$x_p - y_p = \Theta_{1-2};\quad y_p - z_p = \Theta_{2-3};\quad x_p - z_p = \Theta_{1-3} \tag{a}$$

otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} x'_p &= -\frac{k_{1-2}}{w_1}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{1-3}}{w_1}\cdot\Theta_{1-3} \\ y'_p &= \frac{k_{1-2}}{w_2}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{2-3}}{w_3}\cdot\Theta_{2-3} \\ z'_p &= \frac{k_{1-3}}{w_3}\cdot\Theta_{1-3} + \frac{k_{2-3}}{w_3}\cdot\Theta_{2-3} \end{aligned}\right| \tag{5}$$

Równania (2) po zróżniczkowaniu, dla warunków panujących w przekroju początkowym (dla $f = 0$) przyjmują postać:

$$x'_p = 2s\cdot A_1 - \frac{d}{2s};\quad y'_p = 2s\cdot B_1 - \frac{d}{2s};\quad z'_p = 2s\cdot C_1 - \frac{d}{2s} \tag{6}$$

Łącząc ze sobą grupy równań (5) i (6) wyznaczymy stałe A_1, B_1, C_1:

$$2s\cdot A_1 = -\frac{k_{1-2}}{w_1}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{1-3}}{w_1}\cdot\Theta_{1-3} + \frac{d}{2s}$$

$$2s\cdot B_1 = \frac{k_{1-2}}{w_2}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{2-3}}{w_2}\cdot\Theta_{2-3} + \frac{d}{2s}$$

$$2s\cdot C_1 = \frac{k_{1-3}}{w_3}\cdot\Theta_{1-3} + \frac{k_{2-3}}{w_3}\cdot\Theta_{2-3} + \frac{d}{2s}$$

Każda ze stałych A_1, B_1, C_1 osiągnie wartość równą zeru, gdy:

$$-\frac{k_{1-2}}{w_1}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{1-3}}{w_1}\cdot\Theta_{1-3} = \frac{k_{1-2}}{w_2}\cdot\Theta_{1-2} - \frac{k_{2-3}}{w_2}\cdot\Theta_{2-3} =$$

$$= \frac{k_{1-3}}{w_3}\cdot\Theta_{1-3} + \frac{k_{2-3}}{w_3}\cdot\Theta_{2-3} = -\frac{d}{2s} \tag{7}$$

Równania (1) oraz (7) określają warunki, jakie muszą być spełnione, aby przebieg temperatur w różnoprądzie trójprzegrodowym był prostoliniowy.

Wyznaczenie dalszych stałych całkowania A_2, B_2, C_2 przeprowadzamy przy pomocy równań (4) uwzględniając warunki brzegowe panujące w wymienniku.

P r z y k ł a d 4

Różnoprąd trójprzegrodowy o prostoliniowym przebiegu temperatur

Dane:

$$w_1 = -20 \frac{\text{kcal}}{1^\circ \cdot \text{h}}; \quad k_{1-2} = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad x_p = 80\ ^\circ\text{C}$$

$$w_2 = 10 \quad ,, \qquad k_{2-3} = 10 \quad ,, \qquad x_k = 100\ ^\circ\text{C}$$

$$w_3 = 10 \quad ,, \qquad k_{1-3} = 10 \quad ,, \qquad z_p = 0\ ^\circ\text{C}$$

Obliczyć: y_p, y_k, z_k °C, F m².

Rozwiązanie:

$$-\frac{20}{-20} \cdot \Theta_1 - \frac{10}{-20} \cdot \Theta_3 = \frac{20}{10} \cdot \Theta_1 - \frac{10}{10} \cdot \Theta_2 = \frac{10}{10} \cdot \Theta_3 + \frac{10}{10} \cdot \Theta_2 \qquad \text{(IV, 7)}$$

$$\Theta_1 + \frac{1}{2} \cdot \Theta_3 = 2 \cdot \Theta_1 - \Theta_2 = \Theta_3 + \Theta_2 \qquad \text{(a)}$$

$$\Theta_2 = \Theta_3 - \Theta_1 \quad \text{(b)} \qquad \text{(IV, a)}$$

$$\text{(b)} \rightarrow \text{(a)}$$

$$\Theta_1 + \frac{1}{2} \cdot \Theta_3 = 2\,\Theta_1 - \Theta_3 + \Theta_1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \Theta_3 = 2\,\Theta_1; \quad \Theta_1 = 0{,}75 \cdot \Theta_3 \qquad \text{(c)}$$

$$\Theta_1 = x_p - y_p; \quad \Theta_3 = x_p - z_p = 80 - 0 = 80^\circ$$

$$80 - y_p = 0{,}75 \cdot 80; \quad y_p = 20\ ^\circ\text{C}$$

$y_k - y_p = x_k - x_p$, ponieważ linie przebiegu temperatur są do siebie równoległe

$$y_k - 20 = 100 - 80; \quad y_k = 40\ ^\circ\text{C}$$

$$z_k - z_p = x_k - x_p; \quad z_k - 0 = 100 - 80; \quad z_k = 20\ ^\circ\text{C}$$

z równania (c):

$$\Theta_1 = 0{,}75 \cdot 80; \quad \Theta_1 = 60^\circ$$

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_3; \quad \Theta_2 = 80 - 60 = 20^\circ$$

Kontrola równania (a):

$$60 + \frac{1}{2} \cdot 80 = 2 \cdot 60 - 20 = 80 + 20$$

$$100 = 100 = 100$$

W celu znalezienia powierzchni F m² obliczamy tg α, tj. tangens kąta nachylenia linii temperatur:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{d}{2s} = -\frac{k_{1-2}}{w_1}\cdot\Theta_1 - \frac{k_{1-3}}{w_1}\cdot\Theta_3 \qquad \text{(IV, 7)}$$

$$-\frac{d}{2s} = -\frac{20}{-20}\cdot 60 - \frac{10}{-20}\cdot 80 = \mathbf{100}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_k - x_p}{F}\ ;\ 100 = \frac{20}{F}\ ;\ F = 0{,}2\ \mathrm{m}^2$$

K o n t r o l a:

$$d = \frac{500}{-20\cdot 10\cdot 10}(-20\cdot 80 + 10\cdot 20) = 350,\ \text{(III, 8)},\ 2s = -3{,}5$$

albowiem musi być równe wielkości $2s$ z przykładu 3

$$-\frac{d}{2s} = -\frac{350}{-3{,}5} = 100$$

V. Wymiennik trójczynnikowy o dowolnym kierunku prądów (prąd dowolny)

Przejdziemy z kolei do rozpatrzenia takich przypadków wymienników trójczynnikowych, trójprzegrodowych, w których równoważniki wodne natężenia przepływu czynników będą przybierać nieskończenie duże wartości.

Zaczniemy od wykazania, że jeśli równoważnik wodny natężenia przepływu osiąga nieskończenie dużą wartość,to temperatura tego czynnika jest niezmienna wzdłuż powierzchni wymiennika. W tym celu weźmy pod uwagę dwa dowolne przekroje wymiennika. Ilość ciepła, która dopływa do czynnika na drodze między przekrojem 1 i 2, da się wyrazić w myśl I zasady termodynamiki:

$$Q^* = w\cdot(x_1 - x_2)$$

Jeżeli wielkość w jest nieskończenie duża, to przy skończonej wartości Q musi zachodzić $(x_1 - x_2) = 0$ lub też $x_2 = x_1$. A zatem w każdym z dwóch dowolnie obranych przekrojów wymiennika temperatura czynnika obdarzonego nieskończenie wielkim równoważnikiem wodnym natężenia przepływu jest jednakowa.

Obecnie przedmiotem naszych rozważań będzie wymiennik, w którym równoważniki wodne natężenia przepływu dwóch czynników: 2 i 3 są nieskończenie duże:

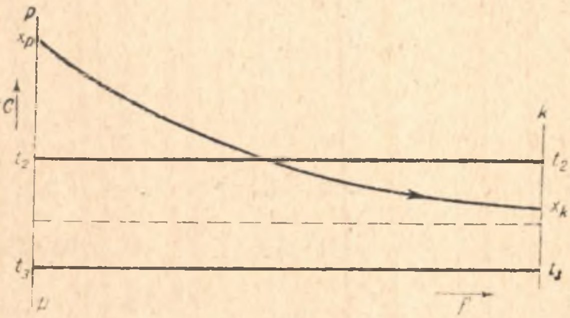
$$w_2 = \infty \qquad \text{(a)}$$

$$w_3 = \infty \qquad \text{(b)}$$

natomiast równoważnik wodny natężenia przepływu czynnika 1 jest skończony:

$$w_1 \neq 0 \tag{c}$$

Przebieg zmienności temperatur wzdłuż powierzchni obrazuje rysunek 3.



Rys. 3. Przebieg temperatur w wymienniku trójczynnikowym o dowolnym kierunku prądów

W celu znalezienia krzywej przebiegu temperatury czynnika 1, weźmy pod uwagę równanie (I, 1a):

$$-w_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - y) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df \tag{1}$$

Oznaczmy niezmienne temperatury czynników 2 i 3 przez t_2 i t_3. W myśl przytoczonego poprzednio dowodu o niezmienności temperatur czynników obdarzonych nieskończenie dużym równoważnikiem wodnym natężenia przepływu zachodzą tutaj związki.

$$y = t_2 = \text{const.} \tag{d}$$

$$z = t_3 = \text{const.} \tag{e}$$

Łącząc równania (d) oraz (e) z równaniem (1) otrzymamy:

$$-w_1 \cdot dx = k_{1-2} \cdot (x - t_2) \cdot df + k_{1-3} \cdot (x - t_3) \cdot df$$

Po przekształceniu powyższego równania:

$$-w_1 \cdot dx = (k_{1-2} + k_{1-3}) \cdot x \cdot df - (k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3) \cdot df$$

Dzieląc stronami przez $w_1\, df$ i porządkując powyższą zależność otrzymamy:

$$\frac{dx}{df} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot x - \frac{k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3}{w_1} = 0 \tag{2}$$

W celu rozwiązania powyższego równania wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$x - \frac{k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3}{k_{1-2} + k_{1-3}} = u \tag{f}$$

$$\frac{k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3}{k_{1-2} + k_{1-3}} = t_w \tag{g}$$

Zależność (f) po zróżniczkowaniu da związek:

$$\frac{dx}{df} = \frac{du}{df} \tag{h}$$

Po wstawieniu zależności (f), (g), (h) w równanie (2) otrzymamy:

$$\frac{du}{df} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} (u + t_w) - \frac{t_w \cdot (k_{1-2} + k_{1-3})}{w_1} = 0$$

$$\frac{du}{df} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot u = 0 \tag{2a}$$

W powyższym równaniu różniczkowym możemy rozdzielić zmienne dzieląc je przez u i mnożąc przez df:

$$\frac{du}{u} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} df = 0 \tag{2b}$$

Całkujemy równanie (2b)

$$\ln u + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot f = \mathrm{const} \tag{2c}$$

Wracamy do poprzednich oznaczeń na podstawie (f) oraz (g):

$$\ln (x - t_w) + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot f = \mathrm{const} \tag{2d}$$

Stałą całkowania wyznaczymy biorąc pod uwagę warunek brzegowy: dla $f = 0$ jest $x = x_p$:

$$\ln \frac{x - t_w}{x_p - t_w} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot f = 0 \tag{3}$$

Powyższe równanie pozwoli nam znaleźć krzywą przebiegu temperatury czynnika 1 wzdłuż powierzchni:

$$x - t_w = (x_p - t_w) \cdot e^{-\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot f} \tag{3a}$$

Na podstawie równania (3a) możemy wyprowadzić następujące wnioski:

1) krzywa przebiegu temperatury czynnika 1 jest zupełnie niezależna od współczynnika k_{2-3}; zatem wielkość k_{2-3} nie wpływa na krzywe przebiegu temperatur;

2) również kierunek przepływu czynników 2 i 3 nie ma żadnego wpływu na przebieg temperatury czynnika 1. Z tego właśnie powodu wymiennik tego typu możemy nazwać *prądem dowolnym*;

3) charakter krzywej przebiegu temperatury czynnika 1 jest w naszym przypadku taki sam jak dla wymiennika dwuczynnikowego o jednej przegrodzie;

4) krzywa przebiegu temperatur posiada asymptotę. Znajdziemy ją kładąc w równaniu (3a) $\frac{f}{w_1} = \infty$:

$$x - t_w = (x_p - t_w) \cdot e^{-\infty} = 0$$

zatem asymptotą jest linia prosta o równaniu:

$$x = t_w \tag{4}$$

5) jeśli wymiennik rozważanego typu posiada nieskończenie dużą powierzchnię, to temperatura czynnika 1 w przekroju końcowym $x_{F=\infty}$ osiąga wartość na podstawie (4) i (g)

$$x_{F=\infty} = \frac{k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3}{k_{1-2} + k_{1-3}} \tag{5}$$

Do wniosku 5 można też dojść inną drogą. Temperatura czynnika 1 ustali się wówczas, gdy ilość ciepła pobieranego przezeń w nieskończenie małym przekroju dQ^*_1 będzie równa ilości ciepła oddawanego dQ^*_2. Ponieważ

$$dQ^*_1 = k_{1-2} \cdot (t_2 - x) \cdot df$$

$$dQ^*_2 = k_{1-3} \cdot (x - t_3) \cdot df$$

zatem

$$dQ^*_1 = dQ^*_2$$

$$k_{1-2} \cdot (t_2 - x) = k_{1-3} \cdot (x - t_3)$$

z ostatniego równania wyznaczymy temperaturę x:

$$(k_{1-3} + k_{1-2}) \cdot x = k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3$$

$$x = \frac{k_{1-2} \cdot t_2 + k_{1-3} \cdot t_3}{k_{1-2} + k_{1-3}}$$

Rzecz prosta, temperatura czynnika 1 może się ustalić tylko dla $F = \infty$.

Temperaturę czynnika 1 panującą w przekroju końcowym $k—k$ obliczymy kładąc w równaniu (3a) $f = F$ oraz $x = x_k$:

$$x_k - t_w = (x_p - t_w) \cdot e^{-\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} \cdot F} \tag{6}$$

P r z y k ł a d 5

Wymiennik trójczynnikowy o dowolnym kierunku prądów

Dane: $F = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$.

$w_1 = 10\ \frac{\mathrm{kcal}}{1^\circ \cdot \mathrm{h}}$;	$k_{1-2} = 10\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m}^2\, 1^\circ \cdot \mathrm{h}}$;	$x_p = 100\ ^\circ\mathrm{C}$
$w_2 = \infty$,,	$k_{1-3} = 30$,,	$t_2 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$
$w_3 = \infty$,,		$t_3 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$

Obliczyć: x_k °C.

Rozwiązanie:

$$t_w = \frac{10 \cdot 50 + 30 \cdot 0}{10 + 30} = 12{,}5\ ^\circ\mathrm{C} \qquad \text{(V, g)}$$

$$x_k - 12{,}5 = (100 - 12{,}5) \cdot e^{-\frac{40}{10} \cdot 0{,}5} \qquad \text{(V, 6)}$$

$$x_k = 12{,}5 + 87{,}5 \cdot e^{-2} = 24{,}34\ ^\circ\mathrm{C}$$

VI. Wymiennik trójczynnikowy, w którym równoważnik wodny natężenia przepływu czynnika 2 jest nieskończenie wielki

Jeśli w różnoprądzie trójczynnikowym jeden z równoważników wodnych natężenia przepływu osiąga nieskończenie wielką wartość, to otrzymujemy szczególny przypadek wymiennika, w którym temperatura jednego z czynników jest niezmienna.

Niechaj czynnikiem tym będzie czynnik 2, wówczas:

$$w_2 = \infty \qquad \text{(a)}$$

W tym przypadku będzie:

$$y = t_2 = \text{const.} \qquad \text{(b)}$$

Ogólne równanie różniczkowe (II, 3) dla warunku (a) przyjmie postać:

$$t'' + \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3}\right) \cdot t' + \frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_3} \cdot t = 0 \qquad (1)$$

Równanie to można również napisać w formie uproszczonej:

$$t'' - 2\,s \cdot t' + b \cdot t = 0 \qquad \text{(1a)}$$

gdzie

$$s = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3}\right) \qquad (2)$$

$$b = \frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_3} \qquad (3)$$

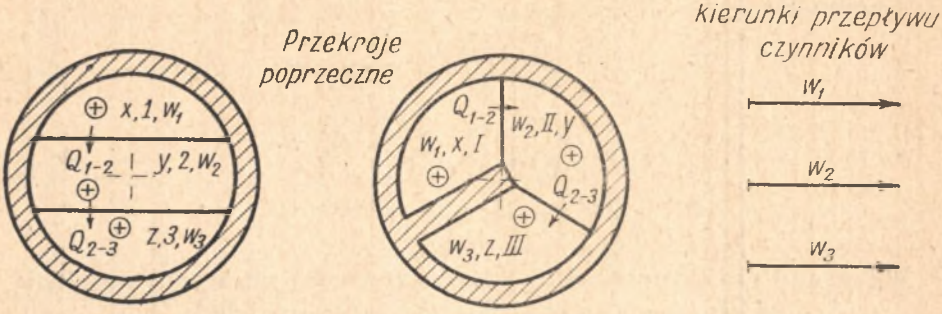
Wielkość pomocnicza p jest określona na podstawie oznaczenia (II, 6):

$$p = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{w_3}\right)^2 - \frac{k_c^2}{w_1 \cdot w_3}} \qquad (4)$$

VII. Dwuprzegrodowy współprąd trójczynnikowy

Jeśli trzy czynniki przepływające przez wymiennik w tym samym kierunku (rys. 4) są rozdzielone tylko dwiema przegrodami, wówczas mamy do czynienia z dwuprzegrodowym współprądem trójczynnikowym.

Ten rodzaj wymiennika jest szczególnym przypadkiem trójprzegrodowego współprądu, omówionego na str. 11—19. Trójprzegrodowy współ-



Rys. 4. Wymiennik trójczynnikowy dwuprzegrodowy współprądowy

prąd przechodzi w dwuprzegrodowy, jeśli jedna z przegród nie będzie w ogóle brała udziału w transporcie ciepła. Kładąc zatem we wzorach otrzymanych dla trójprzegrodowego współprądu jeden ze współczynników Pecleta, np. k_{1-3}, równy zeru otrzymamy rozważany przypadek.

Jeśli przyjąć

$$k_{1-3} = 0 \tag{a}$$

to równania wyjściowe (I, 2a, 2b, 2c) przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned} -W_1 \cdot x' &= k_{1-2} \cdot (x - y) \\ -W_2 \cdot y' &= k_{1-2} \cdot (y - x) + k_{2-3} \cdot (y - z) \\ -W_3 \cdot z' &= k_{2-3} \cdot (z - y) \end{aligned}\right| \tag{1}$$

ponadto w równaniu różniczkowym

$$t'' - 2s \cdot t' + b \cdot t = 0 \tag{2}$$

wyrażenia s (I, 9) oraz b (I, 10) upraszczają się do postaci:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} + \frac{k_{1-2} + k_{2-3}}{W_2} + \frac{k_{2-3} + k_{1-3}}{W_3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[k_{1-2} \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) + k_{2-3} \cdot \left(\frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3} \right) \right] \tag{3}$$

$$b = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3} \cdot k_{1-2} \cdot k_{2-3} \tag{4}$$

Wyraz k_c^2 (I, 6) przyjmuje formę:

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3} + k_{1-3} \cdot k_{2-3} + k_{1-3} \cdot k_{1-2} = k_{1-2} \cdot k_{2-3} \tag{5}$$

W równaniach określających przebieg temperatur wzdłuż powierzchni porównawczej f:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + A_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} + \vartheta \\ y &= B_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + B_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} + \vartheta \\ z &= C_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + C_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} + \vartheta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

należy wyznaczyć poziom odniesienia ϑ oraz stałe całkowania.

Na podstawie wzoru (I, 7) wyznaczamy ϑ:

$$\vartheta = \frac{W_1 \cdot x_p + W_2 \cdot y_p + W_3 \cdot z_p}{W_1 + W_2 + W_3} \tag{7}$$

W celu wyznaczenia stałych całkowania weźmy pod uwagę warunek brzegowy:

dla $f = 0$ jest $x = x_p,\ y = y_p,\ z = z_p$ (b)

Wstawiamy powyższe wartości do grupy równań (6):

$$\left.\begin{array}{ll} x_p = A_1 + A_2 + \vartheta, & A_1 + A_2 = x_p - \vartheta \\ y_p = B_1 + B_2 + \vartheta, & B_1 + B_2 = y_p - \vartheta \\ z_p = C_1 + C_2 + \vartheta, & C_1 + C_2 = z_p - \vartheta \end{array}\right\} \tag{8}$$

Potrzebne nam są jeszcze dalsze trzy równania do wyznaczenia sześciu stałych. Otrzymamy je różniczkując równania (6):

$$\left.\begin{array}{l} x' = (s + p) \cdot A_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + (s - p) \cdot A_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \\ y' = (s + p) \cdot B_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + (s - p) \cdot B_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \\ z' = (s + p) \cdot C_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + (s - p) \cdot C_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \end{array}\right\} \tag{9}$$

podstawiając w powyższe warunek brzegowy (b):

$$\begin{array}{l} x'_p = (s + p) \cdot A_1 + (s - p) \cdot A_2 \\ y'_p = (s + p) \cdot B_1 + (s - p) \cdot B_2 \\ z'_p = (s + p) \cdot C_1 + (s - p) \cdot C_2 \end{array}$$

mnożąc pierwsze równanie przez $-W_1$, drugie przez $-W_2$, trzecie przez $-W_3$:

$$\begin{array}{l} -W_1 \cdot x'_p = -(s + p) \cdot A_1 \cdot W_1 - (s - p) \cdot A_2 \cdot W_1 \\ -W_2 \cdot y'_p = -(s + p) \cdot B_1 \cdot W_2 - (s - p) \cdot B_2 \cdot W_2 \\ -W_3 \cdot z'_p = -(s + p) \cdot C_1 \cdot W_3 - (s - p) \cdot C_2 \cdot W_3 \end{array}$$

oraz kojarząc powyższe zależności z grupą równań (1) zastosowanych do przekroju początkowego $p-p$:

$$\left.\begin{array}{l} -(s + p) \cdot A_1 \cdot W_1 - (s - p) \cdot A_2 \cdot W_1 = k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) \\ -(s + p) \cdot B_1 \cdot W_2 - (s - p) \cdot B_2 \cdot W_2 = k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) + k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) \\ -(s + p) \cdot C_1 \cdot W_3 - (s - p) \cdot C_2 \cdot W_3 = k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) \end{array}\right\} \tag{10}$$

Grupy równań (8) oraz (10) pozwolą nam wyznaczyć wszystkie stałe całkowania. Po rozwiązaniu układów równań (8) i (10) otrzymamy:

$$A_1 = \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) - (s - p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot W_1}{2 \cdot W_1 \cdot p} \tag{11a}$$

$$A_2 = \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + (s + p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot W_1}{2 \cdot W_1 \cdot p} \tag{11b}$$

$$B_1 = \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) - (s - p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot W_2}{2 \cdot W_2 \cdot p} \tag{12a}$$

$$B_2 = \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) + k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) + (s + p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot W_2}{2 \cdot W_2 \cdot p} \tag{12b}$$

$$C_1 = \frac{k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) - (s - p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot W_3}{2 \cdot W_3 \cdot p} \tag{13a}$$

$$C_2 = \frac{k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) + (s + p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot W_3}{2 \cdot W_3 \cdot p} \tag{13b}$$

Przechodzimy do obliczenia temperatur czynników w przekroju końcowym wymiennika. W tym celu w grupę równań (6) wstawiamy wartości stałych, określone za pomocą wzorów (11a), (11b), (12a), (12b), (13a), (13b), ponadto kładziemy $f = F$:

$$x_k = \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) - (s - p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot W_1}{2 \cdot W_1 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot F} + \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + (s + p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot W_1}{2 \cdot W_1 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot F} + \vartheta \tag{14}$$

$$y_k = \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) - (s - p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot W_2}{2 \cdot W_2 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot F} + \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) + k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) + (s + p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot W_2}{2 \cdot W_2 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot F} + \vartheta \tag{15}$$

$$z_k = \frac{k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) - (s - p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot W_3}{2 \cdot W_3 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot F} + \frac{k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) + (s + p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot W_3}{2 \cdot W_3 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot F} + \vartheta \tag{16}$$

Przykład 6

Dwuprzegrodowy współprąd trójczynnikowy

Dane:

$$W_1 = 10 \ \frac{\text{kcal}}{1^\circ \text{h}}; \quad k_{1-2} = 10; \ \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot 1^\circ \cdot \text{h}}; \quad x_p = 100\ ^\circ\text{C}$$

$$W_2 = 10 \ \text{,,} \quad k_{2-3} = 10 \ \text{,,} \quad y_p = 20\ ^\circ\text{C}, \ F = 1\ \text{m}^2$$

$$W_3 = 10 \ \text{,,} \quad k_{1-3} = 0 \ \text{,,} \quad z_p = 0\ ^\circ\text{C}$$

Obliczyć: x_k, y_k, z_k °C.

Rozwiązanie:

Obliczenie wielkości pomocniczych:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left[10 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) + 10 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) \right] = -2 \tag{VII, 3}$$

$$b = \frac{10 + 10 + 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot 10 \cdot 10 = 3 \tag{VII, 4}$$

$$\vartheta = \frac{10 \cdot 100 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 0}{10 + 10 + 10} = 40\ ^\circ\mathrm{C} \qquad \text{(VII, 7)}$$

$$p = \sqrt{4 - 3} = 1 \qquad \text{(II, 6)}$$

$$s + p = -2 + 1 = -1$$

$$s - p = -2 - 1 = -3$$

Obliczenie temperatur końcowych x_k, y_k, z_k °C:

$$x_k = \frac{10 \cdot (20 - 100) - (-3) \cdot (100 - 40) \cdot 10}{2 \cdot 10} \cdot e^{-1 \cdot 1} +$$

$$+ \frac{10 \cdot (100 - 20) + (-1) \cdot (100 - 40) \cdot 10}{2 \cdot 10} \cdot e^{-3 \cdot 1} + 40 \qquad \text{(VII, 14)}$$

$$x_k = 58{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$y_k = \frac{10 \cdot 80 + 10(-20) + 3(-20) \cdot 10}{20} \cdot e^{-1 \cdot 1} +$$

$$+ \frac{10(-80) + 10 \cdot 20 + (-1)(-20) \cdot 10}{20} \cdot e^{-3 \cdot 1} + 40$$

$$y_k = 39\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$z_k = \frac{10(-20) - (-3)(-40) \cdot 10}{20} \cdot e^{-1 \cdot 1} +$$

$$+ \frac{10(-20) + (-1)(-40) \cdot 10}{20} \cdot e^{-3 \cdot 1} + 40$$

$$z_k = 22{,}21\ ^\circ\mathrm{C}$$

K o n t r o l a: na podstawie bilansu ogólnego

$$\Sigma W_i \cdot t_{pi} = \Sigma W_i \cdot t_{ki}$$

$$\Sigma W_i \cdot t_{pi} = 10 \cdot 100 + 10 \cdot 20 = 1200\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}}$$

$$\Sigma W_i \cdot t_{ki} = 10 \cdot 58{,}9 + 10 \cdot 39 + 10 \cdot 22{,}21 = 1201{,}1\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}}$$

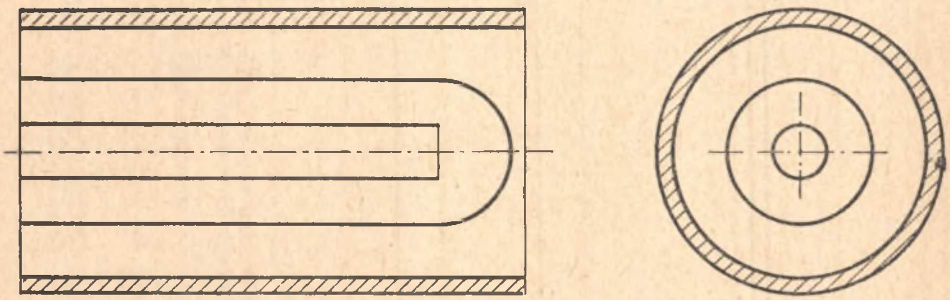
b ł ą d poniżej 1 ‰

VIII. Dwuprzegrodowy różnoprąd trójczynnikowy

Wzory wyprowadzone na str. 39—42 można dostosować także i do różnoprądu. Jak wiemy z rozważań na str. 21—25 wystarczy zamiast wartości bezwzględnych równoważników wodnych natężenia przepływu W_1, W_2, W_3 wprowadzić algebraiczne wartości tych równoważników w_1, w_2, w_3. Jednakże istnieje tutaj jedno zastrzeżenie: wzory (VII, 14, 15, 16) opierają się na tym założeniu, że warunki brzegowe panujące w przekroju początkowym p—p są dokładnie znane. Znane zatem muszą być temperatury czynników panujące w przekroju p—p. Dla różnoprądu jednak znane są w ogólności temperatury dolotowe, dolot natomiast ma miejsce po różnych stronach wymiennika, a więc zarówno w przekroju początkowym p—p, jak i końcowym k—k. Z tego właśnie powodu wzory podane na str. 39—42 znajdą zastosowanie dla różnoprądu tylko w tym przypadku, gdy znane są temperatury panujące w jednym wspólnym przekroju (p—p) a szukane są temperatury w drugim przekroju (k—k).

Takim właśnie przypadkiem jest obliczanie powierzchni w wymienniku złożonym z elementów Fielda, działającym w warunkach przemysłowych.

Element Fielda (rys. 5) składa się z dwóch koncentrycznie osadzonych rurek, z których zewnętrzna jest zasklepiona głowicą. Dwie ściany sitowe, w których są osadzone rurki, znajdują się po tej samej stronie wymiennika. Czynnik ogrzewający płynie z zewnątrz elementu Fielda, oddając



Rys. 5. Element Fielda

ciepło poprzez rurę zewnętrzną do strugi czynnika ogrzewanego, która przepływa przekrojem pierścieniowym. Czynnik ogrzewany może przepływać w dwojaki sposób: 1) dolot czynnika skierowany do rury wewnętrznej — wylot przekrojem pierścieniowym i 2) dolot skierowany do przekroju pierścieniowego — wylot przez rurę wewnętrzną. Wymiennik tego typu będzie w zasadzie należał do grupy wymienników dwuprzegrodowych dwuczynnikowych różnoprądów.

W wymiennikach przemysłowych mamy do czynienia z czynnikami rzeczywistymi, dla których ciepło właściwe c_p zmienia się ze zmianą temperatury i ponadto, gdy czynniki są gazami, ze zmianą ciśnienia czy objętości właściwej. Z tego powodu równoważniki wodne natężenia przepływu nie są wartościami niezmiennymi, lecz zależą zarówno od temperatury czynnika, jak i od ciśnienia. Ponadto, ponieważ czynnik ogrzewany zmienia kierunek przepływu w głowicy, algebraiczna wartość równoważnika wodnego natężenia przepływu strugi przepływającej w kierunku do głowicy będzie miała przeciwny znak w stosunku do równoważnika wodnego natężenia przepływu strugi powracającej do ściany sitowej.

W konkluzji z punktu widzenia matematycznego, wymienniki te stanowią *różnoprąd trójczynnikowy o 2 przegrodach.*

Wymiennik złożony z elementów Fielda szczególnie nadaje się do zakresu wysokich temperatur (900—1000 °C) ze względu na zupełną swobodę wydłużania się rurek. Dla tak wysokich temperatur wpływ promieniowania nabiera poważnego znaczenia. Wpływ ten powoduje wybitną zmienność współczynników Pecleta wzdłuż powierzchni wymiennika. Z tego powodu wyłania się potrzeba podania metody, choćby przybliżonej, którą można by stosować do zakresu wyższych temperatur. Taką właśnie metodę podajemy poniżej.

Polega ona na rozdzieleniu powierzchni czynnej wymiennika na szereg odcinków o wielkości Δf i na obliczaniu zmian temperatur dla każdego odcinka z osobna. W ten sposób możemy w pewnej mierze uwzględnić zmienność równoważników wodnych natężenia przepływu, dzięki temu, że w każdym odcinku powierzchni Δf będziemy brali wielkość poszczególnych równoważników wodnych natężenia przepływu dostosowaną do temperatury — która z kolei zmienia się w obrębie odcinka powierzchni Δf znacznie mniej niż w obrębie całej powierzchni czynnej F. Zmienność współczynników Pecleta również może być częściowo uwzględniona, w każdym bowiem poszczególnym odcinku obliczeniowym możemy obierać współczynniki przenikania ciepła dostosowane do temperatur istniejących w danym miejscu.

Za przekrój początkowy (p—p) obieramy płaszczyznę ściany sitowej. Temperaturę wylotową czynnika ogrzewanego w przekroju (p—p) możemy obliczyć z wielką dokładnością, jeśli znamy temperaturę wlotową tego czynnika oraz ilość ciepła, jaka ma być wymieniona między czynnikami. Temperatura czynnika grzejącego w płaszczyźnie ściany sitowej może być również obliczona na podstawie bilansu cieplnego.

Obliczenie rozpoczynamy od przekroju (p—p) i na podstawie niżej podanych wzorów obliczamy temperatury panujące w przekroju końcowym (k—k) pierwszego odcinka obliczeniowego powierzchni Δf.

$$x_k = \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) - (s - p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot w_1}{2 \cdot w_1 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot \Delta f} + \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + (s + p) \cdot (x_p - \vartheta) \cdot w_1}{2 \cdot w_1 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot \Delta f} + \vartheta \tag{1}$$

$$y_k = \frac{k_{1-2} \cdot (x_p - y_p) + k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) - (s - p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot w_2}{2 \cdot w_2 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot \Delta f} + \frac{k_{1-2} \cdot (y_p - x_p) + k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) + (s + p) \cdot (y_p - \vartheta) \cdot w_2}{2 \cdot w_2 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot \Delta f} + \vartheta \tag{2}$$

$$z_k = \frac{k_{2-3} \cdot (y_p - z_p) - (s - p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot w_3}{2 \cdot w_3 \cdot p} \cdot e^{(s+p) \cdot \Delta f} +$$

$$+ \frac{k_{2-3} \cdot (z_p - y_p) + (s + p) \cdot (z_p - \vartheta) \cdot w_3}{2 \cdot w_3 \cdot p} \cdot e^{(s-p) \cdot \Delta f} + \vartheta \tag{3}$$

Obliczone w ten sposób temperatury końcowe x_k, y_k, z_k °C odcinka obliczeniowego pierwszego są jednocześnie temperaturami początkowymi dla następnego odcinka powierzchni Δf_2, w którym będziemy brali do obliczeń nowe współczynniki Pecleta oraz nowe wartości w_1, w_2, w_3.

Posuwając się w ten sposób od jednego odcinka powierzchni do następego, dojdziemy do miejsca, w którym temperatury czynników 2 i 3 zrównają się. Miejsce to jest punktem zwrotnym dla czynnika ogrzewanego. Powierzchnia całkowita wymiennika jest równa sumie powierzchni wszystkich odcinków:

$$F = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta f_i \tag{4}$$

IX. Dwuprzegrodowy różnoprąd trójczynnikowy, w którym równoważnik wodny natężenia przepływu czynnika 2 jest nieskończenie wielki

Dwuprzegrodowy różnoprąd, w którym $w_2 = \infty$ jest szczególnym przypadkiem trójprzegrodowego różnoprądu omówionego na str. 39, w którym jeden ze współczynników Pecleta jest równy zeru.

W rozważanym przypadku istnieją dwie odmiany:

1) w której $k_{1-3} = 0$ oraz

2) w której $k_{1-2} = 0$ lub $k_{2-3} = 0$.

Odmiana 1) prowadzi, jak to w dalszym ciągu wykażemy, do uproszczenia krzywych przebiegu temperatur czynników 1 i 3, których charakter będzie taki sam, jak dla wymiennika dwuczynnikowego o jednej przegrodzie. Odmiana 2) natomiast nie odznacza się tego rodzaju uproszczeniem.

Rozpatrzymy tutaj tylko odmianę 1), dla której są ważne założenia:

$$w_2 = \infty \tag{a}$$

$$k_{1-3} = 0 \tag{b}$$

Dla założeń (a) oraz (b) wielkości pomocnicze s, k_c^2, p, b na podstawie równań (II, 4, 5, 6) przybierają następujące wartości:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2}}{w_1} + \frac{k_{2-3}}{w_3} \right) \tag{c}$$

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3} \tag{d}$$

$$b = \frac{k_{1-2} \cdot k_{2-3}}{w_1 \cdot w_3} \tag{e}$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2}}{w_1} - \frac{k_{2-3}}{w_3} \right) \tag{f}$$

Zatem:

$$s + p = - \frac{k_{2-3}}{w_3} \tag{1}$$

$$s - p = - \frac{k_{1-2}}{w_1} \tag{2}$$

W celu znalezienia krzywych przebiegu temperatur czynników 1 oraz 3 należy wyznaczyć stałe całkowania A_1, A_2, C_1, C_2. Skorzystamy tutaj ze wzorów (VII, 11a, 11b) oraz (VII, 13a, 13b), które dostosujemy do naszego przypadku, biorąc pod uwagę następujące związki:

$$y_p = t_2 \tag{g}$$

$$\vartheta = \frac{w_1 \cdot x_p + w_2 \cdot y_p + w_3 \cdot z_p}{w_1 + w_2 + w_3} = t_2 \tag{h}$$

Zależność (h) wypływa ze wzoru (I, 7), w którym bierzemy pod uwagę założenie (a) oraz (g).

We wspomnianych wzorach (VII, 11a, 11b), (VII, 13a, 13b) uwzględniamy twierdzenie o ogólnym znaczeniu równoważnika wodnego natężenia przepływu (rozdział II), co pozwala nam zamiast dodatnich wartości W_1, W_3 wprowadzić algebraiczne wielkości w_1, w_3. Wyznaczymy początkowo wartości stałych A_1 oraz C_2:

$$A_1 = \frac{k_{1-2} \cdot (t_2 - x_p) + \frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot (x_p - t_2) \cdot w_1}{2 \cdot w_1 \cdot p} = 0 \tag{3}$$

$$C_2 = \frac{k_{2-3} \cdot (z_p - t_2) - \frac{k_{2-3}}{w_3} \cdot (z_p - t_2) \cdot w_3}{2 \cdot w_3 \cdot p} = 0 \tag{4}$$

Ponieważ dla rozważanego przypadku stałe A_1 i C_2 są równe zeru, zatem równania krzywych przebiegu temperatur czynników 1 i 3 upraszczają się:

$$t_x = A_2 \cdot e^{(s-p) \cdot f} = A_2 \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f}$$

$$t_z = C_1 \cdot e^{(s+p) \cdot f} = C_1 \cdot e^{-\frac{k_{2-3}}{w_3} \cdot f}$$

Stałe całkowania A_2 i C_1 wyznaczymy biorąc pod uwagę równania (VII, 8) oraz równania (3) i (4):

$$A_2 = x_p - \vartheta = t_{px}$$

$$C_1 = z_p - \vartheta = t_{pz}$$

Zatem równania krzywych przebiegu temperatur czynników 1 i 3 sprowadzają się do ostatecznej postaci:

$$t_x = t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f} \tag{5}$$

$$t_z = t_{pz} \cdot e^{-\frac{k_{2-3}}{w_3} \cdot f} \tag{6}$$

Na podstawie równań (5) i (6) możemy wyprowadzić następujące wnioski:

1) Czynnik 3 nie wpływa zupełnie na krzywą przebiegu temperatury czynnika 1, ani nawzajem: czynnik 1 nie wpływa na krzywą przebiegu temperatury czynnika 3. Aby to wyjaśnić, załóżmy na przykład, że sprzężenie cieplne czynnika 3 z czynnikiem 2 o nieskończenie wielkim równoważniku wodnym natężenia przepływu jest przerwane, tzn. czynnik 3 jest idealnie odizolowany od czynnika 2 lub inaczej mówiąc $k_{2-3} = 0$. W tym przypadku krzywa przebiegu temperatury czynnika 1 wyraża się równaniem o formie identycznej z równaniem (5). Dzieje się to dzięki temu, że w równaniu krzywej przebiegu temperatury czynnika 1 nie figurują zupełnie wielkości w_3, k_{2-3}, t_{pz}, które charakteryzują sprzężenie cieplne czynnika 3 z czynnikiem 2 obdarzonym nieskończenie wielkim równoważnikiem wodnym natężenia przepływu.

2) Krzywe zmienności temperatur czynników 1 i 3 są identyczne jak dla wymiennika dwuczynnikowego o jednej przegrodzie. Jeśli bowiem sprzężenie cieplne pomiędzy czynnikami 2 i 3 zostanie przerwane ($k_{2-3}=0$), mamy do czynienia z wymiennikiem dwuczynnikowym o jednej przegrodzie.

X. Trójprzegrodowy różnoprąd dwuczynnikowy

(Wymiennik trójprzegrodowy z punktem zwrotnym)

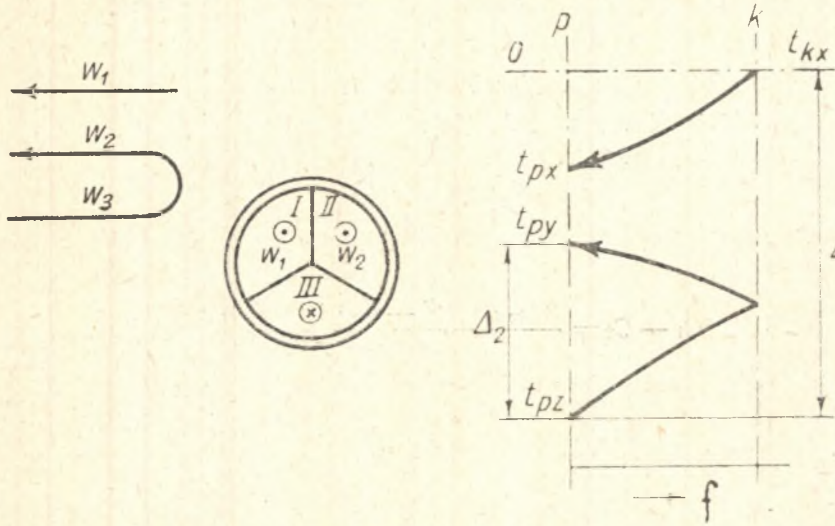
Jeśli czynnik ogrzewany przepływa dwukrotnie przez wymiennik, to mamy do czynienia z wymiennikiem posiadającym tzw. punkt zwrotny (rys. 6). Przez punkt zwrotny będziemy rozumieli to miejsce wymiennika, w którym czynnik ogrzewany zmienia swój kierunek pierwotny na przeciwny.

Wymiennik tego typu będzie szczególnym przypadkiem różnoprądu trójprzegrodowego, omówionego na str. 21—25, dla którego zachodzą następujące związki:

$$w_3 = - w_2 \tag{a}$$

$$t_{ky} = t_{kz} \tag{b}$$

Związek (a) wynika z faktu, że czynnik ogrzewany przepływa dwukrotnie przez wymiennik. Dzięki zmianie kierunku przepływu tego czynnika równoważnik wodny natężenia przepływu strugi powrotnej ma znak przeciwny niż równoważnik wodny natężenia przepływu strugi wstępującej. Warunek (b) wynika z faktu, że temperatura obu strug czynnika ogrzewanego w punkcie zwrotnym jest identyczna.



Rys. 6. Wymiennik trójprzegrodowy z punktem zwrotnym

Postawimy sobie za zadanie obliczyć wzrost temperatury Δt_2° czynnika ogrzewanego w obrębie całego wymiennika. W tym celu skorzystamy ze wzorów (II, 8 i 9) ważnych dla ogólniejszego przypadku, mianowicie różnoprądu trójprzegrodowego (str. 21—25). Równania, które wyrażają przebieg zmienności temperatur wzdłuż powierzchni wymiennika, na podstawie równania (II, 8) mają następującą formę:

$$t_x = A_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + A_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \tag{1a}$$

$$t_y = B_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + B_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \tag{1b}$$

$$t_z = C_1 \cdot e^{(s+p)\cdot f} + C_2 \cdot e^{(s-p)\cdot f} \tag{1c}$$

W równaniach powyższych wielkości t_x, t_y, t_z oznaczają nadwyżki temperatur poszczególnych czynników ponad poziomem odniesienia ϑ jako funkcje powierzchni porównawczej f.

W celu wyznaczenia stałych całkowania B_1 i B_2 bierzemy pod uwagę warunki brzegowe:

$$\text{dla} \quad f = 0 \quad \text{jest} \quad t_y = t_{py}$$

$$\text{dla} \quad f = F \quad \text{jest} \quad t_y = t_{ky}$$

Wstawiając powyższe warunki w (1b) otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} e^{(s+p)\cdot F} \cdot B_1 + e^{(s-p)\cdot F} \cdot B_2 &= t_{ky} \\ B_1 + B_2 &= t_{py} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Z równań powyższych wyznaczamy stałe B_1 i B_2. Tworząc różnicę tych stałych otrzymamy:

$$B_1 - B_2 = \frac{2\, t_{ky} \cdot e^{-s \cdot F} - t_{py} \cdot (e^{-p \cdot F} + e^{p \cdot F})}{e^{p \cdot F} - e^{-p \cdot F}} \tag{d}$$

W celu wyeliminowania stałych C_1 i C_2 uwzględniamy warunki brzegowe:

dla $f = 0$ jest $t_z = t_{pz}$

dla $f = F$ jest $t_z = t_{kz}$

które podstawiamy w równanie (1c):

$$\left.\begin{array}{r} e^{(s+p) \cdot F} \cdot C_1 + e^{(s-p) \cdot F} \cdot C_2 = t_{kz} \\ C_1 + C_2 = t_{pz} \end{array}\right\} \tag{e}$$

Rozwiązujemy powyższe równania względem C_1 i C_2 oraz obliczamy różnicę:

$$C_1 - C_2 = \frac{2\, t_{kz} \cdot e^{-s \cdot F} - t_{pz} \cdot (e^{-p \cdot F} + e^{p \cdot F})}{e^{p \cdot F} - e^{-p \cdot F}} \tag{f}$$

W dalszym ciągu będzie nam potrzebna wartość pochodnej t'_{py} w przekroju początkowym p—p wymiennika. Otrzymamy ją różniczkując równanie (1b) oraz kładąc następnie $f = 0$:

$$t'_{py} = (s + p) \cdot B_1 + (s - p) \cdot B_2 \tag{g}$$

Z drugiej strony wartość pochodnej t'_{py} można określić za pomocą równania (II, 10), w którym podstawiamy $y_p - x_p = t_{py} - t_{pz}$ oraz $y_p - z_p = t_{py} - t_{pz}$:

$$t'_{py} = -\frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (t_{py} - t_{px}) - \frac{k_{2-3}}{w_2} \cdot (t_{py} - t_{pz})$$

W równaniu tym, ważnym dla przekroju p—p podstawiamy wartość t'_{py} na podstawie zależności (g). Lewa strona tego równania da się wyrazić następująco:

$$(s + p) \cdot B_1 + (s - p) \,.\, B_2 = s \cdot (B_1 + B_2) + p \cdot (B_1 - B_2)$$

Wstawiając w powyższym znaczenia $B_1 + B_2$ na podstawie (c) oraz $B_1 - B_2$ na podstawie (d) otrzymamy:

$$s \cdot t_{py} + p \, \frac{2\, t_{ky} \cdot e^{-s \cdot F} - t_{py} \cdot (e^{-p \cdot F} + e^{p \cdot F})}{e^{p \cdot F} - e^{-p \cdot F}} =$$

$$= \frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (t_{px} - t_{py}) - \frac{k_{2-3}}{w_2} \cdot (t_{py} - t_{pz}) \tag{h}$$

Przeprowadzając analogiczne działanie względem zmiennej t_z otrzymamy:

$$s \cdot t_{pz} + p \, \frac{2\, t_{kz} \cdot e^{-s \cdot F} - t_{pz} \cdot (e^{-p \cdot F} + e^{p \cdot F})}{e^{p \cdot F} - e^{-p \cdot F}} =$$

$$= \frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot (t_{px} - t_{pz}) - \frac{k_{2-3}}{w_3} \, (t_{pz} - t_{py}) \tag{i}$$

Odejmujemy od siebie stronami równania (h) (i):

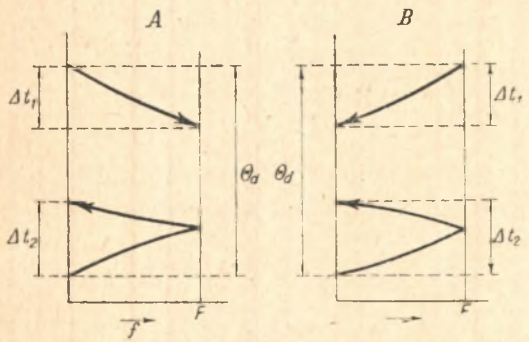
$$s \cdot (t_{py} - t_{pz}) - p \cdot (t_{py} - t_{pz}) \cdot \operatorname{ctgh} p \cdot F = t_{px} \cdot \left(\frac{k_{1-2}}{w_2} - \frac{k_{1-3}}{w_3} \right) +$$

$$+ \frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot t_{py} + \frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot t_{pz} - \left(\frac{k_{2-3}}{w_2} + \frac{k_{2-3}}{w_3} \right) \cdot (t_{py} - t_{pz})$$

Wyrażenia t_{kz} oraz t_{ky} [równe w myśl (b)] nie figurują w otrzymanym równaniu, ponieważ uległy redukcji. Równanie to można dalej uprościć biorąc pod uwagę warunek (a), przez co ostatni wyraz w tym równaniu jako równy zeru odpadnie. Oznaczając ponadto różnicę $t_{py} - t_{pz}$ przez Δt_2 otrzymamy:

$$\Delta t_2 \cdot (s - p \cdot \operatorname{ctgh} p \cdot F) = \frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (t_{px} - t_{py}) - \frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot (t_{px} - t_{pz}) \qquad (2)$$

Należy teraz wprowadzić do obliczeń wielkość Θ oznaczającą największą istniejącą w wymienniku różnicę temperatur, zatem różnicę temperatur czynników na dolocie. Ponieważ wielkość tę określa się inaczej dla wlotu czynników ogrzewającego i ogrzewanego po jednej stronie wymiennika, niż dla wlotu obu czynników po różnych stronach, przeto każdy z powyższych przypadków rozważymy osobno.



Rys. 7. Odmiany trójprzegrodowych różnoprądów dwuczynnikowych

A. *Wlot obu czynników odbywa się po jednej stronie wymiennika* dla $f = 0$ (rys. 7A).

W tym przypadku $\Theta = t_{px} - t_{pz}$ oraz $t_{px} - t_{py} = \Theta - \Delta t_2$

Równanie (2) dla tych warunków przyjmie następującą postać:

$$\Delta t_2 \cdot (s - p \cdot \operatorname{ctgh} p \cdot F) = \frac{k_{1-2}}{w_2} \cdot (\Theta - \Delta t_2) - \frac{k_{1-3}}{w_3} \cdot \Theta$$

przekształcając powyższą zależność dochodzimy do następującej formy:

$$\Delta t_2 = \frac{\left(\frac{k_{1-2}}{w_2} - \frac{k_{1-3}}{w_3} \right) \cdot \Theta}{\frac{k_{1-2}}{w_2} + s - p \operatorname{ctgh} p \cdot F}$$

Wartość s wyznaczamy biorąc pod uwagę zależność (X, a) przy pomocy wzoru (I, 9):

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_2} \right)$$

Wprowadzając ponadto bezwzględne wartości równoważników wodnych natężenia przepływu: $w_1 = W_1$, $w_2 = -W_2$, $w_3 = W_2$ otrzymamy:

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{1}{W_2} \cdot \Theta}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_1}\right) + \frac{p \operatorname{ctgh} p \cdot F}{k_{1-2} + k_{1-3}}} \tag{3}$$

oraz

$$s = -\frac{1}{2}\left[k_{1-2} \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right) + k_{1-3} \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)\right] \tag{4}$$

B. *Wlot obu czynników odbywa się z przeciwległych stron wymiennika* (rys. 7 B).

Dla tego przypadku jest:

$$\Theta = -t_{pz}; \quad t_{py} = -\Theta + \Delta t_2; \quad t_{px} = \frac{w_3}{w_1} \cdot \Delta t_2; \quad w_1 = -W_1$$

$$w_2 = -W_2; \quad w_3 = W_2.$$

Wstawiając powyższe zależności w równanie (2) otrzymamy następujący wzór, określający wzrost temperatury czynnika ogrzewanego:

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{1}{W_2} \cdot \Theta}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) + \frac{p \operatorname{ctgh} p \cdot F}{k_{1-2} + k_{1-3}}} \tag{5}$$

oraz

$$s = \frac{1}{2}\left[k_{1-2} \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) + k_{1-3} \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right)\right] \tag{6}$$

Wzory (3) oraz (5) posiadają identyczną budowę. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right); \quad \zeta = \frac{W_1 \cdot p}{k_{1-2} + k_{1-3}} \tag{7}$$

otrzymamy wspólny wzór dla obu przypadków A i B:

$$\Delta t_2 = \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\Theta}{\gamma + \zeta \cdot \operatorname{ctgh} p \cdot F} \tag{8}$$

Należy podkreślić, że wartości ζ oraz p zależą od typu wymiennika, natomiast wartość γ jest niezależna od niego.

Spadek temperatury czynnika 1 obliczymy przy pomocy równania (8) biorąc pod uwagę związek wynikający z bilansu cieplnego:

$$\Delta t_1 \cdot W_1 = \Delta t_2 \cdot W_2 \quad ; \quad \Delta t_2 = \Delta t_1 \cdot \frac{W_1}{W_2}$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Theta}{\gamma + \zeta \cdot \operatorname{ctgh}(p \cdot F)}$$

uwzględniając ponadto zależność (7) otrzymamy:

$$\Delta t_1 = \frac{\Theta}{\gamma + \zeta \cdot \operatorname{ctgh}\left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} \cdot \zeta \cdot F.\right)} \tag{9}$$

Za pomocą równania (9) możemy obliczyć spadek temperatury Δt_1 czynnika 1, gdy znane są wielkości W_1, W_2, k_{1-2}, k_{1-3}, k_{2-3}, Θ, F.

W dalszym ciągu postawimy sobie za zadanie obliczyć powierzchnię F wymiennika, jeśli są dane: W_1, W_2, k_{1-2}, k_{2-3}, k_{1-3} oraz stosunek $\frac{\Theta}{\Delta t_1}$.

Początkowo przekształcamy równanie (9)

$$\gamma + \zeta \cdot \operatorname{ctgh}\left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} \cdot \zeta \cdot F\right) = \frac{\Theta}{\Delta t_1}$$

$$\operatorname{ctgh}\left(\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{W_1} \cdot \zeta \cdot F\right) = \frac{\frac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma}{\zeta}$$

Z ostatniej zależności wyznaczamy powierzchnię porównawczą F wymiennika:

$$F = \frac{W_1}{(k_{1-2} + k_{1-3}) \cdot \zeta} \cdot \operatorname{area}\left[\operatorname{ctgh} \frac{\frac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma}{\zeta}\right] \tag{10}$$

Stosując w równaniu (10) zależność znaną w trygonometrii hiperbolicznej

$$\operatorname{area}\operatorname{ctgh}(u) = \frac{1}{2} \ln \frac{u + 1}{u - 1}$$

otrzymamy:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{W_1}{(k_{1-2} + k_{1-3}) \cdot \zeta} \ln \frac{\frac{\frac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma}{\zeta} + 1}{\frac{\frac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma}{\zeta} - 1}$$

i po uproszczeniu

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{W_1}{(k_{1-2} + k_{1-3}) \cdot \zeta} \ln \frac{\dfrac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma + \zeta}{\dfrac{\Theta}{\Delta t_1} - \gamma - \zeta} \tag{11}$$

Przykład 7

Trójprzegrodowy różnoprąd dwuczynnikowy o wlocie obu czynników po tej samej stronie wymiennika typu A

Dane:

$$w_1 = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad k_{1-2} = 10 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\, 1^\circ \cdot \text{h}}; \quad \Theta = 100^\circ$$

$$w_2 = -10 \text{ ,,} \quad k_{2-3} = 10 \text{ ,,} \quad F = 0{,}5 \text{ m}^2$$

$$w_3 = 10 \text{ ,,} \quad k_{1-3} = 20 \text{ ,,}$$

Obliczyć: Δt_1, Δt_2 °.

Rozwiązanie:

Wartości bezwzględne r. w. n. p.: $W^\circ{}_1 = 20 \dfrac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ}$

$$W^\circ{}_2 = 10 \text{ ,,}$$

Wielkości pomocnicze:

$$s = -\frac{1}{2}\left[10 \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{10}\right) + 20 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right)\right] \tag{X, 4}$$

$$s = -1{,}25$$

$$k_c^2 = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 20 = 500 \tag{I, 6}$$

$$b = \frac{20 - 10 + 10}{20 \cdot (-10) \cdot 10} \cdot 500 = -5 \tag{II, 5}$$

$$p = \sqrt{1{,}25^2 + 5} = 2{,}56 \tag{II, 6}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\dfrac{100}{10}}{\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10}\right) + \dfrac{2{,}56 \cdot \operatorname{ctgh}(2{,}56 \cdot 0{,}5)}{10 + 20}} \tag{X, 3}$$

$$\Delta t_2 = 57{,}2\,^\circ$$

$$\Delta t_2 \cdot W_2 = \Delta t_1 \cdot W_1$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{W_1} \cdot W_2 = \frac{57{,}2}{20} \cdot 10 = 28{,}6\,^\circ$$

Przykład 8

Trójprzegrodowy różnoprąd dwuczynnikowy, o wlocie obu czynników po przeciwległych stronach wymiennika typu B

Dane:

$$w_1 = -20 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad k_{1-2} = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 1^\circ \cdot \text{h}}; \quad \Theta = 100^\circ$$

$$w_2 = -10 \text{ ,,} \quad k_{2-3} = 10 \text{ ,,} \quad F = 0{,}5 \text{ m}^2$$

$$w_3 = 10 \text{ ,,} \quad k_{1-3} = 10 \text{ ,,}$$

Obliczyć: Δt_1, Δt_2.

Rozwiązanie:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \left[20 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{10}\right)\right] \qquad (X, 6)$$

$$s = 1{,}25$$

$$k_c^2 = 20 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 500 \qquad (I, 6)$$

$$b = \frac{-20 - 10 + 10}{-20\,(-10) \cdot 10} \cdot 500 = -5 \qquad (II, 5)$$

$$p = \sqrt{1{,}25^2 + 5} = 2{,}56 \qquad (II, 6)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{20}{10}\right) = 1{,}5; \quad \zeta = \frac{20 \cdot 2{,}56}{20 + 10} \qquad (X, 7)$$

$$\zeta = 1{,}705$$

$$\Delta t_2 = \frac{20}{10} \cdot \frac{100}{1{,}5 + 1{,}705 \cdot \text{ctgh}\,(2{,}56 \cdot 0{,}5)} \qquad (X, 8)$$

$$\Delta t_2 = 57{,}2^\circ$$

$$\Delta t_1 = \frac{W_2}{W_1} \cdot \Delta t_2 \quad \text{(z bilansu ogólnego)}$$

$$\Delta t_1 = \frac{10}{20} \cdot 57{,}2 = 28{,}6^\circ$$

Przykład 9

Trójprzegrodowy różnoprąd dwuczynnikowy typu B

Dane:

$$W_1 = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ} \quad k_{1-2} = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{h} \cdot 10}$$

$$W_2 = 10 \text{ ,,} \quad k_{2-3} = 10 \text{ ,,}$$

$$k_{1-3} = 10 \text{ ,,}$$

$$\Theta = 100^\circ \quad \Delta t_1 = 28{,}6^\circ$$

Obliczyć powierzchnię F m².

Rozwiązanie:

Wielkości pomocnicze γ i ζ są takie same jak w przykładzie poprzednim (8):

$$\gamma = 1{,}5; \qquad \zeta = 1{,}705$$

$$\frac{\Theta}{\Delta t_1} = \frac{100}{28{,}6} = 3{,}5$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{(20+10) \cdot 1{,}705} \ln \frac{3{,}5 - 1{,}5 + 1{,}705}{3{,}5 - 1{,}5 - 1{,}705} \tag{X, 11}$$

$$F = 0{,}495 \text{ m}^2$$

Powinno być $F = 0{,}5$ m^2,

$$\text{błąd} = \frac{0{,}5 - 0{,}495}{0{,}5} \, 100 = 1\%$$

XI. Dwuprzegrodowy różnoprąd dwuczynnikowy

(Wymiennik dwuprzegrodowy z punktem zwrotnym)

Jeśli w różnoprądzie dwuczynnikowym przez jedną z trzech przegród ciepło nie przenika, mamy do czynienia z dwuprzegrodowym różnoprądem dwuczynnikowym. Zatem od trójprzegrodowego wymiennika do dwuprzegrodowego dojdziemy w ten sposób, że położymy jeden ze współczynników spośród k_{1-2}, k_{2-3}, k_{1-3} równy zeru.

Dla rozpatrywanego przypadku zachodzą związki:

$$w_3 = -w_2 \tag{a}$$

zatem wartość b określona równaniem (II, 5) upraszcza się:

$$b = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3} k_c^2 = -\frac{k_c^2}{w_2^2} = -\frac{k_c^2}{W_2^2} \tag{b}$$

Wartość k_c^2 zdefiniowana wzorem (I, 6):

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3} + k_{2-3} \cdot k_{1-3} + k_{1-2} \cdot k_{1-3} \tag{c}$$

redukuje się do jednego tylko iloczynu wartości współczynników przenikania ciepła, iloczynu, w którym nie występuje ten współczynnik, jaki założyliśmy równy zeru.

Dla naszego przypadku istnieje zatem sześć odmian wymienników:

trzy dla wlotu czynników po tej samej stronie wymiennika a mianowicie: α) $k_{1-2} = 0$, β) $k_{1-3} = 0$, γ) $k_{2-3} = 0$;

trzy dla wlotu czynników po różnych stronach wymiennika, w szczególności: δ) $k_{1-2} = 0$, ε) $k_{1-3} = 0$, φ) $k_{2-3} = 0$.

Rozpatrzymy początkowo trzy tylko odmiany, mianowicie dla wlotu czynników po jednej stronie wymiennika.

α) Jeśli współczynnik k_{1-2} uczynimy równy zeru:

$$k_{1-2} = 0 \qquad (\alpha)$$

otrzymamy jedną z odmian wymiennika Fielda (w zestawieniu str. 78, lp. 1). Dla odmiany tej wartość s określona wzorem (II, 4) upraszcza się do następującej postaci:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot k_{1-3} \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right)$$

Wartość k_c^2 obliczymy ze wzoru (XI, c):

$$k_c^2 = k_{2-3} \cdot k_{1-3}$$

Wyrażenie b na podstawie zależności (b)

$$b = -\frac{k_{2-3} \cdot k_{1-3}}{W_2^2}$$

Zatem wielkość p określona równaniem (II, 6) da się wyrazić jako:

$$p = \sqrt{s^2 - b} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot k_{1-3}^2 \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right)^2 + \frac{k_{2-3} \cdot k_{1-3}}{W_2^2}} =$$

$$= k_{1-3} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right)^2 + \frac{k_{2-3}}{k_{1-3}} \cdot \frac{1}{W_2^2}}$$

W tych warunkach pomocnicza wielkość ζ na podstawie równania (X, 7) przyjmie wartość:

$$\zeta = \frac{W_1 \cdot p}{k_{1-2} + k_{1-3}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{2-3}}{k_{1-3}} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \qquad (1)$$

β) Dla założenia $\quad k_{1-3} = 0 \qquad (\beta)$

otrzymamy inną odmianę wymiennika Fielda (w zestawieniu str. 78, lp. 2), dla której:

$$s = -\frac{1}{2} \cdot k_{1-2} \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right)$$

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3}$$

$$b = -\frac{k_{1-2} \cdot k_{2-3}}{W_2^2}$$

$$p = \sqrt{s^2 - b} = \sqrt{\frac{1}{4} k_{1-2}^2 \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right)^2 + \frac{k_{1-2} \cdot k_{2-3}}{W_2^2}} =$$

$$= k_{1-2} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right)^2 + \frac{k_{2-3}}{k_{1-2}} \cdot \frac{1}{W_2^2}}$$

$$\zeta = \frac{W_1 \cdot p}{k_{1-2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{2-3}}{k_{1-2}} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \qquad (2)$$

γ) Zakładając

$$k_{2-3} = 0 \tag{γ}$$

otrzymamy tzw. wymiennik pętlicowy (w zestawieniu str. 78, lp. 3), którego cechą charakterystyczną jest prowadzenie czynnika ogrzewanego 2 przy pomocy rury wygiętej w kształcie litery „U". W tym przypadku wielkości pomocnicze dadzą się wyrazić następująco:

$$s = \frac{1}{2}\left[k_{1-2}\cdot\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)+k_{1-3}\cdot\left(\frac{1}{W_1}-\frac{1}{W_2}\right)\right]$$

$$k_c^2 = k_{1-2}\cdot k_{1-3}$$

$$b = -\frac{k_{1-2}\cdot k_{1-3}}{W_2^2}$$

$$p = \sqrt{s^2 - b} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[k_{1-2}\cdot\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)+k_{1-3}\left(\frac{1}{W_1}-\frac{1}{W_2}\right)\right]^2 + \frac{k_{1-2}\cdot k_{1-3}}{W_2^2}},$$

$$\zeta = \frac{W_1\cdot p}{k_{1-2}+k_{1-3}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k_{1-2}-k_{1-3}}{k_{1-2}+k_{1-3}}\frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{1-2}\cdot k_{1-3}}{(k_{1-2}+k_{1-3})^2}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \tag{3}$$

Przykład 10

Wymiennik Fielda typu α (wlot obu czynników po tej samej stronie, $k_{1-2} = 0$)

Dane:

$$W_1 = 100\ \frac{\text{kcal}}{1^\circ\cdot\text{h}};\quad k_{2-3} = 20\ \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,1^\circ\cdot\text{h}}$$

$$W_2 = 20\ \text{„}\qquad k_{1-3} = 40\ \text{„}$$

$$\Theta = 100^\circ\qquad \Delta t_1 = 5^\circ$$

Obliczyć powierzchnię $F\cdot \text{m}^2$.

Rozwiązanie:

Wielkości pomocnicze:

$$\gamma = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{100}{20}\right) = 3 \tag{X, 7}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{2-3}}{k_{1-3}}\cdot\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \tag{XI, 1}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{4}(1+5)^2 + \frac{20}{40}\cdot\left(\frac{100}{20}\right)^2} = 4{,}63$$

$$F = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{0+40}\cdot\ln\frac{\frac{100}{5}-3+4{,}63}{\frac{100}{5}-3-4{,}63} = 0{,}7\ \text{m}^2 \tag{X, 11}$$

Przykład 11

Wymiennik Fielda typu β (wlot obu czynników po tej samej stronie, $k_{1-3} = 0$)

Dane:

$$W_1 = 100 \frac{\text{kcal}}{1^\circ \cdot \text{h}}; \quad k_{1-2} = 40 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\, 1^\circ \cdot \text{h}}$$

$$W_2 = 20 \text{ „} \quad k_{2-3} = 20 \text{ „}$$

$$\Theta = 100^\circ \quad F = 1 \text{ m}^2.$$

Obliczyć Δt_1 °.

Rozwiązanie:
Wielkości pomocnicze:

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{100}{20}\right) = 3 \qquad \text{(X, 7)}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{100}{20}\right)^2 + \frac{20}{40}\left(\frac{100}{20}\right)^2} = 4{,}06 \qquad \text{(XI. 2)}$$

$$\Delta t_1 = \frac{100}{3 + 4{,}06 \text{ ctgh}\left(\frac{40}{100} \cdot 4{,}06 \cdot 1\right)} \qquad \text{(X, 9)}$$

$$\Delta t_1 = 13{,}55^\circ$$

XII. Wymienniki dwuczynnikowe o jednej przegrodzie

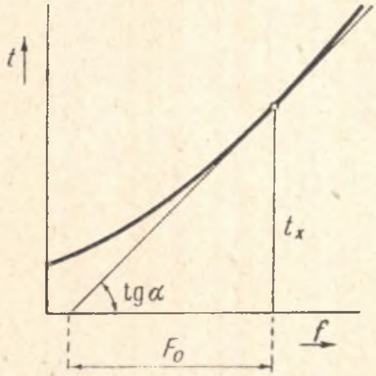
Podział wymienników jednoprzegrodowych przeprowadzamy ze względu na kierunek prądów 2 czynników względem siebie. Należy tu rozróżnić:

1) kierunek prądów dowolny,
2) współprąd,
3) przeciwprąd,
4) prąd krzyżowy.

Omówimy każdą z odmian kolejno z wyjątkiem (4), która wychodzi poza zakres pracy niniejszej.

1. Kierunek prądów dowolny

Przykładem wymiennika jednoprzegrodowego o dowolnym kierunku prądów jest parownik kotła oraz skraplacz. W wymienniku tym jeden z czynników (np. czynnik 2) nie zmienia swej temperatury, dzięki czemu równoważnik wodny natężenia przepływu tego czynnika należy traktować jako nieskończenie wielką wartość ($w_2 = \infty$). Do wymiennika tego typu doszliśmy w rozdziale IX, gdzie podane zostało równanie (5) wyrażające zmienność temperatury czynnika 1 o skończonej wielkości równoważnika wodnego natężenia przepływu w_1:



Rys. 8. Podstyczna krzywej przebiegu temperatur

$$t_x = t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f} \tag{1}$$

Krzywa przebiegu temperatury jako funkcji powierzchni jest krzywą wykładniczą. Krzywa wykładnicza posiada tę właściwość, że w każdym punkcie wielkość podstycznej, mierzonej na asymptocie jest stała. Obecnie obliczymy wielkość tej podstycznej. W rozpatrywanym przypadku asymptota pokrywa się z poziomem odniesienia temperatur ($t = 0$). Obieramy dowolny punkt na krzywej t_x i prowadzimy przez niego styczną (rys. 8). Wielkość podstycznej F_0, jak to wynika z rysunku wynosi:

$$F_0 = \frac{t_x}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f}}{\operatorname{tg} \alpha} \tag{α}$$

ponieważ

$$\operatorname{tg} \alpha = t'_x = -\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f} \tag{β}$$

więc

$$F_0 = \frac{t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f}}{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot t_{px} \cdot e^{-\frac{k_{1-2}}{w_1} \cdot f}} = -\frac{w_1}{k_{1-2}} \tag{γ}$$

Wstawiając związek (γ) w równanie (1) otrzymamy:

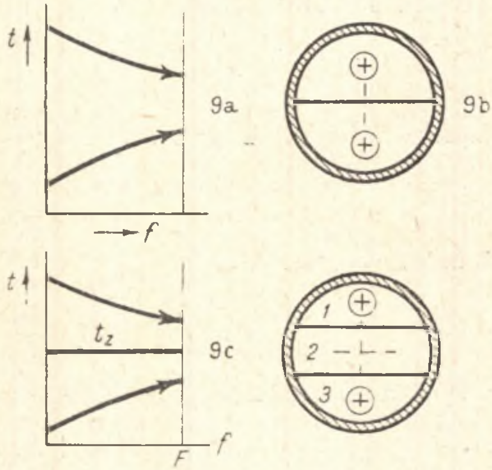
$$t_x = t_{px} \cdot e^{\frac{f}{F_0}} \tag{1a}$$

2. Współprąd

Cechą charakterystyczną wymiennika współprądowego jest zgodny (równoległy) kierunek przepływu obu czynników, przy tym oba równoważniki wodne natężeń przepływu są wielkościami skończonymi. W oparciu o wywody zawarte w rozdziale IX możemy przystąpić do wyprowadzenia wzoru Hudlera dla współprądu. Wzór ten będzie dotyczył wymiennika współprądowego, w którym równoważniki wodne natężenia przepływu wynoszą W_1 oraz W_3, współczynnik zaś Pecleta k_{1-3}.

Rysunek 9a obrazuje krzywe przebiegu temperatur dla tego przypadku, natomiast rysunek 9b przedstawia schemat takiego wymiennika.

W celu wyprowadzenia wzoru Hudlera wykonamy transfigurację naszego wymiennika, zamieniając go na trójczynnikowy dwuprzegrodowy. W tym celu wprowadzamy pomiędzy czynniki 1 oraz 3 nowy czynnik hipotetyczny 2 o równoważniku wodnym natężenia przepływu nieskończenie wielkim i o stałej temperaturze t_2, rozdzielając sposób czynniki 1 i 3 i przerywając ich bezpośrednie sprzężenie cieplne.



Rys. 9. Współprąd

W wyniku otrzymaliśmy wymiennik trójczynnikowy (ryc. 9c), dla którego przy zachowaniu niezmienionych równoważników wodnych natężenia przepływu W_1 oraz W_3 zaistniały nowe współczynniki Pecleta k_{1-2} oraz k_{2-3}. Współczynników k_{1-2} oraz k_{2-3} nie można obrać zupełnie dowolnie, żądamy bowiem, aby wprowadzenie czynnika hipotetycznego nie zmianiało ilości ciepła, jaką na dowolnym elementarnym odcinku powierzchni df tracą czy zyskują czynniki 1 oraz 3. Aby znaleźć warunek, jaki muszą spełniać współczynniki k_{1-2} oraz k_{2-3} weźmy pod uwagę elementarne równanie transportu ciepła w pierwotnej fazie wymiennika (bez czynnika hipotetycznego):

$$d\,Q^*_{1-3} = k_{1-3} \cdot (x - z) \cdot df \qquad \text{(a)}$$

oraz elementarne równania przepływu ciepła przy istnieniu czynnika hipotetycznego:

$$d\,Q^*_{1-2} = k_{1-2} \cdot (x - t_2) \cdot df \qquad \text{(b)}$$

$$dQ^*_{2-3} = k_{2-3} \cdot (t_2 - z) \cdot df \qquad \text{(c)}$$

Warunkiem niezmienności transportu ciepła jest:

$$d\,Q^*_{1-2} = d\,Q^*_{1-3}$$

$$dQ^*_{2-3} = dQ^*_{1-3}$$

czyli, jak to wynika z równań (a), (b) i (c):

$$k_{1-2} \cdot (x - t_2) = k_{1-3} \cdot (x - z)$$

$$k_{2-3} \cdot (t_2 - z) = k_{1-3} \cdot (x - z)$$

lub inaczej:

$$x - t_2 = \frac{k_{1-3}}{k_{1-2}} \cdot (x - z)$$

$$t_2 - z = \frac{k_{1-3}}{k_{2-3}} \cdot (x - z)$$

po dodaniu tych równań:

$$x - z = \left(\frac{k_{1-3}}{k_{1-2}} + \frac{k_{1-3}}{k_{2-3}} \right) \cdot (x - z)$$

upraszczamy przez $(x - z)$:

$$\frac{k_{1-3}}{k_{1-2}} + \frac{k_{1-3}}{k_{2-3}} = 1$$

i dzielimy przez k_{1-3}:

$$\frac{1}{k_{1-2}} + \frac{1}{k_{2-3}} = \frac{1}{k_{1-3}} \tag{2}$$

Odwrotność współczynnika Pecleta nosi nazwę oporu cieplnego R, zatem:

$$R_{1-2} + R_{2-3} = R_{1-3} \tag{2a}$$

W konkluzji: po wprowadzeniu czynnika hipotetycznego opór cieplny na drodze od czynnika 1 do czynnika 3 nie może ulec zmianie.

Należy dodać, że warunek (2a) jest warunkiem koniecznym, lecz niewystarczającym na to, aby transport ciepła nie uległ zmianie w wyniku transfiguracji wymiennika. Chodzi nam o znalezienie różnicy temperatur czynników 1 i 3 w przekroju końcowym wymiennika, w tym celu zastosujemy wzory (IX, 5, 6) ważne dla wymiennika trójczynnikowego dwuprzegrodowego. We wzorach tych dla krótkości posłużymy się poprzednio wyprowadzonymi pojęciami powierzchni podstycznych:

$$F_{01} = -\frac{W_1}{k_{1-2}} \qquad F_{02} = -\frac{W_3}{k_{2-3}} \tag{d}$$

Wzory [IX (5)] i [IX (6)] dostarczają nam związków:

$$t_{kx} = t_{px} \cdot e^{\frac{F}{F_{01}}} \qquad t_{kz} = t_{pz} \cdot e^{\frac{F}{F_{02}}} \tag{3}$$

W powyższych równaniach wielkość F oznacza powierzchnię czynną wymiennika liczoną między przekrojem początkowym i końcowym, t_{kx}, t_{kz} zaś nadwyżki temperatur czynników 1 i 3 w końcowym przekroju wymiennika. Nadwyżki te są liczone względem temperatury odniesienia ϑ. Wyrażenia t_{px} oraz t_{pz} oznaczają nadwyżki temperatur czynników 1 i 3 ponad temperaturą odniesienia, która dla $W_2 = \infty$ pokrywa się z temperaturą czynnika 2, czyli $\vartheta = t_2$. Związek wzajemny tych wielkości jest następujący:

$$t_{px} = x_p - t_2 \qquad t_{pz} = z_p - t_2 \tag{e}$$

Tworzymy teraz różnicę $t_{kx} - t_{kz}$ na podstawie równań (3) przy zastosowaniu oznaczenia (e):

$$t_{kx} - t_{kz} = x_p \cdot e^{\frac{F}{F_{01}}} - z_p \cdot e^{\frac{F}{F_{02}}} - t_2 \cdot \left(e^{\frac{F}{F_{01}}} - e^{\frac{F}{F_{02}}}\right) \tag{4}$$

Różnica temperatur końcowych $t_{kx} - t_{kz}$ czynników 1 i 3 nie może być zależna od temperatury t_2 czynnika hipotetycznego, która została obrana dowolnie. Nastąpi to tylko wówczas, gdy wyrażenie stojące w nawiasie po prawej stronie równania (4) jest równe zeru:

$$e^{\frac{F}{F_{01}}} - e^{\frac{F}{F_{02}}} = 0$$

Równość powyższa zachodzi wówczas, gdy:

$$F_{01} = F_{02} = F_0 \tag{5}$$

Warunek (5) wskazuje na to, że obie powierzchnie podstyczne F_{01} i F_{02} muszą być sobie równe, aby różnica temperatur końcowych była niezależna od dowolnie obranej wielkości t_2. Wracając do równania (d) otrzymamy zatem:

$$\frac{W_1}{k_{1-2}} = \frac{W_3}{k_{2-3}} \tag{5a}$$

Jeśli spełniony jest warunek (5a) to równanie (4) upraszcza się do formy:

$$t_{kx} - t_{kz} = (x_p - z_p) \cdot e^{\frac{F}{F_0}} \tag{6}$$

Różnica temperatur $t_{kx} - t_{kz}$ jest niezależna od poziomu odniesienia, zatem:

$$t_{kx} - t_{kz} = x_k - z_k$$

oraz

$$x_k - z_k = (x_p - z_p) \cdot e^{\frac{F}{F_0}} \tag{6a}$$

Równanie (6a) łącznie z równaniem wyrażającym bilans cieplny dla całego wymiennika: $W_1 \cdot (x_p - x_k) = W_2 \cdot (z_k - z_p)$ pozwalają obliczyć różnicę temperatur $x_p - x_k$:

$$x_p - x_k = (x_p - z_p) \cdot \frac{1 - e^{\frac{F}{F_0}}}{1 + \frac{W_1}{W_3}} \tag{7}$$

Równanie (7) przedstawia wzór Hudlera ważny dla współprądu. Przy pomocy równań (2) oraz (5a) obliczymy k_{1-2} i k_{2-3}:

$$k_{1-2} = k_{1-3} \cdot \left(1 + \frac{W_1}{W_3}\right); \; k_{2-3} = k_{1-3} \cdot \left(1 + \frac{W_3}{W_1}\right) \tag{8}$$

Wielkość F_0 obliczamy z zależności (d), (5) i (8):

$$F_0 = F_{01} = -\frac{W_1}{k_{1-2}} = -\frac{W_1}{k_{1-3}\left(1 + \frac{W_1}{W_3}\right)} \tag{9}$$

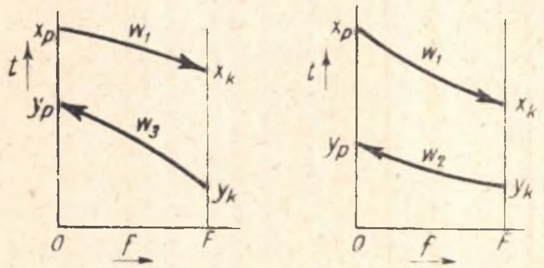
Wykładnik F/F_0 potęgi na podstawie równania (9) wynosi:

$$\frac{F}{F_0} = -\frac{k_{1-3} \cdot F}{W_1} \cdot \left(1 + \frac{W_1}{W_3}\right) \tag{10}$$

3. Przeciwprąd

W prosty sposób możemy wyprowadzić wzór Hudlera dla przeciwprądu, jeśli skorzystamy z twierdzenia o zmianie znaku równoważnika wodnego natężenia przepływu w przypadku zmiany kierunku przepływu czynnika. W tym celu wyjdziemy ze wzoru (7), w którym kładziemy:

$$z_p = y_p \quad \text{oraz} \quad W_3 = -W_2$$



Rys. 10. Przeciwprąd

Zmiany te wynikają stąd, że równoważnik wodny natężenia przepływu czynnika 2 jest ujemny, ponieważ czynnik 2 przepływa w kierunku przeciwnym niż czynnik 1 (rys. 10). Dzięki powyższym zmianom wzór (7) modyfikuje się następująco:

$$x_p - x_k = (x_p - y_p) \cdot \frac{1 - e^{\frac{F}{F_0}}}{1 - \frac{W_1}{W_2}} \tag{11}$$

Z ogólnego bilansu cieplnego dla całego wymiennika przeciwprądowego wynika następujący związek:

$$W_1 \cdot (x_p - x_k) = W_2 \cdot (y_p - y_k)$$

lub

$$y_p - y_k = \frac{W_1}{W_2} \cdot (x_p - x_k) \tag{12}$$

Wyznaczamy z równania (11) różnicę $x_p - y_p$:

$$x_p - y_p = \frac{1 - \dfrac{W_1}{W_2}}{1 - e^{F/F_0}} \cdot (x_p - x_k) \tag{11a}$$

Po dodaniu do siebie stronami równań (12) oraz (11a) po lewej stronie równania zniknie wyraz y_p:

$$x_p - y_k = (x_p - x_k) \cdot \left(\frac{1 - \dfrac{W_1}{W_2}}{1 - e^{F/F_0}} + \frac{W_1}{W_2} \right) = (x_p - x_k) \frac{1 - \dfrac{W_1}{W_2} \cdot e^{F/F_0}}{1 - e^{F/F_0}}$$

Z powyższego wyznaczamy różnicę $x_p - x_k$:

$$x_p - x_k = (x_p - y_k) \cdot \frac{1 - e^{F/F_0}}{1 - \dfrac{W_1}{W_2} \cdot e^{F/F_0}} \tag{13}$$

Równanie (13) przedstawia wzór Hudlera dla przeciwprądu. Wielkość F/F_0 obliczymy kładąc w równanie (10) $k_{1-3} = k_{1-2}$ i $W_3 = - W_2$:

$$\frac{F}{F_0} = - \frac{k_{1-2} \cdot F}{W_1} \cdot \left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \tag{14}$$

Wielkość F_0 zachowuje nadal znaczenie powierzchni podstycznej. Wielkość tę wyznaczymy kładąc w równaniu (9) $k_{1-3} = k_{1-2}$ i $W_3 = - W_2$.

$$F_0 = - \frac{W_1}{k_{1-2} \cdot \left(1 - \dfrac{W_1}{W_2}\right)} \tag{15}$$

Wzory powyższe są słuszne jedynie dla $W_1 \neq W_2$.

Założenie $W_1 = W_2$ prowadzi do tzw. przeciwprądu prostoliniowego, który z kolei rozważymy.

P r z e c i w p r ą d p r o s t o l i n i o w y. Jest to szczególny przypadek przeciwprądu, dla którego

$$W_2 = W_1 = W \tag{a}$$

Wzór (13) nie nadaje się tutaj do użytku, albowiem dla warunku (a) przybiera on formę nieoznaczoną. Musimy zatem wrócić do wyjściowego równania różniczkowego (II, 3). Ponieważ mamy do czynienia z wymiennikiem dwuczynnikowym, zatem chcąc zastosować w tym przypadku wspomniany wzór, musimy odseparować czynnik trzeci, czyli innymi słowy położyć

$$k_{1-3} = 0 \quad \text{oraz} \quad k_{2-3} = 0$$

ponadto, ponieważ czynnik 2 ma kierunek przepływu przeciwny wzrostowi powierzchni f należy przyjąć:

$$w_2 = -W_1 \quad \text{oraz} \quad w_1 = W_1 \tag{c}$$

Obliczymy początkowo wartość k_c^2 uwzględniając warunek (b):

$$k_c^2 = k_{1-2} \cdot k_{2-3} + k_{1-2} \cdot k_{1-3} + k_{2-3} \cdot k_{1-3} = 0$$

Z otrzymanego równania wynika, że współczynnik stojący przed zmienną t w równ. (II, 3) jest równy zeru. W dalszym ciągu obliczamy współczynnik figurujący przed pochodną t' w wyżej wspomnianym równaniu:

$$\frac{k_{1-2} + k_{1-3}}{w_1} + \frac{k_{2-3} + k_{1-2}}{w_2} + \frac{k_{1-3} + k_{2-3}}{w_3} = \frac{k_{1-2}}{W_1} - \frac{k_{1-2}}{W_1} = 0$$

Zatem równanie (II, 3) uprości się ostatecznie do formy:

$$t'' = 0 \tag{d}$$

Z równania (d) wynika, że przebieg temperatur obu czynników jest prostoliniowy. Nie jest rzeczą trudną udowodnić, że obie linie przebiegu temperatur są do siebie równoległe. Wystarczy wziąć pod uwagę bilans cieplny całego wymiennika:

$$W_1 \cdot (x_p - x_k) = W_2 \cdot (y_p - y_k)$$

po uwzględnieniu zależności (a):

$$x_p - x_k = y_p - y_k$$

oraz

$$x_p - y_p = x_k - y_k$$

co oznacza, że różnice temperatur czynników na początku wymiennika (w przekroju p—p) i na końcu (w przekroju k—k) są jednakowe. Może to zachodzić jedynie wtedy, gdy obie linie przebiegów temperatur są do siebie równoległe. Zatem różnica temperatur Θ_1 obu czynników jest stała w każdym przekroju wymiennika. Oznaczając przez Θ największą istniejącą w wymienniku różnicę temperatur (w naszym przypadku $\Theta = x_p - y_k$) i stosując wzór Pecleta otrzymamy:

$$Q^* = k \cdot F \cdot \Theta_1 = W \cdot (\Theta - \Theta_1)$$

lub

$$k \cdot F \cdot \Theta_1 = W \cdot \Theta - W \cdot \Theta_1$$

oraz

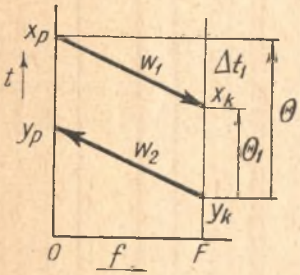
$$\Theta_1 \cdot (k \cdot F + W) = W \cdot \Theta$$

i ostatecznie:

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{1 + \frac{k \cdot F}{W}} \tag{16}$$

Spadek temperatury Δt_1 czynnika 1 obliczymy na podstawie związku (rys. 11):

$$\Delta t_1 = \Theta - \Theta_1$$



Rys. 11. Przeciwprąd prostoliniowy

po uwzględnieniu równania (16)

$$\Delta t_1 = \Theta - \frac{\Theta}{1 + \frac{k \cdot F}{W}} = \frac{\Theta \cdot \left(1 + \frac{k \cdot F}{W} - 1\right)}{1 + \frac{k \cdot F}{W}}$$

i po uproszczeniu powyższej zależności

$$\Delta t_1 = \Theta \cdot \frac{\frac{k \cdot F}{W}}{1 + \frac{k \cdot F}{W}} \tag{17}$$

Obliczymy jeszcze nachylenie linij przebiegu temperatur. Jak to wynika z rysunku 11:

$$-\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Theta - \Theta_1}{F}$$

rugujemy z powyższego wielkość Θ, którą wyznaczymy z równania (16):

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Theta_1 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot F}{W} - 1\right)}{F}$$

i upraszczamy powyższe równanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\Theta_1 \cdot \frac{k}{W} \tag{18}$$

XIII. Metody operacyjne

W rozdziale niniejszym przedstawimy pewne metody, które znajdują zastosowanie w dziale wymienników trójczynnikowych, bądź dwuczynnikowych dwuprzegrodowych. Należy podkreślić, że każda z niżej wymienionych metod nadaje się jedynie do pewnych szczególnych odmian wspomnianych wymienników.

Metody te są następujące:

1) metoda transfiguracji,

2) metoda zmiany znaku równoważnika wodnego natężenia przepływu,

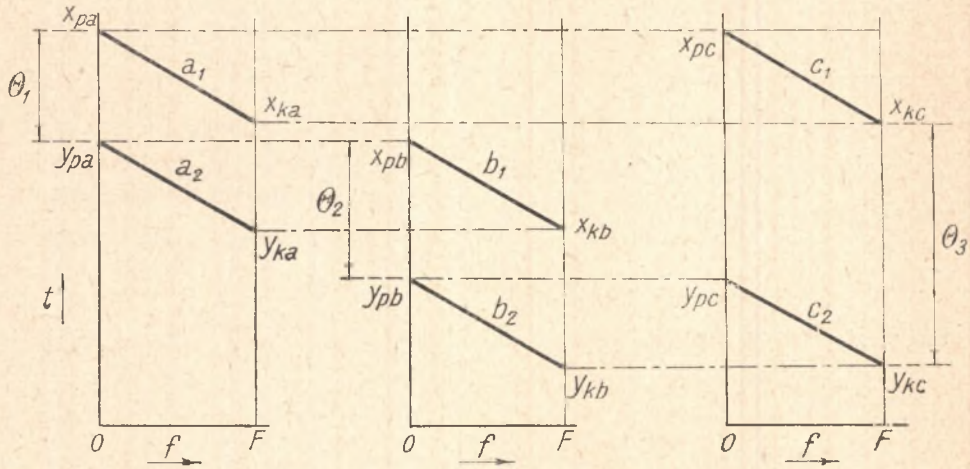
3) metoda złożenia,

4) metoda wyodrębnienia (rozbicia),

5) metoda równowartości.

Metodę transfiguracji zastosowano w rozdziale XII, 2, przy okazji wyprowadzenia wzoru Hudlera na współprąd. Polegała ona na wprowadzeniu czynnika hipotetycznego.

Metodę zmiany znaku równoważnika wodnego natężenia przepływu przedstawiono w rozdziale XII, 3. Za jej pomocą wyprowadzono wzór Hudlera na przeciwprąd. Metoda ta jest oparta na wywodach zawartych w rozdziale II.



Rys. 12. Złożenie trójczynnikowego różnoprądu prostoliniowego

Metoda złożenia. W pewnych przypadkach możemy przez złożenie dwu lub trzech wymienników dwuczynnikowych jednoprzegrodowych otrzymać wymiennik trójczynnikowy. Warunkiem możliwości zastosowania takiej metody jest to, że temperatury czynników w poszczególnych miejscach wymienników, które mają się zetknąć, nie mogą być od siebie różne, albowiem w wyniku złożenia nie mogą one ulec zmianie.

Jako przykład zastosowania tej metody przytoczymy złożenie trójczynnikowego różnoprądu prostoliniowego za pomocą trzech dwuczynnikowych przeciwprądów prostoliniowych (rys. 12).

W tym celu obieramy trzy dwuczynnikowe przeciwprądy prostoliniowe o równych powierzchniach F, których cechy są wyszczególnione w poniższej tabeli:

Wymiennik	Równoważnik wodny natężenia przepływu	Czynnik	Współczynnik Pecleta	Temperatury w przekroju	
				początkowym $p - p$	końcowym $k - k$
1	2	3	4	5	6
1	w_a	a_1 a_2	k_{1-2}	x_{pa} y_{pa}	x_{ka} y_{ka}
2	w_b	b_1 b_2	k_{2-3}	x_{pb} y_{pb}	x_{kb} y_{kb}
3	w_c	c_1 c_2	k_{1-3}	x_{pc} y_{pb}	x_{kc} y_{kc}

Temperatury czynników w przekroju początkowym należy obrać tak, aby te punkty, które mają zetknąć się ze sobą posiadały wspólną temperaturę:

$$\left.\begin{aligned} x_{pa} &= x_{pc} \\ y_{pa} &= x_{pb} \\ y_{pb} &= y_{pc} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Ponadto nachylenia linij przebiegu temperatur w każdym ze składowych przeciwprądów muszą być jednakowe. Określamy ten warunek obliczając tangensy kątów nachylenia dla każdego z trzech przeciwprądów na podstawie równania (XII, 18) i przyrównując je do siebie:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{k_{1-2}}{W_a} \cdot \Theta_1 = -\frac{k_{2-3}}{W_b} \cdot \Theta_2 = -\frac{k_{1-3}}{W_c} \cdot \Theta_3 \tag{1}$$

W powyższym równaniu wielkości Θ_i na podstawie rysunku 12 mają następujące znaczenie:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= x_{pa} - y_{pa} \\ \Theta_2 &= x_{pb} - y_{pb} \\ \Theta_3 &= x_{pc} - y_{pc} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Doprowadzamy teraz do zetknięcia się czynników a_1 z c_1, a_2 z b_1, b_2 z c_2, co wolno nam uczynić, ponieważ temperatury w każdym dowolnym punkcie styku są jednakowe.

W wyniku przeprowadzonego złożenia otrzymaliśmy wymiennik trójczynnikowy o następujących równoważnikach wodnych natężenia przepływu:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w_a + w_c \\ w_2 &= w_b - w_a \\ w_3 &= -w_b - w_c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

W dalszym ciągu z równania (1) wyznaczamy wielkości w_a, w_b, w_c:

$$w_a = -\frac{\Theta_1 \cdot k_{1-2}}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad w_b = -\frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad w_c = -\frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{3}$$

i wstawiamy powyższe wartości w grupę równań (2):

$$w_1 = -\frac{\Theta_1 \cdot k_{1-2}}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{4a}$$

$$w_2 = -\frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\Theta_1 \cdot k_{1-2}}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{4b}$$

$$w_3 = \frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{4c}$$

Pozostaje już tylko wyrugować wielkość $\operatorname{tg}\alpha$ z powyższych równań. Przeprowadzamy to dzieląc równania (4a) oraz (4b) przez (4c):

$$\frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{w_3} + \frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{w_3} = -\frac{\Theta_1 \cdot k_{1-2}}{w_1} - \frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{w_1} \tag{5}$$

$$\frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{w_3} + \frac{\Theta_3 \cdot k_{1-3}}{w_3} = -\frac{\Theta_2 \cdot k_{2-3}}{w_2} - \frac{\Theta_1 \cdot k_{1-2}}{w_2} \tag{6}$$

Lewe strony równań (5) i (6) są identyczne, zatem łączymy te równania w jedno:

$$-\frac{k_{1-2} \cdot \Theta_1}{w_1} - \frac{k_{1-3} \cdot \Theta_3}{w_1} = \frac{k_{1-2} \cdot \Theta_1}{w_2} - \frac{k_{2-3} \cdot \Theta_2}{w_2} =$$

$$= \frac{k_{1-3} \cdot \Theta_3}{w_3} + \frac{k_{2-3} \cdot \Theta_2}{w_3} \tag{7}$$

Dodając stronami równania z grupy (2) otrzymamy:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \tag{8}$$

Równania (7) i (8) określają warunki, które muszą być spełnione, aby trójczynnikowy różnoprąd trójprzegrodowy posiadał prostoliniowy przebieg temperatur.

Wynik ten wyprowadzony przy użyciu metody złożenia otrzymaliśmy przedtem bezpośrednio w rozdziale IV, 1 i 7.

Metoda wyodrębienia. Metodę tę zastosowaliśmy już raz (rozdz. IX) przy okazji rozbicia dwuprzegrodowego różnoprądu trójczynnikowego o $w_2 = \infty$, na dwa jednoprzegrodowe prądy dowolne.

Obecnie zastosujemy metodę wyodrębnienia do prostoliniowego różnoprądu trójprzegrodowego, omówionego poprzednio w rozdziale IV.

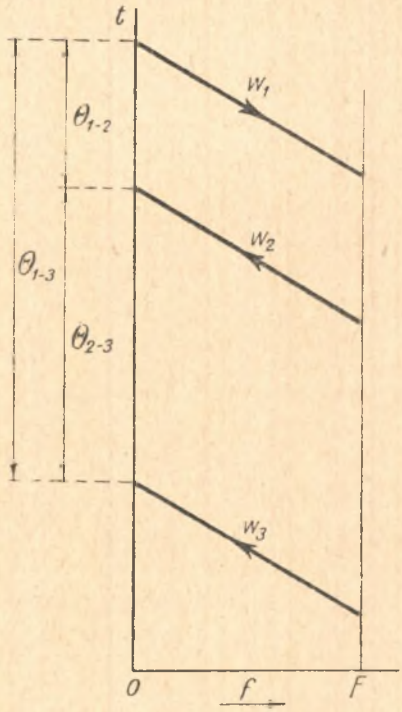
Niechaj wspomniany różnoprąd posiada następujące dane (rys. 13): równoważniki wodne natężeń przepływu w_1, w_2, w_3 przy tym $(w_1 + w_2 + w_3 = 0)$, współczynnik Pecleta k_{1-2}, k_{2-3}, k_{1-3}, różnice temperatur w przekroju początkowym Θ_{1-2}, Θ_{2-3}, Θ_{1-3}.

Postawimy sobie za zadanie obliczyć wielkości równoważników wodnych natężenia przepływu w_a, w_b, w_c trzech przeciwprądów, które dadzą się wyodrębnić z naszego różnoprądu trójprzegrodowego. W tym celu rozwiązujemy grupę równań (2) oraz (3) względem w_a, w_b, w_c:

$$w_a = \frac{\Theta_{1-2} \cdot k_{1-2} \cdot w_1}{\Theta_{1-2} \cdot k_{1-2} + \Theta_{1-3} \cdot k_{1-3}}$$

$$w_b = \frac{\Theta_{2-3} \cdot k_{2-3} \cdot w_2}{\Theta_{2-3} \cdot k_{2-3} - \Theta_{1-2} \cdot k_{1-2}}$$

$$w_c = -\frac{\Theta_{1-3} \cdot k_{1-3} \cdot w_3}{\Theta_{1-2} \cdot k_{2-3} + \Theta_{1-3} \cdot k_{1-3}} \qquad (9)$$



Rys. 13. Prostoliniowy różnoprąd trójczynnikowy

P r z y k ł a d 12

Metoda wyodrębnienia (rozbicia)

Wymiennik trójprzegrodowy o prostoliniowym przebiegu temperatur przedstawiony w przykładzie 4, rozbić na trzy przeciwprądy prostoliniowe jednoprzegrodowe.

Dane:

$$w_1 = -20 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad k_{1-2} = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h} \cdot 1^\circ}; \quad \Theta_1 = 60^\circ$$

$$w_2 = 10 \;\;,, \quad ; \quad k_{2-3} = 10 \;\;,, \quad ; \quad \Theta_2 = 20^\circ$$

$$w_3 = 10 \;\;,, \quad ; \quad k_{1-3} = 10 \;\;,, \quad ; \quad \Theta_3 = 80^\circ$$

Obliczyć: w_a, w_b, w_c $\dfrac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot 1^\circ}$

Rozwiązanie:

$$\left.\begin{aligned} w_a &= \frac{60\cdot 20\cdot(-20)}{60\cdot 20+80\cdot 10} = -12\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}\cdot 1^\circ} \\ w_b &= \frac{20\cdot 10\cdot 10}{20\cdot 10-60\cdot 20} = -2\ \text{,,} \\ w_c &= -\frac{80\cdot 10\cdot 10}{20\cdot 10+80\cdot 10} = -8\ \text{,,} \end{aligned}\right| \qquad \text{(XIII, 9)}$$

Kontrola przy pomocy wzorów (XIII, 2):

$$w_1 = w_a + w_c = -12 - 8 = -20 \quad \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}\cdot 1^\circ}$$

$$w_2 = w_b - w_a = -2 - (-12) = 10 \quad \text{,,}$$

$$w_3 = -w_b - w_c = -(-2) - (-8) = 10 \quad \text{,,}$$

Metoda równowartości. Metoda równowartości znajduje zastosowanie do wymienników posiadających punkt zwrotny.

Celem tej metody jest wykazanie, że pewne różne odmiany wymienników z punktem zwrotnym są — mimo zupełnie odmiennych przebiegów zmienności temperatur poszczególnych czynników — równowarte pod względem zdolności do wymiany ciepła. Równowartość ta obejmuje wymienniki posiadające dolot obu czynników po jednej stronie wymiennika (typ A, omówiony poprzednio na str. 51—52 z wymiennikami posiadającymi dolot czynników z różnych stron wymiennika (typ B, na str. 52—53).

Postawimy sobie za zadanie znaleźć warunki, które muszą być spełnione, aby wymiennik typu A (dolot obu czynników w przekroju początkowym p—p wymiennika) był równowarty pod względem cieplnym wymiennikowi typu B (dolot czynnika 1 w przekroju końcowym k—k, dolot czynnika 2 w przekroju początkowym p—p).

Równowartość pod względem cieplnym będzie osiągnięta, gdy przy jednakowych różnicach temperatur

$$\Theta_A = \Theta_B = \Theta \tag{a}$$

oraz równych równożnikach wodnych natężenia przepływu

$$W_{1A} = W_{1B}; \qquad W_{2A} = W_{2B} \tag{b}$$

zostaną wymienione równe ilości ciepła pomiędzy czynnikami 1 i 2:

$$Q^*_A = Q^*_B$$

Warunek powyższy prowadzi w dalszym ciągu do następującej równości:

$$\Delta t_{2A} = \Delta t_{2B} \tag{c}$$

ponieważ

$$Q^*_A = W_{2A} \cdot \Delta t_{2A}$$

oraz

$$Q^*_B = W_{2B} \cdot \Delta t_{2B}$$

Należy zatem ustalić warunki, dla których zachodzi równość (c).

Wymiennik zwrotny typu A daje wzrost temperatury czynnika 2 określony wzorem (X, 3) natomiast wartość tę dla typu B określa wzór (X, 5). Równanie (c) po wstawieniu wartości określonych wspomnianymi wzorami przyjmie postać:

$$\frac{\dfrac{\Theta_A}{W_{2A}}}{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{W_{1A}}+\dfrac{1}{W_{2A}}\right)+\dfrac{p_A\cdot\operatorname{ctgh} p_A\cdot F_A}{k_{(1-2)A}+k_{(1-3)A}}} = \frac{\dfrac{\Theta_B}{W_{2B}}}{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{W_{2B}}+\dfrac{1}{W_{1B}}\right)+\dfrac{p_B\cdot\operatorname{ctgh} p_B\cdot F_B}{k_{(1-2)B}+k_{(1-3)B}}}$$

Po uwzględnieniu zależności (a) oraz (b) równanie powyższe upraszcza się do formy:

$$\frac{p_A\cdot\operatorname{ctgh} p_A\cdot F_A}{k_{(1-2)A}+k_{(1-3)A}} = \frac{p_B\cdot\operatorname{ctgh} p_B\cdot F_B}{k_{(1-2)B}+k_{(1-3)B}} \tag{10}$$

Równanie (10) będzie spełnione, wówczas gdy zaistnieją dalsze trzy równości:

$$p_A = p_B \tag{d}$$

$$F_A = F_B \tag{11}$$

$$k_{(1-2)A} + k_{(1-3)A} = k_{(1-2)B} + k_{(1-3)B} \tag{12}$$

Wielkości p_A i p_B są zdefiniowane następująco (II, 6):

$$p_A = \sqrt{s_A^2 + \frac{k_{cA}^2}{W_{2A}^2}} \quad (\alpha); \quad p_B = \sqrt{s_B^2 + \frac{k_{cB}^2}{W_{2B}^2}} \tag{β}$$

W zależnościach (α) oraz (β) figurują wartości s_A i s_B, które są określone za pomocą równań (X, 4) oraz (X, 6):

$$s_A = -\frac{1}{2}\left[k_{(1-2)A}\cdot\left(\frac{1}{W_{1A}}-\frac{1}{W_{2A}}\right)+k_{(1-3)A}\cdot\left(\frac{1}{W_{1A}}+\frac{1}{W_{2A}}\right)\right]$$

$$s_B = \frac{1}{2}\left[k_{(1-2)B}\cdot\left(\frac{1}{W_{1B}}+\frac{1}{W_{2B}}\right)+k_{(1-3)B}\cdot\left(\frac{1}{W_{1B}}-\frac{1}{W_{2B}}\right)\right]$$

Równania powyższe po uwzględnieniu warunku (b) i wprowadzeniu oznaczeń: $W_{1A} = W_{1B} = W_1$, $W_{2A} = W_{2B} = W_2$ przyjmują postać:

$$s_A = -\frac{1}{2}\left[k_{(1-2)A}\cdot\left(\frac{1}{W_1}-\frac{1}{W_2}\right)+k_{(1-3)A}\cdot\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)\right] \tag{γ}$$

$$s_B = \frac{1}{2}\left[k_{(1-2)B}\cdot\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)+k_{(1-3)B}\cdot\left(\frac{1}{W_1}-\frac{1}{W_2}\right)\right] \tag{δ}$$

Równość (d) po uwzględnieniu zależności (α) oraz (β) pociąga za sobą dalsze dwa warunki:

$$s_A^2 = s_B^2 \tag{e}$$

$$k_{cA}^2 = k_{cB}^2 \tag{f}$$

równanie (e) piszemy w innej formie:

$$s_A^2 - s_B^2 = 0$$

$$(s_A + s_B) \cdot (s_A - s_B) = 0$$

ostatnia równość będzie spełniona, gdy

$$s_A + s_B = 0 \tag{e$_1$}$$

lub

$$s_A - s_B = 0 \tag{e$_2$}$$

Ewentualność (e_1) na podstawie związków (γ) i (δ) będzie spełniona, gdy:

$$(k_{(1-3)B} - k_{(1-2)A}) \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right) + (k_{(1-2)B} - k_{(1-3)A}) \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) = 0$$

Równanie powyższe powinno być spełnione dla dowolnie obranych wielkości W_1 i W_2 (niezależnie od W_1 i W_2). Stanie się to wówczas, gdy współczynniki stojące przed wyrażeniami $\left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right)$ oraz $\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)$ będą równe zeru:

$$k_{(1-3)B} - k_{(1-2)A} = 0$$

$$k_{(1-2)B} - k_{(1-3)A} = 0$$

zatem dla równości

$$k_{(1-2)A} = k_{(1-3)B} \tag{13}$$

$$k_{(1-3)A} = k_{(1-2)B} \tag{14}$$

Ewentualność (e_2) prowadzi do warunku:

$$-(k_{(1-2)A} + k_{(1-3)B}) \cdot \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}\right) - (k_{(1-3)A} + k_{(1-2)B}) \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) = 0$$

który dla dowolnie obieranych wartości W_1 i W_2 może być spełniony tylko wówczas, gdy wszystkie figurujące w powyższym równaniu współczynniki Pecleta są równe zeru. Ewentualność taka nie wchodzi w rachubę.

Warunek (f) prowadzi do zależności

$$k_{(1-2)A} \cdot k_{(2-3)A} + k_{(2-3)A} + k_{(1-3)A} + k_{(1-2)A} \cdot k_{(1-3)A} =$$
$$= k_{(1-2)B} \cdot k_{(2-3)B} + k_{(2-3)B} \cdot k_{(1-3)B} + k_{(1-2)B} \cdot k_{(1-3)B}$$

Po uwzględnieniu zależności (13) i (14) pozostanie:

$$k_{(2-3)A} = k_{(2-3)B} \tag{15}$$

Równości (13) i (14) gwarantują dodatkowo spełnienie warunku (12).

Ostatecznie zatem równowartość wymienników typu A i typu B można zdefiniować za pomocą 4 równań równowartości:

1. $\Theta_A = \Theta_B = \Theta$
2. $W_{1A} = W_{1B} = W_1$
3. $W_{2A} = W_{2B} = W_2$
4. $F_A = F_B = F$

oraz trzech warunków równowartości:

I. $k_{(1-2)A} = k_{(1-3)B}$

II. $k_{(1-3)A} = k_{(1-2)B}$

III. $k_{(2-3)A} = k_{(2-3)B}$

Podamy kilka przykładów zastosowania metody równowartości.

a) *Wymiennik dwuprzegrodowy dwuczynnikowy typu δ* (w zestawieniu str. 78 lp. 4).

Wymiennik ten należy do odmiany B o wlocie czynników po różnych stronach wymiennika. Jego cechą charakterystyczną jest

$$k_{(1-2)B} = 0$$

Dobierzemy teraz do naszego wymiennika inny, równowarty pod względem cieplnym. Będzie to rzecz prosta wymiennik typu A dla którego muszą być spełnione 4 równania równowartości 1, 2, ,3, 4 a ponadto 3 warunki równowartości

$$k_{(1-2)A} = k_{(1-3)B}$$
$$k_{(1-3)A} = k_{(1-2)B}$$
$$k_{(2-3)A} = k_{(2-3)B}$$

Z powyższych zależności wynika, że równowarty wymiennik typu A odznacza się cechą:

$$k_{(1-3)A} = 0$$

a zatem równowarty wymiennik jest wymiennikiem typu β (str. 56—57). dla którego

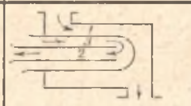
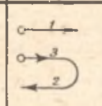
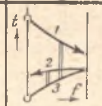
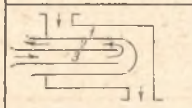
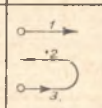
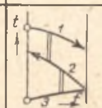
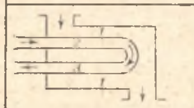
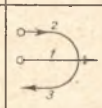
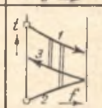
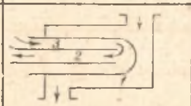
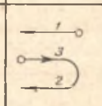
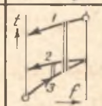
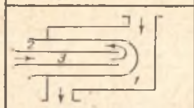
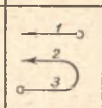
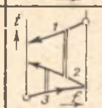
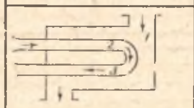
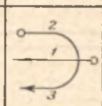
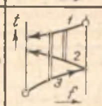
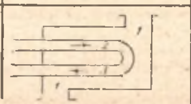
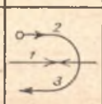
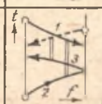
$$\zeta_\beta = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{(2-3)A}}{k_{(1-2)A}} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$$

Biorąc pod uwagę równania oraz warunki równowartości dojdziemy do znaczenia ζ_δ dla naszego przykładu:

$$\zeta_\delta = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{(2-3)B}}{k_{(1-3)B}} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \tag{16}$$

Wymienniki dwuprzegrodowe, dwuczynnikowe z punktem zwrotnym

Wzory wspólne dla wszystkich typów: $\Delta t_1 = \dfrac{\Theta}{\gamma + \zeta \cdot \operatorname{ctgh}\left(\dfrac{k_{1-2}+k_{1-3}}{W_1}\cdot \zeta F\right)}$; $F = \dfrac{1}{2}\dfrac{W_1}{(k_{1-2}+k_{1-3})\cdot\zeta}\ln\dfrac{\dfrac{\Theta}{\Delta t_1}-\gamma+\zeta}{\dfrac{\Theta}{\Delta t_1}-\gamma\mp\zeta}$; $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{W_1}{W_2}\right)$

L.p	typ	nazwa	cecha		schemat	symbol	rozkład temperatur	wielkość pomocnicza „ζ" (bezwymiarowa)	uwagi
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	α	FIELD (α)	$k_{1-2}=0$	wlot czynników po tej samej stronie wymiennika (typ A)				$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{2-3}}{k_{1-3}}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	w rubrykach 7 i 8 wlot czynnika oznaczono kółeczkiem np. o—
2	β	FIELD (β)	$k_{1-3}=0$					$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{2-3}}{k_{1-2}}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	w rubr. 8 czynniki sprzężone cieplnie oznaczono przez połączenie podwójną linią
3	γ	pętlicowy (γ)	$k_{2-3}=0$					$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k_{1-2}-k_{1-3}}{k_{1-2}+k_{1-3}}\cdot\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{1-2}\cdot k_{1-3}}{(k_{1-2}+k_{1-3})^2}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	
4	δ	FIELD (δ)	$k_{1-2}=0$	wlot czynników z przeciwległych stron wymiennika (typ B)				$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{2-3}}{k_{1-3}}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	
5	ε	FIELD (ε)	$k_{1-3}=0$					$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{2-3}}{k_{1-2}}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	
6	φ	pętlicowy (φ)	$k_{2-3}=0$					$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k_{1-3}-k_{1-2}}{k_{1-3}+k_{1-2}}\frac{W_1}{W_2}\right)^2+\frac{k_{1-3}\cdot k_{1-2}}{(k_{1-3}+k_{1-2})^2}\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	
7		pętlicowy uproszczony	$k_{2-3}=0$ $k_{1-2}=k_{1-3}$					$\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2}$	

Rozpatrzony wymiennik jest podobnie jak β jedną z odmian wymiennika Fielda.

b) *Wymiennik dwuprzegrodowy dwuczynnikowy typu* ε (w zestawieniu str. 78 lp. 5).

Dla tej odmiany jest:

$$k_{(1-3)B} = 0$$

Wymiennikiem równowartym będzie taki, dla którego między innymi będzie:

$$k_{(1-2)A} = 0$$

jak to wynika z warunku równowartości II. Zatem odmiana α wymiennika Fielda może spełniać warunki równowartości, dla rozważanego przypadku. Wielkość obliczeniową ζ_ε określamy na podstawie warunków równowartości przy pomocy wzoru [XI, (1)]:

$$\zeta_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{(2-3)B}}{k_{(1-2)B}} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \qquad (17)$$

c) *Wymiennik dwuprzegrodowy dwuczynnikowy typu* φ (str. 56).

Dla tej odmiany wymiennika zachodzi $k_{(2-3)B} = 0$. Biorąc pod uwagę warunki równowartości dochodzimy do znaczenia wielkości pomocniczej ζ_φ na podstawie wzoru (XI, 3):

$$\zeta_\varphi = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{k_{(1-3)B} - k_{(1-2)B}}{k_{(1-3)B} + k_{(1-2)B}} \cdot \frac{W_1}{W_2}\right)^2 + \frac{k_{(1-3)B} \cdot k_{(1-2)B}}{(k_{(1-3)B} + k_{(1-2)B})^2} \cdot \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \qquad (18)$$

Wymiennik typu φ jest odmianą wymiennika pętlicowego. Obie wspomniane odmiany: γ) i φ) są równowarte pod względem cieplnym.

W szczególnym przypadku dla: $k_{(1-2)B} = k_{(1-3)B}$ wzór (18) znacznie się upraszcza:

$$\zeta_\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2} \qquad (19)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Gröber H., *Wwiedienie w tieoriu tiepłopieredaczi*. Tłum. M. L., 1936.

[2] Ten Bosch, *Tiepłopieredacza*. Tłum. M. L., 1930.

[3] Schack A., *Die industrielle Wärmeübertragung*, Düsseldorf 1929.

[4] Gröber H. u. Erk S., *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Berlin 1933.

[5] Nusselt W., *Eine neue Formel für den Wärmedurchgang im Kreutzstrom.*

[6] Kirpiczew M. W., Michejew M. A., Ejgenson Ł. S., *Tiepłopieredacza*, Moskwa 1940.

[7] Michejew M. A., *Osnowy tiepłopieredaczi*. Tłum. M. L., 1949.

[8] Kutyrin N. A., *Tiepłopieredacza* (w ramach encyklopedii: Maszinostrojenie, tom I, str. 482—505), Moskwa 1947.

[9] Skorcew S. A., *Tiepłoobmienniki* (w ramach encyklopedii: Maszinostrojenie, tom 13, str. 123), Moskwa 1949.

[10] Gelperin N. I., *Tieorija processa tiepłoobmiena w sistemach s trubkami Fielda*. Monografia ogłoszona w „Chimiczeskie maszinostrojenie" Nr 4, 1939.

[11] Klujew G. M., Czyrkin W. S., *Kratkij kurs tiepłopieriedaczi*, Moskwa 1941.