II. Jahrgang. 1896. Nr. 4.

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Herausgegeben von

Prof. Dr. B. Schwalbe,
Direktor des Dorotheenstädt. Realgymnasiums
zu Berlin.

und

Prof. Fr. Pietzker,
Oberlehrer am Königl. Gymnasium
zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Braunschweig.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen sind nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen zu richten.
Für die in den Artikeln zum Ausdruck gebrachten Anschauungen sind die betr. Herren Verfasser selbst verantwortlich; dies gilt insbesondere auch von den in den einzelnen Bücherbesprechungen gefällten Urteilen.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Die Grenze zwischen Philosophie und Mathematik

mit besonderer Berücksichtigung der modernen Raumtheorieen.

Vortrag im Verein z. Förd. d. Unt. i. d. Math. u. d. Naturw.*)
von H. Schotten.

Der Gegenstand, der meinem Vortrage zu grunde liegt, darf wohl darauf rechnen, allgemeines Interesse zu erwecken; sind doch die Fragen, die darin behandelt werden, von der weittragendsten Bedeutung.

Andererseits muss allerdings auch zugestanden werden, dass das Thema schon so oft behandelt worden ist, dass man fast befürchten könnte, nur Bekanntes zur Darstellung zu bringen.

Wenn ich es trotzdem unternehme, hier meine Ansichten über das Verhältnis von Mathematik und Philosophie in besonderer Berücksichtigung der modernen Raumtheorieen vorzulegen, so mögen mich folgende Erwägungen dazu berechtigt erscheinen lassen:

1. Noch immer sind der Metageometrie gegenüber zahlreiche Irrtümer verbreitet.

2. Selbst die Anhänger sind durchaus noch nicht klar über alle Einzelheiten.

3. Ganz besonders macht sich dieser Umstand geltend gegenüber der erkenntniskritischen Bedeutung, die von einzelnen Vertretern der Metageometrie beigelegt wird.

Der Ausspruch der Metageometer strengster Observanz, dass unser ebener Erfahrungsraum nur als ein unendlich kleiner Teil eines parabolisch gekrümmten Raumes anzusehen sei, muss als falsch erwiesen werden. Noch schärfer aber muss die masslose Ueberhebung Einzelner zurückgewiesen werden, die behaupten, dass sie von diesen unserer Anschauung widersprechenden Verhältnissen wirklich anschauliche Vorstellungen hätten und dass mit der Zeit auch die Uebrigen soweit kommen würden wie sie. Es ist nötig, das Wahre vom Falschen zu scheiden, die philosophischen Folgerungen von den mathematisch-analytischen Untersuchungen zu sondern. Gerade die Uebergriffe, die die Mathematik sich auf das Gebiet der Philosophie zu machen erlaubt hat und die zu lebhafter Verwunderung selbst von manchen Philosophen übersehen zu sein scheinen, legen die Pflicht ob, von neuem das Verhältnis der Mathematik — und zwar sowohl der Arithmetik wie der Geometrie — zu Logik,

*) Hiermit beginnen die Sonderberichte über die Vorträge und Verhandlungen auf der Elberfelder Versammlung des oben genannten Vereins. Aus äusseren Gründen musste dabei von Innehaltung der — aus dem allgemeinen Bericht (Unt.-Bl. II. 3, S. 39 flgg.) ersichtlichen — Reihenfolge, die bei der Versammlung selbst obgewaltet hat, abgesehen werden. Anm. d. Red.

Psychologie, Erkenntnistheorie im Einzelnen zu betrachten: die Grenze zwischen Mathematik und Philosophie genau zu prüfen: und zu untersuchen, ob nun in specie die neueren metageometrischen Arbeiten berechtigt sind, einen entscheidenden Einfluss auf das Raumproblem selbst auszuüben.

Dabei will ich nicht unterlassen, ganz besonders darauf aufmerksam zu machen, dass mit aller Absicht der Ausdruck metageometrisch gewählt worden ist, nicht das noch immer hier und da gebräuchliche metamathematisch; denn niemand wird leugnen können, dass es sich in der Metageometrie um mathematische Untersuchungen im besten Sinne des Wortes handelt, nur sind sie nicht geometrisch, sondern eben metageometrisch.

Es wird sich nicht umgehen lassen, wenigstens in grossen Zügen eine Uebersicht über die historische Entwickelung zu geben.

Gewöhnlich wird die Quelle der Metageometrie in dem sog. 11 Axiom Euklids gesehen, das aber nach den zuverlässigsten Forschungen von Euklid gar nicht als Axiom aufgestellt worden ist, sondern als eine Forderung, d. h. als eine dem menschlichen Geiste notwendig inhaerente reine Anschauung. Wie sehr gleich bei der Beleuchtung dieser Kardinalfrage der philosophische Charakter des Problems zu tage tritt, wird völlig klar werden.

Zunächst muss die fünfte Forderung Euklid's dahin ausgelegt werden, dass sie eine notwendige Konsequenz aus der Natur der Geraden ist, wenn wir diese als ein unendliches Gebilde ansehen, so dass streng genommen das Problem schon mit der Auffassung der Geraden beginnt.

Nun fragt es sich also, was Euklid unter der Geraden verstehe. Bekannt ist seine Erklärung, die Gerade ist die Linie, die zwischen zwei Punkten gleichartig liegt; hat doch diese Erklärung die wunderbare Definition der Geraden als der Axe der Drehung hervorgerufen: eine Erklärung, bei der eben das, was erklärt werden soll, implicite vorausgesetzt wird. Und doch hat diese Erklärung ausserordentlich viele Anhänger gefunden, selbst ein Helmholtz hat sie angenommen und zahllose Lehrbücher haben sie nachgebetet.

Nun scheint mir durchweg übersehen zu sein, dass Euklid an der betreffenden Stelle gar nicht die Gerade, wie wir sie jetzt auffassen — nämlich die unendliche Gerade — gemeint hat, sondern von seinem anschaulichen griechischen Standpunkte aus das, was wir heute als Strecke bezeichnen. Unter den beiden Punkten sind nicht irgend zwei beliebige zu verstehen, sondern die beiden Endpunkte; so dass überall, wo Euklid von der geraden Linie spricht, nicht die unendliche Gerade zu verstehen ist, sondern die durch zwei Punkte begrenzte Gerade, d. h. eine endliche Strecke, über deren Grösse natürlich gar nichts festgesetzt ist.

Bestärkt werde ich in dieser meiner Auffassung der Euklidischen Definition — und ich meine dies müsste auch allgemein als beweiskräftig angesehen werden — durch die Fassung des Satzes 25; hier sagt nämlich Euklid ausdrücklich: Zwei Gerade, die nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert etc.; hätte er, der scharfsinnige Mathematiker und Philosoph den Zusatz „nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert" wohl für nötig gehalten, wenn er von vornherein die Definition der unendlichen Geraden und nicht der Strecke gegeben hätte? Ich glaube, man kann diese Frage mit aller Entschiedenheit verneinen.

Also nicht bei der Definition der Geraden wird bei Euklid der Schritt in das philosophische Gebiet gethan, sondern erst bei der fünften Forderung, wo verlangt wird, dass wir aus dem anschaulichen Endlichen hinübergleiten in das übersinnliche Unendliche: unzugänglich der sinnlichen Wahrnehmung, aber offen für die reine Anschauung.

Hier stehen wir an einem Grenzpunkte der beiden Wissenschaften: der Begriff des Unendlichen tritt an uns heran. Mit ihm zunächst gilt es sich auseinanderzusetzen.

Um meinen Standpunkt von vornherein klar zu legen, so halte ich den Begriff des Unendlichen für einen rein philosophischen; der Mathematik aber muss zugestanden werden, dass sie erst der Philosophie zu einer klaren Erkenntnis und präzisen Darstellung des Unendlichkeitsbegriffes verholfen hat. Dass auch andere den Begriff als einen wesentlich philosophischen auffassen, geht schon daraus hervor, dass Ausdrücke, wie das „mathematische Unendliche" und ähnliche sogar als Titel von Abhandlungen vorkommen. Zugegeben also, dass der Begriff als solcher rein philosophisch ist, so lehrt doch die Geschichte der Philosophie nicht weniger, wie die der Mathematik, und hier besonders die Geschichte der Infinitesimalrechnung, dass die Philosophie mit diesem Begriffe nichts anzufangen wusste, so lange nicht die Mathematik ihn seinem innersten Wesen nach klar gestellt hatte. Denn der Philosophie galt das Unendlichgrosse, wie das Unendlichkleine gleicherweise als ein Grössenbegriff, analog den endlichen Grössenbegriffen. Und doch ist er von diesen himmelweit verschieden. Ich will versuchen, den Unterschied an folgendem Beispiel klar zu machen. Denken wir uns eine endliche Strecke von beliebiger Länge, so ist sie der Träger unendlich vieler Punkte. Man nehme nun einmal die kleinste endliche Strecke die man sich vorstellen kann, also z. B. den 6000. Teil eines Millimeters, den wir eben noch mit dem Mikroskop wahrnehmen können, dann eine sehr grosse endliche

Strecke, etwa die Entfernung zweier Fixsterne. Welcher Unterschied! Und doch sind beide Strecken gleicherweise Träger unendlich vieler Punkte. Hieraus geht klar hervor, dass das Unendliche also mit dem endlichen Grössenbegriff durchaus keinen Zusammenhang hat, ja wir können geradezu aus dem gewählten Beispiele sehen, dass das Wesen des Unendlichen im striktesten Gegensatze zum endlichen Grössenbegriff steht; sein Wesen ist die Fluxion. Dabei darf auch sein Zusammenhang mit dem Begriff der Grenze und dem Begriffe der Kontinuität nicht übersehen werden.

Ich möchte die Gelegenheit benutzen, um folgendem Gedanken Ausdruck zu geben. Die unendliche Gerade ist aus unendlich vielen endlichen Strecken zusammengesetzt zu denken, jede endliche Strecke ist der Träger unendlich vieler Punkte; die Gerade muss daher als ein doppelt unendliches Punktsystem aufgefasst werden.

Doch zurück zum Unendlichkeitsbegriff selbst. Er hat sich uns durch die mathematische Untersuchung in seinem wahren Wesen enthüllt; aber darum ist er doch ein philosophischer Begriff geblieben, ein philosophischer Begriff, den zu erfassen uns die reine Anschauung gestattet.

Auch hier möge es gestattet sein, ein Beispiel anzuführen, da wir mittelst dieses Beispiels hinübergeführt werden zu dem Begriffe der reinen Anschauung, einem der wichtigsten, wenn nicht dem wichtigsten, bei der Frage nach den Grenzen von Philosophie und Mathematik und bei der Untersuchung über den philosophischen Wert der metageometrischen Untersuchungen.

Quadrat, Diagonale, zwei Seiten halbiert und Parallelen. Neuer Weg = dem alten.

Diese Operation möge beliebig oft wiederholt werden. Gar bald schon wird unsere äussere Anschauung versagen und uns die Wege längs des Zickzacks und längs der Diagonale gleich erscheinen lassen: aber trotzdem wird die reine, die innere Anschauung uns vor dem Irrtum bewahren, diese Wege als gleich anzunehmen, selbst wenn wir nun den grossen Schritt machen und uns die Operation unendlich oft wiederholt denken. Hier haben wir ein klares Beispiel, dass uns die reine, innere Anschauung auch dann nicht im Stiche lässt, wenn es gilt, über das sinnlich anschauliche Endliche hinaus in das Gebiet des Unendlichen hinüberzugehen. Unser Uebergang ins Unendliche erfolgt demnach nicht ohne Regelung durch die Vernunft, die eben hier als reine Anschauung in Evidenz tritt.

Und betrachten wir ein anderes Beispiel: Vollführen wir nicht auch einen Uebergang ins Unendliche oder aus dem Unendlichen, wenn wir bedenken, wie eng die Grenzen gezogen sind, innerhalb deren eine Bewegung von uns wahrgenommen wird, z. B. das Wachstum einer Pflanze einerseits, ein fliegendes Geschoss andererseits?

Ja selbst der mathematische Grenzbegriff gewinnt unter der Herrschaft der reinen Anschauung vollständig klare Deutlichkeit.

Ehe wir nun weiter auf das Gebiet der Philosophie uns begeben und die Rolle untersuchen, die die reine Anschauung spielt, soll zurückgegangen werden auf die historische Entwicklung.

Es hat sich gezeigt, dass schon bei Euklid die Spuren der jetzt so lebhaft erörterten Fragen zu finden sind; dass es wahrscheinlich ist, dass sich Euklid über die Bedeutung seiner fünften Forderung als einer Anschauungs**notwendigkeit** völlig klar gewesen ist. Die Geschichte unseres Problems weist aber von Euklid bis zur Wiedererweckung einen sehr langen Zeitraum völliger Ruhe auf.

Nach allgemeiner Ansicht ist es das Verdienst von Gauss gewesen, einen entscheidenden Schritt zur Klärung gemacht zu haben, indem er das Parallelenaxiom zu denjenigen unbeweisbaren Dingen zählte, die nicht bewiesen werden **können**, weil sie nicht notwendig seien, weder Anschauungs- noch Denknotwendigkeiten. Aber schon im zweiten Bande meiner vergleichenden Planimetrie habe ich auf die Arbeit Saccheris und auf Lambert hingewiesen, sodass Max Simon in seiner Besprechung dieses zweiten Bandes erklärte: „Wenn die Arbeit Lamberts mit der des Jesuiten Saccheri übereinstimmt, so ist der Ursprung der Nicht-Euklidischen Geometrie von 1792 auf 1733 zurückzudatieren.“ Diese Ansicht findet sich bestätigt in dem zweiten Bande von Clebsch-Lindemann. Ich muss daher gegenüber Stäckel und Engel für mich in Anspruch nehmen, früher diese geschichtliche Thatsache konstatiert zu haben. An historischen Darstellungen der Nicht-Euklidischen Geometrie besitzen wir zur Zeit solche von Lindemann, Felix Klein, Max Simon und Káragiannides; allerdings fast ausschliesslich vom mathematischen Standpunkte, wenn auch bei Felix Klein sich Ansätze zur Würdigung philosophischer Mitarbeit finden.

Eine ausführlichere Litteraturangabe werde ich in einem zweiten, späteren Teile geben. Für jetzt kann es sich nur darum handeln, kurz eine objektive Darstellung des historischen Ganges zu geben. Nur das Eine soll noch vorweg genommen werden, die Bemerkung nämlich, dass der Name „Nicht-Euklidische Geometrie“ recht unglücklich gewählt ist, dass wir dafür besser einen Ausdruck wählen, wie Pangeometrie, absolute Geometrie oder am treffendsten wohl Metageometrie.

Es sei mir gestattet, mich hier in erster Linie an Kleins Darstellung anzulehnen. Er unterscheidet drei Perioden.

1) Gauss, Lobatschewsky, Bolyai.

Nach Kleins Ansicht ist es durchaus Gauss' Verdienst, den Charakter des Parallelenaxioms nicht nur richtig erfasst zu haben, sondern auch die notwendigen Konsequenzen daraus gezogen zu haben.

Mit Kleins Ansicht stimmt, wie schon vorhin erwähnt, wohl die Mehrzahl der Mathematiker überein. Wie mir scheint, ist dieser Standpunkt durchaus einseitig; will man Ansichten, wie die von Gauss, schon früher kennen lernen, so müssen wir uns — abgesehen von Lambert und Saccheri — an Altmeister Kant wenden; bei ihm finden wir in der Abhandlung: Ueber den wahren Grund vom Unterschiede der Gegenden im Raume, schon folgende Aussprüche, die doch ohne Zweifel schon den Kern der ganzen Frage enthalten.

„Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte,“ und

„Denn wir können von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien, welche unsere Anschauung einschränken und für uns allgemein gültig sind.“

Damit hat Kant das Problem der Metageometrie im wesentlichen gegeben, zugleich aber auch die Grenze zwischen Philosophie und Mathematik klar bestimmt. Philosophisch, d. h. für die Erkenntnis des Raumes, ist ihm aber diese Sache offenbar ganz wertlos erschienen, sonst wäre er wohl darauf zurückgekommen.

Ohne an dieser Stelle auf Kant näher eingehen zu wollen, kann ich mich doch nicht enthalten, folgende Bemerkung zu machen.

Die ganze Metageometrie wird an den Namen von Gauss geknüpft, unter der Flagge seiner machtvollen Autorität wird das Problem behandelt, ja es wird geradezu dogmatischer Unfug mit seiner Autorität getrieben. Sehen wir nun einmal zu, was von Gauss herrührt: im grunde genommen nichts weiter als ein Hinweis auf das Problem in zwei Rezensionen über Arbeiten betreffend das Parallelenaxiom und in seinem Briefwechsel mit Schumacher. Wie nun Klein ausdrücklich hervorhebt, hatte sich Gauss schon als 18jähriger Jüngling die Möglichkeit einer Nicht-Euklidischen Geometrie zurecht gelegt.

Hat denn nun kein Anhänger sich einmal die Frage vorgelegt, warum Gauss gar keine Konsequenzen aus den Gedanken gezogen hat, die ihn schon in so jungen Jahren beschäftigt haben und die er auch späterhin, wie er ausdrücklich zugiebt, durchaus nicht aus den Augen verloren hat? Ist es denn als möglich zu denken, dass ein Geist wie Gauss die gerühmte Wichtigkeit seiner Gedanken so völlig unterschätzt hätte, um nie eine zusammenhängende Darstellung seiner Ansichten zu geben? Und in dem Briefe, den wir in Stäckel und Engel abgedruckt finden, beansprucht er ausdrücklich, dass der Inhalt als vertraulich angesehen wird. Sollte Gauss diese weise Zurückhaltung nur geübt haben, um seinen Epigonen den Tummelplatz fröhlicher Phantasieen frei zu lassen? Ich muss offen gestehen, dass mir eine genügende Antwort auf die Frage fehlt, warum Gauss auf einen Ausbau seiner Gedanken und auf eine wenn auch nur einigermassen ausführliche Darstellung verzichtet hat, wenn ich nicht annehme, dass er der Metageometrie durchaus nicht den Wert beigelegt hat, den ihre jetzigen Vertreter ihr beigelegt zu sehen wünschen.

Klein bezeichnet also Gauss unbedingt als Schöpfer der Nicht-Euklidischen Geometrie, unter seinem Einflusse und auf seine persönlichen Anregungen hin seien die Arbeiten von Lobatschewsky und den beiden Bolyai entstanden, denn nicht „sua sponte hätten die neuen Ideen in dem Geiste dieser Männer Wurzel gefasst“.

Wie wir gesehen haben, gehen aber Gauss und diesen Männern Saccheri, Lambert, Kant voraus, wie für Kant zuerst von Fortlage festgestellt ist.

Können wir also von unserem Standpunkte aus die Urgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie, wie sie von Klein dargestellt wird, nicht billigen, so dürfen wir uns doch für den ferneren Verlauf seiner Führung um so sicherer anvertrauen, als die Geschichte unseres Problems wesentlich mathematischen Charakter zeigt.

Geradezu musterhaft ist Kleins Darstellung von dem Zusammenhang von Beltramis „Versuch einer Interpretation der Nicht-Euklidischen Geometrie“ mit der Theorie der Flächen von Monge bis auf unsere Zeit, worin Beltrami — zeitlich weit von Gauss geschieden — doch in unmittelbarer Beziehung zu ihm erkannt wird.

Die zweite Periode nach Klein knüpft sich an die Namen Riemann und Helmholtz.

Diese zweite Periode steht in einem direkten Gegensatze zu der ersten. Arbeitete die erste mit geometrischen Hülfsmitteln, so ist der Charakter der zweiten der analytische. Insofern werden wir uns vom philosophischen Standpunkte mit dieser zweiten Periode reinlicher auseinandersetzen können; die Uebertragung der gewonnenen Resultate auf die erste Periode wird dann nicht schwer sein.

Es sei mir gestattet, hier ein kurzes Referat anzufügen über die Bemerkungen, die Klein an diese zweite Periode knüpft.

Er sieht die Bedeutung der Helmholtz'schen Arbeiten vor allen Dingen darin, dass sie dem grösseren Publikum bekannter geworden sind als die Arbeiten Anderer.

„So knüpft sich denn auch — heisst es — die populäre Diskussion im Kreise der Nicht-Mathematiker, der philosophischen Forscher, der Lehrer, die für Elementargeometrie Sinn und Interesse haben, ohne doch gelernte Mathematiker zu sein, fast ausschliesslich an die Arbeiten von Helmholtz an.“

Es werden dann die Gelehrten in ihrer Stellungnahme zur Nicht-Euklidischen Geometrie in vier Gruppen eingeteilt:

1) Die Orthodoxen d. h. die strengen Anhänger Kants. Als Beispiel wird Dühring genannt, der bekanntlich ein energischer Gegner der metageometrischen Untersuchungen ist.

Es heisst dann: „Die Zahl der Forscher, die diesen Ansichten huldigen, ist gar nicht gering. Es sind vor allem solche Männer, die sich im frühen Alter an die Anschauungen der Euklidischen Geometrie ausschliesslich gewöhnt haben und nun im späteren Alter nicht mehr Elastizität genug besitzen, um sich in die neuen Ideen der Nicht-Euklidischen Geometrie hineinzudenken. Diese wissen dann genau, dass die ganze Theorie Unsinn ist, ohne sie darum notwendigerweise überhaupt des Näheren zu kennen.“

Die Anmerkung, dass auch hervorragende Mathematiker derselben Ansicht seien, dass z. B. Cayley geneigt sei, streng an den Euklidischen Axiomen festzuhalten, mag Klein schwer geworden sein, legt aber ein hervorragendes Zeugnis für die Ehrlichkeit seiner Gesinnung ab.

2) Die Skeptiker. „Sie glauben von grund ihres Herzens nicht an die Nicht-Euklidische Geometrie. Sie können es sich nicht vorstellen, dass man usw. Sie können aber die Gründe gegen das Parallelenaxiom nicht entkräften.“ „Dies ist wohl grösstenteils die Ansicht der Gymnasiallehrer.“ Als Beispiel wird Beez angeführt.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Gruppen der Orthodoxen und Skeptiker ist nicht klar; sie erscheinen gar nicht als scharf zu trennende Gruppen.

3) Die Rezeptiven d. h. wesentlich die Kommentatoren von Helmholtz. — Beispiel: Erdmann.

4) Die Enthusiasten. Sie entscheiden sich für die Nicht-Euklidische Geometrie, aber nicht aus wissenschaftlichen Gründen, z. B. Zöllner auf grund metaphysischer Neigungen für die elliptische Raumform, da hierbei die Ausdehnung ins Unendliche umgangen wird: oder Clifford aus ästhetischen Gründen wegen des in der elliptischen Geometrie vollständig zur Durchführung gelangenden Prinzips der Dualität.

Ich hoffe, dass ich Sie mit dieser ausführlichen Abschweifung nicht gelangweilt habe: mir ist diese Stelle in Kleins akademischen Vorlesungen immer von hervorragendem Interesse gewesen und ich glaube annehmen zu dürfen, dass sie allgemein wenig bekannt ist. Auch werde ich auf einige Punkte im Verlaufe der Untersuchung noch zurückkommen müssen. Einer Bemerkung zu dieser Einteilung, besonders zu der Charakterisierung der beiden ersten Gruppen enthalte ich mich mit Absicht und will nur noch den Schlusssatz anführen: „Clifford allein von den angeführten Männern kennt Nicht-Euklidische Geometrie von Grund aus; die andern vier haben zwar davon reden hören und glauben daher die Berechtigung zu haben, mitreden zu dürfen, das eigentliche innre Wesen und die streng mathematische Behandlung der Nicht-Euklidischen Geometrie aber sind ihnen unbekannt geblieben.“

Die dritte Periode ist durch das Hinzutreten der projektiven Geometrie bedingt. Als Vertreter seien Cayley und Klein genannt.

Da es nicht meine Absicht sein kann auf das speziell Mathematische unseres Problems näher einzugehen, so will ich nach dieser kurzen Kennzeichnung des Entwicklungsganges der Metageometrie im Anschluss an einen ihrer berufensten Vertreter auf unsere Hauptfrage zurückkommen nach der Grenze zwischen Philosophie und Mathematik.

Dem unbefangenen Beobachter möchte es vielleicht müssig erscheinen, eine solche Frage überhaupt aufzuwerfen. Denn, wenn wir uns die Aufgaben der Philosophie und Mathematik vergleichend vor Augen stellen, so tritt ein tiefer Unterschied zwischen beiden Wissenschaften zutage: die Philosophie forscht nach den Quellen oder Grenzen der Erkenntnis, sie untersucht den Grad der Berechtigung unserer Ansichten über Erfahrung und Erkenntnis, kann aber nach ihrer ganzen Natur selbst gar keine Erkenntnis in dem Sinne von Thatsachen der Erfahrung geben; wenigstens kommt für unsere Frage nur diese Seite der philosophischen Wissenschaft inbetracht als erkenntnistheoretische oder besser erkenntniskritische Wissenschaft.

Scharf gegenüber steht die Mathematik, an sich keine Wahrheit über die Quellen der Erkenntnis vermittelnd, sondern genötigt auf grund von bestimmten, dem menschlichen Geiste innewohnenden Erkenntnisquellen ihr stolzes Gebäude von Erkenntnissen aufzurichten. — Das Fundament legt die Philosophie durch ihre Kritik der Erkenntnis, den Bau vollendet die Mathematik unter rein wissenschaftlicher Ausnutzung dieser Fundamente. Aber wenn so auch scheinbar beide Wissenschaften streng von einander geschieden sind, so geht aus unserm Vergleich sofort auch hervor, wie man zur Frage der Grenzbestimmung zwischen beiden Wissenschaften gekommen ist.

Wo hört das Fundament auf, wo beginnt der Bau? Damit ist unsere Frage gestellt.

Nun werden allgemein zwei Quellen unserer Erkenntnis anerkannt: an der einen zu zweifeln, ihre Berechtigung zu leugnen — ist bis heute noch niemandem eingefallen: man würde jeden für verrückt erklären, der diese Seite unserer Erkenntnis auch nur mit dem geringsten Zweifel beflecken wollte: diese Quelle ist das Denken — oder um durch einen Pleonasmus die Sache deutlicher zu machen — die logischen Gesetze unseres Denkens. Sie gelten unwidersprochen: das Gesetz der Identität, des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Dritten einerseits, das Gesetz vom Grunde und das Kausalgesetz andererseits.

Alle Erkenntnis, die aus dieser Quelle fliesst, wird unbestritten als richtig anerkannt. Untersuchen wir aber diese Seite unseres Erkennens, so kommen wir immer wieder zurück auf die Wahrheit, die schon Kant in voller Deutlichkeit — wenn auch mit anderen Worten — ausgesprochen: all unser Denken ist inhaltlos, erst die zweite Quelle unseres Erkennens giebt diesem Denken den Inhalt: die Anschauung. So sagt auch Liebmann: Es giebt kein schöpferisches Denken. Das was wir nach den Gesetzen unseres Denkens verknüpfen, sei es nach dem Satze der Identität oder nach dem Gesetze der Kausalität, muss uns gegeben sein durch die Anschauung, die zweite Quelle unseres Erkennens.

Während nun — wie gesagt — die Gesetze des Denkens von keiner Seite Widerspruch erfahren haben, ja ganz gewiss jemand, der sie im Ernst anzuzweifeln wagte, als reif für's Irrenhaus angesehen werden würde, ist es der Anschauung, der gleichwertigen zweiten Quelle unserer Erkenntnis, nicht so gut geworden: man erkennt zwar **Denk**notwendigkeiten an, aber keine **Anschauungs**notwendigkeiten: obgleich sie — und das spreche ich mit vollster Ueberzeugung aus, wenn sich dadurch auch noch eine fünfte Gruppe der ganz Thörichten nötig machen sollte — ganz ebenso berechtigt sind, als die Denknotwendigkeiten.

Die Anschauungsnotwendigkeit aber besteht darin, dass etwas in der Sinnes- und Phantasie-Anschauung bildlich notwendig vorgestellt werden muss, weil dessen Aufhebung — ohne begrifflichen Widerspruch zu erzeugen — unserem Anschauungsvermögen schlechterdings nicht gelingen will, folglich mit der Organisation dieses Vermögens unvereinbar ist.

So ist die gerade Linie z. B. doch gar keine Erfahrungssache, sondern eine Abstraktion, ein Idealbegriff. Niemand hat je eine Gerade gesehen: da, wo wir sie zu sehen glauben, bringen wir den in unserem Denken und reinen Anschauen geborenen Begriff hinzu. Nur diesen verwenden wir als Element in der Mathematik.

Eines ist es, was diese Anschauungsnotwendigkeiten in Misskredit gebracht hat, das sind die sogenannten Sinnestäuschungen. Als wenn die äussere Anschauung, das Sehen, mit der inneren Anschauung etwas anderes gemein hätte als den Namen. Im Uebermass philosophischer Weisheit hat man selbst durch solche Verwechslungen das Ansehen der inneren Anschauung untergraben. Und doch sind es gerade diese anschaulichen Bezeichnungen innerer Vorgänge, die von der allergrössten Bedeutung für ihr Verständnis sind. Hat denn die Philosophie vergessen, dass das stolze Wort „begreifen" nichts anderes ist als ein Bild, entnommen der Erfahrung, die uns der Tastsinn vermittelt? Wer aber denkt wohl noch bei diesem Worte an seinen ursprünglichen Sinn? Ja, da wird er vergessen! Aber die Anschauung soll etwas rein äusserliches, zufälliges sein: immer wieder treten da Verwechslungen ein zwischen Sehen und Anschauung, gerade als wenn Tasten und Begreifen dasselbe wäre.

Es fällt mir hier eine feine Bemerkung von Helmholtz ein, der sagt, für reell müsse man sagen wirklich, denn es handle sich dabei um das, was auf uns wirkt, nicht um res, um Dinge. Wie hier die Etymologie des Wortes zu einer wahrhaft stupenden Wahrheit geführt hat, so muss auch die Entstehung der Worte „begreifen", „anschauen" uns zu ihrem wahren Verständnis hinführen, der aber hier gerade in der Vertiefung der Auffassung und in der Abkehr von dem ursprünglichen äusserlichen Sinne besteht.

Und nun möchte ich noch einmal zurückkommen auf die Sinnestäuschungen. Liegt denn nicht gerade darin, dass wir ganz allgemeinmenschlich genau wissen, wo wir Sinnestäuschungen unterworfen sind, dass wir nicht nur die Quellen und Möglichkeiten dieser Sinnestäuschungen kennen, nein, dass wir sie ganz genau nach Gesetzen fixieren können, liegt nicht gerade hierin — frage ich — der allersicherste Beweis für die Unanfechtbarkeit der reinen Anschauung, wie wir sie leider noch immer bezeichnen müssen, um jede Verwechslung mit dem Sehen — der äusseren Anschauung — auszuschliessen?

Liegt nicht gerade hierin eine der stärksten Stützen für die Existenz der Anschauungsnotwendigkeiten?

Denn was sind Sinnestäuschungen anders, als Wahrnehmungen resp. Mitteilungen unserer Sinne, die mit der reinen Anschauung nicht übereinstimmen: den Anschauungsnotwendigkeiten widersprechen, die wir wie die Gesetze des Denkens a priori in uns haben? Liegt nicht gerade hierin ein Beweis dafür, dass die von unseren Sinnen gelieferten Wahrnehmungen von uns nicht urteilslos aufgenommen werden, sondern dass etwas in uns ist, das uns die Wahrnehmungen als richtig oder falsch beurteilen lässt? Dieser innere Gesetzgeber ist transzendental, von der Erfahrung unabhängig.

Wahrlich man sollte verzweifeln, dass derselbe, der die Denknotwendigkeiten als unverletzliches Gesetz ansieht, die Anschauungsnotwendigkeiten leugnet, ja sich anmasst, über diese Anschauungsnotwendigkeiten erhaben zu sein, sie zu erklären als eine Angewöhnung, aus der herauszukommen uns die Bequemlichkeit oder ein ungewöhnliches Mass von Beschränktheit verhinderte.

Der Begriff der Anschauungsnotwendigkeit ist einer der wichtigsten für unsere Frage; richtig aufgefasst, führt er uns hinüber von der Endlichkeit zur Erkenntnis des Unendlichkleinen wie des Unendlichgrossen. In ihm krystallisiert sich das Wesen der reinen Anschauung.

So führt uns die Vorstellung zweier Geraden in konstantem Abstande notwendig zur Vorstellung des Parallelismus auch ausserhalb der Grenzen des Endlichen.

Die Anschauungsnotwendigkeiten beziehen sich auf die den idealen Begriffen adaequaten Erkenntnisse, also nicht auf angeschaute Geraden, sondern auf begriffliche Geraden.

Mögen doch die Leugner der Anschauungsnotwendigkeiten uns einmal experimentell die Richtigkeit ihrer Ansichten beweisen. Gebe doch einer seinen Jungen als Versuchsobjekt her, lass ihn von anfang an in der Ansicht auferziehen, dass die Anschauungsnotwendigkeiten Zufälligkeiten seien, helfe er ihm doch über die Schranken der Anschauung der Mehrheit der Menschen hinweg: oder vielleicht eignet sich zu diesem Experiment ein Eingeborener unserer Kolonien besser, wo man ja, wie es scheint, unter dem Einfluss der Tropensonne leichter instande ist, sonst anerkannte Schranken zu übersteigen.

Und dann führe er uns dieses von den Schranken menschlicher Anschauung systematisch befreite Individuum vor: einen solchen experimentellen Beweis können alle die verlangen, denen von den einzig wahren Vertretern der Nicht-Euklidischen Geometrie ihre Beschränktheit vorgeworfen wird. Ehe er uns aber geliefert ist, mögen die Uebermenschen, denen vergönnt ist, sich über die Schranken menschlicher Anschauung hinwegzusetzen, uns armen anderen Sterblichen vergönnen, dass wir uns in unserer dreidimensionalen ebnen Haut völlig wohl fühlen.

Zunächst also gilt als Thatsache: die Denknotwendigkeiten werden von keinem bestritten, die Anschauungsnotwendigkeiten sollen ein Opfer mathematischer Analyse werden, die doch nie im Stande ist oder sein wird, uns eine Erkenntniss über die Quellen unseres Wissens zu geben.

Ein anderer hier zu erörternder Punkt ist folgender:

In sehr vielen geometrischen Lehrbüchern findet man an der Spitze eine Reihe von sog. Grundsätzen aufgestellt, unter dem Titel: Grundsätze der allgemeinen Grössenlehre, die in der Planimetrie Anwendung finden.

Diese Grundsätze der allgemeinen Grössenlehre müssen endlich einmal endgültig aus dem Gebiet der Mathematik herausgeworfen werden: sie sind gar keine mathematischen Grundsätze, sondern nichts anderes als eine Anwendung der logischen Gesetze von der Identität, dem Widerspruche, dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten, die schliesslich alle sich reduzieren auf den Satz der Identität. Wir haben es hier mit Gesetzen zu thun, die dem rein philosophischen Gebiete angehören. Alle diese sog. Grundsätze der allgemeinen Grössenlehre entspringen der einen Quelle unserer Erkenntnis, dem Denken. Und unbestritten wie die Quelle, ebenso unbestritten sind die in ihr wurzelnden Gesetze. Vor ihnen macht selbst der skeptischteste Uebermensch ehrfurchtsvoll Halt.

Warum? Ja! hier ist jedem ganz klar, dass irgend eine Erkenntnis unmöglich ist, wenn nicht die Wahrheit, die Existenz dieser Denkgesetze anerkannt sind, wenn nicht die Denkgesetze als Denknotwendigkeiten anerkannt werden. Man versuche doch einmal einen Aufbau auf grund des Gesetzes A ist gleich non — A. —

Jedermann lacht über solche Kapriolen!

Und die Anschauungsnotwendigkeiten?!

Ja, das ist ganz etwas anderes. Hier sträubt sich der erhabene Menschengeist einiger Uebermenschen, die von der Natur gezogenen Schranken anzuerkennen, hier gilt kein a priori: Erfahrung — die gar kein Gegensatz zum a priori — ist der Schlachtruf.

Und doch wird ja als a priori nur das erkannt, was wir selbst in die Dinge legen, nämlich die allgemeine Gesetzlichkeit der Erfahrung, wobei Erfahrung wohl zu unterscheiden ist von Wahrnehmung oder Empfindung. Erfahrung selbst ist transzendental insofern, als sie die durch die Gesetzmässigkeit des Denkens geläuterte und zergliederte Wahrnehmung ist.

Und nun gar die mathematischen Begriffe, die gar nicht Bilder von Gegebenem sind, sondern rein willkürlich von uns konstruiert, gesetzmässig konstruiert, denen in der Wirklichkeit gar nichts entspricht, ja gar nichts entsprechen kann.

Sie sind Geist von unserm Geist.

Also den Anschauungsnotwendigkeiten gegenüber wird das Banner der Erfahrung entrollt.

Als wenn nicht hier, wie überall, die Welt mit Brettern zugenagelt wäre, auf denen mit grossen Buchstaben steht: Ignorabimus! Wo diese Wand steht? Die Frage ist irrelevant gegenüber der Gewissheit, dass die Wand da ist. Möge es dem menschlichen Geiste gelingen, sie möglichst weit hinauszuschieben, es giebt keinen Sterblichen, der das inniger wünschen könnte als ich. Aber ebenso unbedingt muss zugestanden werden, dass sie da ist und dass sie durch die Leugnung der Anschauungsnotwendigkeiten auch nicht um ein noch so kleines Stück von ihrem Platze gerückt wird.

Aber es gilt nachzuweisen, was die Veranlassung wurde, dass die Mathematik ihre Grenzen unrechtmässig überschritt, dass Einzelne behaupten, die Schranken der Anschauung überstiegen zu haben und verlangen, wir sollen es ihnen gleich thun.

Der erste, der auf die Frage der Möglichkeit von anderen Anschauungen als den unserigen näher einging, war Helmholtz, da er seine berühmten Flächenwesen schuf, von denen es heisst: Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die innerhalb ihrer Oberfläche Wahrnehmungen ähnlich den unseren machen.

Schon im ersten Bande meiner vergl. Planimetrie konnte ich dagegen die Einwendung machen, dass diese Flächenwesen gar keine allgemein zweidimensionale Wesen sein können, sondern an das Gesetz ihrer Fläche gebunden sind. In solchen Analogieen sind die Nicht-Euklidiker bei weitem korrekter.

Heute gelten erneute Einwendungen dem Philosophen Helmholtz. Er sagt also: Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit —

Was in aller Welt hat hiermit die Logik zu thun, die sich mit den Gesetzen des Denkens, mit der Bildung der Begriffe, mit der Verknüpfung der Begriffe zum Urteil, der Urteile zum Schluss beschäftigt? Mit dem: „hierin liegt keine logische Unmöglichkeit“ ist also gar nichts gesagt. Dieser Zusatz ist aber geeignet, beim Leser den Anschein der Richtigkeit für die geforderte Annahme zu erwecken, einen möglichen Einwand im voraus zu beseitigen, der vom philosophischen Standpunkte aus gar nicht gemacht werden kann und deshalb auch nicht gemacht werden sollte. Dennoch finden wir auch bei Philosophen etwa folgendes Raisonnement: „Ein Nicht-Euklidischer Raum als gar keinen begrifflichen Widerspruch enthaltend, vielmehr logisch der allgemeinere Fall, kann, obwohl nicht anschaubar, gedacht werden“, wobei als Zusatz steht: „Denken heisst hier nach logischem Sprachgebrauch, etwas dem Begriffe nach als widerspruchslos, mithin als logisch möglich erkennen ganz unabhängig von der Möglichkeit der Anschauung.“

Dass damit aber jeder Gewinn für unsere Erkenntnis ausgeschlossen ist, wird übersehen.

Noch grösseres Bedenken aber als die logische Möglichkeit erweckt der eben schon gestreifte Ausdruck „Man denke sich.“

Was mit diesem Worte schon für Unfug getrieben worden ist, ist gar nicht zu sagen. Es wird deshalb lehrreich sein, dieses „Man denke sich“ einmal auf seinen wahren Wert zu prüfen.

Es wird — das wird wohl Niemand leugnen — mit diesem Wort von unserem Denken eine Produktivität verlangt, unser Denken soll etwas Neues, nie Dagewesenes produzieren, z. B. man denke sich zwei Geraden schnitten sich in drei Punkten.

Woher nimmt unser Denken dies Neue? Doch nicht etwa aus einem a priori vorhandenen Schatze, denn was giebt es auch für Helmholtz Verpönteres als ein a priori, wenn es sich um den Inhalt des Denkens handelt und nicht um seine Gesetze. Also bleibt nur die Anschauung! „Man denke sich“ heisst also nichts anderes als „Man stelle sich anschaulich vor“; und woher nehmen wir diese Vorstellung? aus der Anschauung.

Ohne hier auf das Denken philosophisch noch näher einzugehen, soll nur soviel erinnert werden: Denke ich mir etwas ohne Rücksicht auf geläuterte Anschauung, so kann ich leicht etwas Widersinniges denken, z. B. dass der Himmel wirklich eine blaue Glasglocke mit silbernen Nägeln wäre.

Mathematisch bezeichnen wir das Denken am richtigsten, wenn wir es als das Agens beim Bilden der Grenzbegriffe betrachten, und insofern schliesst sich wieder unsere Erörterung zur reinen Anschauung. Durch Denken wird die Anschauung zum Begriffe geläutert; die Begriffe aber sind der Gegenstand des spekulativen Denkens und gehören der Philosophie an.

Es ist ein gar gefährliches Wort, dieses „Man denke sich“, es hat etwas so bestrickendes; jeder ist geneigt, sofort zuzugeben, dass es möglich ist, sich etwas zu denken, z. B. dass morgen die Welt untergeht.

Aber wird mit solchem Denken denn das Geringste für unsere Erkenntnis gewonnen?

Und warum kann ich mir denn dann nicht auch Wesen denken, bei denen der Satz der Identität nicht gilt, das ist auch keine logische Unmöglichkeit. Solche Wesen sind ebensogut denkbar, als Flächenwesen.

Und diesen Flächenwesen legt nun Helmholtz weiterhin die Eigenschaft bei, dass sie innerhalb ihrer Fläche Wahrnehmungen machen: ähnlich den unseren.

Was soll das bedeuten?

Entweder sie machen ihre Wahrnehmungen auf grund derselben Anschauungsnotwendigkeiten wie wir und verknüpfen sie nach denselben logischen Gesetzen wie wir: dann sind sie uns gleich; oder diese Voraussetzungen gelten nicht, dann sind sie von uns verschieden — aber durchaus nicht ähnlich, das giebt es nicht, sondern im Gegenteile, sie stehen dann mit ihrer ganzen Erkenntnis im striktesten Gegensatze zu uns.

So sehen wir, dass derartige Fiktionen bei sorgfältiger Prüfung sich als völlig wertlos für erkenntnistheoretische Untersuchung erweisen.

Genau dasselbe aber gilt für den Raum: dass es keine logische Unmöglichkeit ist, einen mehrdimensionalen oder Nicht-Euklidischen Raum zu denken, soll nicht bestritten werden, aber sobald wir den Versuch machen, Vorstellungen zu bilden, sind wir an unseren dreidimensionalen ebenen Raum gebunden.

Was eigentlich hierbei gedacht wird, ist nicht der anders geartete Raum selbst, sondern nur die Möglichkeit ihn zu denken; aber das ist wie gesagt ohne jeden praktischen, d. h. hier, philosophischen Wert. Nur mathematischen Wert können wir diesen analytischen Definitionen zuerkennen.

Gerade dieses Kapitel von den Flächenwesen aus der Geschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie scheint mir von ganz besonderem Werte bei der Beurteilung ihrer philosophischen Bedeutung zu sein. Denn das möchte ich hier noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass alles, was ich gegen die Metageometrie einwende, nur vom philosophischen Standpunkte aus gemeint ist. Ihre Bedeutung als mathematische Wissenschaft soll von meinen Ausführungen gar nicht berührt werden, ich bin ja auch auf die mathematische Seite gar nicht eingegangen. Auch dass ohne das Parallelenaxiom sich ein einwandsfreies System aufbauen lässt, ist unbestreitbar. Dies geht uns aber hier gar nichts an, unsere Frage gilt nur dem Zusammenhang mit unserer thatsächlichen Raumanschauung.

Dass die Fiktion der Flächenwesen bisher auch von philosophischer Seite so wenig Widerspruch gefunden, hat seinen Grund ebenfalls in einem Ausspruche von Helmholtz', dass es nämlich leicht sei, eine Dimension wegzudenken. Auch hier liegt ein Grundirrtum vor: wegdenken können wir ebensowenig eine Dimension, wie wir eine hinzudenken können; wir können nur von einer Dimension abstrahieren, das ist aber ganz etwas anderes als sie wegdenken.

Uebrigens soll nicht unerwähnt bleiben, dass Helmholtz erst bei der fünften Forderung Euklid's, die er als eine Anschauungsnotwendigkeit nicht anerkennen konnte, vom Kant'schen Standpunkte abweicht, wie aus verschiedenen Aussprüchen hervorgeht.

Die zweite Periode der Metageometrie ist, wie ich schon vorher sagte ausgezeichnet, resp. charakterisiert durch die analytische Behandlung des Raumproblems. Die Arbeit, die den Mittelpunkt bildet, ist Riemanns Habilitationsschrift, von ihm selbst nicht veröffentlicht, sondern erst nach seinem Tode von Dedekind.

Sollte es vielleicht mehr als ein blosser Zufall sein, dass auch in dieser zweiten Periode der Hauptvertreter der Metageometrie nicht für angemessen gehalten hat, mit seinen metageometrischen Ansichten an die Oeffentlichkeit zu treten?

Riemann also fasst das Problem rein analytisch an. Er konstruiert den Ausdruck, der als Krümmungsmass in die Mathematik Eingang gefunden, er geht aus von dem Begriffe der n-fachen Mannigfaltigkeit.

Hier liegt die Sache sehr viel klarer. Es ist durchaus mathematisch gedacht und völlig einwandsfrei, einer Grösse, die unter der allgemeinen Bezeichnung n auftritt, auch andere Werte beizulegen, als denjenigen, der der Geometrie unserer Anschauung notwendig entspricht: und zu untersuchen, was sich unter den veränderten Voraussetzungen für Folgerungen ergeben. Man darf es auch nicht verübeln, wenn aus Analogiegründen für die neuen Resultate Namen und Bezeichnungen gewählt werden, die aus der Geometrie entnommen sind, obwohl gerade hierin einer der ersten Gründe zu suchen ist für die Grundirrtümer, die sich an diese neuen Untersuchungen knüpften. Der menschliche Erfahrungsraum ist der einzige Massstab, unter dessen Voraussetzung Untersuchungen über höhere Mannigfaltigkeiten angestellt werden können, er ist das prius; die Axiome und Forderungen der Geometrie, d. h. die Denk- und Anschauungsnotwendigkeiten charakterisieren diesen Raum als einen ebnen gleichförmigen dreidimensionalen. Die sogenannten mehrdimensionalen Räume sind nichts weiter als Gedankendinge, analytische Fiktionen, welche dazu dienen, Sätze der Mathematik allgemeiner auszusprechen, mehrere Sätze zusammenzufassen, Ausnahmen zu vermeiden. Alle übrigen Anwendungen sind gegenstandslos. Es wird immer wieder vergessen, dass alle neuen Raumschöpfungen — mögen sie sich auf Dimensionalität oder Krümmungsmass beziehen — wurzeln in dem von Euklid als gegeben angenommenen Erfahrungsraum. Auch die analytische Geometrie wird erst zu Geometrie, wenn wir ihre Resultate anschaulich deuten. Geometrische Wissenschaft ist durchaus in der Anschauung begründet.

So lange die neuen Untersuchungen ihren rein mathematischen Charakter bewahrten, waren sie durchaus berechtigt. Aber da begann allmählich und mit immer weiterer Ausbreitung das, was ich als das unrechtmässige Ueberschreiten der Grenze bezeichnet habe, zum Teil veranlasst durch das Symmetriebedürfnis, die ganze sinnlich wahrnehmbare dreidimensionale Welt als ein Projektionsphänomen einer anderen Welt „an sich“ von vier Dimensionen nach Analogie einer Schattenprojektion aufzufassen, zum Teil hervorgerufen durch die Thatsache, dass unter Voraussetzung unendlich kleiner Verhältnisse die drei möglichen dreidimensionalen Geometrieen in ihren Resultaten übereinstimmen.

Warum also, hiess es, sollte es nicht thatsächlich der Fall sein, dass unsere Anschauungsnotwendigkeiten, die nur einer der drei Geometrieen entsprechen, eine zu beseitigende Schranke sind, da unsere Erfahrung sich in einer solchen Enge bewegt, die gegen den unendlichen Weltraum unendlich klein ist?

Die Zeiten, wo ein Mathematiker sagen konnte, „ob jene höheren Räume existieren oder nicht, danach fragt der Mathematiker nichts", waren vorüber. Es liesse sich in der That eine ganze Reihe von Männern nennen, die diesen Schritt über die Schranken unserer Anschauung ausgeführt zu haben behaupten; die „durch Angewöhnung" die Elastizität nicht verloren zu haben vorgeben; die etwas anderes anschaulich sich vorstellen zu können erklären, als alle anderen Menschen, gebunden an die Schranken der Anschauung, sich vorstellen können.

Mit Vorliebe wird hier als ein Beispiel, dass der neue Gedanke sich mit zwingender Gewalt Bahn brechen werde, herangezogen, dass auch der Wechsel in bezug auf unsere Ansichten über die Bewegungen des Sonnensystems anfänglich den grössten Zweifeln und Angriffen begegnet sei, schliesslich aber doch mit siegreicher Kraft seinen Triumph gefeiert habe.

Gerade dieser Vergleich, der in der That auf den ersten Blick etwas für die Behauptungen der Nicht-Euklidiker Beweiskräftiges zu enthalten scheint, kann mit vollstem Rechte als ein Beweis gegen die Philosophie der Nicht-Euklidiker herangezogen werden.

Denn dieser Vergleich hinkt auf beiden Füssen! Dort handelte es sich allerdings auch um einen völligen Wechsel der Ansichten, aber dieser Wechsel vollzog sich unter vollster Anerkennung und Aufrechterhaltung unserer gesamten Anschauungsnotwendigkeiten innerhalb des dreidimensionalen Raumes.

Die ganze wesentliche Entwicklung kann also absolut nicht mit derjenigen unseres Problems verglichen werden. Nur astronomische Folgerungen kamen in betracht, die Natur unseres Raumes blieb unberührt: ja der Unterschied gipfelt gerade darin, dass Galilei seine Ansichten demonstrieren, anschaulich darstellen konnte, was für die mathematischen Raumphantasieen der Metageometrie ein Ding der Unmöglichkeit ist.

Also hinweg mit diesem Vergleich, der nur geeignet ist, den wahren Sachverhalt zu verwirren.

Und was finden wir sonst für Einwände!

Z. B. „Es ist absolut unmöglich, die Richtigkeit des Parallelenaxioms zu beweisen." Als wenn das von jemand verlangt würde. Es handelt sich eben hier um eine Anschauungsnotwendigkeit, die wir ebenso hinnehmen müssen, wie die Denknotwendigkeiten, für die einen Beweis zu fordern niemandem einfällt.

Hiermit wäre ich am Schlusse, da darüber, ob der Raum eine Anschauungsform sei, oder über seine psychologische Entwicklung nichts gesagt werden soll, um die eigentliche Frage nach der Grenze durch andere Erwägungen nicht zu verdunkeln.

Es sei mir gestattet, die gewonnenen Resultate noch einmal kurz und präzis zusammenzufassen:

Die analytische Behandlung der Raumprobleme ist auf keine Weise imstande, uns irgend eine Erkenntnis über den Raum selbst oder seine wesentlichen Eigenschaften zu vermitteln. Die infolge einer unglücklichen Analogie auf analytische Resultate übertragenen Raumdeutungen können nicht den geringsten Anspruch auf eine philosophische Bedeutung machen. Die Metageometrie ist keine philosophische, sondern eine rein mathematische Wissenschaft und innerhalb der Mathematik eine rein analytische ohne jede geometrische Bedeutung. Es müssen daher notwendig alle Versuche auf analytischem Wege die philosophische Haltlosigkeit der Metageometrie nachzuweisen misslingen.

Die Metageometrie muss unter zwei völlig getrennten Gesichtspunkten beurteilt werden:

mathematisch ist sie eine intakte, aber rein analytische Wissenschaft, die mit Geometrie nichts weiter als den Namen gemeinsam hat;

philosophisch ist ihr jede Bedeutung als Erkenntnisquelle für unsere Raumanschauungen abzusprechen und alle dahinzielenden Versuche sind als ein unrechtmässiges Ueberschreiten der Grenze zwischen Philosophie und Mathematik aufs allerbestimmteste und mit allem Ernst und Nachdruck zurückzuweisen.

Verhandlungen über das physikalische Normalverzeichnis für die höheren Schulen.

Sonderbericht von der Elberfelder Versammlung des Vereins z. Förd. d. Unt. i. d. Math. u. d. Naturw.*)

Ueber das Verhandlungsthema berichtet zunächst Prof. Pietzker (Nordhausen), der erklärt, sich kurz fassen zu können, indem er im allgemeinen auf den von ihm verfassten Entwurf und die demselben vorangeschickten Bemerkungen (Unt.-Bl. II. 2, S. 24 u. fg.) Bezug nehme. Jedenfalls möchte er aber an dieser Stelle hervorheben, wie viel Dank wir den einzelnen Herren schuldig seien, die auf die Herstellung der von ihnen eingelieferten Verzeichnis-Entwürfe so viel Zeit und Mühe verwendet haben. Dann wolle er nochmals auf die besonderen Schwierigkeiten hinweisen, die der Verarbeitung dieser Einzelentwürfe zu einem einheitlichen Ganzen namentlich dadurch erwachsen seien, dass die von den verschiedenen Mitarbeitern gemachten Einzelvorschläge sich mannigfach zum Teil, aber eben nur zum Teil gedeckt haben. Ein allseitig befriedigendes Schlussergebnis habe infolgedessen nicht erzielt werden können, es sei dies aber eben der Natur der Sache nach überhaupt eine Unmöglichkeit.

So könne der vorgelegte Entwurf unter allen Umständen nur als ein allgemeiner Anhalt betrachtet werden; er selbst (der Redner) würde auf manchen, von anderer Seite als notwendig bezeichneten Apparat ver-

*) S. Unt.-Bl. II. 3, S. 42.

zichten, um dafür andere, ihm selbst viel nötiger erscheinende Instrumente anzuschaffen. Nur als allgemeiner Anhalt sei der Entwurf aber ferner auch deswegen anzusehen, weil er gewissermassen voraussetze, dass die ganze Sammlung neu geschaffen werden solle. In allen älteren Sammlungen gebe es manche Apparate, die zwar veraltet und für die jetzigen Verhältnisse nicht mehr völlig geeignet, darum aber doch noch einigermassen verwertbar, ja vielleicht gerade vermöge der ihnen nach dem gegenwärtigen Massstab anhaftenden Mängel sogar unterrichtlich recht instruktiv seien.

In solchen Fällen ganz neue Apparate anzuschaffen und mit den alten zusammen zu gebrauchen, sei nur möglich, wenn man über besonders reichliche Mittel verfüge, wie dies z. B. in Elberfeld der Fall sei. Nun könne man ja nur wünschen, dass solche Verhältnisse recht vielen Fachlehrern beschieden seien, es sei ja dann möglich, den Schülern ein viel eingehenderes Verständnis für die Naturerscheinungen zu eröffnen. Aber man müsse sich hüten, hier das Bessere den Feind des Guten sein zu lassen. So erfreulich es sei, wenn dem naturwissenschaftlichen Unterricht so reiche Mittel zur Verfügung gestellt werden, fordern können wir dies nicht, in unseren Forderungen müssen wir vielmehr uns auf das Minimum beschränken. Ueberhaupt seien bei solchem Normalverzeichnis nur zwei Gesichtspunkte massgebend. Erstens wolle man dem jungen, in den physikalischen Unterricht neu eintretenden Lehrer für die Einrichtung und Vervollständigung seiner Sammlung einen gewissen Anhalt geben, zweitens wolle man allen Fachlehrern, die es angehe, eine Grundlage bieten, um gegenüber den über die Dotation der Schule entscheidenden Instanzen die unumgänglichen Bedürfnisse des physikalischen Unterrichts mit Nachdruck vertreten zu können. Der letztere Zweck sei der wichtigere, da hinsichtlich des ersteren mancher Lehrer vermutlich die von einzelnen hervorragenden Fachmännern aufgestellten, infolgedessen zwar vielleicht einseitigen, aber dafür auch ein einheitlicheres Gepräge tragenden Verzeichnisse vorziehen werde.

Er bitte nun, in die Debatte einzutreten, und werde sich freuen, wenn dabei mancherlei Einzelausstellungen an dem vorgelegten Verzeichnis zur Sprache und damit zur Kenntnis der Fachgenossen gelangten. Von einer Beschlussfassung über solche Einzelpunkte bitte er aber abzusehen, da es ganz undenkbar sei, hierüber eine Einigung zu erzielen. Vielmehr empfehle er, die Beschlussfassung auf die allgemeinen Momente zu beschränken, die er (der Redner) in seinen, am Schlusse des vorgelegten Entwurfs veröffentlichten Thesen berücksichtigt habe. Dabei wolle er noch bemerken, dass in der These 2 ein Irrtum untergelaufen sei. Aus dem Zusammenhange ergebe sich deutlich, dass die für die Instandhaltung der Sammlungen an den unvollständigen Anstalten zu fordernde Summe vielmehr auf 200 Mk. normiert werden müsse.

Direktor Schwalbe bittet von jeder Einzeldiskussion abzusehen, die zu keinem Resultat führen werde, und sich auf die Diskussion über die vorgelegten Thesen zu beschränken, von denen er zunächst These 1 nur warm empfehlen könne. Es bestehen, wie ihm bekannt sei, an manchen kleineren Anstalten hinsichtlich des Zustandes der physikalischen Sammlungen und Unterrichtsräume geradezu unglaubliche Zustände. Den die Beseitigung dieser Zustände erstrebenden Fachlehrern werde durch Annahme der genannten These eine wertvolle Unterstützung gewährt.

Nachdem auf Vorschlag des Direktors Börner beschlossen worden ist, über die Thesen einzeln zu verhandeln, wird zunächst These 1 einstimmig angenommen.

Für den ersten Teil der These 2 schlägt Schwalbe eine den beabsichtigten Zweck schärfer ausdrückende Fassung vor. Gegen den zweiten Teil dieser These wendet sich Direktor Hintzmann, weil die erhobene Forderung undurchführbar sei und keinenfalls auf Annahme seitens der Staatsbehörden rechnen könne. Die Undurchführbarkeit bestreitet Pietzker, da der von ihm befürwortete Zustand ja an vielen städtischen Anstalten bestehe und er selbst Jahre hindurch, so lange das Nordhäuser Gymnasium in städtischer Verwaltung gewesen sei, danach gewirtschaftet habe. Um aber möglichst Einstimmigkeit bei der Beschlussfassung zu erzielen, ziehe er diesen Teil seiner These angesichts des erhobenen Widerspruchs zurück. Nachdem Schwalbe und Hintzmann noch betont, wie wünschenswert eine Trennung der Räume für den chemischen Unterricht von denen für den physikalischen Unterricht sei, wird der erste Teil der These 2 in der von Schwalbe vorgeschlagenen Fassung und dann nach kurzer Debatte auch These 3, beide einstimmig angenommen.

Die vom Verein beschlossenen Thesen lauten demnach wie folgt:

1. Der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften hält einen erspriesslichen Unterricht in der Physik nur auf solchen Anstalten für möglich, wo die im Abschnitt A des ihm vorgelegten Verzeichnisses aufgeführten Vorrichtungen und Apparate im wesentlichen vollzählig, die unter B aufgeführten wenigstens zur Hälfte nach Auswahl vorhanden sind. Dies bedingt, dass die Ausrüstung der physikalischen Sammlung einer Vollanstalt, abgesehen von der nicht besonders bezifferten Einrichtung der Lehr- und Sammlungsräume, einen Wert von wenigstens 5000 Mark repräsentiert. Für unvollständige Anstalten sind etwa zwei Drittel der für Vollanstalten aufzuwendenden Kosten erforderlich.
2. Zur Instandhaltung und fortlaufenden Ergänzung solcher Sammlung ist in den Etat jeder Anstalt ein gesonderter Titel einzustellen in Höhe von mindestens 300 Mk. für Vollanstalten, 200 Mk. für unvollständige Anstalten.
3. Die Einrichtung von Schulmuseen, nach den von Schwalbe und Noack gemachten Vorschlägen, ist ein fühlbares Bedürfnis. Es ist Sorge dafür zu tragen, dass die Fachlehrer der einzelnen Anstalten diese Schulmuseen in regelmässigen Fristen besuchen, ohne für die dazu erforderlichen Reisen eigene Mittel aufwenden zu müssen.

Vereine und Versammlungen.

Der preussische Kultusminister hat an sämtliche Provinzial-Schulkollegien einen Erlass gerichtet, der sich auf die Pflege des physikalischen Unterrichts an Gymnasien und Progymnasien bezieht: Je wichtiger, so heisst es in dem Erlass, die Elemente der Physik, insbesondere der Elektrizitätslehre für das Verständnis der das moderne Leben beherrschenden grossen Kräfte und Entdeckungen sind, um so notwendiger ist es, dass sowohl in dem propädeutischen ersten Kursus auf IIIA und IIB, als auch in dem zweiten Kursus auf IIA und I klare und feste grundlegende Anschauungen und Kenntnisse der Jugend vermittelt werden. Um dies sicher zu stellen, werden die königlichen Provinzial-Schulkollegien diesem Lehrgegenstande unausgesetzt ihre Aufmerksamkeit zuzuwenden und insbesondere bei jeder Anstalt genau zu prüfen haben, ob der physikalische Unterricht in den Händen eines geeigneten Lehrers liegt und ob derselbe die physikalischen Apparate der Schule in zweckentsprechender Weise in seinem Unterrichte verwertet, auch diese in einem solchen Zustande erhält, dass das Interesse der Schüler dafür erregt werden kann. Wo vereinzelt nach dieser Richtung Mängel beobachtet werden, werden die Provinzial-Schulkollegien erwägen müssen, in welcher Weise bald am besten Abhülfe zu schaffen ist. „Nach Vorstehendem sind die Direktoren der gymnasialen Anstalten, auf deren Mitwirkung ich besonders rechne, mit Weisung zu versehen. Damit mir aber ein Einblick in den Bestand der physikalischen Apparate an staatlichen Gymnasien und Progymnasien ermöglicht werde, wollen die Provinzial-Schulkollegien bis zum 15. Mai d. J. mir anzeigen, in welchem Umfange im Allgemeinen diese Anstalten mit Apparaten bereits ausgerüstet sind, und in welchem Zustande diese sich befinden, eventuell nach welcher Richtung eine Ergänzung nicht etwa blos wünschenswert, sondern notwendig erscheint und wie hoch etwa die Kosten dafür zu berechnen seien."

* * *

An der Universität Kasan ist zum Gedächtnis I. N. Lobatschewskijs eine Stiftung errichtet worden, zu der auch aus Deutschland von verschiedenen Seiten beigesteuert worden ist. Die Zinsen des auf 6000 Rubel sich belaufenden Kapitals dieser Stiftung sollen alle drei Jahre zur Prämiierung einer hervorragenden Arbeit über Geometrie, namentlich nicht-euklidische Geometrie verwendet werden; die erste Prämiierung soll am 100jährigen Geburtstag Lobatschewskijs (3. November [22. Oktober] 1897) erfolgen.

Besprechungen.

Bork, Dr. H., Mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Methodisch zusammengestellt. Teil I. Pensum des Untergymnasiums. Preis 1,90 Mk. Teil II. Pensum des Obergymnasiums. Preis 2,40 Mk. Leipzig 1895 und 96. Dürrsche Buchhandlung.

Das Buch enthält das ganze mathematische Pensum nicht nur des Gymnasiums, sondern auch des Realgymnasiums in der knappen Form einer Zusammenstellung der unbedingt notwendigen Lehrsätze mit ihren Beweisen, im ersten Teil so, dass noch Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung und Beweis scharf getrennt werden, im zweiten Teil in etwas freierer Darstellung. Methodisch kann man diese Zusammenstellung allerdings kaum nennen, sie ist streng systematisch, soweit nicht die durch die Lehrpläne gebotene Trennung des Stoffes in zwei Teile, für das Unter- und Obergymnasium, eine Abweichung von der systematischen Anordnung nötig macht. Das zeigt sich am deutlichsten im Geometriepensum der Unterstufe. Da finden wir ganz den alten, vollständig systematischen Gang in der Lehre von den Parallelen, den Kongruenzsätzen etc.; sogar die incommensurabeln Strecken werden sofort bei der Flächeninhaltsmessung berücksichtigt. Ebenso werden die Irrationalzahlen in der Arithmetik nicht erst beim Radizieren, sondern viel früher bei den Verhältnissen eingeführt. Methodisch ist eine solche Darstellung nicht, wenigstens nicht in dem Sinne, in dem man wohl jetzt allgemein den Ausdruck „methodische Darstellung" fasst, dass dabei nicht so sehr die logische Strenge und die systematische Gliederung, als vielmehr die Rücksicht auf die Auffassungsfähigkeit des jugendlichen Geistes für mathematische Dinge, die auch erst methodisch ausgebildet werden muss, massgebend ist. Der Verfasser stellt sich vielmehr auf den Standpunkt, dass „es keinen Königsweg in der Mathematik giebt". Teilt man diesen Standpunkt, so muss man jedenfalls das Buch als gut anerkennen und wird dem Verfasser zugeben, dass er „klare, knappe Form, unanfechtbare logische Strenge bei den Definitionen und in den Beweisen" fast durchweg erreicht hat. Vielleicht mit einer einzigen Ausnahme: Im zweiten Teile wird die Formel für den Inhalt des Prismas ohne den Cavalierischen Satz ziemlich umständlich abgeleitet, weil mit Hilfe jener Formel dieser Satz streng bewiesen werden soll; der erste Teil des Beweises ist auch streng, der zweite Teil aber, wonach jeder Körper, für den die Voraussetzung in I nicht zutrifft, sich immer in Stücke zerlegen lässt, für welche sie gilt, ist nicht bewiesen und wird sich wohl schwerlich beweisen lassen. Im übrigen verdient gerade der zweite Teil des Buches besondere Anerkennung. Der Stoff ist zwar selbst für Realgymnasien noch sehr reichhaltig, aber er ist sehr geschickt bearbeitet und viele Ausführungen wird jeder Mathematiklehrer mit grossem Interesse lesen. Anzuerkennen ist auch die Berücksichtigung des geschichtlichen Momentes durch zahlreiche biographische Notizen.

Dr. Götting (Göttingen).

* * *

Schotten, Dr. H., Der Koordinatenbegriff und die analytische Geometrie der Kegelschnitte. Ein Leitfaden für höhere Lehranstalten. Berlin 1895. G. Grotesche Verlagsbuchh. Preis 0,60 Mk.

Für die neue Auflage der Reidtschen Elemente hat der Verfasser den Abschnitt über die Kegelschnitte vollständig neu bearbeitet und unter obigem Titel gesondert erscheinen lassen. Er hat dabei wie er in der Vorrede sagt, „besonderen Wert darauf gelegt, den Koordinatenbegriff recht deutlich zu entwickeln". Das ist ihm in der That auch in vorzüglicher Weise gelungen; denn die Einführung in die Bestimmung von Punkten einer Ebene durch Koordinaten (rechtwinkl. und Polarkoord.), sowie die sich daran anschliessende graphische Darstellung von Funktionen einer Veränderlichen ist vortrefflich und muss als ein sehr wertvoller Beitrag zur methodischen Behandlung der analytischen Geometrie bezeichnet werden. Aber auch in den folgenden Abschnitten, die den Stoff in der üblichen Anordnung (Gerade, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel, Koordinatentransformation, Kurven zweiten Grades) geben, ist vieles bemerkenswert. Statt der gewöhnlich gebrauchten unsymmetrischen Form der Gleichung einer Geraden werden die symmetrischen Formen, besonders die so zweckmässigen „Normalgleichungen" benutzt; in der Kegelschnittslehre gelingt es dem Verfasser mit wenigen einfachen Entwickelungen ziemlich tief einzudringen (Erzeugung der Kegelschnitte durch ihre Tangenten, konjugierte Durchmesser etc.). Dadurch ist allerdings trotz des scheinbar geringen Umfanges der Inhalt ein so reichhaltiger geworden, dass er im Gymnasium kaum allseitig und gründlich verarbeitet werden kann; er reicht vollständig für Realgymnasien aus, und selbst da werden Abschnitte, wie die, in denen die symbolischen Bezeichnungen für die Gerade und den Kreis eingeführt sind, nur bei sehr gutem Schülermaterial zum vollen Verständnis gebracht werden können. Aber die Frage, wie das Pensum der analytischen Geometrie auf dem Gymnasium zu umgrenzen sei, ist ja noch eine offene und der vorliegende Leitfaden ist jedenfalls ein wertvoller Beitrag zur Methodik dieses Faches, der allen Fachgenossen warm empfohlen werden kann. Einige Aenderungen wären wünschenswert, um das Ganze übersichtlicher zu gestalten; z. B. könnte die Aufgabe Seite 22 und Seite 25 Nr. 4 früher erledigt werden, hier unterbrechen sie den Zusammenhang. Seite 19 Nr. 3 und einige weitere Ableitungen würden einfacher durch direkte Benutzung von § 1 Nr. 4. In der Kreislehre wäre eine Ableitung der Tangentengleichung, die der bei den Kegelschnitten angewandten analog ist, wünschenswert. Doch sind das Mängel, die gegen die sonstigen grossen Vorzüge des Buches zurücktreten. Dr. E. Götting (Göttingen).

* * *

Steinhardt, Dr. Eugen, Kurzes Lehrbuch der Chemie zum Gebrauch an Schulen und zur Selbstbelehrung. Erster Teil. Anorganische Chemie. Stuttgart 1895. Verlag von Ferdinand Enke. 418 S. gr. 8°. Preis 6 Mk.

Das Lehrbuch behandelt in ziemlich ausführlicher Weise die einzelnen Metalloide und Metalle nach systematischer Reihenfolge. Im Anschluss daran ist eine Einführung in die qualitative chemische Analyse gegeben, den Schluss bildet eine durch gute Abbildungen ergänzte Charakteristik der 6 Krystallsysteme. — Das Buch zeichnet sich durch eine einfache und klare Ausdrucksweise sowie durch eine geschickte Anordnung des Stoffes vorteilhaft aus. Es verdient ferner anerkannt zu werden, dass der Verfasser die neuesten Errungenschaften der chemischen Wissenschaft (z. B. Grundstoff Argon) eingehend berücksichtigt hat. Für den Schulgebrauch ist der Unterrichtsstoff recht reichlich, vielleicht etwas zu reichlich bemessen.

Wilh. Levin (Braunschweig).

* * *

Roscoe-Schorlemmers kurzes Lehrbuch der Chemie nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft von Sir Henry Roscoe und A. Classen. 10. vermehrte Auflage. Braunschweig 1894. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn.

Die schnelle Aufeinanderfolge der Auflagen — mit wunderbarer Regelmässigkeit erscheint aller vier Jahre eine neue — lässt darauf schliessen, dass das vorstehende Buch eine weitere Verbreitung gefunden hat. Als Schulbuch allerdings wohl kaum, dazu ist es zu reich an Stoff und geht besonders in seinem 2. Teile, der organischen Chemie, weit über das Mass hinaus, was in den neueren Lehrplänen für die Oberrealschule vorgeschrieben ist; auch stellt es gleich von vornherein zu hohe Anforderungen an das Fassungsvermögen eines Schülers, als dass es sich mit gutem Erfolge im Schulunterricht verwerten liesse. — Dafür aber eignet es sich ausgezeichnet zum Gebrauche für die, welche über das auf der Schule gewonnene Mass der Kenntnisse hinauszugehen bestrebt sind, sowie für angehende Studierende, und zwar nicht sowohl wegen der Auswahl und Anordnung des Stoffs, als auch wegen seiner Zuverlässigkeit und — was ganz besonders hoch zu schätzen ist, wegen der knappen, aber doch überaus klaren und durchsichtigen Darstellungsweise.

Die neue Auflage ist in einzelnen Punkten verbessert und erweitert, schliesst sich jedoch im ganzen eng an die vorhergehende an. W. Petzold (Braunschweig).

Artikelschau aus Fachzeitschriften und Programmen.

HE = Himmel und Erde. 1896. Heft 7—9.
NH = Natur und Haus. 1896. Heft 10—16.
NR = Naturwissensch. Rundschau. 1896. No. 11—28.
NW = Naturwissenschaftl. Wochenschrift. 1896. No. 11—24.
PB = Period. Blätter f. naturkundl. u. math. Schulunterr. Jahrg. II, Heft 6—8.
VAP = Mitt. d. Verein. v. Freunden d. Astron. u. kosm. Physik. 1896. Heft 1—6.
W = Das Wetter. 1896. Heft 4—6.

II. Physik.

Edg. Odernheimer, Reichenbachs „Od" und die Röntgenstrahlen. (**HE**) — A. Lindenkohl, Resultate der Temperatur- und Dichtigkeitsbeobachtungen in den Gewässern des Golfstroms und des Golfes von Mexiko. W. Spring, Ueber die Rolle der Wärmekonvektions-Strömungen bei dem Phänomen des Leuchtens der klaren, natürlichen Wässer. A. M. Mayer, Akustische Untersuchungen. F. Neesen, Neuere Arbeiten über die Verwendung der Photographie in der Ballistik. W. J. Humphreys und J. F. Mohler, Wirkung des Druckes auf die Wellenlänge der Linien in den Bogenspektren einiger Elemente. (**NR**) — R. Hennig, Die Helmholtzsche Erklärung des Moll-Charakters und Versuch einer Widerlegung derselben. B. R. Borggreve, Ueber das Wesen der X-Strahlen. Fr. Nölke, Zur Theorie der Luftspiegelungen. B. Schwalbe, Der 6. naturwissenschaftliche Ferienkursus für Lehrer an höheren Schulen, abgehalten in Berlin vom 8. bis 18. April 1896. (**NW**)

III. Chemie, Mineralogie und Geologie.

Ad. Schultz, Die Lösslandschaft. (**HE**) — E. Dubois, Pithecanthropus erectus, betrachtet als wirkliche Uebergangsform und als Stammform des Menschen. F. Roessler, Synthese einiger Erzmineralien und analoger Metallverbindungen durch Auflösen und Kristallisierenlassen in geschmolzenen Metallen. G. Linck, Beitrag zu den Beziehungen zwischen dem Kristall und seinem chemischen Bestand. W. Ortloff, Beitrag zur Kenntnis eutropischer Reihen. (**NR**)

IV. Biologische Wissenschaften.

C. Müller, Die Entwicklung des Hühnchens im Ei. (**HE**) — W. Hesse, Mein Freiland-Terrarium. P. Asmussen, Die Katze als Haustier. Fl. Radl, Empfehlenswerte Fettpflanzen. A. Schiöttz, Spaniens Reptilien. K. Lampert, Die Glasschleiche. Frz. Obst, Farben- und Gestalt-Kanarien. Edw. Müller, Insektarien. M. Hesdörffer, Geschlossene Zimmeraquarien. Ad. Müller, Die kleine Haselmaus im Frei- und Stubenleben. Frz. Obst, Der Graupapagei, seine Eingewöhnung und Verpflegung. E. Sabel, Von der Wachtel. Dr. Schnee, Der Riesenskink und sein Leben in der Gefangenschaft. R. Hermann, Der Wiedehopf. P. Becker, Kuckuck. K. Müllenhoff, Volkstümliche Naturanschauungen. (**NH**) — J. Loeb, Untersuchungen über die physiologischen Wirkungen des Sauerstoffmangels. Gg. Klebs, Ueber einige Probleme der Physiologie der Fortpflanzung. Osc. Hertwig, Ueber den Einfluss verschiedener Temperaturen auf die Entwicklung der Froscheier. A. Weismann, Neue Versuche zum Saison-Dimorphismus der Schmetterlinge. H. E. Ziegler, Untersuchung über Zellteilung. E. Wasmann, Die ergatogynen Formen bei den Ameisen und ihre Erklärung. E. Fischer und W. Niebel, Ueber das Verhalten der Polysaccharide gegen einige tierische Secrete und Organe. L. Maquenne, Ueber die Rolle der Osmose in der Vegetation und die Anhäufung des Zuckers in der Runkelrübe. H. M. Vernon, Der respiratorische Gasaustausch bei den niederen Wirbellosen des Meeres. H. Koeppe, Ueber den osmotischen Druck des Blutplasmas und die Bildung der Salzsäure. C. Herbst, Ueber die Regeneration von antennenähnlichen Organen an Stelle von Augen. A. Tschirch, Der Quarzspektrograph und einige damit vorgenommene Untersuchungen von Pflanzenfarbstoffen. René du Bois-Reymond, Stiedas Theorie über die Homologie der Gliedmassen. J. Stoklasa, Studien über die Assimilation elementaren Stickstoffs durch die Pflanzen. G. Guldberg und F. Nansen, Die Entwicklung und der Bau der Waltiere. I. Teil: Ueber die Entwicklung der Delphine. Margherita Traube-Mengarini, Beobachtungen und Versuche über die Durchgängigkeit der Haut. C. Herbst, Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss einer veränderten chemischen Zusammensetzung des umgebenden Mediums auf die Entwicklung der Tiere. C. Correns, Zur Physiologie der Ranken. F. Hering, Ueber Wachstumskorrelationen infolge mechanischer Hemmung des Wachsens. M. Kaufmann, Studie über die chemischen Umwandlungen innerhalb des Organismus eines normalen Tieres. E. Stahl, Ueber bunte Laubblätter. W. Saville-Kent, Die Halskrausen-Eidechse, Chlamydosaurus Kingi. (NR) — C. Ammon, Der Abänderungsspielraum. Ein Beitrag zur Theorie der natürlichen Auslese. C. B. Klunzinger, Ueber die Artbildung und Verwandtschaft bei den Schmetterlingen nach Th. Eimer. P. Graebner, Klima und Heide in Norddeutschland. A. Engler, Grundzüge der Pflanzenverbreitung in Deutsch-Ostafrika und den Nachbargebieten. (NW). — Kohl, Das menschliche Gehörorgan. H. Scherer, Naturkunde und Kulturgeschichte als der grundlegende Bildungsstoff. (PB)

V. Erd- und Himmelskunde, einschliesslich Meteorologie.

F. K. Ginzel, Die Frage der Polschwankungen. C. Koppe, Die interessantesten Alpen- und Bergbahnen, vornehmlich der Schweiz. (HE) — A. Schuster, Atmosphärische Elektrizität. A. Berberich, Neue Planetoiden des Jahres 1895. A. Wolfer, Ueber das Thätigkeitsgebiet der grossen Sonnenfleckengruppe von Februar 1892. A. Stanley Williams, Ueber die Bewegung (Drift) der Oberflächenmassen des Jupiter in verschiedenen Breiten. Svante Arrhenius, Ueber den Einfluss der Kohlensäure der Luft auf die Temperatur der Erdoberfläche. Loewy und Puiseux, Ueber die Konstitution und die Geschichte der Mondrinde. (NR) — Fr. Adami, Unser tägliches Zeitmass. L. Brenner, Thätigkeit der Manora-Sternwarte im Jahre 1895. (NW) — Fauth, Ueber einen möglichen Weg zur Erklärung des Lichtbandes im Plato. W. Schleger, Neues Fernrohr-Objektiv ohne sekundäres Spektrum. P. Hayer, Ueber geographische Ortsbestimmungen ohne astronomische Instrumente. Fauth, Die Lösung des Platorätsels. (VAP) — Fr. Treitschke, Die Witterung in Thüringen 1895. C. Kassner, E. Kaysers Wolkenhöhenmessungen. L. Koch, Resultate meteorologischer Beobachtungen im Winter 1895/96 auf dem Brockengipfel und zu Klausthal. A. St. Eyre, Beobachtungen über Wogenwolken und ihr Wert für Wetterprognosen. A. Berghaus, Ueber „Kalender-Wetter“. W. Ule, Die klimatische Bedeutung der deutschen Binnenseen. C. Kassner, Die Ergebnisse von Cirrusbeobachtungen in Norddeutschland. Schmidt, Ueber Gewitterböen. K. v. Romer, Die Mängel der Methode Ed. Brückners in seiner Abhandlung „Klimaschwankungen seit 1700“ und Einfluss derselben auf die Theorie der Klimaschwankungen. Chr. Schultheiss, Ueber einige Eigentümlichkeiten des Klimas von Freiburg i. B. (W)

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Schlag, H., Schulwandkarte für Deutschland im Jahre 1648. (Nach dem westfälischen Frieden.) Vollst. in 9 Blätt. Glogau, Flemming. Unaufgezogen M. 12.—.

Schlegel, V., Die Grassmannsche Ausdehnungslehre. Leipzig 1896, Teubner. M. 2.—.

Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. I. Lehrg. Freiburg i. B., Herder. M. —.80.

—.— Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höh. Lehranstalten. II. u. III. Lehrgang. Ebenda 1896. M. 1.— bezw. M. 1.20.

Seebeck, Th. J., Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 70). Leipzig 1895, Engelmann. M. 2.—.

Spelter, P., Das Wandern der Pflanzen. (Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. Heft 214.) Hamburg 1895, Verlagsanstalt u. Druckerei A.-G. M. —.50.

Sprockhoff, A., Grundzüge der Zoologie. Ein Lehrb. f. d. Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. 10. Aufl. Mit 194 Abbild. Hannover 1896, Meyer. M. 3.—.

—.— Naturkunde f. höh. Mädchenschulen. Mit vielen Abbild. II. Teil: Naturgeschichte f. Klasse 4 u. 3. Ebenda 1896. M. 1.50.

—.— Naturkunde f. höh. Mädchenschulen. Mit vielen Abbild. III. Teil: Naturlehre f. Klasse 2 u. 1. Ebenda 1896. M. 1.50.

Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde. 2. Aufl. Leipzig 1896, Veit & Co. M. 14.—.

Weighardt, E., Mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen. Bühl 1896, Aktiengesellschaft Concordia.

Wellisch, S., Das 2000jährige Problem der Trisektion des Winkels. Mit 11 Fig. (Techn. Vorträge u. Abhandl. XXIX.) Wien 1896, Spielhagen & Schurich. M. 1.—.

Willkomm, M., Bilder-Atlas des Pflanzenreichs. Mit 124 fein kolorierten Tafeln und 600 Abbild. Lief. 4—15 nebst Einbanddecke. Esslingen, Schreiber. à Lief. M. 0.50. Einbanddecke M. 1.50.

Wolf, R., Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 6. Aufl. Mit 32 Tabellen und vielen Holzschnitten. Zürich 1895. Schulthess. M. 6.—.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. Band II: Lehre von der Wärme. 5. Aufl. Mit 131 Abbild. und Fig. Leipzig 1896, Teubner. Mk. 12.—.

Wünsche, O., Exkursionsflora für das Königreich Sachsen. 7. Aufl. Ebenda 1895. gebd. M. 4.60.

—.— Die verbreitetsten Pflanzen Deutschlands. 2. Aufl. Ebenda 1896. gebd. M. 2.40.

—.— Die verbreitetsten Pilze Deutschlands. Ebenda 1896. gebd. M. 1.40.