*Zygmunt Wusatowski*

Katedra Walcownictwa i Kuźnictwa

# Właściwe sposoby określania odkształceń plastycznych

Dotychczasowe sposoby określania odkształceń za pomocą odkształceń bezwzględnych i względnych przy równoległościennym odkształceniu. Porównanie z nimi współczynników odkształcenia i odkształceń rzeczywistych.

Wyprowadzenie wzorów na wielokrotne odkształcenia plastyczne przy wykorzystaniu współczynników odkształcenia lub odkształceń rzeczywistych. Próby sprawdzające potwierdzają w zupełności wyprowadzone wzory.

## 1. Wstęp

Jeśli rozważamy odkształcenie plastyczne elementu sześciennego przestrzennego (rys. 1), o wymiarach boków początkowo $h_0 = b_0 = l_0 = 1$, które po odkształceniu przyjmuje wymiary $h_1$, $b_1$ i $l_1$, to jednym z przyjętych dotychczas sposobów możemy wyrazić odkształcenia plastyczne przez wydłużenia bezwzględne: [1] i [2]

$$\Delta l = l_1 - l_0 \quad \text{mm} \tag{1}$$

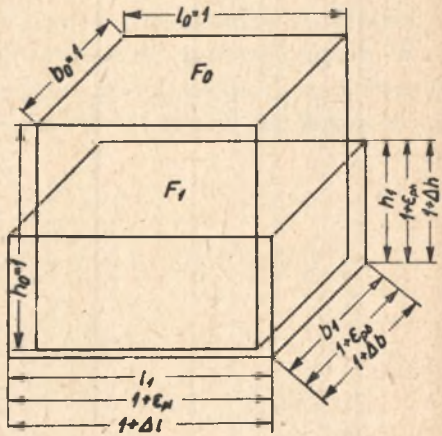
i analogicznie dla zmian wysokości i szerokości

$$\Delta b = b_1 - b_0 \quad \text{mm} \tag{1a}$$

$$\Delta h = h_1 - h_0 \quad \text{mm} .$$

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowało się, że ta sama ilość metalu, jaka została wypchnięta przez gniot bezwzględny $\Delta h$, przechodzi na wydłużenie $\Delta l$ i roztłoczenie bezwzględne $\Delta b$, a więc

$$\Delta h \cong \Delta b + \Delta l . \tag{2}$$




Rys. 1. Schemat odkształcenia elementarnego sześcianu o boku = 1

Założenie było jednak mylne, gdyż łatwo udowodnić, że tak nie jest, mianowicie wyrażając zgodnie z rys. 1 odkształcenie elementu sześciennego przez odkształcenie jego objętości

$$V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = [(1 + \Delta h)(1 + \Delta l)(1 + \Delta b)] = [1 + \Delta h + \Delta b + \Delta l + \\ + \Delta h \Delta b + \Delta l \Delta b + \Delta h \Delta l + \Delta h \Delta b \Delta l], \tag{3}$$

a dla odkształceń płaskich

$$V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = [(1 + \Delta h)(1 + \Delta l)] = [1 + \Delta h + \Delta l + \Delta h \Delta l]. \tag{3a}$$

Wynika stąd, że przyjmowanie milcząco zależności (2) powoduje w rzeczywistości pomijanie iloczynów równań (3) i (3a).

Pominąć je można niekiedy przy bardzo małych odkształceniach sprężystych, natomiast przy dużych i skończonych odkształceniach plastycznych otrzymane wyniki mogłyby być błędne.

Dla stwierdzenia tego autor wykonał szereg przeliczeń próbnych odkształcenia kostki sześciennej o bokach 100 mm, przy różnych wielkościach gniotu bezwzględnego, przy czym zmiany wymiarów kostki bezwzględnie spełniają zasadę stałej objętości

$$V_0 = V_1. \tag{4}$$

Przeliczenia te zawiera tablica 1, przy czym kolumna ostatnia tablicy przedstawia błąd wynikający ze stosowania zależności (2) w stosunku do zasady stałej objętości. Otrzymane wartości błędu potwierdzają, że zależność (2) można stosować tylko przy bardzo niewielkich odkształceniach plastycznych. Przy większych odkształceniach otrzymany błąd jest tak znaczny, że budowane na tych wzorach zależności płynięcia metalu będą całkowicie błędne.

Stąd wynika, że obraz płynięcia metalu przy przedstawieniu go przez odkształcenia bezwzględne będzie nieprawdziwy.

W drugim ogólnie przyjętym sposobie wyraża się odkształcenia plastyczne przez odkształcenia względne, a mianowicie przy odniesieniu ich do oznaczeń na rys. 1 otrzymamy [1]

$$\varepsilon_h = \frac{1}{h_0} \int_{h_0}^{h_1} dh = \frac{h_1 - h_0}{h_0},$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{b_0} \int_{b_0}^{b_1} db = \frac{b_1 - b_0}{b_0}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_l = \frac{1}{l_0} \int_{l_0}^{l_1} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}.$$

Tablica 1

**Próbne przeliczenia odkształcenia kostki sześciennej o bokach 100 mm przy różnych wielkościach gniotu bezwzględnego**

| $h$ mm | $b$ mm | $l$ mm | $\Delta h$ mm | $\Delta b$ mm | $\Delta l$ mm | $\Delta h - (\Delta b + \Delta l)$ mm | Błąd $\frac{\Delta h - (\Delta b + \Delta l)}{\Delta h} 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 100 | 100 | — | — | — | — | — |
| 95 | 102 | 103,2 | 5 | 2 | 3,2 | — 0,2 | — 4,0 |
| 90 | 105 | 105,8 | 10 | 5 | 5,8 | — 0,8 | — 8,0 |
| 85 | 107 | 110,0 | 15 | 7 | 10,0 | — 2,0 | — 13,3 |
| 80 | 110 | 113,6 | 20 | 10 | 13,6 | — 3,6 | — 18,0 |
| 75 | 112 | 119,0 | 25 | 12 | 19,0 | — 6,0 | — 24,0 |
| 70 | 115 | 124,2 | 30 | 15 | 24,0 | — 9,2 | — 30,7 |
| 65 | 117 | 131,5 | 35 | 17 | 31,5 | — 13,5 | — 38,6 |
| 60 | 120 | 138,9 | 40 | 20 | 38,9 | — 18,9 | — 47,0 |
| 55 | 122 | 149,0 | 45 | 22 | 49,0 | — 26,0 | — 57,8 |
| 50 | 125 | 160,0 | 50 | 25 | 60,0 | — 35,0 | — 70,0 |
| 45 | 127 | 175,0 | 55 | 27 | 75,0 | — 47,0 | — 85,4 |
| 40 | 130 | 192,3 | 60 | 30 | 92,3 | — 62,3 | — 103,8 |
| 35 | 132 | 216,4 | 65 | 32 | 116,4 | — 83,4 | — 128,3 |
| 30 | 135 | 247,0 | 70 | 35 | 147,0 | — 112,0 | — 160,0 |
| 25 | 137 | 292,0 | 75 | 37 | 192,0 | — 154,0 | — 205,3 |
| 20 | 140 | 357,1 | 80 | 40 | 257,1 | — 217,1 | — 271,3 |
| 15 | 142 | 469,5 | 85 | 42 | 369,5 | — 326,5 | — 384,0 |
| 10 | 145 | 689,6 | 90 | 45 | 589,6 | — 544,6 | — 605,0 |
| 5 | 147 | 1360,5 | 95 | 47 | 1260,5 | — 1212,5 | — 1276,3 |

Przy wyrażeniu odkształceń plastycznych również zakładano, że $\varepsilon_h > \varepsilon_b$ i $\varepsilon_l$ oraz że ilość metalu wypchnięta gniotem przemieszcza się w wydłużenie i roztłoczenie, czyli otrzymamy wtedy

$$|\varepsilon_h| = |\varepsilon_b + \varepsilon_l|. \tag{6}$$

Wychodząc z zasady stałej objętości (równanie 4) w odniesieniu do stosowanych dotychczas metod możemy napisać zależność odkształcenia elementu sześciennego (rys. 1)

$$V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = [(1 + \varepsilon_{p1})(1 + \varepsilon_{p2})(1 + \varepsilon_{p3})], \tag{7}$$

gdzie $\varepsilon_{p1}$, $\varepsilon_{p2}$, $\varepsilon_{p3}$ określają wielkości przesunięć poszczególnych powierzchni elementarnego sześcianu w kierunku naprężeń głównych. Z zależności (7) wynika

$$V = 1 = [1 + \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1}\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}], \tag{7a}$$

a dla płaskich

$$V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = [(1 + \varepsilon_{p1})(1 + \varepsilon_{p2})] = [1 + \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1} \cdot \varepsilon_{p2}]. \tag{7b}$$

Przy odkształceniach sprężystych albo bardzo małych plastycznych można odrzucać poszczególne iloczyny i napisać nową zależność

$$|\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}| = -\varepsilon_h + \varepsilon_b + \varepsilon_l \sim_0, \tag{8}$$

dla płaskich

$$|\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}| = -\varepsilon_h + \varepsilon_l \sim_0, \tag{8a}$$

gdzie $\varepsilon_h$, $\varepsilon_b$, $\varepsilon_l$ oznaczają gniot wydłużenia i roztłoczenia, zatem warunek stałej objętości można wykorzystywać w postaci (8) tylko w wyjątkowych przypadkach.

Natomiast przy odkształceniach już około $\varepsilon_p = 10\%$ otrzymujemy tak duże błędy, że nie możemy brać pod uwagę warunku (8). Ponieważ przyjmujemy $\varepsilon_{p1}$ jako największe odkształcenie w kierunku działania naprężenia $\sigma_1$ to z warunku (8) wynika

$$|\varepsilon_{p1}| = |\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}|. \tag{8b}$$

Dla porównania tej metody z dotychczas stosowanymi pod względem wartości i właściwości autor wykonał szereg przeliczeń porównawczych zebranych w tablicy 2.

Analizie poddano cały praktycznie stosowany zakres gniotów od 1 aż do 99%, którym odpowiadają współczynniki gniotu od 0,99 do 0,01 w kolumnie 2 tablicy 2.

Z kolei przeprowadzono analizę zależności (8)

$$|\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}| = -\varepsilon_h + \varepsilon_b + \varepsilon_l \sim_0$$

w zastosowaniu do odkształceń plastycznych. Wyprowadzenie tej zależności podane jest przy wzorze (7). Zależność bowiem (8) ważną dla

Tablica 2

**Próbne przeliczenia odkształceń przy użyciu zmiennych gniotów względnych**

| Lp. | $\gamma$ | $\beta$ | $\lambda = \frac{1}{\gamma \cdot \beta}$ | $\varepsilon_h$ | $\varepsilon_b$ | $\varepsilon_l$ | $\varepsilon_h + \varepsilon_b + \varepsilon_l$ | Błąd $\frac{\varepsilon_h + \varepsilon_b + \varepsilon_l}{\varepsilon_h} 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,99 | 1,001 | 1,009 | 0,01 | 0,001 | 0,009 | 0 | 0 |
| 2 | 0,95 | 1,02 | 1,0319 | 0,05 | 0,02 | 0,0319 | 0,0019 | 3,80 |
| 3 | 0,9 | 1,05 | 1,0582 | 0,1 | 0,05 | 0,0582 | 0,0082 | 8,20 |
| 4 | 0,8 | 1,1 | 1,1363 | 0,2 | 0,1 | 0,1363 | 0,0363 | 18,15 |
| 5 | 0,7 | 1,1 | 1,2987 | 0,3 | 0,1 | 0,2987 | 0,0987 | 32,90 |
| 6 | 0,6 | 1,2 | 1,3888 | 0,4 | 0,2 | 0,3888 | 0,1888 | 47,20 |
| 7 | 0,5 | 1,2 | 1,6666 | 0,5 | 0,2 | 0,6666 | 0,3666 | 73,32 |
| 8 | 0,4 | 1,4 | 1,7857 | 0,6 | 0,4 | 0,7857 | 0,5857 | 97,62 |
| 9 | 0,3 | 1,5 | 2,2222 | 0,7 | 0,5 | 1,2222 | 1,0222 | 146,02 |
| 10 | 0,2 | 1,6 | 3,1250 | 0,8 | 0,6 | 2,1250 | 1,9250 | 240,62 |
| 11 | 0,1 | 1,8 | 5,5555 | 0,9 | 0,8 | 4,5555 | 4,4555 | 495,05 |
| 12 | 0,05 | 1,9 | 10,526 | 0,95 | 0,9 | 9,526 | 9,476 | 997,47 |
| 13 | 0,01 | 2,2 | 45,4545 | 0,99 | 1,2 | 44,4545 | 44,6645 | 4511,5 |

zakresu odkształceń sprężystych usiłuje się bezkrytycznie przenieść do całego zakresu odkształceń plastycznych.

Przeliczono wprost współczynniki $\gamma$, $\beta$, $\lambda$ na odpowiednie wydłużenie jednostkowe $\varepsilon_h$, $\varepsilon_b$ i $\varepsilon_l$. Kolumna przedostatnia zawiera sumę wydłużeń, przy czym $\varepsilon_h$ przyjęto ze znakiem minus, a $\varepsilon_b$ i $\varepsilon_l$ ze znakiem plus.

Z kolumny tej wynika, że zależność (8) obowiązywać może najwyżej do zakresu gniotu 5%. Powyżej tej wartości otrzymuje się tak duże odchyłki oraz tak duży błąd (obliczony w ostatniej kolumnie), że w ogóle nie może być mowy o jakimkolwiek praktycznym czy teorytycznym stosowaniu zależności (8) przy odkształceniach plastycznych przekraczających 5%.

Wyrażenie (8) jest niesłuszne nie tylko w przypadku $h_0 = b_0 = l_0 = 1$, lecz także każdej innej wartości początkowej $a$, a więc możemy napisać

$$|\varepsilon_h + \varepsilon_b + \varepsilon_l| = \frac{a - h_1}{a} + \frac{b_1 - a}{a} + \frac{l_1 - a}{a} \neq 0. \tag{9}$$

Nie możemy więc również prawidłowo przedstawić sposobu płynięcia metalu przez przedstawienie przemieszczeń za pomocą odkształceń względnych.

Przejdźmy do dalszych sposobów określania odkształceń plastycznych za pomocą współczynników odkształcenia. Wychodząc z zasady stałej objętości (4) dla rys. 1 otrzymamy

$$V_0 = V_1 = h_0 \cdot b_0 \cdot l_0 = h_1 \cdot b_1 l_1 .$$

Po podzieleniu otrzymamy

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{h_1 \cdot b_1 \cdot l_1}{h_0 \cdot b_0 \cdot l_0} = \gamma \cdot \beta \cdot \lambda = 1 . \tag{10}$$

W zależności (10) $\gamma$, $\beta$, $\lambda$ są to współczynniki gniotu, roztłoczenia i wydłużenia. Ich iloczyn musi się równać 1, jeśli zasada stałej objętości ma być spełniona.

Równanie (10) daje nam pewną zależność spełniającą zawsze zasadę stałej objętości, która umożliwia prawidłowe określanie odkształceń plastycznych.

Spróbujmy określić odkształcenie elementu sześciennego na rys. 1 dalszą zależnością

$$\int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{h} + \int_{b_0}^{b_1} \frac{db}{b} + \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{h_1}{h_0} + \ln \frac{b_1}{b_0} + \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln \gamma + \ln \beta +$$

$$+ \ln \lambda = \varphi_h + \varphi_b + \varphi_l = \varepsilon_{r_h} + \varepsilon_{r_b} + \varepsilon_{r_l} = 0 . \tag{11}$$

W równaniu tym wielkości $\varphi_h$, $\varphi_b$ i $\varphi_1$ albo $\varepsilon_{rh}$, $\varepsilon_{rb}$ i $\varepsilon_{rl}$ nazywamy od-

kształceniem rzeczywistym (naturalnym), gniotem, roztłoczeniem i wydłużeniem rzeczywistym.

Równanie (11) spełnia zasadę stałej objętości w całym zakresie odkształcenia i dlatego umożliwia prawidłowe określenie odkształceń plastycznych za pomocą tej zależności, przy czym największe odkształcenia określamy zawsze jako

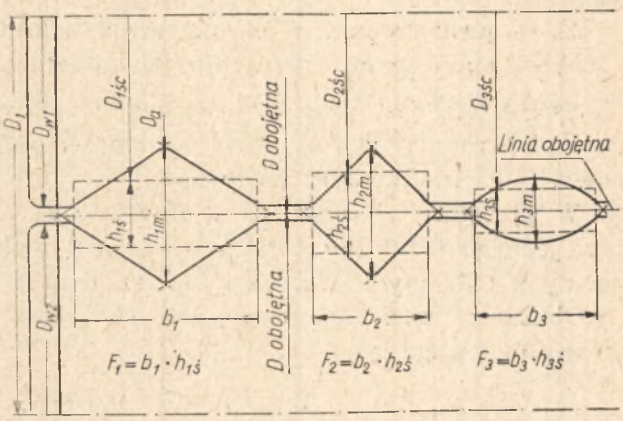
$$\varphi_h \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{rh},$$

wtedy dwa dalsze są sumą największego odkształcenia

$$|\varphi_h| = |\varphi_b + \varphi_l| \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{rh}| = |\varepsilon_{rb} + \varepsilon_{rl}| \, . \qquad (12a)$$

Przy logarytmowaniu równania (10) otrzymuje się wprost równanie (11). Równania te więc są wzajemnie równoważne.




Rys. 2. Metody wyznaczania średniej wysokości

Przedstawione zmiany kształtu przy odkształceniach plastycznych odnoszą się do przebiegów odbywających się równoległościennie jak na rys. 1.

W rzeczywistości zmiany takie odbywają się tylko wyjątkowo, chyba że pominiemy wpływ tarcia lub gdy wpływ ten jest bardzo nieznaczny.

Przy istniejącym tarciu kształty początkowe ulegają pewnemu zaokrągleniu, a więc nie otrzymamy równoległościanu. W takich przypadkach możemy postępować podobnie jak na rys. 2 i przeliczyć wysokości średnie.

Przystępując do opracowania procesu technologicznego, to znaczy do wyznaczania szeregu kolejnych wymiarów, przez które ma przejść odkształcony metal, przede wszystkim wyznaczało się dotychczas zmniejszenie przekroju, czyli ubytki lub współczynniki wydłużenia od jednego przekroju do drugiego.

Do niedawna [1, 2] dla otrzymania poszczególnych wielkości odkształceń plastycznych obliczano zmniejszenie przekroju za pomocą

ubytku względnego $$U = \frac{F_0 - F_1}{F_0}$$

lub

ubytku procentowego $$U\% = \frac{F_0 - F_1}{F_0} 100 \, .$$

Ponieważ jest to sposób żmudny, obecnie z reguły wyznacza się zmniejszenie przekroju za pomocą współczynników wydłużenia według wzoru

$$\lambda = \frac{F_0}{F_1} = \frac{l_1}{l_0}, \tag{13}$$

gdzie

$F_0$ — powierzchnia przekroju przed odkształceniem,

$F_1$ — powierzchnia przekroju po odkształceniu (rys. 1).

Sposób ten jest prostszy, gdyż do wyznaczania kolejnych powierzchni przekroju wystarczy proste pomnożenie lub podzielenie przez odpowiednie współczynniki wydłużenia.

W procesach złożonych z większej ilości odkształceń (n) z wymiarów jednego przekroju oblicza się wprost wymiary następnego według pewnych ustalonych wzorów oraz danych doświadczalnych.

Obliczanie wielkości poszczególnych przekrojów przeprowadza się w sposób następujący

$$\begin{aligned} F_0 &= F_1 \cdot \lambda_1 \quad \text{mm}^2 \\ F_1 &= F_2 \cdot \lambda_2 \quad \text{mm}^2 \\ F_2 &= F_3 \cdot \lambda_3 \quad \text{mm}^2 \\ F_{n-1} &= F_n \cdot \lambda_n \quad \text{mm}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Powierzchni poszczególnych przekrojów możemy nie obliczać, lecz otrzymamy je mnożąc powierzchnię końcową przez odpowiednie współczynniki wydłużenia

$$\begin{aligned} F_{n-1} &= F_n \cdot \lambda_n \quad \text{mm}^2 \\ F_{n-2} &= F_n \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \quad \text{mm}^2 \\ F_1 &= F_n \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2 \quad \text{mm}^2 \\ F_0 &= F_n \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2 \cdot \lambda_1 \quad \text{mm}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Jeśli współczynniki wydłużenia są sobie równe (zachodzi to zresztą rzadko), wówczas

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots \lambda_n = \lambda_{\text{ś}}^{n}. \tag{16}$$

Gdy współczynniki te są różne, otrzymamy dalsze zależności

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_n = \lambda_{\text{całk}} = \frac{F_0}{F_n}. \tag{17}$$

Przyjmując lub obliczając dowolny $\lambda_{\text{ś}}$ — średni współczynnik wydłużenia dla wszystkich odkształceń całego systemu, możemy obliczyć $n$, tzn. ilość potrzebnych odkształceń z następujących wzorów

$$\overset{n}{\lambda}_{ś} = \lambda_{całk} = \frac{F_0}{F_n}, \tag{18}$$

$$\lambda_{ś} = \sqrt[n]{\frac{F_0}{F_n}} = \sqrt[n]{\lambda_{całk}}, \tag{19}$$

$$n = \frac{\log F_0 - \log F_n}{\log \lambda_{ś}} = \frac{\log \lambda_{całk}}{\log \lambda_{ś}}. \tag{20}$$

Podane tu wzory (13 do 20) stosuje się ogólnie w tych procesach przeróbki plastycznej, w których dany przedmiot ulega kilkakrotnym po sobie następującym odkształceniom. Na przykład przy kuciu swobodnym, kuciu matrycowym, przeciąganiu, tłoczeniu, a czasami wyciskaniu oraz we wszystkich procesach walcowania. Jeśli kształt poszczególnych przekrojów jest okrągły, wtedy ogólne rozwiązanie równań (13 do 20) nie napotyka na żadne dalsze trudności, gdyż zamiast stosunków powierzchni otrzymuje się wprost stosunek średnic, np.

$$\lambda = \frac{\frac{\pi}{4} d_1^2}{\frac{\pi}{4} d_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}, \tag{13a}$$

a stąd następnie

$$\begin{aligned} d_0^2 &= d_1^2 \cdot \lambda_1 \quad \text{mm}^2, \\ d_1^2 &= d_2^2 \cdot \lambda_2 \quad \text{mm}^2, \\ d_{n-1}^2 &= d_n^2 \cdot \lambda_n \quad \text{mm}^2. \end{aligned} \tag{14a}$$

Albo w nieco inny sposób

$$\begin{aligned} d_0^2 &= d_1^2 \cdot \lambda_1 \quad \text{mm}^2, \\ d_0^2 &= d_2^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \quad \text{mm}^2. \end{aligned} \tag{15a}$$

Również dalsze wzory są podobne

$$\overset{n}{\lambda}_{ś} = \lambda_{całk} = \frac{d_0^2}{d_n^2}, \tag{18a}$$

$$\lambda_{ś} = \sqrt[n]{\frac{d_0^2}{d_n^2}} = \sqrt[n]{\lambda_{całk}}, \tag{19a}$$

$$n = \frac{\log d_0^2 - \log d_n^2}{\log \lambda_{ś}} = \frac{\log \lambda_{całk}}{\log \lambda_{ś}}. \tag{20a}$$

Podane tu zależności mogą być stosowane przy rozciąganiu lub ściskaniu okrągłych prętów. Można również stosować wyrażenia logarytmiczne

$$\varphi_l = \ln \frac{F_0}{F_1} = \ln \frac{d_0^2}{d_1^2} \tag{13b}$$

z wszystkimi dalszymi zależnościami.

Znacznie trudniej przedstawia się zagadnienie, jeśli kształty odkształconych przedmiotów są różne od okrągłego, przy czym powierzchnię ich można wyznaczyć z zależności

$$F = h \cdot b \quad \text{mm}^2 \tag{21}$$

albo jeśli są to przekroje różne od prostokątnych

$$F = h_{\text{ś}} \cdot b \quad \text{mm}^2, \tag{21a}$$

gdzie przez $b$ rozumiemy zwykle największą szerokość, na jakiej będzie wypełniony wykrój, na przykład przy walcowaniu (rys. 2).

Takie przypadki wymagają dodatkowych zależności wiążących stosunki wysokości albo szerokości, aby profil został prawidłowo wypełniony.

Do niedawna rozwiązywano takie przypadki przyjmując dobrane na podstawie doświaczenia z praktyki wielkości gniotów (bezwzględnych, względnych itp.).

$$\Delta h = h_1 - h_2 \text{ lub } \varepsilon_h = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$$

oraz określano równocześnie zmiany szerokości za pomocą prywitywnych wzorów na roztłoczenie, a więc podobnie (bezwzględne, względne)

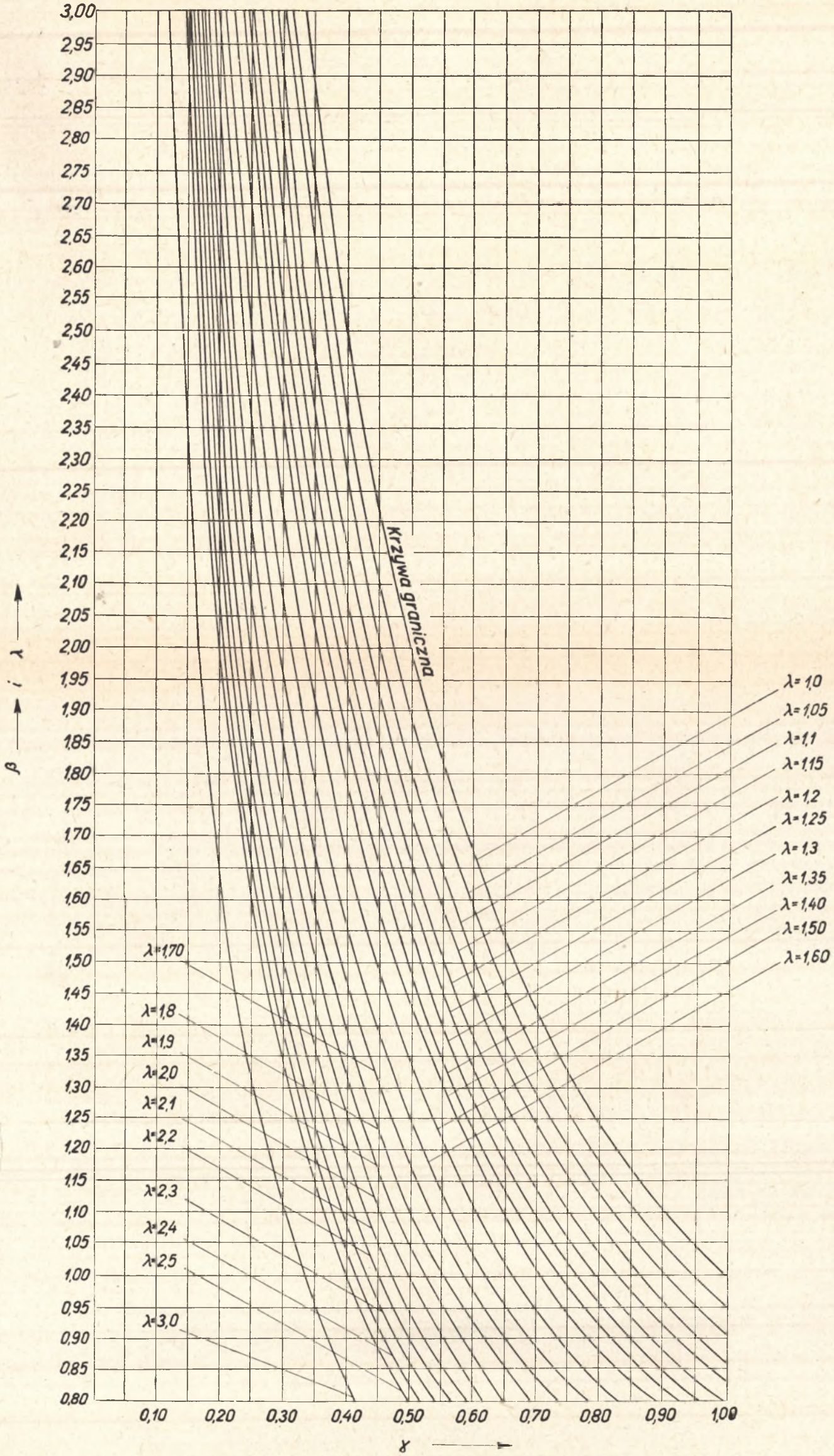
$$\Delta b = b_2 - b_1 \text{ czy } \varepsilon_b = \frac{b_2 - b_1}{b_1} \text{ itp.}$$

Taki sposób rozwiązywania dawał wartości przybliżone, które trzeba było w toku pracy poprawiać, wynikały też często omyłki, gdyż nie było żadnej kontroli, czy dobrane współczynniki są prawidłowo obliczone.

Znacznie prawidłowsze rozwiązanie otrzymuje się przez wprowadzenie [2] współczynników gniotu $\frac{h_2}{h_1} = \gamma$ oraz roztłoczenia $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ i ich wzajemnego powiązania dla profilów prostokątnych i regularnych, przy czym istnieje znana możliwość kontroli prawidłowości obliczeń z zależności (10)

$$\gamma \cdot \beta \cdot \lambda = 1{,}0 .$$

Iloczyn współczynników odkształcenia $\gamma \cdot \beta \cdot \lambda = 1$ równania (10) najlepiej przedstawić jest graficznie, (rys. 3). Wykres ten przedstawia obszar krzywych $\lambda$ od 1,0 do 3,0, a więc w mniej więcej praktycznie stosowanym zakresie, w zależności od całego zakresu współczynnika gniotu $\gamma$, to znaczy od 0,10 do 1,0, przy możliwości przyjmowania przez




Rys. 3. Wykres zależności współczynników odkształcenia spełniających równanie $\gamma \cdot \beta \cdot \lambda = 1$

współczynnik roztłoczenia wartości od 0,8 do 3,0. Praktycznie $\beta$ zwykle jest $> 1{,}0$, chociaż niekiedy istnieją przypadki $\beta < 1{,}0$. Wykres na rys. 3 uwzględnia je.

Również zakres $\beta$ do 3,0 jest praktycznie wystarczający. Krzywą graniczną dla $\lambda = 1{,}0$ otrzymujemy z zależności $\beta = \frac{1}{\gamma}$, a więc całe odkształcenie przemieszcza się w roztłoczeniu bez żadnego wydłużenia

Z zależności (10) wynika, że możemy przyjąć podobnie $\beta = 1$, wtedy: $\lambda = \frac{1}{\gamma}$, całe odkształcenie przemieszcza się w wydłużeniu bez zmiany szerokości. Zwykle są to najkorzystniejsze przypadki w przeróbce plastycznej.

Wykres na rys. 3 wykonano celowo w skali większej, aby ułatwić dobieranie trzeciego współczynnika, gdy dwa są znane; na przykład przy znanych $\beta$ i $\gamma$ na przecięciu ich wartości otrzymujemy szukane $\lambda$.

Należy tu zaznaczyć, że z braku dalszych równań wiążących pomimo powiązania współczynników odkształcenia zależnością (10) często nie było można wyznaczyć wymiarów poszczególnych przekrojów z zależności (13 do 20). Stąd konieczność uzupełnienia tej metody.

## 2. Wyprowadzenie ogólnych zależności dla procesów odkształceń plastycznych

Wyprowadzone zależności odnoszą się tylko do procesów, w których metal przechodzi przez kolejne stadia odkształceń ze stanu początkowego do stanu końcowego przy zachowaniu podstawowego prawa stałej objętości.

$$V_0 = V_1 = V_2 = V_3 = V_i = V_n, \quad \text{mm}^3 \tag{4a}$$

gdzie

$i$ — pośredni stan odkształcenia,

$n$ — końcowy stan odkształcenia,

$V$ — objętość po każdym odkształceniu,

przy czym równanie (17) musi być również spełnione w całej rozciągłości

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots \lambda_i \cdot \lambda_n = \lambda_{\text{całk}} = \frac{F_0}{F_n}.$$

Weźmy pod uwagę zależność

$$\lambda_{\text{całk}} = \frac{F_0}{F_n},$$

wówczas

$$\lambda_{\text{całk}} = \frac{F_0}{F_n} = \frac{h_0}{h_n} \cdot \frac{b_0}{b_n} = \frac{1}{\gamma_{\text{całk}} \cdot \beta_{\text{całk}}}.$$

Wynika stąd, że ogólna zależność (10) $\gamma \cdot \beta \cdot \lambda = 1$, znajduje dalsze uogólnienie przy wielokrotnym odkształceniu metalu w postaci

$$\gamma_{\text{całk}} \cdot \beta_{\text{całk}} \cdot \lambda_{\text{całk}} = 1\,, \tag{10a}$$

przy czym przez $\gamma_{całk}$ i $\beta_{całk}$ należy rozumieć całkowite współczynniki odkształcenia, podobnie jak przy współczynniku wydłużenia, a więc otrzymamy — pamiętając także o zależności (10)

$$\gamma_{\text{całk}} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \ldots \gamma_i \ldots \gamma_n\,, \tag{22a}$$

$$\beta_{\text{całk}} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \ldots \beta_i \ldots \beta_n\,, \tag{22b}$$

$$\gamma_{\text{całk}} = \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\gamma_1} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\gamma_2} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\gamma_3} \ldots \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\gamma_i} \ldots \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\gamma_n}\,. \tag{22c}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób ciekawą zależność, gdyż w każdym kolejnym przypadku odkształcenia iloczyny współczynników = 1.

Dla walcowania K. Rytel [3] wyprowadził z wzorów autora [2] dodatkową zależność w postaci następującej

$$\beta = \lambda^{\frac{W}{1-W}}\,, \tag{23}$$

podstawiając tę zależność do wzoru (22b) otrzymamy

$$\beta_{\text{całk}} = \lambda_1^{\frac{W_1}{1-W_1}} \cdot \lambda_2^{\frac{W_2}{1-W_2}} \cdot \lambda_3^{\frac{W_3}{1-W_3}} \ldots \lambda_i^{\frac{W_i}{1-W_i}} \ldots \lambda_n^{\frac{W_n}{1-W_n}}\,, \tag{24}$$

gdzie wykładnik $W$ jest funkcją zależną od kształtu początkowego i średnicy walców.

K. Rytel otrzymał tę zależność na nieco odmiennej drodze [3]. Trzeba pamiętać także, że jeśli $\beta_{\text{całk}}$ lub $\lambda_{\text{całk}} = 1$, to wtedy z (10 a) otrzymamy podobne zależności graniczne jak dotychczas

$$\lambda_{\text{całk}} = \frac{1}{\gamma_{\text{całk}}}\,, \tag{10b}$$

$$\beta_{\text{całk}} = \frac{1}{\gamma_{\text{całk}}}\,.$$

Zgodnie z wyrażeniem (18) możemy także napisać zależność dla poszczególnych współczynników

$$\lambda_{\text{ś}}^{n} = \lambda_{\text{całk}}\,,$$

a stąd

$$\lambda_{\text{ś}} = \sqrt[n]{\lambda_{\text{całk}}}\,,$$

podobnie

$$\gamma_{\text{ś}}^{n} = \gamma_{\text{całk}} \tag{18b}$$

i stąd

$$\gamma_{ś} = \sqrt[n]{\gamma_{całk}},$$

następnie

$$\beta_{ś}^{n} = \beta_{całk} \tag{18c}$$

i stąd

$$\beta_{ś} = \sqrt[n]{\beta_{całk}}.$$

Ponieważ zależność (10 a) jest zawsze spełniona, stąd po podstawieniu zależności (18, 18 b, 18 c) otrzymujemy

$$\gamma_{ś}^{n} \cdot \beta_{ś}^{n} \cdot \lambda_{ś}^{n} = 1, \tag{25}$$

a stąd podstawiając dalsze zależności (18, 18 b, 18 c) otrzymamy

$$\gamma_{ś} \cdot \beta_{ś} \cdot \lambda_{ś} = \sqrt[n]{\gamma_{całk}} \cdot \sqrt[n]{\beta_{całk}} \cdot \sqrt[n]{\lambda_{całk}} = (1) \tag{25a}$$

Podobnie, jeśli zlogarytmujemy równania (22 a do c), otrzymamy

$$\ln \gamma_c = \ln \gamma_1 + \ln \gamma_2 + \ln \gamma_3 + \ldots + \ln \gamma_i + \ln \gamma_n, \tag{26a}$$

$$\ln \beta_c = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + \ln \beta_3 + \ldots + \ln \beta_i + \ln \beta_n, \tag{26b}$$

$$\ln \lambda_c = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 + \ldots + \ln \lambda_i + \ln \beta_n, \tag{26c}$$

a stąd

$$\begin{aligned} \ln \gamma_1 + \ln \beta_1 + \ln \lambda_1 &= 0, \\ \ln \gamma_2 + \ln \beta_2 + \ln \lambda_2 &= 0, \\ \ln \gamma_i + \ln \beta_i + \ln \lambda_i &= 0, \\ \ln \gamma_c + \ln \beta_c + \ln \lambda_c &= 0, \\ \ln \gamma_{ś} + \ln \beta_{ś} + \ln \lambda_{ś} &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$

oraz

$$\lambda_{ś}^{n} = \lambda_{całk} \tag{28}$$

$$\ln \lambda_{ś} = \frac{\ln \lambda_{całk}}{n},$$

$$\ln \beta_{ś} = \frac{\ln \beta_{całk}}{n},$$

$$\ln \gamma_{ś} = \frac{\ln \gamma_{całk}}{n},$$

$$\frac{\ln \gamma_c}{n} + \frac{\ln \beta_c}{n} + \frac{\ln \lambda_c}{n} = 0. \tag{29}$$

Takie oczywiście przedstawienie odkształceń plastycznych jest całkowicie słuszne, szczególnie jeśli w przeciwieństwie do wydłużeń względnych chodzi o pewne bardzo duże zmiany.

Otrzymujemy w ten sposób szereg dodatkowych zależności, które w dużym stopniu ułatwiają nam rozwiązanie procesów odkształceń plastycznych, szczególnie wtedy, gdy dla danego procesu istnieje dodatkowa współzależność pomiędzy współczynnikami odkształcenia, np.

$$\beta = f(\gamma), \quad \lambda = \varphi(\gamma) \text{ albo } \beta = \varphi(\lambda).$$

### 3. Próby własne

Celem sprawdzenia nowych zależności przeprowadzono szczegółową analizę dotychczas stosowanych metod oraz tylko nieliczne próby potwierdzające, ponieważ wszystkie wywody są oparte i wynikają bezpośrednio z podstawowego prawa stałej objętości w procesach przeróbki plastycznej.

Celem potwierdzenia wywodów autora próbki z ołowiu (tablica 3) oraz z miękkiego aluminium (tablica 4 i 5) walcowano na zimno w kilku kolejnych przepustach na walcarce doświadczalnej.

Kolejne wymiary próbek przed i po odkształceniu mierzono precyzyjną suwmiarką albo śrubą mikrometryczną.

Wyniki pomiarów z kolejnych przepustów zebrano w tablicach 3 — 5, gdzie przeliczono równocześnie poszczególne współczynniki odkształcenia $\gamma$, $\beta$ i $\lambda$.

Pod tablicą umieszczono wyniki przeliczeń wzorami (22 a do 22 c), przy czym ostatni wiersz przedstawia równocześnie zależność (10 a).

Następnie sprawdzono prawidłowość zależności (18 a, b,c) oraz (25 a, b).

Również dla porównania wzorów (26 do 28) przeliczono przykład z tablicy 3; walcowanie próbki ołowianej w sześciu przepustach na zależność w logarytmach naturalnych. Obliczenia te zawiera tablica 6.

### 4. Wnioski

Z przeprowadzonej przez autora analizy oraz przeliczeń porównawczych wynika, że dotychczas stosowane metody określenia odkształceń plastycznych przez odkształcenie bezwzględne lub względne, a więc gniot, wydłużenie, roztłoczenie bezwzględne i względne są nieprawidłowe.

Można je stosować tylko do małych odkształceń rzędu 5%. Powyżej tej wartości, jak wynika z tablicy 1 i 2, otrzymuje się tak duże błędy w stosunku do podstawowej zasady stałej objętości (na przykład przy $\varepsilon_h = 30\%$, błąd wynosi już 33%,), że z góry przekreśla to prawidłowość otrzymanych wyników.

Tablica 3

**Walcowanie próbki ołowianej w 6 przepustach**

| Lp. | $h_1$ mm | $h_2$ mm | $b_1$ mm | $b_2$ mm | $l_1$ mm | $l_2$ mm | $\gamma = \frac{h_2}{h_1}$ | $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ | $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,8 | 5,07 | 61,0 | 64,0 | 134,0 | 196,48 | 0,6500 | 1,0492 | 1,4663 |
| 2 | 5,07 | 3,0 | 64,0 | 65,0 | 196,48 | 326,94 | 0,5917 | 1,0156 | 1,6640 |
| 3 | 3,0 | 2,0 | 65,0 | 66,0 | 326,94 | 482,96 | 0,6667 | 1,0154 | 1,4771 |
| 4 | 2,0 | 1,75 | 66,0 | 66,0 | 482,96 | 551,95 | 0,8750 | 1,0000 | 1,1429 |
| 5 | 1,75 | 1,30 | 66,0 | 67,0 | 551,95 | 731,92 | 0,7429 | 1,0152 | 1,3261 |
| 6 | 1,30 | 0,75 | 67,0 | 68,0 | 731,92 | 1249,46 | 0,5769 | 1,0149 | 1,7071 |

1) $\lambda_{1/2} = \lambda_1\lambda_2 = 2{,}4399$ $\quad \beta_{1/2} = \beta_1\beta_2 = 1{,}0656$ $\quad \gamma_{1/2} = \gamma_1\gamma_2 = 0{,}3846$

2) $\lambda_{1,2/3} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3{,}6042$ $\quad \beta_{1,2/3} = \beta_1\beta_2\beta_3 = 1{,}0820$ $\quad \gamma_{1,2/3} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0{,}2564$

3) $\lambda_{1,2,3/4} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 4{,}1191$ $\quad \beta_{1,2,3/4} = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = 1{,}0820$ $\quad \gamma_{1,2,3/4} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 0{,}2244$

4) $\lambda_{1,2,3,4/5} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 = 5{,}4622$ $\quad \beta_{1,2,3,4/5} = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 = 1{,}0983$ $\quad \gamma_{1,2,3,4/5} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 = 0{,}1667$

5) $\lambda_{1,2,3,4,5/6} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 = 9{,}3286$ $\quad \beta_{1,2,3,4,5/6} = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6 = 1{,}1148$ $\quad \gamma_{1,2,3,4,5/6} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6 = 0{,}0962$

$$\gamma_{śr} = \sqrt[6]{0{,}09615} = 0{,}6768$$

$$\beta_{śr} = \sqrt[6]{1{,}115} = 1{,}0183$$

$$\lambda_{śr} = \sqrt[6]{9{,}329} = 1{,}4510$$

$$\gamma_{śr} \cdot \beta_{śr} \cdot \lambda_{śr} = 1{,}00000018$$

$$\gamma_1 \cdot \beta_1 \cdot \lambda_1 = 0{,}9998 \sim 1{,}0$$

$$\gamma_2\, \beta_2\, \lambda_2 = 0{,}9998 \sim 1{,}0$$

$$\gamma_3\, \beta_3\, \lambda_3 = 0{,}8998 \sim 1{,}0$$

$$\gamma_4\, \beta_4\, \lambda_4 = 0{,}9998 \sim 1{,}0$$

$$\gamma_5\, \beta_5\, \lambda_5 = 0{,}9998 \sim 1{,}0$$

Tablica 4

**Walcowanie próbki aluminiowej w 5 przepustach**

| Lp. | $h_1$ mm | $h_2$ mm | $b_1$ mm | $b_2$ mm | $l_1$ mm | $l_2$ mm | $\gamma = \frac{h_2}{h_1}$ | $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ | $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,00 | 3,70 | 39,92 | 40,4 | 141,6 | 189,10 | 0,7400 | 1,0120 | 1,3353 |
| 2 | 3,70 | 3,08 | 40,4 | 50,5 | 189,10 | 226,61 | 0,8324 | 1,0025 | 1,1984 |
| 3 | 3,08 | 2,40 | 40,50 | 40,8 | 226,61 | 288,68 | 0,7792 | 1,0074 | 1,2739 |
| 3 | 2,40 | 1,58 | 40,8 | 41,38 | 288,68 | 432,36 | 0,6583 | 1,0142 | 1,4977 |
| 5 | 1,58 | 0,85 | 41,38 | 42,0 | 432,36 | 731,82 | 0,5380 | 1,0159 | 1,8314 |

$\lambda_{1/2} = 1{,}6002$ $\quad \beta_{1/2} = 1{,}0145$ $\quad \gamma_{1/2} = 0{,}61597$ $\quad \gamma_{1/2} \cdot \beta_{1/2} \cdot \lambda_{1/2} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$\lambda_{1,2/3} = 2{,}0385$ $\quad \beta_{1,2/3} = 1{,}0220$ $\quad \gamma_{1,2/3} = 0{,}47998$ $\quad \gamma_{1,2/3} \cdot \beta_{1,2/3} \cdot \lambda_{1,2/3} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$\lambda_{1,2,3/4} = 3{,}0531$ $\quad \beta_{1,2,3/4} = 1{,}0365$ $\quad \gamma_{1,2,3/4} = 0{,}31598$ $\quad \gamma_{1,2,3/4} \cdot \beta_{1,2,3/4} \cdot \lambda_{1,2,3/4} = 0.9999 \sim 1{,}00$

$\lambda_{1,2,3,4/5} = 5{,}5914$ $\quad \beta_{1,2,3,4/5} = 1{,}0520$ $\quad \gamma_{1,2,3,4/5} = 0{,}16999$ $\quad \gamma_{1,2,3,4/5} \cdot \beta_{1,2,3,4/5} \cdot \lambda_{1,2,3,4/5} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$$\gamma_{śr} = \sqrt[5]{0{,}16999} = 0{,}7015$$

$$\beta_{śr} = \sqrt[5]{1{,}05204} = 1{,}0109 \qquad \gamma_{śr} \cdot \beta_{śr} \cdot \lambda_{śr} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$$

$$\lambda_{śr} = \sqrt[5]{5{,}5914} = 1{,}4108$$

Tablica 5

**Walcowanie próbki aluminiowej w 4 przepustach**

| Lp. | $h_1$ mm | $h_2$ mm | $b_1$ mm | $b_2$ mm | $l_1$ mm | $l_2$ mm | $\gamma = \frac{h_2}{h_1}$ | $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ | $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,20 | 2,00 | 40,60 | 41,10 | 200,30 | 320,84 | 0,6250 | 1,0123 | 1,5805 |
| 2 | 2,00 | 1,40 | 41,10 | 41,30 | 320,84 | 456,12 | 0,7000 | 1,0043 | 1,4217 |
| 3 | 1,40 | 0,80 | 41,39 | 41,80 | 456,12 | 788,70 | 0,5714 | 1,0121 | 1,7292 |
| 4 | 0,80 | 0,28 | 41,80 | 43,0 | 788,7 | 2190,5 | 0,350 | 1,0287 | 2,7774 |

$\lambda_{1/2} = 2{,}2469$ $\quad \beta_{1,2} = 1{,}0172$ $\quad \gamma_{1/2} = 0{,}4375$ $\quad \gamma_{1/2} \cdot \beta_{1/2} \cdot \lambda_{1/2} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$\lambda_{1,2/3} = 3{,}8852$ $\quad \beta_{1,2/3} = 1{,}0295$ $\quad \gamma_{1,2/3} = 0{,}2499$ $\quad \gamma_{1,2/3} \cdot \beta_{1,2/3} \cdot \lambda_{1,2/3} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$\lambda_{1,2,3/4} = 10{,}7908$ $\quad \beta_{1,2,3/4} = 1{,}0590$ $\quad \gamma_{1,2,3/4} = 0{,}0875$ $\quad \gamma_{1,2,3/4} \cdot \beta_{1,2,3/4} \cdot \lambda_{1,2,3/4} = 0{,}9999 \sim 1{,}00$

$$\gamma_{śr} = \sqrt[4]{0{,}0875} = 0{,}5439$$

$$\beta_{śr} = \sqrt[4]{1{,}0590} = 1{,}0144 \qquad \gamma_{śr}\,\beta_{śr}\,\lambda_{śr} = 0{,}9999 \sim 1{,}000$$

$$\lambda_{śr} = \sqrt[4]{10{,}7908} = 1{,}8124$$

Tablica 6

**Przeliczenia wartości pomiarowych z tablicy 3 na logarytmy naturalne**

| Nr | $h_1$ mm | $h_2$ mm | $b_1$ mm | $b_2$ mm | $l_1$ mm | $l_2$ mm | $\gamma = \frac{h_2}{h_1}$ | $\beta = \frac{b_2}{b_1}$ | $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ | $\gamma \cdot \beta \cdot \lambda$ | $\ln \gamma$ | $\ln \beta$ | $\ln \lambda$ | Suma logarytm. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,8 | 5,07 | 61,0 | 64,0 | 134,0 | 196,48 | 0,6500 | 1,0492 | 1,4663 | 0,99998 | 1,81291 | 0,01078 | 0,16613 | 0,01018 |
| 2 | 5,07 | 3,0 | 64,0 | 65,0 | 196,48 | 326,94 | 0,5917 | 1,0156 | 1,6640 | 0,99994 | 1,77210 | 0,00647 | 0,22115 | 0,00028 |
| 3 | 3,0 | 2,0 | 65,0 | 66,0 | 326,94 | 482,96 | 0,6667 | 1,0154 | 1,4771 | 0,99947 | 1,82393 | 0,00645 | 0,16909 | 0,00053 |
| 4 | 2,0 | 1,75 | 66,0 | 66,0 | 482,96 | 551,95 | 0,8750 | 1,0000 | 1,1429 | 1,00003 | 1,94201 | 0,00000 | 0,65767 | 0,00000 |
| 5 | 1,75 | 1,30 | 66,0 | 67,0 | 551,95 | 731,92 | 0,7429 | 1,0152 | 1,3261 | 1,00012 | 1,87151 | 0,00643 | 0,12254 | 0,00048 |
| 6 | 1,20 | 0,75 | 67,0 | 68,0 | 731,92 | 1248,46 | 0,5769 | 1,0149 | 1,7071 | 0,99949 | 1,76042 | 0,00664 | 0,23223 | 0,00131 |

$$\ln \gamma_c = \ln \gamma_1 + \ln \gamma_2 + \ln \gamma^3 + \ln \gamma_4 + \ln \gamma_5 + \ln \gamma_6 = -1{,}01712$$

$$\ln \beta_c = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + \ln \beta_3 + \ln \beta_4 + \ln \beta_5 + \ln \beta_6 = 0{,}03617$$

$$\ln \lambda_c = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 + \ln \lambda_4 + \ln \lambda_5 + \ln \lambda_6 = 0{,}97070$$

$$\ln \gamma_ś = \frac{\ln \gamma_c}{6} = -0{,}16952$$

$$\ln \beta_ś = \frac{\ln \beta_c}{6} = 0{,}00602$$

$$\ln \lambda_ś = \frac{\ln \lambda_c}{6} = 0{,}16178$$

$$\ln \gamma_ś + \ln \beta_ś + \ln \lambda_ś = -0{,}00172$$

Z tego powodu podawane w niektórych opracowaniach naukowych zależności funkcjonalne, wykresy itp., stosowane w nauce i technice, oparte o wydłużenia bezwzględne lub jednostkowe mogą być w zakresie odkształceń plastycznych błędne.

Również obraz płynięcia metalu przedstawiony odkształceniami bezwzględnymi lub jednostkowymi powyżej gniotu 5% musi być błędny, gdyż nie spełnia on podstawowej zasady stałej objętości i powstają „rzekome" nadmiary lub niedomiary metalu, które zawiera kolumna przedostatnia w tablicy 1 i 2. Stąd nasuwa się końcowy wniosek, że jedyny prawidłowy sposób określania większych odkształceń plastycznych, a więc w zakresie praktycznego ich stosowania, wymaga wprowadzenia współczynników odkształcenia: gniotu, wydłużenia i roztłoczenia (patrz zależność 10).

Sądzę, że zależności logarytmiczne mogą pozostać przy pewnych opracowaniach teoretycznych albo, jeśli to jest konieczne, np. przy określaniu bardzo dużych odkształceń. W praktyce natomiast znacznie wygodniejsze jest stosowanie współczynników odkształcenia (10), przy czym z równania (10) przechodzić można wprost do równania (11) przez proste zlogarytmowanie obu stron. Matematycznie są więc oba sposoby wyrażania odkształceń dopuszczalne.

Z tego więc powodu uważam za wskazane stosować zależność (10) jako znacznie wygodniejszą, a tylko niekiedy korzystać z zależności (11).

Przeprowadzone próby walcowania na zimno potwierdziły w zupełności prawidłowość wyprowadzonych przez autora zależności. We wszystkich bez wyjątku przypadkach otrzymano daleko idącą zgodność pomiędzy wzorami i pomiarami.

Wobec tak dobrej zgodności w próbach walcowania należy oczekiwać, że we wszystkich procesach odkształceń plastycznych wyprowadzone wzory dadzą podobną zgodność.

Wyprowadzone wzory i zależności ułatwią prawidłowe obliczenie poszczególnych procesów odkształceń plastycznych.

## BIBLIOGRAFIA

[1] *Mechanik. Poradnik Techniczny*, t. III, cz. 1—2, Warszawa 1954.

[2] Z. Wusatowski, *Podstawy procesu walcowania*, Katowice 1952.

[3] K. Rytel, *Ogólne zasady kalibrowania systemów szybkowydłużających*, praca kandydacka (maszynopis), Gliwice 1954.

[4] Z. Wusatowski, *Próba krytyki dotychczasowych podstawowych pojęć z przeróbki plastycznej*. Zeszyty Naukowe P. Śl. „Mechanika" nr 2 1955, s. 3—17.