Michał Lawina

Przekształcenie pewnego typu funkcji wielu zmiennych i jej nomogram ruchomy

W pracy omówiono teorię nomogramu o ruchomych segmentach, dzięki czemu funkcję czterech zmiennych można przedstawić jedną krzywą, której współrzędne będą jednak odczytywane na segmentach nastawionych odpowiednio do wartości pozostałych dwu zmiennych.

1. Wstęp

W nomografii spotyka się obok stałych także nomogramy ruchome, polegające na równoległym przesuwaniu niektórych skal. Przesuwanie to odbywa się według osobnej skali funkcyjnej, której wprowadzenie określa dodatkową zależność wyniku ostatecznego od jeszcze jednej zmiennej (parametru) — a więc w konsekwencji zwiększa liczbę zmiennych niezależnych funkcji, dla której dany nomogram sporządzono.

W pracy niniejszej opisano teorię przyrządów, które można o tyle zaliczyć do nomogramów ruchomych, że zawierają skale ruchome — zresztą nie przesuwalne równolegle, ale obrotowe, co jest poręczniejsze w obsługiwaniu, z drugiej jednak strony przyrządy te stosują wykres pewnej funkcji, która jest czynnikiem funkcji całkowitej, dla której przyrząd sporządzono — pod tym względem nowość rozwiązania polega na zastąpieniu ∞^2 wykresów jednym wykresem, odczytywanym jednak na skalach zmiennych obrotowo nastawialnych.

2. Teoria zagadnienia

Aby możliwe było sporządzenie takiego przyrządu, funkcja musi spełniać pewne założenia, które w świetle rozdziału 1 przedstawiają się następująco:

a) zasadnicza część funkcji przedstawialna wykresem musi zawierać tylko jedną zmienną,

b) obrotowe nastawianie skal, przy pomocy których odczytuje się rzędne i odcięte wykresu $p \cdot a$, mówi o pewnych zależnościach funkcyjnych między zmiennymi i kątami, o jakie obraca się skale ruchome.

Matematycznie trzeba ująć rzecz w ten sposób, że od pewnej funkcji wielu zmiennych dochodzi się do funkcji jednej zmiennej — drogą przekształceń i dodatkowych założeń, mających interpretacje geometryczne. To właśnie zagadnienie będzie treścią tego ustępu.

Zajmiemy się poniżej funkcją czterech zmiennych:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

o następujących własnościach:

I. W przedziałach:

$$\begin{aligned} 0 &< x_1 \leqq a, \\ 0 &< x_2 \leqq a, \\ 0 &< x_3 \leqq a, \\ 0 &< x_4 \leqq b, \end{aligned} \tag{1}$$

funkcja jest ciągła.

II. Szczegółowa postać funkcji jest następująca:

$$y = \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) x_3 x_4 . \tag{2}$$

III. Dla wszelkich x_1 i x_2 zachodzi związek:

$$x_1 \leqq x_2 . \tag{3}$$

IV. Zmienna x_3 określona jest danym związkiem:

$$x_3 = \Phi(x_2).$$

Istnieje następująca możliwość przekształcenia rozważanej funkcji. Wprowadźmy zmienną:

$$\xi = a \frac{x_1}{x_2}.$$

Funkcja (2) przyjmie wtedy postać:

$$y = \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) x_3 x_4 .$$

Ostatnie wyrażenia napiszemy w postaci:

$$\frac{y}{ab} = \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) \frac{x_3}{a} \frac{x_4}{b} .$$

Określa ona zależność rozważanej funkcji od zmiennych względnych:

$$\frac{x_3}{a} \quad \text{i} \quad \frac{x_4}{b} .$$

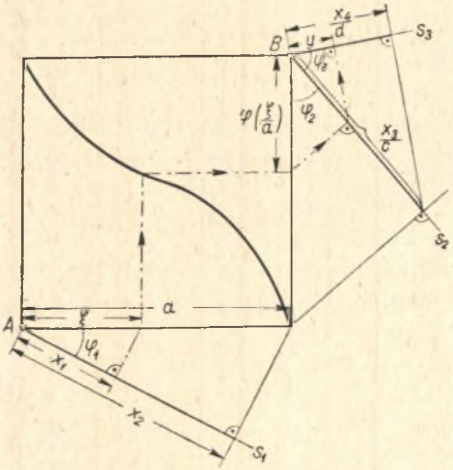
Zakładając pewne stałe wartości na x_3 i x_4, otrzymamy tylko funkcję:

$$y=\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), \tag{4}$$

rozważaną jednak w skali $1/ab$. Istnieje możliwość następującej interpretacji geometrycznej dokonanych przekształceń. Wprowadzając zmienne $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, takie, że:

$$\cos\varphi_1=\frac{x_2}{a},$$
$$\cos\varphi_2=\frac{x_3}{a}, \tag{5}$$
$$\cos\varphi_3=\frac{y(x_3=a, x_4)}{y(x_3=a, x_4=b)},$$

($\cos\varphi_3$ jest więc funkcją x_4) otrzymamy dla dowolnych x_2, x_3, x_4 wartość funkcji f, jak na rysunku 1.



Rys. 1. Oznaczenie zmiennych występujących w zagadnieniu

Ustalenie więc kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ustala konkretną zależność funkcyjną:

$$x=\Psi(x_1). \tag{6}$$

Idąc od wartości x_1 linią kreskowaną w kierunku strzałek dochodzimy do wartości:

$$y=f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Dla dowolnych kątów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, a więc i zmiennych x_2, x_3, x_4, służy do wyznaczenia funkcji f zawsze ta sama krzywa.

Aby jednak uzyskać nastawialność kątów φ, trzeba zmienne x_2, x_3, x_4 nanosić na skalach s_1, s_2, s_3, nakreślonych na przykład na segmentach, obracalnych wokół punktów A i B. Otrzymujemy wtedy niejako przyrząd zastępujący tablice funkcyjne danej funkcji wielu zmiennych.

3. Przykłady

Zajmiemy się teraz dwoma przykładami funkcyj — o ważnych zastosowaniach praktycznych — spełniających omówione założenia I—IV.

a) Zawartość leżącego zbiornika walcowego o średnicy d, długości l wysokości słupa cieczy h wynosi:

$$V = l\frac{d^2}{2}\left(\arccos\frac{d-2h}{d} - \frac{d-2h}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d-2h}{d}\right)^2}\right). \tag{7}$$

Jeżeli zrobimy pewne założenia ograniczające zmienne: średnicę $d=a$ długość $l=b$, w myśl I rozważamy zawartość zbiornika w przedziale:

$$0 < h \leqq a,$$
$$0 < d \leqq a,$$
$$0 < l \leqq b.$$

Trzecią zmienną jest d^2. Własność (2) jest przy takim przyjęciu oczywiście spełniona. Tak samo jest spełniony warunek (3):

$$h \leqq d.$$

b) Wskaźnik zginania dźwigara swobodnie podpartego, o długości l, o obciążeniu ciągłym jednostajnym q, wynosi w odległości x:

$$W = \frac{1}{\sigma}\left(q\frac{l}{2}x - q\frac{x^2}{2}\right)$$

albo po przekształceniu:

$$W = \frac{ql^2}{2\sigma}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right). \tag{8}$$

I tu własności (1) do (3) są spełnione, jeżeli za zmienne x_1, x_2, x_3, x_4 podstawimy odpowiednio x, l, l^2, q.

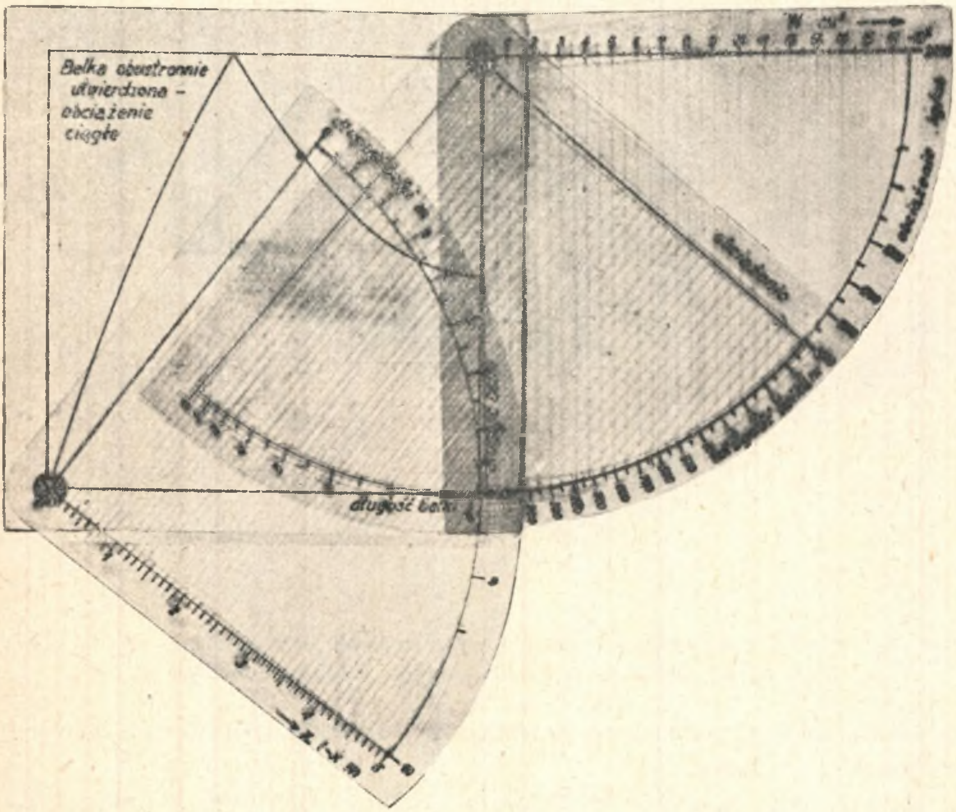
W przykładzie a) wykresem należy objąć funkcję jednej zmiennej

$$f\left(\frac{h}{d}\right) = \arccos\frac{d-2h}{d} - \frac{d-2h}{d}\sqrt{1-\left(\frac{d-2h}{d}\right)^2}, \tag{9}$$

w przykładzie natomiast b):

$$f\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}. \tag{10}$$

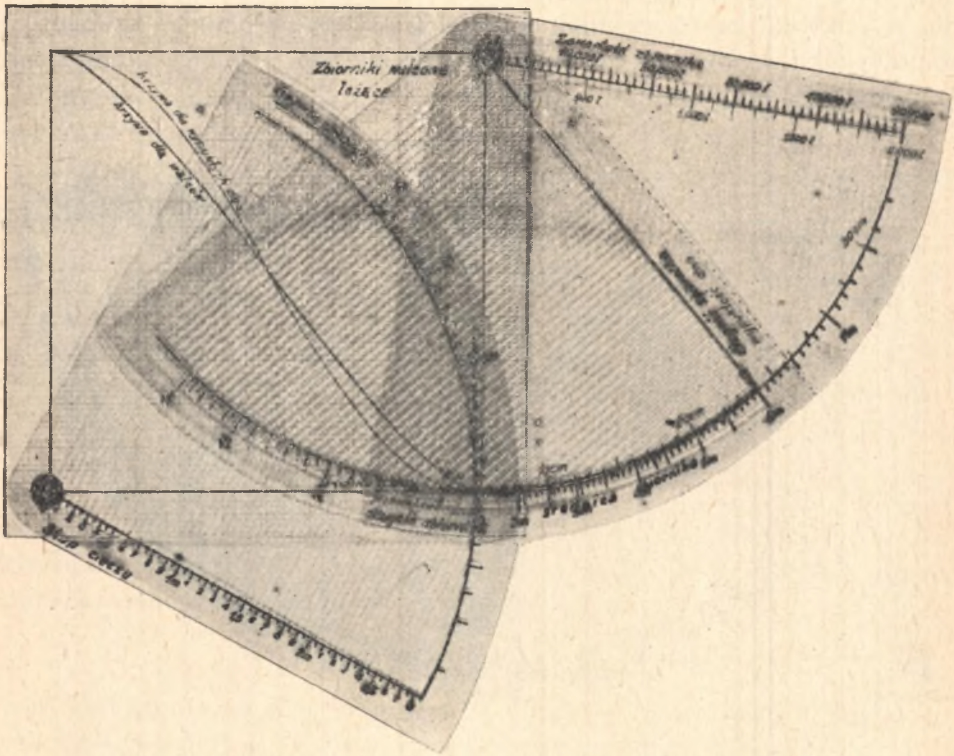
Wykresy tych funkcyj przedstawione są na rysunkach 2 i 3, z których pierwszy przedstawia przyrząd do wyznaczania zawartości zbiornika o danych wymiarach (zmiennych) przy różnej wysokości słupa cieczy; drugi — wskaźnik wytrzymałości na zginanie belki o określonych rozmiarach i obciążeniu (zmiennych) w różnych jej przekrojach. Krzywa dla wypukłych den na rysunku 2 pozwala obliczyć poprawkę zawartości w przypadku, kiedy dna walca są nie płaskie, ale wypukłe; problemem tym nie zajmiemy się w tym miejscu.



Rys. 2. Przyrząd wyznaczający zawartość zbiornika walcowego w zależności od jego długości, średnicy i wysokości słupa cieczy

Pierwszy z przyrządów (rys. 2) nastawiony jest w danej chwili na średnicę 2,5 m i długość 6 m i dla takiego zbiornika podaje jego zawartość przy różnych wysokościach słupa cieczy. Jeżeli więc krzywa ograniczona jest odciętą $h = 2{,}88$ i rzędną $V = 50\,000\,l$, co odpowiada długości $l = 7{,}8$ m i średnicy 2,88 m — to przy podanych uprzednio wartościach należy odchylić skale o taki kąt, aby wartość odciętej zmieniła się w stosunku 2,5/2,88, a wartość rzędnej w stosunku 38 500/50 000.

Drugi przyrząd (rys. 3) nastawiony jest dla belki o długości 8 m, o obciążeniu ciągłym 1500 kG/mb — i dla takiego układu przedstawia



Rys. 3. Przyrząd wyznaczający wskaźnik wytrzymałości belki utwierdzonej w zależności od jej długości, obciążenia ciągłego i położenia przekroju

zależność między położeniem przekroju x i wymaganym w tym miejscu wskaźnikiem zginania.

Jest więc: $x_3 = 8$ m (czyli $x_3/a = 8/10$) a $x_4 = 1500$ kG/mb (czyli $x_4/d = 1500/2000$), a więc $\cos\varphi_1 = 0{,}8$, $\cos\varphi_3 = 0{,}75$, (bo $y(x_3 = a, x_4) = 12{,}5 \cdot 10^2$, a $y(x_3 = a, x_4 = b) = 16{,}6 \cdot 10^2$, skąd $12{,}5/16{,}6 = 0{,}75$).

4. Wnioski

Istnieje klasa funkcyj wielu zmiennych o pewnej szczególnej postaci, opisujących technicznie ważne zależności. Dla funkcji takich możliwe jest sporządzenie przyrządów, operujących jednym wykresem i obrotowymi skalami. Umożliwia to zastąpienie często występujących i żmudnych obliczeń — odczytywaniem szukanych wartości na przyrządach o poręcznej obsłudze i rozmiarach.

Ewentualne dodatkowe badania nad tym zagadnieniem powinny iść w kierunku dalszego uogólnienia postaci funkcji f i zwiększenia liczby zmiennych.