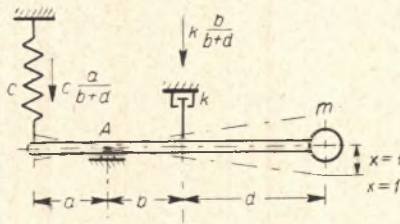


Wyznaczenie funkcji modulacji parametru dla uzyskania założonej postaci drgań zanikających bez tłumienia

Zagadnienie szukania rozwiązania różniczkowego równania drgań przy danych parametrach – można odwrócić. Można założyć pewne równanie drgań w postaci skończonej i badać, jak modulować parametry układu, aby uzyskać ruch założony. Z tego szerszego zagadnienia omówiono tu problem węższy – modulację sprężystości układu taką, aby uzyskać efekt tłumienia drgań bez użycia tłumika. Modulacja odbywa się w ten sposób, że sprężyste podwieszenie działa na masę drgającą za pośrednictwem dźwigni o zmiennym przełożeniu. Problem ten może znaleźć zastosowanie w budowie podwieszeń samochodowych bez amortyzatorów. Końcowe przeliczenie przeprowadzono dla zorientowania się w gabarytach takiego urządzenia.

1. Uwagi wstępne

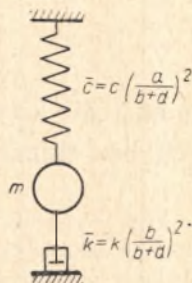
Sprężystość i tłumienie układu drgającego, z chwilą kiedy działają nie bezpośrednio na masę drgającą, ale za pośrednictwem dźwigni, zależą od wartości przełożenia. Możemy się o tym przekonać badając wzajemny stosunek: wychyleń zachodzących na masie i na sprężynie oraz prędkości wychylenia masy i tłumika (rys. 1).



Rys. 1. Siły sprężystości i tłumienia w obecności przełożenia

Wychylenie jednostkowe masy m wywoła na sprężynie siłę $c \frac{a}{b+d}$,
co z kolei równoważne jest sile $\bar{c} = c \left(\frac{a}{b+d} \right)^2$ na masie.

Podobnie jednostkowa prędkość masy m wywoła na tłumiku siłę $k \frac{b}{b+d}$, która jest równoważna sile $\bar{k} = k \left(\frac{b}{b+d} \right)^2$ na masie. Masa więc m układu z rysunku 1 będzie drgać podobnie do układu z rysunku 2.



Rys. 2. Układ drgający
równoważny układowi
z rys. 1

Wyobraźmy sobie teraz, że punkt A przesuwają się w czasie drgań w lewo i w prawo w sposób okresowy, przy czym ruch ten jest określony w czasie, tj. dane są funkcje $a(t)$ i $b(t)$. Jeżeli więc równanie różniczkowe ruchu dla $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ jest:

$$m\ddot{x} + k \left(\frac{b}{b+d} \right)^2 \dot{x} + c \left(\frac{a}{b+d} \right)^2 x = 0, \quad (1)$$

to w przypadku, kiedy wielkości a i b zależą od czasu, równanie:

$$m\ddot{x} + k \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{b}{b+d} \right)^2 x \right] + c \left(\frac{a}{b+d} \right)^2 x = 0 \quad (2)$$

opisywać będzie drgania parametrowe.

Jak wiadomo, założeniem:

$$x = u e^{-\frac{k}{2} \int \left(\frac{b}{b+d} \right)^2 dt} \quad (3)$$

sprowadzić możemy równanie (2) o zmiennych $a(t)$ i $b(t)$ do równania:

$$\ddot{u} + \varphi(t)u = 0. \quad (4)$$

Zmiany wielkości a , b można też uzyskać i podać w zależności od wychylenia x masy m , na przykład za pomocą pewnej konstrukcji przesuwającej punkt A w zależności od ugięcia układu. W tym wypadku w równaniu (2) czynniki a i b zależą od x : $a(x)$, $b(x)$, równanie więc tylko formalnie będzie zgodne z równaniem (2) — w rzeczywistości zaś dla $a(t)$, $b(t)$ równanie (2) jest równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach, dla $a(x)$, $b(x)$ zaś równaniem nieliniowym. Tę istotną różnicę mię-

dzy dwiema postaciami równania (2) upraszcza w znacznej mierze założenie:

$$k = 0, \quad (5)$$

czyli brak tłumika w układzie.

Z podanymi w ustępie 1 pojęciami zapoznają bliżej podstawowe podręczniki z teorii drgań, na przykład te, które podano w bibliografii.

2. Omówienie zagadnienia

Stawiamy teraz następujące zagadnienie – odwrotne do tych, z jakimi zazwyczaj mamy do czynienia w teorii drgań. Polega ono na wyznaczeniu sterowania punktem A (rys. 1) w zależności od ugięcia masy m tak, aby osiągnąć założony z góry efekt. Równanie ruchu ułożone na podstawie związków (2) i (5) ma postać:

$$m\ddot{x} + c \left[\frac{a(x)}{b(x) + d} \right]^2 x = 0. \quad (6)$$

Zakładamy, że rozwiązaniem jego jest zależność:

$$x = x_0 e^{(s+i\omega)t} \\ s < 0. \quad (7)$$

W założeniu tym x_0 jest parametrem, którego rolę w rozwiązaniu zagadnienia omówimy później. Wielkości natomiast s , ω są ściśle określone.

Innymi słowy z warunku (7) wynika, że równanie (6) opisuje pewne drgania zanikające o danym dekrementcie i danej pulsacji (częstości kołowej). Niewiadomą w układzie równań (6), (7) jest więc funkcja:

$$c \left[\frac{a(x)}{b(x) + d} \right]^2 = \bar{c}(x), \quad (8)$$

która, zmieniając się okresowo w ustalonych granicach, da się oczywiście przedstawić w postaci:

$$\bar{c}(x) = c[\beta + \gamma f(x)]. \quad (9)$$

Równanie (6) napisane w formie:

$$m\ddot{x} + c[\beta + \gamma f(x)]x = 0 \quad (10)$$

ma postać równania Mathieu, jeśli uwzględnimy warunek (7):

$$f(x) = \Phi(t).$$

Unikamy jednak trudności całkowania, bo całka równania (10) ma postać (7), a niewiadomą funkcją w równaniu (10) jest tylko $f(x)$, dająca

się wyznaczyć elementarnymi działaniami. Istotna jednak dla praktycznych zastosowań wyłożonej teorii jest rola parametru x_0 , który nie powinien zmieniać charakteru funkcji $f(x)$, czyli praktycznie: urządzenie powinno dawać drgania zanikające o dekrementcie i pulsacji niezależnych od x_0 .

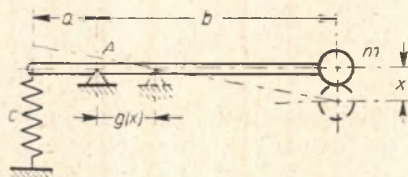
Rozważmy rzecz na bardziej szczegółowej formie równań.

3. Wyprowadzenie równań szczegółowych

Założmy, że wychylenie x masy m spowoduje za pośrednictwem pewnej konstrukcji przesunięcie punktu podparcia A na odległość $g(x)$ w prawo (rys. 3). Układ taki drga według równania (6), którego szczegółową postacią jest:

$$m\ddot{x} + c \left[\frac{a + g(x)}{b - g(x)} \right]^2 x = 0. \quad (11)$$

Zależność sprężystości od wychylenia powinna być w myśl założenia taka, aby drgania (11) były równoważne drganiom tłumionym układu



Rys. 3. Układ drgający o przesuwanym punkcie podparcia dźwigni

o tej samej masie m i sprężystości c oraz o pewnym przyjętym tłumieniu k_0 . W równaniu więc (11) funkcja x ma np. następującą postać:

$$x = x_0 e^{-\frac{\delta}{2\pi} \omega t} \sin \omega t. \quad (12)$$

Jest to szczególna postać równości (7), gdzie x_0 jest stałą zależną od warunków początkowych (od zasobu włożonej energii), a

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k_0}{2m}\right)^2}, \quad (13)$$

$$\delta = \frac{\pi k_0}{m\omega}.$$

Z równania więc (11) należy po wprowadzeniu założenia (12), (13) wyliczyć $g(x)$.

Ponieważ bezpośrednie obliczenie funkcji $g(x)$ w postaci wyraźnej byłoby uciążliwe, lepiej związek ten wyrazić za pośrednictwem parametru t . Z równania (11) wynika:

$$g[x(t)] = \frac{b \sqrt{-\frac{m\ddot{x}}{cx} - a}}{1 + \sqrt{-\frac{m\ddot{x}}{cx}}}. \quad (14)$$

Ponieważ zarówno x jak i \ddot{x} są proporcjonalne do x_0 , więc zależność (14) wskazuje na to, że charakterystyka przekładni między masą m i punktem A (rys. 3) nie zależy od początkowego wychylenia.

4. Rozwiązanie przykładowe

Dla zdobycia pewnych danych wyjściowych dla konstrukcji takiej przekładni sporządzmy wykres $g(x)$, przyjmując za parametry m , c , k_0 wielkości pokrywające się z przeciętnymi spotykanymi w realnych rozwiązaniach konstrukcyjnych (samochodowych). Zakładając dodatkowo:

$$a = b$$

sprowadzamy związek (14) do postaci:

$$g[x(t)] = a \frac{\sqrt{-\frac{m\ddot{x}}{cx} - 1}}{\sqrt{-\frac{m\ddot{x}}{cx} + 1}}. \quad (15)$$

Przyjmijmy więc dla wspomnianych wyżej parametrów następujące wartości przeciętne:

$$\begin{aligned} a &= 200 \text{ mm}, \\ m &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ kG/mm}^{-1} \text{ sec}^2, \\ c &= 2,5 \text{ kG/mm}, \\ k_0 &= 0,13 \text{ kG/mm}^{-1} \text{ sec}. \end{aligned}$$

Wyliczamy:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k_0}{2m}\right)^2} = 18,3 \text{ sec}^{-1},$$

$$\delta = \frac{\pi k_0}{m\omega} = 5,58,$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{-\frac{\delta}{2\pi} \omega t} \left[\left(1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2}\right) \sin \omega t + \frac{\delta}{\pi} \cos \omega t \right],$$

$$-\frac{\ddot{x}}{x} = \omega^2 \left[1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2} + \frac{\delta}{\pi} \operatorname{ctg} \omega t \right].$$

Funkcję (15) rozpatrzymy w przedziale:

$$\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega} \right),$$

tj. na obszarze pełnego wychylenia układu w jedną stronę; okresu $(0, T/4)$ nie rozpatrujemy, bo przy rzeczywistym zaburzeniu równowagi przebiega on w sposób bliżej nie określony.

W celu łatwiejszego sporządzenia wykresu funkcji (15) rozbijemy ją na trzy funkcje:

$$t = \varphi(x) \quad \text{dla} \quad \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (16)$$

która jest funkcją odwrotną do (12);

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{-\frac{m\ddot{x}}{cx}} = \omega \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2} + \frac{\delta}{\pi} \operatorname{ctg} \omega\varphi},$$

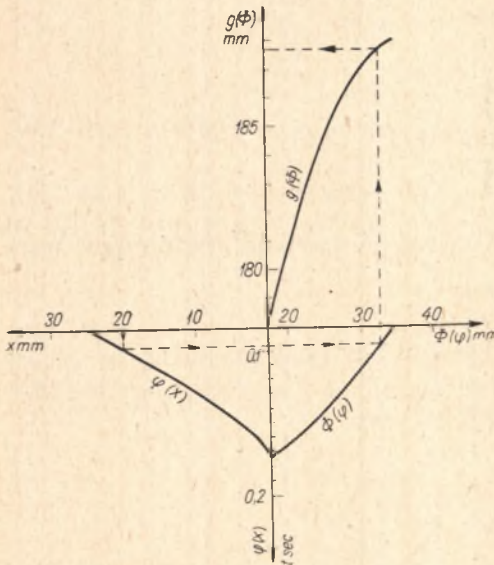
$$g(\Phi) = a \frac{\Phi - 1}{\Phi + 1}. \quad (17)$$

Funkcja (12) przy naszych przyjęciach ma postać:

$$x = 100 e^{-5,58 \frac{t}{T}} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (18)$$

(x_0 jako nieistotne przyjęto równe 100 mm).

Na podstawie (18) nakreślono krzywą $\varphi(x)$ na rysunku 4. Z kolei na podstawie (17) wyznaczono przebieg funkcji $\Phi(\varphi)$ i $g(\Phi)$. Ze spól więc wykresów na rysunku 4 pozwala na wyznaczenie wychylenia $g(x)$ w zależności od wychylenia x — przy czym wychylenia $g(x)$ oraz x określa rysunek 3. Na rysunku 4 pokazano, jak przykładowo dla wychylenia $x = 20$ mm można wyznaczyć wychylenie $g(x)$



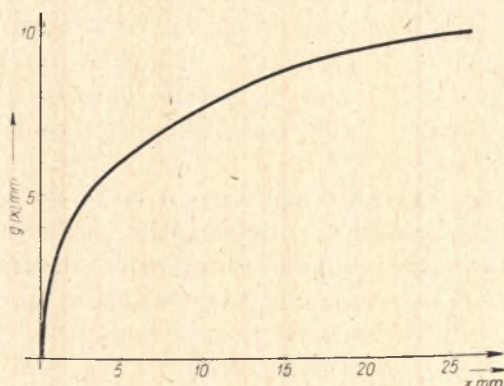
Rys. 4. Przebieg funkcji $\varphi(x)$, $\Phi(\varphi)$ i $g(\Phi)$ określonych wzorami (17)

punktu podparcia dźwigni — idąc wzdłuż przerywanej linii w kierunku strzałek.

Po sporządzeniu wykresów (rys. 4) można wrócić do bezpośredniego związku między wychyleniami g i x przez zbudowanie nowego wykresu z opuszczeniem pośrednich wielkości $\varphi(x)$ i $\Phi(\varphi)$.

Dokonamy wszakże jednej zasadniczej poprawki. Fakt, że przy wychyleniu $x=0$ punkt podparcia ma mieć znaczne wychylenie, 178 mm, wskazuje na to, że zastępcza sztywność sprężyny zostaje uwielokrotniona. Efekt ten jednak można uzyskać doбором odpowiednio sztywnej sprężyny tak, aby przy wychyleniu $x=0$ było także wychylenie, $g(0)=0$. Odpowiada to pionowemu przesunięciu krzywej $g(\Phi)$ w dół skali.

Tak zbudowany wykres przedstawiono na rysunku 5. Jako sporządzony dla pewnych realnie spotykanych parametrów może on mieć znaczenie konstrukcyjne przy projektowaniu przełożenia między wychyle-



Rys. 5. Zależność między wychyleniem g punktu podparcia a wychyleniem x masy drgającej

niem masy i wychyleniem zawieszenia dźwigni poziomej. Konstrukcji przekładni — jako oddzielnego zagadnienia o charakterze kinematycznym — nie rozważamy w tej pracy.

5. Wnioski

Krótkie wnioski płynące z poprzednich wywodów są następujące. Drgania parametrowe, dotąd przeważnie uważane za zjawisko przypadkowe i uboczne, mogą być wywołane umyślnie dla uzyskania pewnych skutków z góry założonych. Jednym z takich efektów pożądanym jest na przykład zanikanie drgań resorowanego nadwozia pojazdu mechanicznego; zanikanie to, wywołane modulacją sprężystości (zredukowanej), czyni zbędnym obecność tłumika w układzie.

Oczywiście przedwczesne byłoby twierdzenie, że przynosi to oszczędności — jak długo nie ma rozwiązania konstrukcyjnego urządzenia do

przesuwania punktu podparcia dźwigni albo w ogóle jakiegokolwiek urządzenia do modulacji sprężystości. Koszt takiego urządzenia może się okazać większy od kosztu amortyzatorów, najprawdopodobniej jednak jest niższy. Poza tym praca ta wskazuje drogę do uzyskania pewnych oszczędności, chociażby początkowe jej etapy były mniej rentowne.

Teoria tego rodzaju drgań parametrycznych znacznie upraszcza się dzięki założeniu a priori równania drgań w postaci skończonej. Niejednokrotnie założenie jednego stopnia swobody jest przybliżeniem — jak na przykład w wypadku podwieszenia samochodowego, gdzie masa kół i pneumatyki tworzą drugi stopień swobody. Trudno też w tej chwili dyskutować o wpływie bezwładności dźwigni i przełożenia.

Pozostawiono dalej otwartą sprawę odprowadzenia energii, nieodzownego przy drganiach zanikających; nie przedstawia ono zresztą z pewnością większych trudności, może być uzyskane nawet przez tarcie suche w mechanizmie, co ze względu na modulację sprężystości nie zniekształci równania ruchu. Niemniej w świetle przedstawionych rozważań teoretycznych wydaje się celowe konstrukcyjne i ruchowe opracowanie zagadnienia.

Na wstępie podkreślono, że omówiono tu tylko wąską część ogólnego problemu wyzyskania drgań parametrycznych o określonym z góry równaniu. Niewątpliwie bliższe wniknięcie w możliwości zagadnienia pozwoliłyby otrzymać nie tylko zanikanie, ale i rezonans parametryczny.

BIBLIOGRAFIA

- [1] I. P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*. New-York—London 1947.
- [2] С. П. Стрелков, *Введение в теорию колебаний*. Москва—Ленинград 1951.