Jahrgang VI. 1900. Nr. 5.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Herausgegeben von
Prof. Dr. B. Schwalbe, Direktor des Dorotheenstädt. Realgymnasiums zu Berlin.
und
Prof. Fr. Pietzker, Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Aphorismen über den Unterricht in den beschreibenden Naturwissenschaften.

Von K. Kraepelin (Hamburg).

Angeregt durch die 9. Jahresversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Hamburg habe ich die nachfolgenden Gedanken und Ansichten über den Unterricht in den beschreibenden Naturwissenschaften niedergeschrieben. Dieselben wollen nicht als etwas wesentlich Neues gelten, zumal ich selbst in verstreuten Zeitungsartikeln, Vorreden zu Schulbüchern etc. schon mehrfach meinen Standpunkt dargelegt habe. Immerhin erschien es mir nicht überflüssig, die Frage nach der Bedeutung und der Methodik des naturwissenschaftlichen Unterrichts aufs Neue anzuregen. Unsere Zeit ist so schnelllebig, und unsere Interessen werden nach so verschiedenen Seiten in Anspruch genommen, dass nur das immer und immer wiederholte „Ceterum censeo“ noch irgend welche Aussichten auf Erfolg gewährt.

I. Allgemeines.

1. Die „beschreibenden“ Naturwissenschaften beschäftigen sich ganz allgemein mit den Formgestaltungen der Materie auf unserm Erdkörper. Die „biologischen“ Wissenschaften — Zoologie und Botanik — im Speziellen haben nicht nur die Aufgabe, die Mannigfaltigkeit dieser Formengestaltungen nach morphologischen und anatomischen Gesichtspunkten festzustellen, sondern auch deren ontogenetische und phylogenetische Entwickelung, die in ihnen wirkenden mechanischen Kräfte, die sie und ihre gegenseitigen Beziehungen beherrschenden Gesetze zu erforschen. Nur unter Berücksichtigung aller dieser Disziplinen — der Anatomie, Physiologie, Biologie, Oekologie, Embryologie, Phylogenie und Biogeographie — ist ein wirkliches Verständnis der uns umgebenden organischen Welt denkbar.

2. Der aus der Schule ins Leben tretende Mensch kann als „gebildet“ nicht erachtet werden, wenn ihm die Grundlagen fehlen, auf denen allein eine den Errungenschaften der Wissenschaft entsprechende Auffassung des Weltganzen, ein klares Verständnis der die unorganische, wie die organische Welt beherrschenden Gesetze sich aufbauen kann. Aufgabe der Schule ist es daher, den Menschen im Rahmen der belebten Natur auffassen und verstehen zu lehren, um so dem Individuum unverrückbare Gesichtspunkte für seine Stellung zur Welt und zum Mitmenschen mit ins Leben zu geben. — Für die mit der Natur mehr und mehr ausser aller Fühlung geratende Grossstadt-Jugend

wird es aussergewöhnlicher Massnahmen bedürfen, um ein solches Ziel auch nur annähernd zu erreichen.

3. Die einfache Beschreibung und Vergleichung von Naturobjekten, ja selbst die Schilderung des inneren Baues derselben oder die Vorführung von „Lebensgemeinschaften“ kann nicht zu obigem Ziele führen. Zur „Ausbildung des Wahrnehmungsvermögens“ bedarf es keiner l e b e n d e n Objekte; hierzu dürften Briefmarken oder Bilder zum mindesten in gleicher Weise geeignet sein. Das L e b e n vielmehr ist es, welches in der grossartigen Mannigfaltigkeit seiner Entwickelung und Bethätigung erklärt werden muss, soweit überhaupt bisher die Wissenschaft in dieses gewaltige Geheimnis einzudringen vermocht hat.

4. Dem Unterricht in den Unterklassen, wie er jetzt üblich, und in dem in erster Linie die Morphologie, die Systematik und die Biologie der Organismen zu behandeln ist, hat sich ein wöchentlich 2 stündiger Unterricht in den o b e r e n Klassen*) aller höheren Schulen anzuschliessen, in welchem Anatomie und Physiologie der Lebewesen, in bescheidenen Grenzen auch die Entstehung des Individuums und die Entwickelung der organischen Welt auf unserer Erde, ihre Schicksale während der verschiedenen Erdepochen, ihre Beziehungen zu einander in der Gegenwart zu lehren sind.

5. Die H y p o t h e s e ist in der Schule nicht nur zulässig, sondern sie ist sogar notwendig überall da, wo die Wissenschaft noch nicht in der Lage ist, über allgemein wichtige, die Phantasie jedes Gebildeten beschäftigende Fragen eine abschliessende Antwort zu geben. Die Jugend etwa über den Ursprung des Lebens, über die Frage der heutigen Ausgestaltung desselben auf unserer Erde ohne irgend eine — selbstverständlich objektive, ich möchte sagen historisch referierende — Belehrung zu lassen, heisst nach dem Rezept des Führers handeln, welcher den Reisenden im Gewirr der Felsabstürze gerade da im Stiche lässt, wo er am unentbehrlichsten ist.

6. Am allernotwendigsten erscheint ein auf die oberen Klassen der höheren Schulen sich erstreckender Unterricht in den biologischen Wissenschaften für diejenigen Berufskreise, denen im späteren Leben jede Gelegenheit genommen ist, mit den Ergebnissen der modernen Naturforschung in Fühlung zu bleiben, das heisst für den Theologen, Juristen und klassischen Philologen. Nur, wenn diese Kategorien von Studierenden schon auf der Schule wenigstens eine schwache Vorstellung von den Errungenschaften der modernen Naturwissenschaft gewönnen, wäre zu hoffen, dass die tiefe Kluft, welche heute die Kreise der sogen. Gebildeten in zwei feindliche Heerlager spaltet, im Laufe der Zeiten sich verringern würde.

7. Die Naturwissenschaft ist eine i n d u k t i v e Wissenschaft und steht hierdurch im denkbar schroffsten Gegensatz zur Mathematik, zumteil auch zu allen übrigen Wissenschaften der Schule. Sie bildet daher eine notwendige Ergänzung aller übrigen Disziplinen bei der harmonischen Ausbildung des kindlichen Denkvermögens. Der induktive Schluss erfordert eine ungleich ernstere Schulung des Geistes, als der deduktive; die Unfähigkeit, richtige induktive Schlüsse zu ziehen, ist ein Grundübel, an dem ein grosser Teil auch der Gebildeten leidet (Unausrottbarkeit des Aberglaubens, Blühen der Kurpfuscherei).

8. Der Unterricht in den beschreibenden Naturwissenschaften erfordert selbst auf den untersten Stufen einen allseitig gebildeten Naturforscher, wie dies aus der überwältigenden Fülle der dem Kinde entgegentretenden, seine Wissbegier anregenden Einzelobjekte und Einzelerscheinungen von selbst erhellt. Die wenigen Stunden in den unteren und mittleren Klassen, die jetzt diesem Unterrichte überwiesen sind, sinken zu völliger Bedeutungslosigkeit herab, wenn sie in den Händen von Lehrern sind, welche in Zoologie und Botanik nur gleichsam im Nebenamt unterrichten. Da aber andererseits Niemandem zuzumuten ist, die „Falcultas für obere Klassen“ in einem Fache zu erwerben, das mit der Obertertia aus dem Schulplane ausscheidet, so ist damit der Verfall des naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Schule besiegelt. Als Nebenwirkung ergiebt sich, dass auch die Hörsäle dieser Disziplinen in den Universitäten verödet stehen, und dass andere Nationen auf den Gebieten der biologischen Wissenschaften mehr und mehr dem deutschen Volke die Führung entreissen.

9. Die Erwerbung „nützlicher Kenntnisse“, wie etwa die Unterscheidung der Getreidearten und der Waldbäume, der essbaren und giftigen Schwämme, die Einprägung hygienischer Regeln etc. darf ebensowenig Z w e c k des naturwissenschaftlichen Unterrichts sein, wie es als Zweck des griechischen Unterrichts hingestellt wird, die paar Worte griechischer Herkunft in unserem Sprachschatz richtig ableiten zu können.

10. Die Grundlage des orientierenden naturwissenschaftlichen Unterrichts ist und bleibt das auf die Verschiedenheit der Organisationspläne der grösseren Tier- und Pflanzengruppen

*) Dass eine solche Forderung keineswegs utopisch, dürfte am besten daraus erhellen, dass sie am Realgymnasium des Johanneum in Hamburg während anderthalb Dezennien thatsächlich erfüllt war. Gerade die hierbei gemachten Erfahrungen sind es, die mir die ungeheure Bedeutung dieses Unterrichts für die gesamte Weltauffassung und Lebensrichtung der Schüler vor Augen geführt haben.

gegründete System. Dasselbe durch ein auf oft unentwirrbaren Beziehungen beruhendes „Nebeneinander" im Raum, die sogenannten „Lebensgemeinschaften" ersetzen zu wollen, zeugt von einer völligen Verkennung der eminenten Bedeutung des Systems für die unumgänglich notwendige allgemeine Orientierung über die Vielgestaltigkeit der Lebensformen. Die Schilderung von Lebensgemeinschaften darf daher nicht den Anfang, sondern höchstens den Schluss des biologischen Unterrichts bilden.

II. Spezielle Methodik.

a. Zoologie.

1. Nach einem propädeutischen „Anschauungsunterricht", in welchem die dem Kinde bekannten Tierformen einzeln besprochen werden, hat der zoologische Unterricht mit der Entwickelung des Systems einzusetzen.

2. Hierbei sind thunlichst bald durch Abstraktion an Einzelformen die grossen Kategorien der Wirbeltiere, Gliedertiere, Mollusken, Würmer usw. und — zunächst für die Wirbeltiere — die nächst niederen Abteilungen der Säugetiere, Vögel, Reptilien, Amphibien und Fische nach ihren allgemeinen Merkmalen in grossen Umrissen zu entwickeln, um dem Kinde ein erstes Schema zu bieten, in welches es die ihm entgegentretende Formenmannigfaltigkeit provisorisch einordnen kann.

3. Die im Unterricht vorgeführten Einzelformen sind stets nur insoweit zum Gegenstand der Besprechung und Untersuchung zu machen, als die gerade zu entwickelnde Kategorie dies erfordert. So wird, um ein Beispiel zu gebrauchen, eine Katze und deren Skelett zunächst nur — unter gleichzeitiger Vorführung eines Vogels, Fisches, Krebses usw. — zur Charakterisierung des Wirbeltiertypus ausgenutzt, sodann später, zur Entwickelung des Säugetierbegriffs. Erst jetzt werden, unter gleichzeitiger Zuhilfenahme weiterer Säugetiere, die Merkmale des Raubtieres im Gegensatze zu denen der übrigen Säugetierordnungen an dem Präparate demonstriert, bis endlich, bei allmählich bis zu den Familien und Gattungen herabsteigendem Unterricht, auch die speziellen Charaktere der Katzen und eventuell der Hauskatze selbst dem Schüler entwickelt werden.

4. Art- und oft selbst Gattungscharaktere, wie sie bei den vielfach in den Vordergrund des Anfangsunterrichts gestellten Einzelbeschreibungen in erschreckendem Uebermass und in buntem Gemisch mit Ordnungs-, Klassen- und selbst Typenmerkmalen dem Schüler dargeboten werden, sind so viel wie möglich zu vermeiden. Nicht die Katze ist mit Haaren bedeckt und hat vier Beine, sondern das Säugetier; nicht der Maikäfer hat ein Chitinskelett oder einen Kopf, sondern der ganze formenreiche Typus der Gliederfüsser usw. Nur die von Anfang an festgehaltene scharfe Gliederung und Systematisierung der verschiedenen Charaktermale nach ihrer Wichtigkeit, scil. ihrem grösseren oder geringeren Gültigkeitsumfang kann zu einem verhältnismässig schnellen Erfassen des Systems führen und gewährt dem Schüler binnen kurzem die reine Freude des eigenen Könnens, der Klassifizierung auch des ihm Fremdartigen mit Hilfe der Deduktion, während bei dem Festhalten an Einzelbeschreibungen die immer aufs Neue wiederkehrenden Wahrheiten, dass der Maikäfer sechs Beine habe, dass die Fliege, die Biene, die Libelle ebenfalls sechs Beine habe, auch den lernbegierigsten Knaben schliesslich anöden muss. Einzelbeschreibungen von Arten sollen da, wo es sich um biologisch interessante oder dem Menschen näher stehende Formen handelt, gewiss nicht unterdrückt werden. Allein die morphologischen Charaktere dürfen hierbei, nachdem der Charakter der betreffenden Familie und somit die Stellung der Form im Ganzen des Tierreichs klar entwickelt worden, nur in ganz untergeordneter Weise in Frage kommen, während die Schilderung der Lebensgewohnheiten jener Art, ihre Bedeutung im Haushalte der Natur und des Menschen sehr wohl geeignet sind, das Interesse des Schülers auf dieser Unterstufe zu erwecken und die induktiv gewonnenen Familien- oder Ordnungscharaktere mit Inhalt zu füllen.

5. Der an und für sich unanfechtbare Satz „vom Speziellen zum Allgemeinen" ist in den vorstehenden Darlegungen keineswegs ausser Acht gelassen, da er nach Ansicht des Verfassers lediglich besagt, dass allgemeine Begriffe nur durch Abstraktion aus dem Einzelnen, d. h. den konkret vorgeführten Individuen, zu gewinnen sind. Es ist ein verhängnisvoller, nur dem auf naturwissenschaftlichem Gebiete dilettierenden Laien verzeihbarer Irrtum gewesen, das „Einzelne" oder das „Einzelwesen" mit der „Art" zu verwechseln und so an den Anfang des Unterrichts nicht die auch dem kindlichen Begriffsvermögen leicht fassbaren Unterschiede der grossen systematischen Kategorien, sondern diejenigen zweier verwandter Arten zu stellen, um auf diese Weise in einer Reihe aufeinander folgender Jahre den „Gattungsbegriff", den „Familien-, Ordnungs- und Klassenbegriff" auf induktivem Wege erschliessen zu lassen. Vogel und Säugetier soll der Schüler vor allem unterscheiden und in ihren Unterschieden charakterisieren können; ob er es dann später daneben noch dazu bringt, den Haus- und den Feldsperling oder den Häring und Sprott zu unterscheiden, ist eine cura posterior und für die Auffassung der allgemeinen Züge, welche

das gewaltige Gemälde der organischen Welt dem Beschauer bietet, auch herzlich gleichgültig.

6. Die sogenannten „concentrischen Kreise", wie sie aus der soeben skizzierten Methodik hervorgegangen, sind der Ruin des Interesses am naturwissenschaftlichen Unterricht. In den ersten Jahren hat der letztere einfach fortzuschreiten mit dem System der Tiere, etwa bis zum Abschluss der Wirbeltiere. Alsdann mag eine umfangreichere Repetition des ganzen Typus mit erweiterten Ausblicken am Platze sein. Erst auf den oberen Stufen, nachdem inzwischen in den mittleren Klassen die ganze Reihe der niederen Tiere durchgesprochen, wird sich eine erneute Behandlung des Kreises der Wirbeltiere nötig machen, die aber nunmehr nicht von systematischen, sondern von anatomisch-physiologischen Gesichtspunkten aus den Stoff gliedert und in übersichtlicher Darstellung die Verschiedenartigkeit in der Entwickelung der einzelnen Organsysteme vor Augen führt.

7. Nachdem durch diese beiden auf einander folgenden Kurse, den systematisch-biologischen und den anatomisch-physiologischen, eine allgemeine Uebersicht über die Mannigfaltigkeit der tierischen Lebewesen, ihren inneren Bau und ihre Lebensbethätigung gewonnen, wären in einem abschliessenden Kursus die Beziehungen darzulegen, in welchen der tierische Organismus zu den Kräften der anorganischen Welt, zu Pflanze und Mittier steht; ein kurzer Einblick in die Werkstatt des werdenden Organismus hätte sich anzuschliessen, sowie eine knappe Darstellung der Wandlungen, welche die Tierwelt im Laufe der Erdepochen erfahren hat. Hier endlich würde auch der Ort sein, wo die heute jeden Gebildeten bewegenden Fragen über die Anfänge des organischen Lebens, die Entwickelung der Arten, die Entstehung des Menschengeschlechts vor reiferen Schülern in objektiv referierender Weise zu erörtern wären.

b. Botanik.

1. Zwei Thatsachen sind es, welche es nicht allein wünschenswert, sondern sogar notwendig erscheinen lassen, den Anfangsunterricht in der Botanik prinzipiell anders zu gestalten, wie in der Zoologie: Die ausgeprägte Individualität und Aeusserlichkeit der pflanzlichen Organe, sowie die Eigenart des pflanzlichen Lebens gegenüber dem tierischen.

2. Das Blatt, die Knolle, die Rose, der Apfel erscheinen der kindlichen Auffassung als vollgültige Individuen. Nach dem Grundsatze „vom Leichteren zum Schwereren" kann es daher zum mindesten kein Missgriff sein, wenn der botanische Unterricht zunächst diese einfacheren Individuenformen in ihrer morphologischen Verschiedenheit bespricht, um erst auf einer höheren Stufe zu zeigen, wie nun die Individuen höherer Ordnung, die Pflanzen selbst, sich aus einer Summe solcher einfacherer Individuen zusammensetzen. Aber dieser Weg bietet des weiteren zwei unschätzbare Vorteile: Er ermöglicht einmal, die übergrosse Mannigfaltigkeit der Organformen nach wenigen grossen Kategorien übersichtlich zusammenzustellen, und er giebt des Ferneren die passendste Gelegenheit, durch Mitheranziehung der Funktion jener Organe die Eigenart des pflanzlichen Lebens gegenüber dem tierischen darzulegen. Dem kindlichen Empfinden ist die Pflanze kaum etwas anderes als wie der leblose Stein; erst wenn der Schüler es begreift, dass er volles, richtiges Leben vor sich hat, Wesen, die gleich ihm geboren werden, freudig emporwachsen oder hinsiechen und sterben, die essen, atmen, schlafen wie er selbst, erst dann kann ein tieferes Interesse für diese so anders geartete Form des Lebens erweckt werden.

3. Der Unterricht in der Botanik hat daher die von uns skizzierten beiden ersten Kurse der Zoologie in ihrer Reihenfolge gewissermassen umzukehren: Er beginnt mit einer morphologisch-physiologischen Uebersicht der die Pflanze aufbauenden Organe, also mit der zusammenhängenden Besprechung von Wurzel, Achse, Blatt, Blüte und Frucht, wobei die Formgestaltung und Formverschiedenheit dieser Gebilde aus physiologischen und biologischen Gründen ihre Erklärung findet. So lernt der Schüler schnell in der bis dahin kaum beachteten und unverstandenen Fülle der Blatt-, der Blüten- und Fruchtformen sich orientieren und deren Bedeutung aus den verschiedenartigen Bedürfnissen der Pflanze verstehen. Er hört nicht heute, dass es ein linealisches, und in acht Tagen, dass es ein eiförmiges Blatt giebt, bis — vielleicht erst nach Jahr und Tag — tropfenweise und vermischt mit ähnlichen Daten über verschiedene Blüten-, Stengel- und Fruchtformen, das ganze Chaos der Formenmannigfaltigkeit in denkbarstem Durcheinander an seinem Geiste vorübergezogen, sondern es ist ihm in wenigen Stunden ein klares Bild von der ganzen Variationsmöglichkeit des betreffenden Organes entrollt, so dass es ihm fortan ein Leichtes ist, etwa nun seiner Beobachtung entgegentretende Formen in das durch physiologische Begründung zu Verständnis und festem Besitz gelangte Schema einzureihen. Kaum je hat der Verfasser mehr das Empfinden begeisternden Unterrichts gehabt, als wenn er auf deduktivem Wege aus dem Bedürfnis nach Ortsbewegung die ganze Mannigfaltigkeit der Fruchtformen von seinen Schülern gewissermassen entdecken liess.

4. Für den Unterricht in der systematischen Botanik, der zweckmässiger Weise schon einsetzt, noch ehe die „Organographie" zum Abschluss gebracht, gilt mutatis mutandis

dasselbe, was oben unter 1—6 von dem Unterricht in der Systematik der Tiere ausgeführt wurde. Auch hier ist die in das Detail gehende Einzelbeschreibung ein schwerer Fehler, auch hier sind nach einander die Charaktermerkmale des Typus, der Klasse, der Familie allein in den Vordergrund zu stellen, um dem Schüler bald thunlichst aus eigenem Können die Klassifizierung der ihm in Wald und Feld entgegentretenden Pflanzenformen zu ermöglichen. In diesem Sinne hat nicht „das Schneeglöckchen" sechs in zwei Kreisen geordnete Perigonblätter, sondern die grosse Gruppe der mit Blütenhülle ausgestatteten Monocotyledonen, hat nicht „die Tulpe" einen oberständigen, aus drei Fruchtblättern gebildeten Fruchtknoten, sondern die Gesamt-Familie der Liliaceen usw. Dass die als Paradigma gewählte Pflanze eine Tulpe sei, braucht gewiss nicht verschwiegen zu werden, für den Unterricht aber darf sie nur in soweit Zeit und Beachtung beanspruchen, als sie zur Charakterisierung des Liliaceentypus verwertbar ist.

5. Von den 1200 bis 1400 phanerogamischen Pflanzen der engeren Heimat kann bei Einzelbeschreibungen nur ein verschwindender Bruchteil behandelt werden, und die Merkmale der so besprochenen Formen entschwinden mit erschreckender Schnelligkeit dem Gedächtnis des Schülers, weil sie ihm gleichgültig sind, und er mit ihnen nichts anzufangen weiss. Ganz anders, wenn der Schwerpunkt des Unterrichts auf die Charakterisierung der 40—50 im Wohngebiet des Schülers verbreiteten Familien der Phanerogamen gelegt wird. Eine solche Zahl von unterscheidenden Charakteren, zumal wenn dieselben übersichtlich in grössere Gruppen zerlegt werden, lässt sich in 2 bis 3 Schuljahren ganz wohl bewältigen; sie verleiht dem Schüler die Fähigkeit, die meisten Pflanzen seiner Umgebung ohne weiteres in dieses Schema einzureihen, sie gewährt ihm die Freude des eigenen Könnens und ermöglicht es ihm, die Gesamtheit der Formen als einheitliches Ganzes zu überblicken.

6. Wie in der Zoologie, so ist auch in der Botanik die Kenntnis der Einzelformen, namentlich derjenigen, die biologisches oder wirtschaftliches Interesse bieten, nicht durchaus zu vernachlässigen. Sie hat aber nicht das Prius, sondern das Posterius zu sein, d. h. sie hat erst einzusetzen, wenn die Charaktere der Familie oder Klasse bereits hinreichend erfasst sind. Die wichtigeren dieser Gattungen, resp. Arten wird der Lehrer ganz wohl als Typen jener Familien vorzuführen Gelegenheit haben, wofern er sich hütet, die morphologischen Merkmale derselben als etwas gleich den Familiencharakteren dem Gedächtnis Einzuprägendes hinzustellen. Eine weitergehende Detailkenntnis der heimischen Flora indes wird man ohne Bedenken dem Privatfleisse und dem Privatinteresse des Schülers überlassen dürfen.

7. Mehr als die Zoologie ist die Botanik zur Anregung des Sammelfleisses und der Privatthätigkeit des Schülers geeignet. Dieser Privatbeschäftigung mit der „scientia amabilis" ist auf alle Weise Vorschub zu leisten, da nichts so sehr einen Einblick in das Getriebe des Naturganzen gewährt, als das eigene Beobachten, das eigene Finden ohne Hülfe des Lehrmeisters. Die Einrichtung von Herbarien sollte daher für die Schüler obligatorisch sein, wobei denselben passend bis zum Schluss des Semesters das Sammeln einer bestimmten Zahl von Arten aus den in der Schule besprochenen Familien aufgegeben wird. Es wird hierdurch erreicht, dass der Schüler jede blühende Pflanze mit kritischem Blick auf ihre Familienzugehörigkeit prüft, und dass er nicht von vornherein zum Jäger nach Seltenheiten herabsinkt. Mit wahrhaft rührendem Eifer sah ich meine Schüler unsere beiden Brennesselarten attackieren, wenn die Herbarium-Aufgabe die Vorzeigung von Urticaceen verlangte.

8. Die Lehrer der Botanik haben mit ihren Klassen regelmässige Exkursionen zu veranstalten. Diese Exkursionen gelten, auch wenn sie an freien Nachmittagen stattfinden, für den Lehrer als Unterricht, d. h. sie sind ihm in angemessener Weise als Schulstunden in Anrechnung zu bringen. Bei solchen Ausflügen die Disziplin und die Methodik des Klassen-Unterrichts aufrecht erhalten zu wollen, selbst wenn sie an Stelle einer Schulstunde getreten, muss als völlig verfehlt gelten. Vielmehr sind diese Ausflüge als ein ganz unvergleichliches Mittel anzusehen, Lehrer und Schüler einander menschlich näher zu bringen. Auf keine andere Weise wird es dem Lehrer ermöglicht, einen so tiefen Blick in das geistige Leben, den Charakter, die Fähigkeiten seiner Schüler zu thun, als wie bei diesem ungezwungenen Verkehr in Feld und Wald.

9. Nach Absolvierung der Phanerogamensystematik ist, abweichend von der Zoologie, die Lehre vom innern Bau der Pflanze mit physiologischer Erläuterung und Begründung zu behandeln. Erst wenn die Lehre von der Zelle und den Geweben in grossen Zügen klar gelegt, wird man mit Nutzen zu den niederen Typen des Pflanzenreichs übergehen können, wie sich dies ohne weiteres aus der grossen Bedeutung des Zellindividuums im Aufbau der niederen Pflanzenformen ergiebt.

10. Als Schluss des botanischen Unterrichts sind, wie in der Zoologie, die Abhängigkeitsverhältnisse der Pflanzen von der anorganischen Natur, von Licht, Luft, Wärme, Feuchtigkeit, Boden, ihre geographische Verteilung über den

Erdball, ihre Beziehungen zu einander, zur Tierwelt und zum Menschen in allgemeinen Umrissen darzulegen, um auch hier die grossen, ehernen Gesetze zum Verständnis zu bringen, von denen das wunderbare Getriebe der organischen Welt beherrscht und regiert wird.

Schulaufgaben aus der Mechanik, unter besonderer Berücksichtigung der Technik.

Vortrag, gehalten auf der Haupt-Versammlung zu Hamburg[1]) von

Alex. Wernicke (Braunschweig).

In der Preussischen Prüfungs-Ordnung für das höhere Lehramt vom 12. September 1898 ist „Angewandte Mathematik" (Darstellende Geometrie, Geodäsie und Technische Mechanik) als neues Lehrfach eingeführt worden. Damit ist eine neue Aufgabe bezeichnet, sowohl was die Ausbildung der Lehrer anlangt, als auch inbezug auf den Unterricht an unseren höheren Schulen. Diese Aufgabe hat nicht blos für Preussen unmittelbare Bedeutung, sondern auch für den Teil Deutschlands, der in seinem Schulwesen durch Preussen bestimmt wird, und noch darüber hinaus, wie z. B. die Verhandlungen auf der letzten (1899) Naturforscher-Versammlung in München zeigen — auch der neue Studienplan der Universität Jena für Mathematik und Naturwissenschaften, der mir gestern zuging, nimmt bereits darauf Rücksicht.

In München haben[2]) die Herren Weber-Strassburg und Hauck-Berlin diese Angelegenheit behandelt, ferner haben dazu gesprochen die Herren Klein-Göttingen, Krazer-Strassburg und Study-Greifswald, alle von Seiten der Hochschule, ausserdem unser Herr Kollege Schotten hier von Seiten der Schule, während gleichzeitig Herr Rudel die entsprechende neue bayerische Prüfungsordnung beleuchtete.

Aus diesen Verhandlungen ging hervor, dass zur Zeit weder die Universitäten noch die technischen Hochschulen imstande sind, die Ausbildung von Lehrern in dem neuen Fache ohne weiteres zu übernehmen, weshalb auch nach Ablauf von zwei Jahren innerhalb der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die diesbezüglichen unterdessen getroffenen Massnahmen Bericht erstattet werden soll.[3]) Vorläufig sind für den in Rede stehenden Zweck die entsprechenden Vorlesungen und Uebungen der Universitäten im allgemeinen[4]) zu abstrakt gehalten, die der Technischen Hochschulen zum teil zu stark mit technischen Einzelheiten belastet — es zeigt sich dabei der unselige, vielleicht wegen der notwendigen Arbeitsteilung unvermeidliche Riss zwischen „Reiner" und „Angewandter" Mathematik, der ja in Deutschland besonders scharf gebildet erscheint. Die grossen Pfadfinder, welche am Ende des 16. und im Verlauf des 17. Jahrhunderts die mathematisch-naturwissenschaftliche Renaissance heraufführten, wussten von diesem Risse nichts, ihnen erwuchs die mathematische Theorie bei der Behandlung bestimmter, sich naturgemäss darbietender Aufgaben.

Galilei schuf sich die mathematische Unterlage für die Auswertung seiner Fall-Versuche, er beschäftigte sich aber ebenso mit der Bruchfestigkeit des Balkens, Descartes, der grosse Förderer der reinen Mathematik, richtete zugleich seinen Blick auf das Ganze der Naturerscheinungen, und ähnlich steht es mit Kepler, Huyghens bestimmte die mathematische Formel der Normalbeschleunigung und anderes, er konstruierte aber auch die erste Pendeluhr. Newton und Leibniz entwickelten die Infinitesimal-Rechnung in enger Beziehung zu deren Verwendung in der Physik.

Wie weit der Riss zwischen „Reiner" und „Angewandter" Mathematik, entsprechend den Bemühungen von Herrn Klein-Göttingen und anderer, im Leben unserer Hochschulen trotz der notwendigen Arbeitsteilung ausgeglichen werden kann, ist im Augenblicke noch nicht zu übersehen, im Unterrichte unserer höheren Schulen ist ein solcher Ausgleich möglich.

Dabei kann auch unser Verein kräftig mitwirken, hat er doch von Anfang an (1891) in seinen „Braunschweiger Thesen" darauf hingewiesen, dass die Aufgaben, welche innerhalb der Schule den Uebungsstoff der Mathematik bilden, nicht in künstlich gemachten Beispielen bestehen sollen, sondern da aufzusuchen sind, wo sie sich naturgemäss darbieten, während andererseits die eigenartige systematische Kraft der Schul-Mathematik, welche keinem anderen Schulfache eigen ist, sorgfältig ausgenützt werden soll!*)

Hat doch unser Verein ferner dem einen der drei Gebiete, welche die neue Prüfungsordnung als „Angewandte Mathematik" zusammenfasst, nämlich der Darstellenden Geometrie, bereits seine besondere Arbeit zugewandt, und hoffen wir doch hier bereits auf dieser Versammlung, im Anschluss an den Vortrag von Herrn Kollegen Pietzker zu einem ersten Abschluss zu gelangen!

Neben diesem Gebiete, für welches auch die Frage der Lehrerbildung verhältnismässig geringe Schwierigkeiten macht, handelt es sich innerhalb der „Angewandten Mathematik" der neuen Prüfungsordnung noch um zwei andere Gebiete, um die Geodäsie und um die Technische Mechanik.

Gestatten Sie mir, meine hochgeehrten Herren, Ihre Aufmerksamkeit auf das letztere zu richten, in der Absicht, Sie für dieses Gebiet zu Mitarbeitern zu gegewinnen an der Aufgabe, die ich oben im allgemeinen andeutete.

Wie auch die Lehrerbildung für dieses Gebiet in Zukunft geregelt werden mag, die Verwendung der technischen Mechanik im Unterrichte unserer allgemeinbildenden Schulen ist jedenfalls bedingt durch den geltenden Lehrplan der Mathematik, welcher ja für alle neunstufigen Anstalten im wesentlichen derselbe ist.

Ebenso wie auf den technischen Mittelschulen, die uns ja weniger interessieren, ist hier also die Mechanik auf elementarer Grundlage zu behandeln, d. h. unter Verwendung von Koordinaten, aber unter Ausschluss von Differential- und Integralrechnung, abgesehen von einfachen Grenzübergängen.

Für eine solche Behandlung der Mechanik**), auf welche ja die gangbaren Lehrbücher der Schulphysik hindeuten, ist noch recht viel zu thun, falls einerseits die theoretische Begründung innerhalb der von selbst gegebenen Grenzen der Genauigkeit der wissenschaftlichen Kritik Stand halten soll und falls andererseits

---

[1]) S. Unt.-Bl. VI, 3, S. 60.

[2]) Vergl. u. a. den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, bei B. G. Teubner, 1900, S. 95 u. f.

[3]) Vergl. a. a. O. S. 7.

[4]) Vergl. dagegen die Klein'schen Einrichtungen in Göttingen. Inbezug auf Darstellende Geometrie steht die Sache im allgemeinen noch am günstigsten.

*) Vergl. ausser der Litteratur in den „Unterrichtsblättern" meine Bemerkungen bez. Leitsätze im Pädag. Archiv, 1895, S. 489 u. f., S. 573 u. f., S. 626 u. f.

**) Vgl. die entsprechenden Arbeiten von Herrn Holzmüller-Hagen i. W.

die Anwendungen und Uebungen wirklich in das Gebiet der Technik hineinführen sollen.

Wenn Sie, meine Herren, die gangbaren Lehrbücher der Physik und die Lehrbücher der technischen Mechanik, soweit sie auf elementar-mathematischer Grundlage erwachsen sind, als Mathematiker im Hinblick auf die theoretischen Entwicklungen prüfen, so werden Sie mir ohne Zweifel beipflichten, dass hier manches noch recht mangelhaft ist.

Damit wird eine bestimmte Aufgabe bezeichnet, die sowohl im Hinblick auf die Ausbildung der Lehrer als auch für den Unterricht an unseren allgemeinbildenden Schulen zu lösen ist, es handelt sich darum, die analytische Mechanik der Universitäten und die technische Mechanik der Technischen Hochschulen zu einem Ganzen zu gestalten, unter sorgfältiger Berücksichtigung physikalischer und technischer Beobachtungen und Versuche, und zwar bei starker Beschränkung der mathematischen Hilfsmittel.

Mir scheint hier gerade für die wissenschaftliche Arbeit des Schulmannes ein günstiges Gebiet vorzuliegen, und darum möchte ich Sie, meine hochgeehrten Herren, wie ich schon hervorgehoben, dafür gewinnen, auf diesem Gebiete mitzuarbeiten.

Deshalb lege ich Ihnen zunächst heute einen Versuch vor, die bezeichnete Aufgabe zu lösen, mit der Bitte ihn zu prüfen, und mit mir dann weiter vom Unvollkommenen zum Vollkommeneren fortzuschreiten.

Als mir im Herbste 1898 die Aufforderung zuging, eine neue Auflage der bekannten Mechanik meines (1895) verstorbenen Vaters zu bearbeiten, da fasste ich sofort den Plan, in dieser Bearbeitung zugleich jene Aufgabe anzugreifen, und so bin ich heute in der Lage, Ihnen in der neuen Auflage die von mir bearbeitete erste Abteilung des ersten Bandes und den von Herrn Vater-Aachen bearbeiteten zweiten Band vorzulegen — ich lasse zwei Exemplare beider Teile herumgehen, ausserdem stehen hier noch Inhaltsverzeichnisse in ausgiebiger Anzahl zur Verfügung*). Die zweite Abteilung des ersten Bandes, mit welcher dann das ganze Werk abgeschlossen ist, hoffe ich Ihnen in Jahresfrist vorlegen zu können.

Den theoretischen Entwicklungen sind von Fall zu Fall ausgeführte Anwendungen und einfachere Uebungen beigegeben, das ganze Werk wird etwa 100 Anwendungen und etwa 900 Uebungen darbieten, aus den Gebieten der Physik und der Technik. Gestatten Sie mir nun, die Art der hier gegebenen Lösung noch etwas genauer zu charakterisieren!

Während die reine Mechanik (analytische Mechanik) die mathematischen Anschauungen und Begriffe, zu deren Bildung die Beobachtung der Bewegungen der Aussenwelt Veranlassung gegeben hat, in möglichster Verallgemeinerung zu einem wissenschaftlichen Systeme auszugestalten sucht, beschränkt sich die physikalische Mechanik darauf, mit Hilfe jener Anschauungen und Begriffe die Bewegungen, welche die Aussenwelt wirklich darbietet, zu untersuchen und zu erklären, bemüht sich aber dafür, diese, unterstützt von Beobachtung und Versuch, so genau als möglich in einer Theorie zur Dartellung zu bringen.

Während die physikalische Mechanik das gesamte Gebiet der Bewegungen, welche die Aussenwelt darbietet, mit gleichmässiger Teilnahme beobachtet, treten für die technische Mechanik die Teile jenes Gebietes in den Vordergrund, welche den Zwecken der Technik dienen; diese hat ja die Aufgabe, den Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entsprechend, die Materie zu neuer und fruchtbarer Formung zu zwingen d. h. von den Naturerscheinungen zu deren Verwendung fortzuschreiten.

Die Technik fordert aber nicht blos eine Einschränkung des Gebietes der physikalischen Mechanik, sie verlangt auch, dass die Teilgebiete, welche ihrem Zwecke dienen sollen, eine eigenartige und ins Einzelne gehende Durchbildung erfahren. Dabei tritt namentlich die zeichnerische (graphische) Behandlung der Aufgaben neben deren rechnerische Lösungen, und zwar ist man seit geraumer Zeit der Ansicht (vergl. die betreffenden Prüfungsordnungen), dass beides methodisch im Gleichgewicht stehen muss, da bald der eine und bald der andere Weg bei bestimmten Aufgaben vorzuziehen ist. Bei elementarer Behandlung der technischen Mechanik wird man eine kleine, auch sonst gebotene Erweiterung des üblichen Gebietes der Schul-Mathematik*) zulassen müssen, man wird auf die Verwendung der Ableitung der einfachsten Funktionen nicht verzichten können — dass diese kleine Erweiterung keine Belastung der Schüler nach sich zieht, habe ich jahrelang im Unterrichte an einem altsprachlichen Gymnasium erprobt.

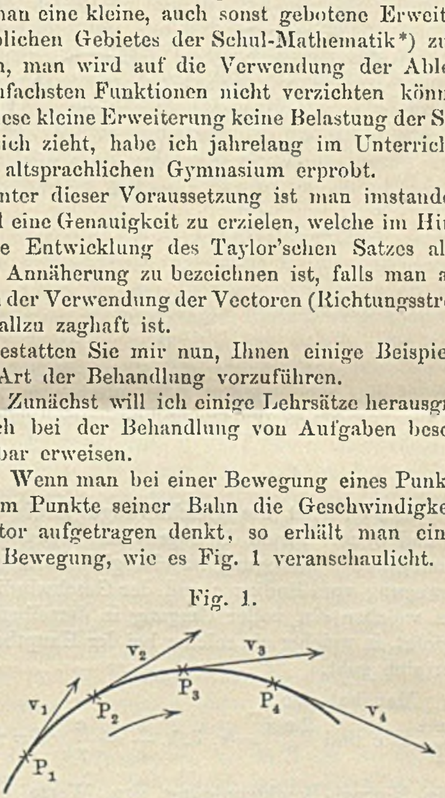
Unter dieser Voraussetzung ist man imstande, fast überall eine Genauigkeit zu erzielen, welche im Hinblick auf die Entwicklung des Taylor'schen Satzes als eine zweite Annäherung zu bezeichnen ist, falls man ausserdem in der Verwendung der Vectoren (Richtungsstrecken) nicht allzu zaghaft ist.

Gestatten Sie mir nun, Ihnen einige Beispiele für diese Art der Behandlung vorzuführen.

I. Zunächst will ich einige Lehrsätze herausgreifen, die sich bei der Behandlung von Aufgaben besonders fruchtbar erweisen.

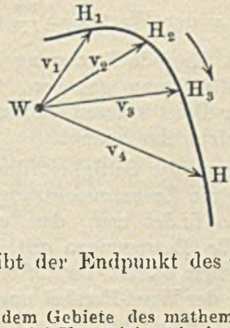
1. Wenn man bei einer Bewegung eines Punktes in jedem Punkte seiner Bahn die Geschwindigkeit als Vector aufgetragen denkt, so erhält man ein Bild der Bewegung, wie es Fig. 1 veranschaulicht.

Fig. 1.



Denkt man die Geschwindigkeit als Vector an dem beweglichen Punkte W haften, so erhält man, entsprechend Fig. 1, ein Bild, wie es Fig. 2 darstellt.

Fig. 2.



Hier beschreibt der Endpunkt des Geschwindigkeits-

*) Verlag von Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1900.

*) Vgl. „Aus dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasial-Unterrichts" in den Haller Lehrproben, Heft 42 u. f.

Vectors eine Kurve, welche (nach Hamilton) der **Hodograph** der Bewegung heisst.

Wird der Bogen H_2H_3 in der Zeit τ durchlaufen, so stellt z. B. $\frac{H_2H_3}{\tau}$ an der Grenze für die Hauptbewegung in P_2 die Beschleunigung als Vector dar, während sie zugleich für den Hodographen die Erzeugungs-Geschwindigkeit in H_2 ist. Demgemäss gilt der Satz: **Die Erzeugungs-Geschwindigkeit des Hodographen als Vector ist zugleich die entsprechende Beschleunigung der Hauptbewegung als Vector.** Wir wenden den Satz sofort an, um die Normal-Beschleunigung der gewöhnlichen gleichförmigen Kreisbewegung zu bestimmen.

Fig. 3.

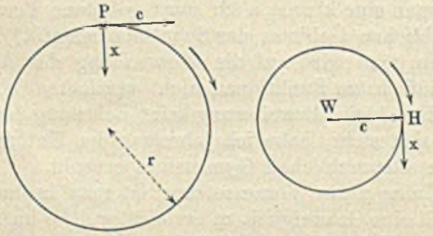
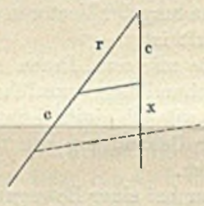


Fig. 4.



In Fig. 3 ist die gleichförmige Kreisbewegung (r und c) mit ihrem Hodographen angedeutet; die Hodographen-Bewegung ist eine gleichförmige Kreisbewegung vom Radius c und der Geschwindigkeit x, bei welcher ein voller Umgang in derselben Zeit T erfolgt, in welcher ein solcher bei der Hauptbewegung vor sich geht.

Man hat also:

$$\frac{2\,r\,\pi}{T} = c \text{ und } \frac{2\,c\,\pi}{T} = x, \text{ d. h. } \frac{r}{c} = \frac{c}{x} \text{ oder } x = \frac{c^2}{r}.$$

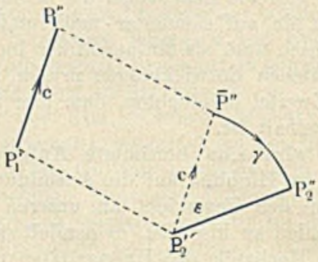
Die Normal-Beschleunigung vom Werte $\frac{c^2}{r}$, deren Konstruktion Fig. 4 darstellt, ist damit bestimmt.

Die Betrachtung wird auf eine beliebige Bewegung übertragen, indem man den Krümmungskreis von Radius ϱ einführt, so dass allgemein für eine Geschwindigkeit v der Wert $x = \frac{v^2}{\varrho}$ eintritt.

Damit ist für jede Bewegung eines Punktes die Gesamt-Beschleunigung gegeben, falls dessen Stellungen auf der Bahn bekannt sind, und demnach auch die Kraft, welche ihn bewegt.

2. Wenn man die Giltigkeit des Parallelogramm-Prinzipes für die Zusammensetzung von Bewegungen untersucht, so findet man, dass es in der üblichen Form nur für Bewegungen gilt, welche ein translatorisches System bilden. Darauf beruht die bekannte Konstruktion der Wurf-Parabel aus einer gradlinigen gleichförmigen Bewegung und einer gradlinigen Fallbewegung. Liegt kein translatorisches System vor, so bedarf man des Satzes von **Coriolis**, der sich folgendermassen ableiten lässt.

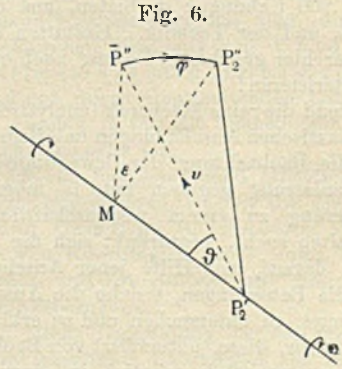
Fig. 5.



Ein Punkt W durchläuft eine Bahn, die selbst in Bewegung ist. Während einer bestimmten Zeit τ mag W, wie es Fig. 5 für die Ebene zeigt, auf der Bahn von P_1' nach P_1'' gehen, während sich das Bahnstück selbst zugleich aus der Lage $P_1'\,P_1''$ in die Lage $P_2'\,P_2''$ bewegt, und zwar so, dass keine Translation vorliegt. Man kann dann zunächst eine Verschiebung $P_2'\,\bar{P}''$ einschalten, so dass nun ein translatorisches System und ausserdem die Drehung um ε vorliegt. Bezeichnet man die Durchschnitts-Geschwindigkeit für das Durchlaufen von $P_1'\,P_1''$ mit c und die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit für das Durchlaufen von Bogen $\bar{P}''\,P_2''$ mit γ, so ist $P_2'\,\bar{P}'' = c\,\tau$ und Bogen $\bar{P}''\,P_2'' = c\,.\,\tau \operatorname{arc} \varepsilon = c\,.\,\tau^2\,.\,\gamma = \frac{1}{2}\,(2\,c\,\gamma)\,\tau^2$. Beim Grenzübergange tritt für c die Geschwindigkeit v und für γ die Winkelgeschwindigkeit φ ein, so dass $\lim\,[\bar{P}''\,P_2''] = \frac{1}{2}\,(2\,v\,\varphi)\,\tau^2$ ist. Der Erzeugung des Bogens $\bar{P}''\,P_2''$ entspricht also die Tangential-Beschleunigung $2\,v\,\varphi$, welche zugleich die Gesamt-Beschleunigung darstellt, da die entstehende Normal-Beschleunigung $v\,\varphi^2\,\tau$ für $\lim \tau = o$ verschwindet.

Der Einfluss der Drehung besteht also in dem Hinzutreten einer Beschleunigung vom Werte $2\,v\,\varphi$, deren Richtung im Sinne der Drehung senkrecht zu dem sich drehenden Bahnstücke steht. Um diese Betrachtung auf den Raum zu übertragen, hat man nur, wie es Fig. 6 zeigt, für $2\,v\,\varphi$ einzuführen $2\,v\,\varphi \sin \vartheta$,

Fig. 6.



so dass sich der Fall der Ebene, bei welchem die Drehungs-Achse senkrecht zur Ebene steht, als Sonderfall für $\vartheta = 90^0$ ergiebt.

Demgemäss erwächst die Gesamt-Beschleunigung j_g hier aus 3 Komponenten, der Beschleunigung auf der Bahn (Relativ-Beschleunigung $= j_r$), der translatorischen Beschleunigung des Bahnstückes (Führungs-Beschleunigung $= j_f$) und der Drehungs-Beschleunigung jd des Bahnstückes. Bezeichnet man die geometrische Addition (Vectoren-Addition) durch geeignete Klammern und Marken, so gilt also:

$$\left[jg\right] \overset{+}{=} \left[jr\right] \overset{+}{=} \left[jf\right] \overset{+}{=} \left[jd\right]$$

Dieser Satz ist die Grundlage für alle Aufgaben, bei denen es sich um verwickeltere Bewegungs-Zustände handelt.

Da wir die Eigenbewegung der Erde meist zunächst vernachlässigen, so rechnen wir zunächst mit der angenäherten Gleichung

$$\left[jg\right] \overset{+}{=} \left[jr\right]$$

und verbesseren diese dann, so oft es nötig ist, durch Hinzufügung der anderen Komponenten.

(Schluss folgt.)

Ueber neue Strahlungsuntersuchungen.

(Becquerelstrahlen.)

Vortrag, gehalten auf der Hauptversammlung zu Hamburg*) von

Prof. Dr. A. Voller (Hamburg).

(Auszugsweiser Bericht.)

Die Beobachtung, dass es ausser den Röntgenstrahlen auch noch eine andere Strahlengattung giebt, welche ähnliche Eigenschaften wie diese besitzt, wurde schon bald nach Röntgen's Entdeckung gemacht; und zwar war es der bekannte französische Physiker Henri Becquerel, welcher, nachdem einige seiner Landsleute schon vorher die ersten, etwas unklaren Andeutungen von der Existenz einer derartigen Erscheinung beobachtet hatten, zuerst das Vorhandensein und den Charakter dieser neuen Strahlung mit absoluter Sicherheit feststellte, sodass dieselbe daher jetzt auch allgemein nach ihm benannt wird. Es handelt sich dabei um Strahlen, welche, wenn sie auch mit den Röntgenstrahlen sehr viele Eigenschaften gemein haben, dennoch zu ihrer Entstehung nicht erst wie diese eines komplizierten Instrumentariums bedürfen, sondern vielmehr einfach von gewissen Stoffen ausgesandt werden — und das sogar, wie es scheint, ohne besondere äussere Anregung und auch ohne, dass eine Gewichtsabnahme dieser Stoffe festzustellen ist.

Zunächst waren es die phosphoreszierenden Verbindungen des Urans, an welchen Herr Becquerel diese merkwürdige Eigenschaft entdeckte; bald indessen gelang ihm der Nachweis, dass auch sämtliche übrigen Verbindungen dieses Elementes, ja sogar das Metall selbst diese Fähigkeit besassen, sodass er sich demnach für berechtigt hielt, für die neue Strahlengattung den Namen „Uranstrahlen" vorzuschlagen, eine Bezeichnung, die sich jedoch schon deswegen als ungeeignet erwies, weil es bald gelang, auch für nicht uranhaltige Stoffe und zwar zunächst für das Thor und seine Verbindungen ähnliche Eigenschaften nachzuweisen. Vollends aber wird jener Name gar dadurch hinfällig, dass es nach neueren Untersuchungen sogar den Anschein gewinnt, als ob es überhaupt nicht das Uran und das Thor, sondern vielmehr ein anderes, noch unbekanntes und sehr schwer von jenen Stoffen zu trennendes Element ist, welches die eigentliche Ursache des Strahlungsvermögens aller der genannten Stoffe bildet. Die erste Andeutung eines solchen Thatbestandes wurde schon vor längerer Zeit durch die epochemachende Reihe von Entdeckungen der Frau Curie in Paris angebahnt, welche mit der Beobachtung begann, dass die böhmische Pechblende, ein uranhaltiges Erz, eine weit stärkere Strahlung dieser Art aussandte als das Uran selber. Die Entdeckerin schloss aus dieser Thatsache zunächst, dass in dem genannten Mineral zum mindesten ein viel stärker wirkendes „radioaktives" Element als das Uran enthalten sein müsse; und es gelang derselben denn auch bald, im Verein mit ihrem Gatten P. Curie daraus nach den gewöhnlichen Methoden der analytischen Chemie zwei wesentlich verschiedene Teilprodukte herzustellen, deren Radioaktivität die aller bis dahin bekannten Stoffe um mehr als das tausendfache übertraf. Allerdings zeigten diese beiden Teilprodukte ihrem sonstigen chemischen Verhalten nach durchaus keine besonderen Eigenschaften, sondern verhielten sich in allen Stücken einerseits wie die entsprechenden Verbindungen des Wismuts und andererseits wie diejenigen des Bariums. Mit Rücksicht darauf jedoch, dass die auf anderem Wege erhaltene Verbindung an diesen beiden Metallen sich nicht als radioaktiv erweisen, hielten sich die Entdecker für berechtigt, die besonderen Eigenschaften ihrer aus der Pechblende gewonnenen Präparate als durch zwei neue chemische Elemente veranlasst anzusehen, denen sie beziehungsweise die Namen Polonium und Radium gaben.

Unterstützt wurde diese Auffassung durch die später entdeckten Thatsachen, dass das Funkenspektrum der radiumhaltigen Verbindungen einige helle Linien zeigt, die in dem der entsprechenden Bariumverbindung nicht auftreten, sowie auch dadurch, dass sich bei den Atomgewichtsbestimmungen des radioaktiven Bariums eine erheblich höhere Zahl (bis zu 146) ergab, als bei denen des gewöhnlichen Bariums (137). In Deutschland wurden die Analysen des Curie'schen Ehepaares mit grossem Erfolge von Herrn F. Giesel in Braunschweig wiederholt, dem zu diesem Zwecke die grossartigen Vorräte der chemischen Fabrik von de Haën in List vor Hannover zur Verfügung standen. Allerdings ist die Ausbeute bei allen diesen Analysen so gering, dass die obengenannte Fabrik nur die schwächer wirkenden Zwischenprodukte derselben in den Handel bringt, während man für die Benutzung der konzentrierteren Präparate auf die Freundlichkeit des Herrn Dr. Giesel angewiesen ist. Derselbe hatte auch in diesem Falle durch Ueberlassung eines sehr kräftig wirkenden Produktes den Vortragenden in die Lage versetzt, der Versammlung die hauptsächlichsten Wirkungen der neuen Strahlen unmittelbar vor die Augen zu führen, während andere Eigenschaften derselben durch entsprechende photographische Aufnahmen, welche mit Hilfe de Haën'scher Produkte von Herrn Dr. Walter, Assistenten des Laboratoriums, hergestellt worden waren, demonstriert wurden.*)

Von diesen Eigenschaften wurden nun zunächst diejenigen vorgeführt, in welchen die Becquerelstrahlen mit den Röntgenstrahlen übereinstimmen, und hiervon vor allem die merkwürdige Fähigkeit beider, einen elektrisch geladenen Körper zu entladen. Die Ursache dieser Erscheinung ist bekanntlich darin zu suchen, dass die den Körper umgebende atmosphärische Luft von den Strahlen „ionisiert", d. h. in positiv und negativ geladene Bestandteile zerlegt wird, von denen dann die ungleichmässig geladenen durch den elektrisierten Körper angezogen werden und so seine Ladung

*) S. Unt.-Bl. VI, 3, S. 51.

*) Einige derselben sind in Bd. III der „Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen" reproduziert.

neutralisiert wird. Ferner konnte auch noch die starke, phosphorescenzerregende Wirkung, welche die Strahlen Becquerels ebenso wie diejenigen Röntgens auf den Bariumplatincyanürschirm ausüben, der Versammlung unmittelbar vor die Augen geführt werden; wie auch ferner mit Hilfe dieser Erscheinung sich zugleich der Nachweis erbringen liess, dass auch die erstere Strahlung mit Leichtigkeit durch eine mehrere Millimeter dicke Metallplatte hindurch geht. Mit Hilfe photographischer Aufnahmen wurde ferner noch des genaueren gezeigt, dass die Abhängigkeit der Stärke der Absorption von der stofflichen Zusammensetzung der absorbierenden Stoffe für beide Strahlengattungen nach einem ähnlichen Gesetze vor sich geht, nämlich in beiden Fällen lediglich durch die Zahl und das Gewicht der Atome des absorbierenden Körpers bedingt ist, während andererseits der molekulare Aufbau derselben, der ja bei der Absorption des Lichts eine so wesentliche Rolle spielt, hier vollkommen gleichgiltig ist. So absorbiert z. B. eine bestimmte Schicht des flüssigen Schwefelkohlenstoffs die Röntgen- und Becquerelstrahlen ebenso stark, wie zwei aufeinandergelegte Stücke der beiden festen Bestandteile desselben, vorausgesetzt, dass die Dicken der letzteren so berechnet sind, dass die Strahlung hier dieselbe Anzahl von Atomen zu durchsetzen hat, wie dort bei der Durchquerung ihrer flüssigen Verbindung.

Endlich wirken auch die Becquerelstrahlen, ebenso wie die Röntgenstrahlen auf die photographische Platte ein; und man kann daher auch mit den ersteren ebenso wie mit den letzteren photographische Schattenbilder, Durchleuchtungen von sonst opaken Gegenständen anfertigen. Hierbei findet man nun allerdings bald, dass es auch sehr wesentliche Unterschiede zwischen beiden Strahlengattungen giebt; und zwar unterscheiden sich dieselben in dieser Beziehung vor allem darin, dass die Becquerelstrahlen bei der Durchdringung der spezifisch leichten und atomistisch niedrig stehenden Stoffe, wie beispielsweise Holz, Fleisch, Papier und dergleichen eine weit stärkere diffuse Zerstreuung erfahren, als die Röntgenstrahlen. Die Folge dieser Erscheinung ist nun aber erstens die, dass derartige Stoffe die Becquerelstrahlen verhältnismässig viel stärker zu absorbieren scheinen, als die X-Strahlen und zweitens auch die, dass die Abbildung eines in einer solchen Substanz eingeschlossenen, stärker absorbierenden Körpers mit den Strahlen Becquerels ganz ausserordentlich viel schwerer gelingt, als mit denjenigen Röntgens. So lassen sich beispielsweise mit den ersteren durch die menschliche Hand hindurch zwar noch eben Stücke von Metall, nicht aber mehr die in der Hand enthaltenen Knochen abbilden, sodass mithin von einer praktischen Brauchbarkeit der neuen Strahlen in der Medizin vorläufig nicht die Rede sein kann.

Zum Schluss wurde dann noch die erst neuerdings entdeckte magnetische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen, die diese im Gegensatz zu den Röntgenstrahlen besitzen, an verschiedenen photographischen Aufnahmen demonstriert, aus denen sich unter anderem ergab, dass alle Radiumpräparate sowohl magnetisch ablenkbare wie auch magnetisch nicht ablenkbare Strahlen aussenden und dass von diesen beiden Strahlenarten, die letztere eine erheblich stärkere Absorption in den körperlichen Stoffen erfährt, als die erstere.

Die Definitionen in der Trigonometrie.

Eine Entgegnung von Dr. Haentzschel in Berlin.

Im Jahrgang VI, Nr. 3 der Unterrichtsblätter hat Herr Dr. Schafheitlin meine Abhandlung „Ueber die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie“ (Köll. Gymn. Ostern 1900) einer eingehenden Kritik unterzogen, der sich der Herausgeber, Herr Professor Pietzker, in verschiedenen Punkten angeschlossen hat. Von der mir durch Herrn Professor Pietzker gütigst gewährten Erlaubnis an diesem Orte einiges auf die vorgenannten Ausführungen erwidern zu dürfen, mache ich daher in folgendem gern Gebrauch. Da betone ich denn von vornherein, dass es mir in meiner Abhandlung vor allem darauf ankam, die wissenschaftliche Minderwertigkeit der in den meisten Lehrbüchern der Trigonometrie gelehrten Grundlegung darzuthun. Wenn daher Herr Dr. Schafheitlin „in Kollegenkreisen“ Umfrage gehalten hat, ob man dort den Sinus als Funktion, also als unbenannte Zahl, oder als Strecke betrachtet, und die Antwort natürlich zu Gunsten der Zahl ausfiel, so habe ich gerade dies in meiner Abhandlung auf S. 7, § 3 und auf S. 25, Zeile 7—8 behauptet. Ich bin fest überzeugt, dass viele Kollegen in ihrem Unterricht gerade bei der Grundlegung von dem eingeführten Lehrbuch auf Grund derselben Bedenken, die ich geäussert habe, erheblich abweichen. Aber als Kritiker kann ich mich nur an das gedruckte Wort halten. Ich kann darum Herrn Dr. Schafheitlin nicht zustimmen, wenn dieser im dritten Absatz seines Aufsatzes das Auftreten der trigonometrischen Linien in gewissen Lehrbüchern als „Flüchtigkeiten“ in Schutz nimmt und nach „Milderungsgründen“ sucht, da ich im zweiten Teil meiner Abhandlung gezeigt zu haben glaube, dass hier nicht eine Flüchtigkeit, sondern eine veraltete Form, ein Ueberbleibsel aus vergangenen Zeiten, vorliegt. Dass heutzutage alle Lehrer der Mathematik, und also auch die Verfasser der Lehrbücher, genau wissen, wie der Sachverhalt liegt, habe ich selbst behauptet (S. 30); mit einer gewissen Schärfe habe ich deshalb von einem „System der doppelten Buchführung“ in meiner Abhandlung gesprochen; ist deshalb mein Kampf gegen die trigonometrischen Linien nicht zeitgemäss und völlig berechtigt?

Herr Dr. Schafheitlin nimmt irrtümlich an, ich wollte ängstlich „jeden Ausdruck vermeiden, der der analytischen Geometrie entlehnt ist, weil diese Disziplin erst später gelehrt wird“. Er würde diese Annahme nicht aufrecht erhalten können, wenn er folgende Stelle auf S. 4 beachtet hätte: „Wenn man dem Wege, der z. Z. für die Grundlegung in der Schule meistens beschritten wird, Anschaulichkeit nachrühmt, und wenn ich im Gegensatz dazu die Anschaulichkeit erst in zweiter Linie gelten lassen will, in erster Linie aber eine logische Entwickelung des Grundgedankens fordere, so ist sofort einleuchtend, dass hier zwei verschiedene Ansichten mit einander ringen“. Er hat die Existenz der §§ 19 und 24 im ersten Teil, die von der graphischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen handeln, übersehen; er beachtet nicht, dass meine Schlussworte auf S. 31 lauten: „Diese Resultate anschaulich nach § 19 und § 24 darzustellen, damit sie sich dem Gedächtnis des Schülers einprägen, wird gewiss kein geschickter Lehrer versäumen“.

Noch weniger glücklich ist seine Bezugnahme auf den zweiten Teil des von mir gemeinsam mit den

Kollegen Bork und Crantz verfassten mathematischen Leitfadens für Realschulen. Hier ist in der That im § 4 ganz wie in der Programmabhandlung die Grundlegung für den zweiten Quadranten behandelt worden. Da aber eine ausführliche wissenschaftliche Grundlegung für alle Quadranten unseres Erachtens über die Fassungskraft eines Schülers der ersten Klasse einer Realschule hinausgeht, so versäumten wir nicht, um einen Ausblick und gewissermassen Abschluss zu geben, im § 11 der Trigonometrie zu handeln vom „Koordinatenbegriff und seiner Anwendung auf die trigonometrischen Funktionen“. Indem Herr Dr. Schafheitlin dies ignoriert, gelangt er dahin, statt des wirklichen pädagogischen Standpunktes, auf dem ich stehe, seine Kritik an einer Auffassung zu üben, die er unzutreffender Weise für die meinige ansieht, und gegen die er dann, seiner Meinung nach mit Erfolg, zu Felde ziehen kann. Da aber auf diese Weise die Kluft, die zwischen uns liegt, unausfüllbar ist, und die Leser dieser unserer Vereinszeitschrift sich wahrscheinlich mehr für die Sache interessieren werden als für ein fruchtloses Hin- und Herstreiten, so möchte ich jetzt dazu übergehen, die Differenz zu präzisieren, die uns beide in wissenschaftlicher Hinsicht scheidet. Hier kann ich Herrn Dr. Schafheitlin getrost eine Konzession machen. Um die Verständigung zu erleichtern, möge der Einheitskreis der folgenden Betrachtung zu Grunde gelegt werden. In der zu entwerfenden Figur sei der feste Radius OA gleich der Längeneinheit, also ist die Masszahl der Ordinate EF der Sinus des Winkels α, und die Masszahl der Abscisse OF, bezw. der Projektion des beweglichen Radius auf den Anfangsschenkel OA, ist der Cosinus des Winkels α (Bork, Crantz, Haentzschel, 2. Teil, § 11, S. 52). Diese Definitionen werden, wie Herr Professor Pietzker mit Recht bemerkt, aus dem ursprünglich beliebigen rechtwinkligen Dreieck OFE gewonnen. Sie gelten vorläufig nur für den 1. Quadranten; einzig und allein nur für diesen ist der Satz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ gewonnen worden.

Die Annahme in den Lehrbüchern, dass die gegebenen Definitionen für Sinus und Cosinus auch in den ferneren Quadranten gelten sollen, hat zur ersten Voraussetzung, dass $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ für jeden beliebigen Winkel ist. Denn zuerst muss man den Kreis besitzen, dann erst kann von einem Wandern von OE und dem Fällen von EF die Rede sein. Ein meiner Meinung nach zu beweisender Lehrsatz wie $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ wird zur Definition. Statt sich also mit den zwei notwendigen Definitionen von Sinus und Cosinus zu begnügen, wird versteckter Weise, indem diese Definitionen für die ferneren Quadranten an die Existenz des Kreises gebunden werden, eine dritte hinzugefügt. Hier beginnt die Unklarheit, ohne dass viele Lehrbücher auch nur mit einer Silbe merken liessen, dass die Sache nicht ganz in Ordnung ist. Ausserdem hat das Hineinziehen des Kreises vom Standpunkt der Funktionentheorie noch etwas viel bedenklicheres zur Folge. Indem man den Winkel als das Mass der Drehung des beweglichen Radius definiert, wird die Periodizität der Funktionen Sinus und Cosinus für Winkel, die grösser als 4 R sind, a priori angenommen, und also auch diese doch erst zu erweisende Eigenschaft von Sinus und Cosinus wird einfach definiert. Man giebt also den Grundsatz der Mathematik auf, dass nur das allernotwendigste in der Form einer Definition ausgesprochen werden darf; weitere Eigenschaften aber in Form von Lehrsätzen aus der Definition zu entwickeln sind. Was schadet es jetzt, nachdem man einmal so weit gekommen ist, die Vorzeichen vom Sinus im 3. und 4. Quadranten, die vom Cosinus im 2. und 3. Quadranten als negativ einfach zu definieren, und dieser Definition, um sie plausibler erscheinen zu lassen, ein von der analytischen Geometrie erborgtes Mäntelchen umzuhängen? Erweisen aus der Definition vom Sinus und Cosinus kann man es ja doch niemals! Ist es also nicht gleichgiltig, ob man sechs Definitionen oder nur zwei nötig hat?

Man hat auf diese Weise die Funktionen Sinus und Cosinus mehr konstruiert als definiert, und es erhebt sich vom Standpunkte der Funktionentheorie aus die wichtige Frage, hat man denn auf diese Weise zwei monogene Funktionen erhalten, oder sind nicht vielleicht verschiedene Zweige von verschiedenen Funktionen willkürlich aneinander geschweisst worden? Wer garantiert mir, ob die Vorzeichen für die Sinus und Cosinus richtig gewählt worden sind? Giebt es nicht, wie wir gleich sehen werden, vier verschiedene Funktionen, die den Namen Sinus bez. Cosinus verdienen? Die analytische Geometrie mit ihrer Definition der Richtungen verbürgt es doch keinesfalls, denn sie ist nur das Instrument zur graphischen Darstellung von Zahlengrössen, um die es sich hier handelt. Herr Dr. Schafheitlin meint nun, dem von mir vorgeschlagenen Verfahren, diese Zweifel zu beheben, könne er „nur dann zustimmen, wenn von Anfang an die Funktion rein arithmetisch, unabhängig von Seitenverhältnissen, und das Argument als reine Zahl betrachtet würde; beispielsweise müssten aus der Potenzreihe die Eigenschaften der Funktionen entwickelt und gezeigt werden, dass, wenn die Argumente als Winkel aufgefasst werden, die Funktionen alsdann die bekannte geometrische Bedeutung besitzen.“ Herrn Dr. Schafheitlin ist es gewiss bekannt, dass so und nur so in der niederen Analysis verfahren wird. Man definiert seit Eulers Zeiten durch einen algebraischen Grenzprozess die Zahl e in Form einer Potenzreihe als $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, findet $e^x = \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und setzt

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ i = \sqrt{-1}.$$

Aus der zu erweisenden Periodizität von e^{ix} folgt die von Sinus und Cosinus, es folgt der Satz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, es folgen die Additionstheoreme usw. Da nun $\cos x$ der Differentialquotient von $\sin x$ nach x ist, so braucht, wie man erkennt, in der mathematischen Wissenschaft nur $\sin x$ und das Vorzeichen von $\cos x$ definiert zu werden, eine Thatsache, auf die Lejeune-Dirichlet in der von mir S. 28 zitierten Vorlesung (Sommer 1834) seine Zuhörer hinzuweisen nicht versäumte. Es geht daraus hervor, dass man im elementaren Unterricht wegen des Fehlens des Begriffs „Differentialquotient“ ausser der Sinusdefinition nur noch einer zweiten Definition bedarf; dass man also mit zwei Definitionen auskommen muss.

In der 1. Auflage unseres Buches benutzte ich ausser $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ noch $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, denen beiden ich allgemeine Giltigkeit für alle Winkel zuschrieb. Da aber alsdann die Rechnung $\cos\alpha \pm = \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

ergiebt, und die Bestimmung des richtigen Vorzeichens die Auffassungskraft des Schülers vielleicht übersteigt, so gab ich in der 2. Aufl. (1899) einen geometrischen Beweis für $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, machte dies zur Cosinusdefinition, und leitete daraus den Satz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ durch Beweis ab; so ist es auch in der Abhandlung (Ostern 1900) geschehen. Vor allem ist doch mein Ziel, was ich den Worten des Herrn Dr. Schafheitlin entgegenhalten muss: „den strengen Forderungen der Wissenschaft zu genügen, und mit logischer Konsequenz aus den einfachen Definitionen, die in der Schule für die trigonometrischen Funktionen gegeben werden, Beziehungen herzuleiten, aus denen „durch stetige Fortsetzung" der Giltigkeitsbereich dieser Funktionen mehr und mehr erweitert werden kann." (Abh. S. 4.)

Hierzu gehört, über die Vorzeichen von Sinus und Cosinus keinerlei Voraussetzungen zu machen. Nun bedenke man, dass Euler gefunden hat, für sin x bez. cos x gilt der Ansatz:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ist nicht einer der vier Ansätze

$$\sin x = \pm \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \pm \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

gleichberechtigt mit den übrigen? Also giebt es vier von einander verschiedene Trigonometricen! Die erste, die sich vor den übrigen dadurch auszeichnet, dass Sinus und Cosinus im ersten Quadranten beide positiv sind, lautet:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

Quadrant	1.	2.	3.	4.
Sinus	+	+	—	—
Cosinus	+	—	—	+

Die zweite ist erklärt durch

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

Quadrant	1.	2.	3.	4.
Sinus	+	+	—	—
Cosinus	—	+	+	—

Die dritte ist erklärt durch

$$\sin x = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

Quadrant	1.	2.	3.	4.
Sinus	—	—	+	+
Cosinus	—	+	+	—

Die vierte ist erklärt durch

$$\sin x = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

Quadrant	1.	2.	3.	4.
Sinus	—	—	+	+
Cosinus	+	—	—	+

Offenbar ist die 4. Trigonometrie gleichbedeutend mit der Trigonometrie der negativen Winkel der ersten; in derselben Beziehung steht die dritte zur zweiten. Es giebt also zwei von einander verschiedene Formelreiche der Trigonometrie, von denen nur das eine hinlänglich bekannt ist. Ein gleiches Verhältnis existiert in der Theorie der elliptischen Funktionen; ich gedenke an einem anderen Orte zu zeigen, wie eine bekannte, von Herrn Hermite herrührende Formel aus der Transformationstheorie sich nicht in die Weierstrass'sche Theorie der elliptischen Funktionen einfügen lässt, einzig und allein wegen der von Weierstrass getroffenen fundamentalen Wahl eines Vorzeichens; also ganz so wie hier in der Trigonometrie, wo das Vorzeichen das unterscheidende Merkmal abgiebt. Würde man einen Schüler in diese vierfache bezw. doppelte Möglichkeit einweihen, würde sein Vertrauen, dass die richtigen Vorzeichen gegriffen sind, auch dann noch unumstösslich sein? Für uns aber erscheint die Frage, ob die in der Schule konstruierten Funktionen Sinus und Cosinus auch monogen sind, als der wichtigsten eine. Deutlich zeigt sich, dass derjenige, der den üblichen Lehrgang zuerst aufgebracht hat, mit den Resultaten desselben bereits auf einem anderen Wege, nämlich durch das als allgemein giltig angenommene Additionstheorem, welches den monogenen Charakter der Funktionen verbürgt, bekannt gewesen ist. Dieser übliche Lehrgang setzt das Bild an die Stelle der Sache; er ist „wertvoll beim Erlernen, nicht aber beim Erklären und beim Erweisen" (Kronecker); er hat keinen wissenschaftlichen, sondern nur einen propädeutischen Charakter.

Wo ist die Quelle des Uebels zu suchen? Der Inhalt der gegebenen Sinusdefinition als einer Ordinate ist eben viel zu schwach. Die Schwierigkeit lässt sich nur dann heben, wenn eine Vertiefung der Sinusdefinition gelingt. Nun sind aber die accessorisch den Sinus und Cosinus beigelegten Vorzeichen Resultate der Additionstheoreme; es kann demnach eine Vertiefung nur glücken, wenn ein Körnchen von dem Salze des Additionstheorems der Sinusdefinition hinzugefügt wird. Der erste Teil meiner Abhandlung hat gezeigt, dass die Forderung der preussischen Lehrpläne erfüllbar ist, wonach das Additionstheorem in seiner Allgemeinheit der dritten Stufe im Aufbau der Trigonometrie vorbehalten bleiben soll, wenn man nur, um eine brauchbare Sinusdefinition zu erhalten, die Gleichung $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, die als Sonderfall aus $\sin(x + y)$ für $x = y = \frac{\alpha}{2}$ hervorgeht, direkt beweist und als Definition hinstellt. Aus praktischen Gründen wird man parallel dazu die Gleichung $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ geometrisch beweisen und als Cosinusdefinition aufstellen; sie ist bekanntlich ein Sonderfall von $\cos(x + y)$ für $x = y = \frac{\alpha}{2}$. Der Satz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ist alsdann eine Folge dieser beiden Definitionen (Abh. § 9, § 17).

Wenn Herr Dr. Schafheitlin meint, dass ich damit gegen das konservative Prinzip der Mathematik verstosse, da ich geometrisch anfange und also auch geometrisch fortfahren müsse, so irrt er; denn er wendet einen Namen in durchaus unzutreffendem Sinne an. Die Trigonometrie ist nämlich nicht reine Geometrie, sie ist auch nicht reine Arithmetik, sondern sie ist ein Gemisch von beiden, wie z. B. das Additionstheorem zeigt, das im übrigen eine Funktionalgleichung im besten Sinne des Wortes ist, weshalb ich die Scheu des Herrn Prof. Pietzker vor einer solchen nicht teile. Ich meine nun, wenn die Geometrie mit ihren Mitteln versagt, wie bei der Grundlegung, so muss die Arithmetik helfend eintreten; an manchen Stellen der Trigonometrie aber ist es statthaft, ein Resultat geometrisch oder arithmetisch zu erweisen.

Trete ich denn nun mit meiner Grundlegung so ganz aus dem Rahmen des bisher in den Schulbüchern stehenden heraus? Wir wollen uns mit dem wandernden Radius OE durch ein unsichtbares Band verknüpft, damit meine ich die Formeln $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, einen *zweiten* Radius OL denken, dessen Lage durch den Winkel $LOA = \frac{\alpha}{2}$ gegeben ist. Sind also $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ gegeben, d. h. $\triangle$ OLJ bekannt, so ist auch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bestimmt, d. h. $\triangle$ OEF ist bekannt. Während man nun bisher E wandern liess von A bis B, und bei einem Ueberschreiten von B die von mir bei der Wahl der Vorzeichen geschilderten Schwierigkeiten Platz griffen, ist nach meiner Auffassung der Radius OE, sobald er den 1. Quadranten verlässt, durch das Formelband an den noch auf bekanntem Terrain befindlichen Radius OL geknüpft. Das unbekannte $\sin\alpha$ bezw. $\cos\alpha$ für $180^0 > \alpha > 90^0$ ist gegeben und bestimmt durch das bekannte $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$; die richtigen Vorzeichen aber erhält man, wie ich in der Abhandlung gezeigt habe, ganz von selbst. Tritt α in den 3. und 4. Quadranten ein, so stützt sich OE auf ein OL im wohl definierten Funktionsgebiet des 2. Quadranten; usw. Diese Schlüsse, die wir soeben bei *wachsendem* α verfolgt haben, müssen aber auch mit *abnehmendem* Winkel α gemacht werden. $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ stützt sich auf $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ auf $\sin\frac{\alpha}{4}$ und $\cos\frac{\alpha}{4}$; diese auf $\sin\frac{\alpha}{8}$ und $\cos\frac{\alpha}{8}$, usw. Wir erkennen, will man den Sinus oder Cosinus eines beliebigen Winkels *berechnen*, so muss man den Sinus bezw. Cosinus von *sehr kleinen Winkeln* kennen. Diese Berechnung geschieht in *elementarer Weise* durch ein *Iterationsverfahren*.

Es ist

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Aber $\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2^2}$.

Demnach ist

$$\sin\alpha = \left[\left(2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\right) - \frac{1}{2^3}\left(2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\right)^3\right].\cos\frac{\alpha}{2^2}.$$

Auf demselben Wege findet man:

$$\sin\alpha = \left[\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right) - \left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\right)\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}\right)\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^5 - \frac{1}{2^{14}}\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^7\right].\cos\frac{\alpha}{2^3}.$$

$$\sin\alpha = \left[\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right) - \left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\right)\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^3 + \frac{7.9}{2^{13}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^5 - \frac{3.5.11}{2^{20}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^7 + \frac{5.11}{2^{25}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^9 - \frac{3.13}{2^{32}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^{11} + \frac{7}{2^{38}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^{13} - \frac{1}{2^{45}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^{15}\right].\cos\frac{\alpha}{2^4}.$$

usw.

Entsprechend ist

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\right)^2 + \frac{1}{2^5}\left(2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\right)^4.$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^2 + \frac{5}{2^7}\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^4 - \frac{1}{2^{10}}\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^6 + \frac{1}{2^{17}}\left(2^3\sin\frac{\alpha}{2^3}\right)^8.$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^2 + \frac{3.7}{2^{14}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^4 - \frac{3.5.11}{2^{23}}\left(2^4\sin\frac{\alpha}{2^4}\right)^6 \pm \ldots.$$

Setzt man diese Berechnung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ fort, so dass schliesslich auf der rechten Seite das sehr kleine Argument $\frac{\alpha}{2n}$ steht, wandelt man dasselbe in Bogenmass um, beweist man dann die Sätze

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}\right) = 1 \text{ und } \lim_{n=\infty}\cos\frac{\alpha}{2n} = 1,$$

so ist damit der *Existenzbeweis* für die beiden Newtonschen Reihen

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} \pm \ldots$$

geliefert. Die weitere Ausführung und namentlich der Beweis der Identität mit den Newtonschen Reihen muss hier übergangen werden. Aus den beiden Reihen folgen aber offenbar die Beziehungsgleichungen:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

wodurch unter Wahrung des konservativen Prinzips, also nur mit Benutzung der Definitionsgleichungen, das Desideratum des Herrn *Schafheitlin* erledigt ist.

Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

Von A. Moroff (Bamberg).

I. Bekanntlich gründet sich die früheste Art der Ableitung für die Formeln

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta \text{ und}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta$$

auf die Benutzung des ptolemäischen Lehrsatzes. Sind a b c d die Seiten eines Sehnenvierecks, dessen Diagonalen e und f sind, so gilt bekanntlich die Gleichung $ac + bd = ef$, also $\frac{a}{f}\cdot\frac{c}{f} + \frac{b}{f}\cdot\frac{d}{f} = \frac{e}{f}$. Wendet man diese Gleichung auf ein Sehnenviereck an, dessen eine Diagonale f Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, so hat man, indem man unter φ_1 den Winkel zwischen a und f, unter χ_1 den Winkel zwischen b und f versteht, sofort die Gleichung

$$\sin(\varphi_1 + \chi_1) = \sin\varphi_1\cos\chi_1 + \cos\varphi_1\sin\chi_1.$$

Andererseits ergiebt sich ebenso leicht, wenn die Winkel (a, f) und (c, f) mit φ_2 und χ_2 bezeichnet werden, die Formel

$$\cos(\varphi_2 - \chi_2) = \sin\varphi_2\cos\chi_2 + \cos\varphi_2\sin\chi_2.$$

Um zu den Formeln für den Sinus der Differenz und dem Cosinus der Summe zu gelangen, wählt man ein Sehnenviereck, bei dem der Durchmesser des umschriebenen Kreises die Seite a bildet. Dann hat man

$$ef - bd = ac, \quad \frac{e}{a} \cdot \frac{f}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{a} = \frac{c}{a}$$

und indem man die Winkel (b, a), (e, a), (f, a), (d, a) der Reihe nach mit $\varphi_3\ \chi_3\ \varphi_4\ \chi_4$ bezeichnet, erhält man leicht die Formeln

$$\sin(\varphi_3 - \chi_3) = \sin\varphi_3 \cos\chi_3 - \cos\varphi_3 \sin\chi_3$$
$$\cos(\varphi_4 + \chi_4) = \cos\varphi_4 \cos\chi_4 - \sin\varphi_4 \cos\chi_4.$$

Der Vorteil dieser Ableitung liegt darin, dass, während allerdings die Winkel φ und χ selbst spitz sein müssen, die Gültigkeit der Formeln zugleich für den Fall erwiesen wird, in dem die Summe $\varphi + \chi$ über 90^0 hinausgeht. Die Ausdehnung des Funktionsbegriffs auf Winkel zwischen 90^0 und 180^0 wird dabei vorausgesetzt.

Im Folgenden soll nun eine einfache Beweisführung für die allgemeine Gültigkeit der in Rede stehenden Formeln gegeben werden, wobei die Ausdehnung des Funktionsbegriffs auf Winkel von beliebiger Grösse vorausgesetzt wird.

II. Sind α, β und δ spitze Winkel, so gilt wegen I.

$$\sin(\alpha + \delta)\cos(\beta - \delta) + \cos(\alpha + \delta)\sin(\beta - \delta)$$
$$= (\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta)(\cos\beta\cos\delta + \sin\beta\sin\delta)$$
$$+ (\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta)(\sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta\cos^2\delta + \cos\alpha\cos\beta\sin\delta\cos\delta$$
$$+ \sin\alpha\sin\beta\sin\delta\cos\delta + \cos\alpha\sin\beta\sin^2\delta$$
$$+ \cos\alpha\sin\beta\cos^2\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\delta\cos\delta$$
$$- \cos\alpha\cos\beta\sin\delta\cos\delta + \sin\alpha\cos\beta\sin^2\delta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta(\cos^2\delta + \sin^2\delta) + \cos\alpha\sin\beta(\sin^2\delta + \cos^2\delta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) \text{ oder}$$
$$\alpha + \delta = \alpha' \text{ u. } \beta - \delta = \beta',$$
$$\text{also } \alpha + \delta = \alpha' + \delta' \text{ gesetzt,}$$
$$\sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta = \sin(\alpha' + \beta').$$

Entsprechend folgt: $\cos\alpha'\cos\beta' - \sin\alpha'\sin\beta' = \cos(\alpha' + \beta')$. $\alpha' + \beta'$ liegt immer noch zwischen 0^0 und 180^0, aber die Einschränkung ist gefallen, dass jeder einzelne Winkel spitz ist; der eine von beiden kann auch stumpf sein. Damit ist die Giltigkeit der in Rede stehenden Formeln für beliebige Dreieckswinkel erwiesen. Aber man braucht sich damit nicht zu begnügen.

III. Wird die Annahme $\alpha' + \beta' < 180^0$ so verstanden, dass sowohl α' als β' kleiner als 180^0 ist, so kann man $180^0 - \alpha''$ bezw. $180^0 - \beta''$ für α' und β' verwenden; man hat dann $180^0 < \alpha'' + \beta'' < 360^0$

$$\sin(\alpha'' + \beta'') = \sin\alpha''\cos\beta'' + \cos\alpha''\sin\beta'' \text{ und}$$
$$\cos(\alpha'' + \beta'') = \cos\alpha''\cos\beta'' - \sin\alpha''\sin\beta'';$$

endlich unter entsprechender Benutzung eines Hilfswinkels δ wie bei II..

$$\sin(\alpha''' + \beta''') = \sin\alpha'''\cos\beta''' + \cos\alpha'''\sin\beta''' \text{ und}$$
$$\cos(\alpha''' + \beta''') = \cos\alpha'''\cos\beta''' - \sin\alpha'''\sin\beta'''.$$

Damit ist die Gültigkeit der Formeln für die Summe zweier Winkel bis zum Betrag von 360^0 für die Summe erwiesen, gleichviel wie gross der einzelne Winkel ist.

IV. Wird die Voraussetzung $\alpha''' + \beta''' < 360^0$ so verstanden, dass sowohl α''' als β''' kleiner als 360^0 ist, so kann man $360^0 - \alpha'''' = \alpha'''$ und $360^0 - \beta'''' = \beta'''$ setzen, man hat dann $360^0 < \alpha'''' + \beta'''' < 720^0$ etc. Die zwei Formeln gelten nunmehr für zwei völlig beliebige Winkel.

V. Ersetzt man in der Formel $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, welche also für beliebige Winkel gilt, α durch $360^0 - \alpha'$ und β durch β', so erhält man $\mp\sin(\alpha' - \beta') = \mp\sin\alpha'\cos\beta' \pm \cos\alpha'\sin\beta'$, analog erhält man $\cos(\alpha' - \beta') = \cos\alpha'\cos\beta' + \sin\alpha'\sin\beta'$. Damit ist die allgemeine Gültigkeit aller vier Formeln ausreichend erwiesen.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkursus zu Berlin 1900. Der Kursus, der in den Räumen des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums abgehalten wird, soll am 3. Oktober durch eine Rede des Direktors Prof. Dr. Schwalbe „Ueber die historische Entwickelung und Bedeutung der naturwissenschaftlichen Ferienkurse" eröffnet werden, an die sich eine Besichtigung der Schulsammlungen und naturwissenschaftlichen Einrichtungen der genannten Anstalt und der dort veranstalteten Ausstellung botanischer, zoologischer und geographischer Lehrmittel (letztere unter Leitung des Provinzial-Schulrats Dr. Vogel) anschliessen wird. An Vorträgen sind angesetzt Rubens: Ueber den Einfluss der verschiedenen Strahlengattungen (Röntgen-Strahlen, Becquerel-Strahlen, ultraviolettes Licht u. s. f.) auf elektrische Entladungen. — Van t'Hoff: Die Stassfurter Salzvorkommnisse vom physikalisch-chemischen Standpunkte. — Warburg: Ueber magnetische Hysterese. — Spiess: Ueber flüssige Luft mit Rücksicht auf ihre Verwendbarkeit zu Schulversuchen. — Poske: Zur Methodik des physikalischen Unterrichts. — von Bezold: Zur Theorie des Erdmagnetismus. — Szymanski: Schulversuche über elektrische Wellen. — Slaby: Die Telegraphie ohne Draht, mit Demonstrationen. — Schwendener: Die Flugapparate der Früchte und Samen; das Winden und Klettern der Pflanzen. — Möbius: Bau und Lebensweise der Cetaceen unter Erklärung der in der Schausammlung des Museums für Naturkunde aufgestellten anatomischen und biologischen Präparate. — Wahnschaffe: Ueber die Endmoränen Norddeutschlands. — Potonié: Ueber die durch Pflanzenfossile gegebenen Belege für die fortschreitende höhere Organisation der Pflanzen.

An Besichtigungen sind neben den oben genannten die der Laboratorien der technischen Hochschule, der mechanisch-technischen Versuchsanstalt und der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg, des neuen chemischen Universitäts-Instituts, der Veranstaltungen für physikalische und biologische Kurse in der alten Urania, des Museums für Naturkunde, der Bergakademie und der geologischen Landesanstalt, eventuell auch der Berliner Elektrizitätswerke, des Postmuseums, der Borsigwerke, der Werkstätten von Siemens & Halske, und einer chemischen Industrieanlage in Aussicht genommen.

Eine ein- und einhalbtägige Excursion unter Führung des Landesgeologen Prof. Dr. Wahnschaffe hat zum Ziel Feldberg in Mecklenburg, wo am 13. Oktober der Kursus durch den Provinzial-Schulrath Dr. Vogel geschlossen werden wird.

Vereine und Versammlungen.

Konferenz über die Frage der Erhaltung von Naturdenkmälern. Diese Frage, mit der sich inzwischen auch ein Beschluss der diesjährigen Hauptversammlung in Hamburg*) beschäftigt hat, ist bereits am 13. Dezember 1899 Gegenstand einer Besprechung im preussischen Kultusministerium gewesen, an der ausser einem Vertreter dieser Behörde noch Kommissare des Handelsministeriums, des Landwirtschaftsministeriums und des Ministeriums der öffentlichen Arbeiten, sowie der preussische Landtags-Abgeordnete Oberlehrer Wetekamp teilgenommen haben. Die Besprechung leitete ein Vortrag

*) Unt.-Bl. VI, 3; S. 52/59.

des Herrn Wetekamp ein, der durch seine im März 1898 im preussischen Abgeordnetenhause gehaltene Rede überhaupt die Aufmerksamkeit auf die ganze Frage gelenkt hatte. Im Anschluss an diesen Vortrag, bei dem auf das neuerdings erschienene verdienstliche Buch von Conwentz (Forstbotanisches Merkbuch)*) besonders Bezug genommen wurde, einigte man sich über die folgenden Punkte. Die Wichtigkeit der Erhaltung besonders charakteristischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Tier- und Pflanzenwelt, wie in der Oberflächengestaltung der Erde wurde allgemein anerkannt, es herrschte Einverständnis darüber, dass es darauf ankomme, die Allgemeinheit für diese Erhaltung zu interessiren und, soweit angängig, von Staats wegen demgemäss vorzugehen. Um über den Umfang und die Richtung des erforderlichen Vorgehens die nötigen Grundlagen zu gewinnen, sollen umfassende Ermittelungen über die thatsächlichen Verhältnisse vorgenommen werden, zu deren Vorbereitung zunächst in den einzelnen beteiligten Ressorts Gutachten hervorragender Sachverständiger eingezogen werden sollen, die voraussichtlich zugleich die für das weitere Vorgehen erforderlichen Gesichtspunkte ergeben werden. Nach Eingang dieser Gutachten soll eine erneute Besprechung stattfinden.

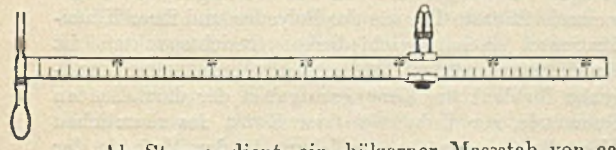
Lehrmittel-Besprechungen.

Ein Stangenzirkel zum Zeichnen an Wandtafeln

von Dr. E. Maey (Remscheid).

Die bisher beim Zeichnen an der Wandtafel gebräuchlichen Zirkel, aus zwei Schenkeln bestehend, besitzen einige Mängel, die ihre Verwendung im Unterrichte sehr beeinträchtigen, sodass der Lehrer die Kreise am liebsten mit freier Hand zeichnet. Der Schüler aber bedarf des Zirkels; dieser ist aber meist zu schwerfällig für den Schüler, als dass er geschickt mit ihm hantieren könnte. Ferner ist das Ausgleiten der festen Spitze auf der Tafel ein Missstand, der vor allem bei Glas- und Schiefertafeln, die infolge ihrer sonstigen Vorzüge neuerdings eine immer weitere Verbreitung finden, sich geltend macht.

Die angeführten Uebelstände lassen sich bei einem dem Schulgebrauche angepassten Stangenzirkel vermeiden. Ich will im folgenden einen solchen, wie er nach meinen allgemeinen Angaben von Herrn Mechaniker A. Gross, Königsberg, Pr., Steindamm 6, praktisch zur Ausführung gebracht ist, kurz beschreiben.



Als Stange dient ein hölzerner Massstab von ca. 60 cm Länge, 0,6 cm Dicke und 1,7 cm Breite mit Centimeter-Teilung. Als solcher lässt sich ein billiger, in Werkzeughandlungen käuflicher „Zweifuss-Massstab“ mit Centimeter- und Zollteilung passend verwenden. Der Nullpunkt des Massstabes wird an einer ca. 3 mm dicken Metallaxe mit einem Charnier drehbar befestigt. Das obere Ende der Axe wird mit einem Handgriffe versehen, wozu ein passendes Werkzeugheft benutzt werden kann, während das untere Ende als feste Zirkelspitze dient; für Holztafeln kann dieses zugespitzt sein, für Glas- und Schiefertafeln schiebt man auf die Spitze eine Metallhülse, die am Ende einen 5 mm breiten Gummipfropfen fasst. Um die Stange greift ein Schieber mit einer auf einer Schmalseite eingelegten Feder, welche seine gleichmässige Verschiebung und seinen festen Halt bedingt. Auf der Breitseite, welche der Centimeter-Teilung aufliegt, ist der Schieber durchbrochen und trägt in der Mitte der Ränder Marken, welche seine Einstellung auf der Centimeter-Teilung kennzeichnen. Auf der anderen Breitseite ist ein Kreidehalter, wie er an den alten Schulzirkeln gebräuchlich ist, schräge befestigt, sodass er bei gerader Haltung des Zirkels zur Tafel gegen diese eine Neigung von ca. 60° hat. Dadurch wird ein gutes Ansprechen der Kreide auf der Tafel bewirkt.

Der Preis eines solchen Schul-Stangenzirkels stellt sich auf ungefähr 3 M. Seine Vorzüge bestehen in folgendem:

1. Da das feste Ende mit seiner Gummispitze stets senkrecht aufgesetzt wird, ist ein Ausgleiten nicht möglich.
2. Die feste Einstellung der Zirkelspannung geschieht schnell und sicher ohne Schraube.
3. Die Grösse der Zirkelspannung lässt sich leicht an der Stange ablesen.
4. Der Zirkel ist leicht und auch für den ungeübten Schüler handlich.
5. Der Zirkel kann auch als Lineal benutzt werden. Für diesen Zweck ist es erforderlich, dass der Handgriff auf zwei Seiten abgeflacht ist, und dass der Kreidehalter nicht auf die Seite der Stange mit Centimeter-Teilung hinüberragt.

Zu seiner Führung bedarf man allerdings beider Hände: die linke hält das feste Ende, die rechte führt die Kreide. Jedoch auch der bisher gebräuchliche Zirkel konnte besonders auf Glas- und Schiefertafeln mit Sicherheit nur mit beiden Händen gebraucht werden, sodass dieser scheinbare Nachteil praktisch von keiner Bedeutung ist.

Ein weiterer Umstand, der seine Verwendung bisweilen beeinträchtigt, soll nicht verschwiegen werden. Auf Tafeln mit hohem Rahmen stösst beim Zeichnen am Tafelrande die überstehende Zirkelstange gegen diesen.

Dieser Uebelstand ist aber eher ein Fehler der Tafel als des Zirkels, denn auf einer solchen Tafel ist auch das Zeichnen mit dem Lineal beeinträchtigt. Flache Tafelrahmen stören den Gebrauch des Zirkels nicht, da die Stange von der Tafel 4,5 cm entfernt ist. Es könnte auch nach Bedarf leicht der Zirkel so angefertigt werden, dass diese Entfernung noch 1 bis 2 cm grösser ist.

Der Zirkel ist in halbjährigem Gebrauche erprobt, hat nach einigen durch die Erfahrung gelehrten Verbesserungen die beschriebene Form erhalten und auch bei Fachgenossen Beifall gefunden.

Ich hoffe daher, dass durch seine Verwendung im Schulunterrichte einem oft empfundenen Mangel abgeholfen wird.

Bücher-Besprechungen.

Dr. Max Brückner, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. 7 lithographierte und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie viele Figuren im Text. Leipzig, Teubner. M. 16.

Die Lehre von den Platonischen und Archimedischen und den reciproken Körpern der

*) Unt.-Bl. VI, 3; S. 56.

letzteren, ebenso die von den Sternkörpern der regelmässigen, die als Kepler-Poinsotsche Körper bezeichnet werden, konnte schon seit längerer Zeit als abgeschlossen betrachtet werden. Den Abschluss für die letzteren haben besonders Cauchy und Wiener durchgeführt. Inzwischen waren Ansätze gemacht worden, die Eulerschen Körper in ein System zu bringen. Noch Baltzer erklärte diese Ansätze sogar für geringere Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen für ganz unzureichend. Die Aufgabe wurde durch eine der letzten Entdeckungen von Möbius noch schwieriger gemacht, denn dieser fand eine ganz neue Gruppe von Körpern, die einseitigen Polyeder. An diese Entdeckung schlossen sich topologische Untersuchungen aller Art an, beginnend mit dem Aufschneiden eines konzentrischen Kreisrings, der dadurch aus einer zweiseitigen Fläche in eine einseitige umgewandelt wurde, dass man das eine Ende nach einer Umdrehung wieder mit dem andern verband, so dass z. B. beim Färben der einen Seite zugleich die frühere andere Seite Farbe erhielt. Dass dieser Gegenstand in inniger Beziehung zur Lehre von den Riemannschen Flächen steht, ist wohl allgemein bekannt. Hess untersuchte in seiner Kugelteilung auch die gleicheckigen und gleichflächigen Kugelnetze und ermöglichte dadurch die Behandlung der gleicheckigen und gleichflächigen Körper und ihre Klassifikation. Zugleich hatte er die zu den Archimedischen Körpern und ihren reciproken Körpern gehörigen Sternkörper in die Betrachtung gezogen. In Eberhardts Morphologie wurde die Gruppierung der Polyeder nach ganz neuen Gesichtspunkten versucht. Auch Jordan hat eine Klassifikation aufgrund symmetrischer Eigenschaften angebahnt.

In dieser Uebersicht ist jedoch nur das Wichtigste genannt, noch hundert andere haben sich am Ausbau der Lehre von den Polyedern versucht und manches wichtige Resultat gefunden.

Es handelte sich nun darum, das vielfach zerstreute und unzugängliche Material zu sichten und zu ordnen, die wesentlichen Körpertypen durch Konstruktion, Modell und Photographie des Modells zur Anschauung zu bringen und die nötigen Berechnungen zu geben, vor allem aber auch um die geschichtliche Entwickelung des ganzen Gebietes.

An dieser mühevollen Arbeit hat Herr Dr. Brückner, der sich schon vorher durch eine Programmschrift (Zwickau 1894) über die Elemente der Lehre von den vierdimensionalen Körpern bekannt gemacht hatte, in der Stille lange Jahre gearbeitet, insbesondere an der Anfertigung hinreichend genauer Modelle. Er beschränkte sich dabei auf das dreidimensionale Gebiet, blieb also stets innerhalb der Grenzen der Elementarmathematik, und so liegt jetzt ein schön ausgestatteter Band in Grossquartformat vor uns, der mit den Tafeln etwa 240 Seiten umfasst. Damit ist einer der schönsten Beiträge zur Stereometrie entstanden, wie wir ihn vielleicht sogar noch niemals erhalten haben.

Eine allgemeine Theorie der Vielecke geht voran, die der besonderen Vielecke folgt. Daran schliesst sich die allgemeine Theorie der Vielflache, in der insbesondere der Eulersche Satz mit seiner Riesenliteratur zur Behandlung kommt. Er wird nicht nur für mehrfach zusammenhängende Körper erweitert, sondern auch für einseitige Polyeder. Dazu treten später noch die von Hess gegebenen Erweiterungen. Lhuilier, Cauchy, Listing, Becker, Jordan, Möbius, v. Staudt, Jonquières, Poinsot, Hoppe, Becker, Bertolotti, Crone, Rausenberger, Schubert, Legendre und viele andere haben dieses Gebiet bearbeitet, und es ist ehrenvoll für die höheren Schulen, dass die wissenschaftlichen Beilagen ihrer Jahresberichte so manchen wichtigen Beitrag geliefert haben, der erst jetzt durch Brückner aus der Verborgenheit herausgezogen wurde. Auch das Kantengesetz von Möbius stellt sich als ein für die Morphologie sehr wesentlicher Punkt heraus. Das Prinzip der Dualität kommt hier, wie im ganzen Buche, zu ausgiebiger Verwendung.

Naturgemäss geht nun die Betrachtung zu den allgemeinen Eulerschen Vielflachen über, dann zu besonderen Eulerschen Vielflachen (regelmässigen, halbregulären, gleichflächigen, gleicheckigen), bis endlich der letzte Abschnitt die aus den genannten abzuleitenden Vielflache höherer Art behandelt und zu klassifizieren sucht.

Der Verfasser verweist aus Raumgründen vielfach auf das Studium der Originalarbeiten, er macht überall die Lücken kenntlich, die noch ausgefüllt werden müssen, z. B. für die gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder mit „beweglichen Netzen“, deren vollständige Bestimmung ein noch ungelöstes Problem ist, auch wagt er nicht zu behaupten, dass die Darstellung des Eulerschen Satzes schon erschöpfend und streng genug ist.

Die Konstruktionen, die sich im Text und auf den lithographischen Tafeln befinden, sind mustergültig, die photographierten Modelle scheinen so gut gelungen zu sein, dass ein tüchtiger Modellverlag für ihre Vervielfältigung und Verbreitung sorgen sollte. Nur Modell Nr. 11 auf Tafel IX, der durch dodekaedrische Durchdringung von fünf Tetraedern entstehende Stern ist nicht genau genug ausgefallen, denn die Kante des einen Tetraeders erscheint gebrochen und die Innenkanten des einen „Trichters“ schneiden sich nicht genau in einem Punkte. Ich besitze dieses Modell in besserer Ausführung. Aus ihm lassen sich die Poinsotschen Körper und das „konkave Pyramidendodekaeder“, welches sich selbst reciprok ist, bequem ableiten, worauf ich in meiner Stereometrie, Bd. I und II aufmerksam mache.

Wer nun die zum teil wunderbaren Gestaltungen zum ersten Male zu Gesicht bekommt, wird sich vielleicht fragen, wozu die Beschäftigung mit ihnen dienen soll. Mancher wird vielleicht als echter Utilitarier das Ganze für Spielerei halten. Dazu aber sei folgendes gesagt: Ganz abgesehen von der Wichtigkeit einer gemeinschaftlichen Theorie der Polyeder und ihrer Klassifikationen nach verschiedenen Gesichtspunkten ist Brückners Arbeit bedeutungsvoll als eine Fundgrube für dankbare Uebungsaufgaben der darstellenden Geometrie, zur Uebung in der Kunst des räumlichen Vorstellens, besonders zur Uebung in der Methode der reciproken Transformation (Dualismus). Von besonderer Wichtigkeit ist der Zusammenhang mit der Theorie der Kugelteilung, die für den Raum von derselben Wichtigkeit ist, wie die Kreisteilung für die Ebene. Die Kreisteilung hängt aber seit Gauss in wunderbarer Weise mit der Zahlentheorie zusammen, und so fragt es sich denn, ob nicht auch von der Kugelteilung aus Brücken nach jenem Gebiete geschlagen werden könnten. Jeder der dargestellten Körper bietet aber das schönste Uebungsbeispiel für die Theorie der konformen Abbildung auf die ein- oder mehrblättrige Kugel, was in der Regel auf elliptische und ultraelliptische Funktionen führen wird. Von fast jeder solchen Aufgabe ist eine Förderung der Funktionentheorie zu erwarten, die Lösungen selbst aber werden stets von besonderer Eleganz sein, da die Körper und ihre Flächen besondere Arten von Regelmässigkeit und Symmetrie zeigen.

Aus der Reihe der angedeuteten Dinge dasjenige ausfindig zu machen, was elementarer Behandlung zugänglich ist, dürfte eine dankenswerte Aufgabe sein.

Besonders schöne Aufgaben für wissenschaftliche Programmbeilagen werden sich von nachstehenden Gesichtspunkten aus ergeben: Wir besitzen mathematische Konstruktionen stereoskopischer Bilder aus der Stereometrie von A. Brude (Verlag von J. Maier in Stuttgart) und von Hugel (Neustadt a. d. H. 1876). Man kann mit Hülfe des Stereoskopes die kompliziertesten Gestaltungen leicht räumlich auffassen. Es geht aber auch ohne Stereoskop. Hält man nämlich das Doppelbild nahe an die Augen, und akkomodiert man die letzteren aufs Unendliche (Schielen nach aussen), so sieht man statt der beiden Bilder zunächst vier. Es gelingt nach einiger Uebung leicht, die beiden inneren zur Deckung zu bringen und so zu fixieren, dass man das stereoskopische Bild frei im Raume schweben sieht. Der Versuch ist von Wichtigkeit für die physiologische Optik. Deshalb habe ich in meiner Stereometrie Bd. I (bei Göschen erschienen) die betreffende Konstruktion für das regelmässige Zwölf- und Zwanzigflach durchgeführt (vergl. die beiden Schlusstafeln). Besonders die Hugelschen Bilder über die Poinsotschen und die mit ihnen verwandten Körper erleichtern die Vorstellung jener Gebilde ausserordentlich. Sowohl die mathematische Konstruktion für einige der bei Brückner gegebenen Körper im stereoskopischen Doppelbild, als auch die Doppelphotographie entsprechender Drahtmodelle, die allerdings in saubersten Arbeit hergestellt sein müssen, würden manche würdige Programmbeilage geben. Auch die Zeichnung der Körpernetze, wie sie Wiener für die Poinsotschen Körper in seiner Schrift über Vielecke und Vielflache giebt (Leipzig bei Teubner 1864) ist eine dankbare Aufgabe.

Aber warum ist ein Gebiet, dessen Fruchtbarkeit ich anzudeuten gesucht habe, bisher so abseits von der Heerstrasse geblieben? Jedenfalls deshalb, weil es „nur ein geometrisches ist" und weil augenblicklich die Hauptarbeit der massgebenden Kräfte sich dem Ausbau der höheren Arithmetik und Algebra, der reinen Zahlentheorie und der Funktionentheorie, widmet. Ist doch selbst Lie, dessen wunderbares Transformationstalent ganz neue Gebiete eröffnet und sogar die Lehre von den Differentialgleichungen und die Funktionentheorie in fruchtbarster Weise beeinflusst hat, nicht einmal Mitglied einer gewissen Akademie geworden, welche die von geometrischer Seite kommenden Anregungen ablehnend zu behandeln pflegt. (Ueberhaupt scheint man in Norddeutschland mehr arithmetisch, in Süddeutschland und Oesterreich mehr geometrisch zu arbeiten.) Prof. Klein hat vor der übertriebenen Arithmetisierung gewarnt. Vielleicht wird durch seinen anregenden Vortrag und ebenso durch das Brücknersche Werk bewirkt, dass die Raumlehre wieder stärker in den Vordergrund tritt. Gerade jetzt, wo die Einführung des neuen Faches angewandte Mathematik einschliesslich der darstellenden Geometrie die Universitäten auf die letztere hingedrängt hat (vergl. Strassburg, Jena, Göttingen, Breslau) ist das schöne bei Brückner zu findende Uebungsmaterial willkommen zu heissen.

Wir können dem Verfasser und dem Verleger nur Glück und dem Buche selbst die weiteste Verbreitung wünschen. Dr. Holzmüller.

* * *

Ritter, August, Lehrbuch der höheren Mechanik. — Leipzig 1899, Baumgärtner. Erster Teil: Lehrbuch der analytischen Mechanik. Dritte Auflage. Mit 224 Textfiguren. XIV und 314 Seiten, Preis 8 M. Zweiter Teil: Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik. Dritte Auflage. Mit 612 Textfiguren. XV und 653 S. Preis 16 M.

Die beiden hier in dritter Auflage vorliegenden Bücher ergänzen das von demselben Verfasser herausgegebene „Lehrbuch der technischen Mechanik", das die ohne Kenntnis der Infinitesimal-Analysis zu bewältigenden Probleme der Mechanik behandelt, durch Behandlung der Abschnitte der Mechanik, für deren gehöriges Verständnis die eben gedachte Kenntnis die unerlässliche Voraussetzung bildet. Das erste der beiden Bücher umfasst den allgemeinen Teil der Mechanik, gegliedert in die drei Abschnitte: Geometrische Bewegungslehre; Mechanik des materiellen Punktes; Mechanik des Systems von materiellen Punkten, welch letztere auf das mit Hilfe des Arbeitsbegriffes ausgedrückte und bewiesene Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gegründet ist. Das zweite, speziell die Fachstudien der Ingenieurwissenschaften berücksichtigende Buch behandelt in neun Abschnitten die Theorie der elastischen Linie, die Theorie der Abscherungskräfte, Berechnung des Material-Aufwandes für Blech- und Gitter-Brücken, Theorie des Widerstandes gegen Zerknickung, Biegungstheorie krummer Balken, Theorie des Erddruckes und Berechnung der Futtermauern, Theorie der Stützlinien und Berechnung der Gewölbe, Hydraulik und mechanische Wärmetheorie.

Neu gegen die bisherigen Auflagen sind im ersten Teil u. a. die Theorie des Hodographen, Bewegung auf schiefen Ebenen mit Luftwiderstand, Theorie der vom Verfasser sogenannten „Verfolgungskurve", im zweiten Teil sind eine Reihe von Abschnitten, die sich bereits in den früheren Auflagen finden, erweitert und umgearbeitet.

Bei einem Buche, das, wie dieses aus der Praxis des Unterrichts an einer Technischen Hochschule hervorgegangen ist und seine Brauchbarkeit durch die Neuauflage erweist, sind zum Urteil in erster Linie die Männer berufen, auf deren Bedürfnisse das Buch in der Hauptsache berechnet ist, also die Ingenieure. Immerhin darf man konstatieren, dass auch der Unterricht an den auf den Hochschulbesuch vorbereitenden Schulen, auch an den Gymnasien, die eine immer zunehmende Anzahl von Schülern zu dem Studium der technischen Fächer entlassen, von dem in diesen Büchern niedergelegten, durch Klarheit und Uebersichtlichkeit der Darstellung ausgezeichneten Material mancherlei Nutzen ziehen kann. Und zwar gilt das nicht nur von dem theoretischen Teil, der naturgemäss für den Unterricht an allgemeinen Bildungsanstalten eine grössere Bedeutung besitzt, sondern auch von dem praktischen, aus dem sich manche Einzelheiten z. B. des vierten Abschnittes in einer für die Bedürfnisse des Gymnasialunterrichtes geeigneten elementaren Form verwerten lassen. Wenn ich mir im übrigen ein Urteil erlauben darf, so möchte ich erstens die Stoffverteilung zum Teil beanstanden. So sehr ich begreife, wie der Verfasser dazu gekommen ist, das gesamte Material der mechanischen Wärmetheorie in einheitlichem Zusammenhange als einen Abschnitt der Ingenieur-Mechanik zur Darstellung zu bringen, so wenig kann ich doch gewisse meteorologische, namentlich kosmische Sachverhältnisse, deren Erörterung gerade in der Neuauflage eine Erweiterung und Vertiefung erfahren hat, zu den Dingen rechnen, die den Ingenieur als solchen besonders angehen. Bei den in der Neuauflage des ersten Teiles hinzugekommenen Partien sind mir einige Einzelheiten aufgefallen — erstens die Beibehaltung des angeblich aus der Erfahrung stammenden Satzes, dass der Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit annähernd proportional sei, während dieser Satz doch vielmehr der Ausfluss einer theoretischen Erwägung ist, die auf thatsächlich niemals vollkommen, meist jedoch sehr unvollkommen erfüllten Voraussetzungen beruht. Bei der sogenannten Verfolgungskurve, die der Verfasser nur für den Fall der geradlinigen Bewegung des verfolgten Körpers untersucht, wird überflüssiger Weise die Voraussetzung gemacht, dass beide Körper, der verfolgte und der verfolgende sich in gleichförmiger Bewegung befinden; in Wahrheit braucht vielmehr nur vorauszusetzen, dass die Längen der von beiden zurückgelegten Bahnen ein konstantes Verhältnis haben; mit welcher Geschwindigkeit sie diese Längen zurücklegen, ist gleichgültig. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abel, N. H., Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 111). Leipzig 1900, Engelmann. Mk. —.90 kart.

Arendt, R., Technik der Experimental-Chemie. Anleitung zur Ausführung chemischer Experimente. 3. Aufl. Mit 878 Holzschn. u. 1 Tafel. Hamburg 1900, Voss. Mk. 20.—.

Bagnoli, E., Trattato delle Corde nel circolo.

—„— Geometria rettilinea e curvilinea. Rom, Loescher & Co.

Cauchy, A. L., Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. Herausgegeb. v. P. Stäckel. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 112). Leipzig 1900, Engelmann. Mk. 1.25 kart.

Chun, C., Aus den Tiefen des Weltmeeres. Schilderungen von der deutschen Tiefsee-Expedition. Jena 1900, Fischer, Lfg. 3/4 à Mk. 1.50.

Dressel, L., Elementares Lehrbuch der Physik nach den neuesten Anschauungen. 2. Aufl. 1. Abt. mit 200 Fig. 2. Abt. mit 389 Fig. Freiburg 1900. Herder Mk. 15.—.

Haacke, W. u. Kuhnert, W., Das Tierleben der Erde. 3 Bände. Mit 120 Illustr. u. 120 Tafeln. 40 Lief. zu je 1 Mk. 4. u. 5. Lfg. Berlin 1900, Oldenbourg.

van't Hoff, J. H., Die Gesetze des chemischen Gleichgewichts für den verdünnten, gasförmigen oder gelösten Zustand. Herausg. v. Georg Bredig. Mit 7 Fig. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 110). Leipzig 1900, Engelmann, Mk. 1.60 kart.

Kleiber, Joh., Lehrbuch der Physik. Mit Fig. u. Uebungsaufgaben. München 1900, Oldenbourg. Mk. 4.— geb.

Koppe's Anfangsgründe der Physik mit Einschluss der Chemie und mathematischen Geographie. 22. Aufl. Ausg. B in 2 Lehrgängen. Bearb. von Prof. Dr. Husmann. I. Teil: Vorbereitender Lehrgang mit 173 Holzschn. II. Teil: Hauptlehrgang mit 310 Holschn. und einer farb. Sternkarte. Essen 1900, Baedeker. I. Teil: Mk. 2.40 geb. II. Teil: Mk. 4.80. geb.

Anzeigen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.