ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 39 Mechanika z.8 1961

RYSZARD GRYBOŚ

Katedra Mechaniki Technicznej

# BELKA WSPÓŁPRACUJĄCA Z POWŁOKĄ WALCOWĄ O PROFILU OTWARTYM

Streszczenie: Rozważono przypadek cienkościennej powłoki walcowej o profilu otwartym, wzmocnionej na brzegach prostoliniowych dwoma belkami o jednakowej sztywności. Belki te są obciążone również w sposób jednakowy. Zagadnienie roziązano przy pomocy rozwinięcia zarówno funkcji naprężeń jak i innych funkcji pomocniczych w szeregi wg funkcji własnych belki swobodnie drgającej. Dzięki temu na brzegach krzywoliniowych powłoki oraz na końcach belek można przyjmować dowolne warunki podparcia. Przykład liczbowy, podany w zakończeniu ilustruje "usztywniające" działanie powłoki, która na ogół przejmuje znaczną część obciążenia przyłożonego do belek.

## Wstęp

W związku z badaniami teoretycznymi nad niebezpieczną odkształcalnością kołnierzy korpusów pewnego typu turbin parowych wyłoniło się zagadnienie, które przy nieodzownej w takich przypadkach idealizacji rzeczywistych warunków można sformułować następująco:

Dana jest powłoka walcowa o profilu otwartym, na brzegach prostoliniowych wzmocniona dwoma masywnymi belkami o stałym przekroju. Obciążenie przyłożone jest wyłącznie do obu tych belek w sposób symetryczny*), przy czym zakłada się, że płaszczyzna tego obciążenia pokrywa się z płaszczyzną główną belki i jest równoległa do prostoliniowych brzegów powłoki. Należy wyznaczyć stan naprężenia i odkształcenia w belce.

*) Tzn. obie belki obciążone są jednakowo.

We wspomnianym na wstępie przypadku turbiny, belka spełnia rolę kołnierza, a powłoce odpowiada płaszcz korpusu.

Na rys.1 przedstawiono przyjęty model takiego układu. Współrzędnymi punktów powłoki są: kąt środkowy $\beta$, mierzony od osiowej płaszczyzny symetrii oraz odległość $x$ mierzona od brzegu krzywoliniowego. W dalszym ciągu posługiwać się będziemy zasadniczo współrzędną względną $\alpha = x/R$

Z belką związany jest prostokątny układ współrzędnych $x,y,z$ którego początek leży w środku symetrii przekroju poprzecznego belki.

Dla uniknięcia zbytniej komplikacji zagadnienia przyjęto przegubowy sposób połączenia powłoki z belką, przy czym oś przegubu leży w płaszczyźnie $x,z$ tj, w płaszczyźnie obciążenia belki. Na brzegach krzywoliniowych powłoki oraz na końcach belek można przyjąć dowolne, tym niemniej jednakowe dla obu współpracujących elementów warunki podparcia.

Ponadto przyjmuje się następujące założenia:

1) belki i powłoka wykonane są z jednakowego materiału, który traktować będziemy jako jednorodny i izotropowy,

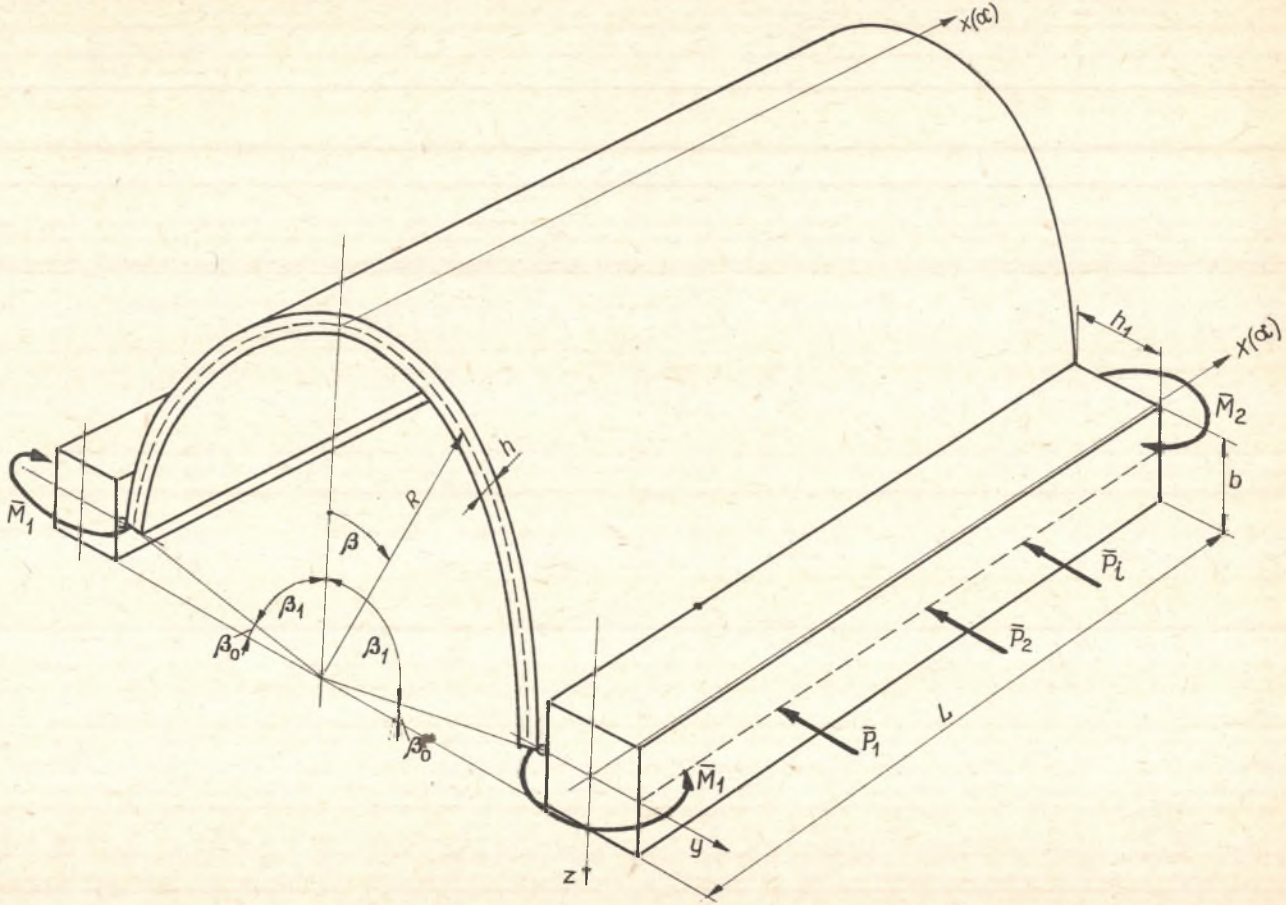
2) powłoka należy do kategorii cienkościennych w znaczeniu używanym w technicznej teorii powłok,

3) rozważa się zagadnienie wewnętrznie i zewnętrznie liniowe zarówno w odniesieniu do powłoki jak i do belki,

4) zarówno belki jak i powłoka posiadają jednakową i stałą temperaturę we wszystkich punktach.

## 1. Przemieszczenie prostoliniowych brzegów powłoki

1.1. W momencie obciążenia pomiędzy belką i powłoką powstaje pewne oddziaływanie ciągłe o natężeniu $p = p(x)$, które dla belki ma charakter reakcji podłoża sprężystego, zaś dla powłoki jest obciążeniem brzegów prostoliniowych. Aby wyznaczyć stan odkształcenia belki należy zatem rozważyć zagadnienie pomocnicze, polegające na określeniu przemieszczeń prostoliniowego brzegu powłoki, wywołanych obciążeniem $p(x)$.


x(α)
x(α)
$h_1$
$\bar{M}_2$
b
$\bar{P}_l$
$\bar{P}_2$
$\bar{P}_1$
L
$\bar{M}_1$
y
z
$\bar{M}_1$
h
R
β
$\beta_1$
$\beta_1$
$\beta_0$
$\beta_0$

Rys. 1

Ponieważ rozważa się przypadek jednakowego obciążenia obu belek, przeto i stan odkształcenia powłoki będzie symetryczny względem płaszczyzny $\beta = 0$.

Rozważane zagadnienie brzegowe, wg technicznej teorii cienkich powłok [1] sprowadza się do całkowania następującego równania różniczkowego

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)^2 \frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} = 0 \qquad (1)$$

gdzie $c^2 = \frac{h^2}{12R^2}$.

Warunki brzegowe dla funkcji naprężeń $\Phi(\alpha,\beta)$ omówione zostaną nieco później.

Całkę ogólną tego równania przyjmiemy w postaci

$$\Phi(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\beta) \cdot X_n''(\alpha) \qquad (2)$$

gdzie $X_n(\alpha)$ jest funkcją własną drgań swobodnych belki, spełniającą równanie

$$X_n^{IV} - \lambda_n^4 X_n = 0 \qquad (3)$$

oraz zadane warunki podparcia krzywoliniowych brzegów powłoki $\alpha = 0$ i $\alpha = L/R$. Warunki te określają postać funkcji $X_n(\alpha)$, które można znaleźć w literaturze (np. [1] tabl.21 str.534). $\lambda_n = \frac{R}{L} m_n$; $m_n$ oznacza wartość własną.

Przecinkiem u góry, wzgl. rzymską cyfrą oznaczać będziemy różniczkowanie podług odpowiedniej współrzędnej.

1.2. Celem określenia funkcji $Y_n(\beta)$ należy dokonać podstawienia szeregu (2) do równania (1); wykorzystując warunek ortogonalności funkcji własnych (wzgl. ich drugich pochodnych) otrzymujemy nieskończenie wiele niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych

$$Y_n^{VIII}(\beta) + 2Y_n^{VI}(\beta) + Y_n^{IV}(\beta) + \varkappa_n Y_n(\beta) = 0 \quad (n=1,2,\ldots,\infty)$$

$$\varkappa_n = \frac{\lambda_n^4}{c^2},$$

których całka ogólna ma postać

$$Y_n(\beta) = \sum_{i=1}^{8} C_i \, Y_{ni}(\beta) \tag{4}$$

$C_i$ - stałe całkowania.

Całki szczególne $Y_{ni}(\beta)$ można podzielić na funkcje nieparzyste:

$$\left.\begin{aligned} Y_{n1}(\beta) &= \operatorname{ch} r_n\beta \cdot \sin s_n\beta \\ Y_{n3}(\beta) &= \operatorname{sh} r_n\beta \cos s_n\beta \\ Y_{n5}(\beta) &= \operatorname{ch} \bar{r}_n\beta \sin \bar{s}_n\beta \\ Y_{n7}(\beta) &= \operatorname{sh} \bar{r}_n\beta \cos \bar{s}_n\beta \end{aligned}\right\} \tag{5.1÷4}$$

funkcje parzyste:

$$\left.\begin{aligned} Y_{n2}(\beta) &= \operatorname{ch} r_n\beta \cos s_n\beta \\ Y_{n4}(\beta) &= \operatorname{sh} r_n\beta \sin s_n\beta \\ Y_{n6}(\beta) &= \operatorname{ch} \bar{r}_n\beta \cos \bar{s}_n\beta \\ Y_{n8}(\beta) &= \operatorname{sh} \bar{r}_n\beta \sin \bar{s}_n\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.1÷4}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2}\sqrt{A_n - 1 + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}} \\ s_n &= \frac{1}{2}\sqrt{-(A_n - 1) + \sqrt{(A_n - 1)^2 + B_n^2}} \\ \bar{r}_n &= \frac{1}{2}\sqrt{-(A_n + 1) + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}} \\ \bar{s}_n &= \frac{1}{2}\sqrt{A_n + 1 + \sqrt{(A_n + 1)^2 + B_n^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7.1÷4}$$

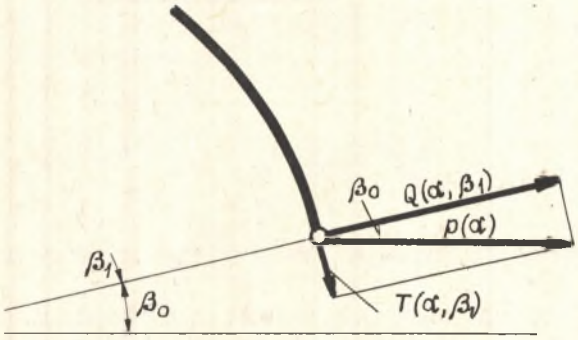
$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 16\,\varkappa_n}} \\ B_n &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16\,\varkappa_n}} \end{aligned}\right\} \tag{8.1÷2}$$

1.3. Celem wyznaczenia stałych całkowania $C_i$ ($i = 1,2,\ldots,8$) należy ustalić osiem warunków brzegowych.

Na brzegu prostoliniowym $\beta = +\beta_1$, rzutując występujące tam obciążenie ciągłe $p(\alpha)$ na kierunki: promieniowy oraz obwodowy (rys.2) otrzymamy dwa niejednorodne warunki statyczne:

$$Q(\alpha, \beta_1) = p(\alpha).\cos\beta_o \tag{9.1}$$

$$T(\alpha, \beta_1) = p(\alpha).\sin\beta_o . \tag{9.2}$$




Rys.2.

Załóżmy dalej, że belka ma swobodę odkształcania się jedynie w płaszczyźnie obciążenia, tj. w płaszczyźnie $x,y$.

A zatem składowe przemieszczenia brzegu prostoliniowego powłoki muszą czynić zadość równaniu (rys.3)

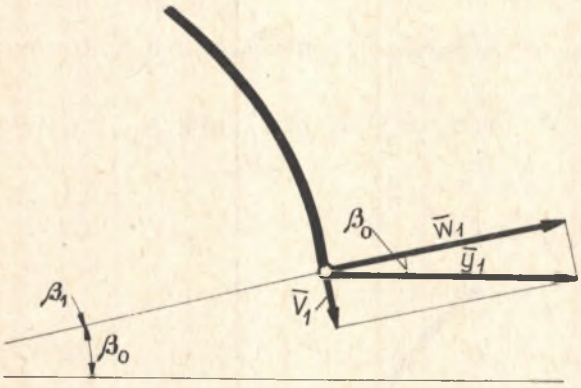
$$\frac{v(\alpha, \beta_1)}{w(\alpha, \beta_1)} = \mathrm{tg}\,\beta_o,$$

względnie

$$w(\alpha, \beta_1)\mathrm{tg}\,\beta_o - v(\alpha, \beta_1) = 0 . \tag{9.3}$$

Ponadto zakłada się, że punkty brzegowe powłoki nie doznają przemieszczeń w kierunku osiowym

$$u(\alpha, \beta_1) = 0. \qquad (9.4)$$




Rys.3

Na brzegu prostoliniowym mamy więc cztery warunki brzegowe.

Ze względu na założoną symetrię obciążenia rozważany stan naprężenia i odkształcenia powłoki będzie symetryczny względem płaszczyzny osiowej $\beta = 0$. Na tworzącej środkowej będą się zatem zerować: przemieszczenie styczne, kąt obrotu, siła styczna i poprzeczna

$$v(\alpha, 0) = \vartheta(\alpha, 0) = S(\alpha, 0) = Q(\alpha, 0) = 0. \quad (10.1 \div 4)$$

Mamy zatem łącznie osiem warunków brzegowych.

1.4. Znajomość funkcji własnej $X_n(\alpha)$, w powiązaniu z równaniami (5) i (6) określa jednoznacznie postać funkcji naprężeń $\Phi(\alpha, \beta)$, zgodnie z formułą (4). W dalszym ciągu można już łatwo wyprowadzić wzory na składowe stanu odkształcenia i naprężenia powłoki:

$$\left.\begin{aligned}
u(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\beta)\cdot X_n'(\alpha) & S(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\beta)\cdot X_n'''(\alpha)\\
v(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\beta)\cdot X_n(\alpha) & T(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\beta)\cdot X_n(\alpha)\\
w(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\beta)\cdot X_n(\alpha) & Q(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\beta)\cdot X_n(\alpha)\\
\vartheta(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\beta)\cdot X_n(\alpha) & M(\alpha,\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\beta)\cdot X_n(\alpha)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

przy czym funkcje $U_n(\beta),\ldots, M_n(\beta)$ wyrażone przez $Y_n(\beta)$ dane są np. w [1] (tabl.20 str.532-533). Korzystając z tej tablicy możemy przystąpić do wyznaczenia stałych całkowania.

Zauważmy przedtem jeszcze, że na tworzącej $\beta = 0$ zgodnie z równaniami (5) i (6) jest

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{n1}(0) = Y_{n3}(0) = Y_{n4}(0) = Y_{n5}(0) = Y_{n7}(0) = Y_{n8}(0) = 0\\
&Y_{n2}(0) = Y_{n6}(0) = 1.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Zgodnie z powyższym warunki brzegowe (10) dają kolejno:

$$C_1 r - C_3 s - C_5 \bar{r} + C_7 \bar{s} = 0$$

$$(\bar{r}^2 + \bar{s}^2)(C_1 s - C_3 r) + (r^2 + s^2)(C_5 \bar{s} - C_7 \bar{r}) = 0$$

$$(\bar{r}^2 + \bar{s}^2)(C_1 r + C_3 s) - (r^2 + s^2)(C_5 \bar{r} - C_7 \bar{s}) = 0$$

$$C_1 r + C_3 s + C_5 \bar{r} + C_7 \bar{s} = 0.$$

W równaniach tych opuszczono indeks $n$ przy współczynnikach $r, s, \bar{r}, \bar{s}$, oraz przy stałych c. Powyższy układ równań jako jednorodny względem stałych $C_1$, $C_3$, $C_5$, $C_7$, przy dowolnych wartościach $r, s, \bar{r}, \bar{s}$ posiada jedynie rozwiązanie trywialne

$$C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = 0 \tag{13}$$

1.5. Przedstawmy w dalszym ciągu reakcję $p(\alpha)$ w postaci podobnej do szeregów (11):

$$p(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot X_n(\alpha), \tag{14}$$

przy czym współczynnik Fouriera

$$P_n = \frac{\int_0^{L/R} p(\alpha) \cdot X_n(\alpha) d\alpha}{\int_0^{L/R} X_n^2(\alpha) d\alpha} \tag{15}$$

jest na razie wielkością nieokreśloną, ponieważ nie znamy samej funkcji $p(\alpha)$.

Warunek (9.1), z uwzględnieniem rozwinięcia (11) i (14) przyjmie postać

$$\sum_{n}^{\infty} Q_n(\beta_1) \cdot X_n(\alpha) = \cos \beta_0 \sum_{n}^{\infty} P_n \cdot X_n(\alpha). \tag{16}$$

Pomnóżmy obustronnie powyższe równanie przez $X_n(\alpha) d\alpha$ oraz scałkujmy w granicach od 0 do $L/R$. Wykorzystując warunek ortogonalności funkcji własnych

$$\int_0^{L/R} X_i(\alpha) \cdot X_j(\alpha) d\alpha = \delta_{ij} \cdot C$$

gdzie $\delta_{ij}$ - symbol Kroneckera
C - norma funkcji własnej

otrzymujemy zamiast (16)

$$Q_n(\beta_1) = P_n \cdot \cos\beta_o \,. \tag{17.1}$$

W analogiczny sposób z równania (9.2) wynika

$$T_n(\beta_1) = P_n \cdot \sin\beta_o \,. \qquad )17.2)$$

Ten ostatni warunek można sprowadzić do postaci jednorodnej, po wyrugowaniu współczynnika $P_n$ za pomocą równania poprzedniego, wtedy otrzymuje się

$$Q_n(\beta_1)\, tg\,\beta_o - T_n(\beta_1) = 0. \tag{17.2'}$$

Jeżeli z kolei funkcje $Q_n$, $T_n$ wyrazimy przez $Y_{ni}(\beta)$, korzystając przy tym ze wzorów podanych w [1] (tabl.20) to związki powyższe przybierają postać następującą

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_n^4\big[C_2(rY_3 - sY_1) + C_4(rY_1 + sY_3) + C_6(\bar{r}Y_7 - \bar{s}Y_5) + \\ + C_8(\bar{r}Y_5 + \bar{s}Y_7)\big] = P_n \cos\beta_o \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

$$\left.\begin{aligned} C_2\big[(stY_1 - (r^2-s^2)Y_2 - rtY_3 + 2rsY_4)\big] + C_4\big[-rtY_1 - 2rsY_2 - stY_3 \\ -(r^2-s^2)Y_4\big] + C_6\big[\bar{s}tY_5 - (\bar{r}^2-\bar{s}^2)Y_6 - \bar{r}tY_7 + 2\bar{r}\bar{s}Y_8\big] + \\ + C_8\big[-\bar{r}tY_5 - 2\bar{r}\bar{s}Y_6 - \bar{s}tY_7 - (\bar{r}^2 - \bar{s}^2)Y_8\big] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

gdzie $t = tg\beta_o$, $Y_i = Y_{ni}(\beta)$.

1.6. Warunek (9.3), po podstawieniu szeregów

$$v(\alpha, \beta_1) = \sum V_n(\beta_1) . X_n(\alpha) \tag{19.1}$$

$$w(\alpha, \beta_1) = \sum W_n(\beta_1) . X_n(\alpha) \tag{19.2}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} V_n(\beta_1) = \sqrt{\varkappa_n}\,\frac{R}{Eh}\Big[C_2(rY_1+sY_3) - C_4(rY_3-sY_1)-C_6(\bar{r}Y_5+\bar{s}Y_7)+ \\ + C_8(\bar{r}Y_7-\bar{s}Y_5)\Big] \end{aligned}\right\} \tag{20.1}$$

$$\left.\begin{aligned} W_n(\beta_1) = \sqrt{\varkappa_n}\,\frac{R}{Eh}\Big\{C_2\big[(r^2-s^2)Y_4+2rsY_2\big]- C_4\big[(r^2 - s^2)\,Y_2 - \\ - 2rsY_4\big] - C_6\big[(\bar{r}^2-\bar{s}^2)Y_8+2\bar{r}\bar{s}Y_6\big]+ C_8\big[(\bar{r}^2-\bar{s}^2)Y_6-2\bar{r}\bar{s}Y_8\big]\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

prowadzi do równania następującego

$$\begin{aligned} C_2\big[-rY_1 + 2rstY_2 - sY_3 + t(r^2-s^2)Y_4\big]+ C_4\big[- sY_1 - t(r^2-s^2)Y_2+ \\ +rY_3+2rstY_4\big]+ C_6\big[\bar{r}Y_5-2\bar{r}\bar{s}tY_6+\bar{s}Y_7-t(\bar{r}^2-\bar{s}^2)Y_8\big]+ C_8\big[\bar{s}Y_5 + \\ + t(\bar{r}^2-\bar{s}^2)Y_6 - \bar{r}Y_7 - 2\bar{r}\bar{s}tY_8\big] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Wreszcie warunek (9.4) daje

$$C_2Y_4 - C_4Y_2 - C_6Y_8 + C_8Y_6 = 0. \tag{22}$$

Równania (18), (21) i (22) pozwalają wyrazić stałe $C_{2i}$ $(i=1,2,3,4)$ przez współczynniki $P_n$ rozwinięcia (14); ze względu na złożoną budowę tych związków odnośne dzia-

łania najlepiej jest wykonywać wprost na liczbach szczegółowych. Należy przy tym pamiętać, że określone w ten sposób cztery stałe całkowania dotyczą jednego tylko wyrazu szeregu (2). A zatem zachowanie każdego członu w tym szeregu pociąga za sobą konieczność rozwiązywania układu czterech równań algebraicznych (liniowych). Z tego względu najczęściej poprzestajemy na wyznaczeniu dwóch względnie trzech wyrazów szeregu (2), uzyskując w ten sposób wystarczającą dla praktyki dokładność obliczeń.

Dotychczas zajmowaliśmy się warunkami dla brzegu $\beta = \beta_1$. Można jednakże łatwo wykazać*), że analogiczny układ równań otrzymuje się również dla drugiego brzegu prostoliniowego $\beta = -\beta_1$.

Ugięcie $y_1$ brzegu powłoki leży - zgodnie z założeniem w płaszczyźnie głównej obu belek, będącej równocześnie płaszczyzną obciążenia. Z rysunku 3 wynika jasno

$$y_1 = \frac{v_1}{\sin \beta_0}, \tag{23}$$

przy czym $v_1 = v(\alpha, \beta_1)$ określone jest wzorami (19.1) i (20.1).

## 2. Ugięcie belki złączonej przegubowo z powłoką

### Wyznaczanie współczynników Fouriera

2.1. Ugięcie $y_0$, jakiego doznałaby belka oddzielona od powłoki, wobec znajomości obciążenia (a tym samym momentu zginającego) można określić za pomocą równania

$$R^{-2} EJ_z y_0(\alpha) = -\int d\alpha \int M_g(\alpha) d\alpha + D_1 \alpha + D_2, \tag{24}$$

przy czym stałe całkowania $D_1$, $D_2$ należy wyznaczyć w zależności od przyjętych dla belki warunków brzegowych. $EJ_z$ - sztywność zginania belki.

*) Dowód pomijamy.

W dalszym ciągu funkcję $y_0(\alpha)$ rozwiniemy w szereg wg funkcji własnych, ponieważ dla belki przyjmujemy analogiczne warunki brzegowe jak dla krzywoliniowych brzegów powłoki; piszemy zatem

$$y_0(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot X_n(\alpha) \tag{25}$$

gdzie

$$G_n = \frac{\int_0^{L/R} y_0(\alpha) \cdot X_n(\alpha) d\alpha}{\int_0^{L/R} X_n^2(\alpha) d\alpha} \tag{26}$$

Również ugięcie $y(\alpha)$ belki współpracującej z powłoką przedstawimy w postaci następującego szeregu

$$y(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot X_n(\alpha) \tag{27}$$

przy czym współczynnik $H_n$ pozostaje na razie nieokreślony. Tak więc w równaniach (23) i (27) występują dwa niewiadome współczynniki $P_n$ i $H_n$. Postaramy się je wyrazić przez znany współczynnik $G_n$ szeregu (25).

2.2. Jeżeli ugięcia zarówno belki jak i brzegu powłoki skierowane w kierunku dodatniej osi $y$ uważać będziemy za dodatnie, to dla funkcji $y$, $y_0$, $y_1$ możemy napisać następujący warunek nierozdzielności przemieszczeń

$$y = y_0 - y_1. \tag{28}$$

Podstawiając tutaj szeregi (27), (25) oraz (19.1) otrzymujemy

$$\sum_n^{\infty} H_n X_n(\alpha) = \sum_n^{\infty} G_n X_n(\alpha) - \frac{1}{\sin\beta} \sum_n^{\infty} V_n \cdot X_n(\alpha), \tag{29}$$

gdzie

$V_n \equiv V_n(\beta_1)$ określone jest wzorem (20.1).

Jeżeli następnie na równaniu powyższym przeprowadzimy operację matematyczną podobną do tej, jakiej dokonano przy wyprowadzaniu równań (17), to otrzymamy następujący związek pomiędzy współczynnikami Fouriera

$$(H_n - G_n)\sin\beta_o + V_n = 0. \tag{30}$$

Zauważmy, że w równaniu tym występują obie niewiadome $H_n$ i $P_n$, przy czym ta ostatnia zawarta jest we współczynniku $V_n$ poprzez występujące tam stałe $C_{2i}=C(P)$ (por. wzór (20.1)).

Drugi związek pomiędzy tymi niewiadomymi wynika z faktu, że w rozważanym przypadku powłoka odgrywa dla belki rolę podłoża sprężystego. Ponieważ jego reakcja określona jest funkcją $p(x)$, a poza tym wg założenia na belkę nie działa obciążenie ciągłe*) przeto mamy następujące równanie [3]

$$EJ_z \frac{d^4y}{dx^4} = - p(x). \tag{31}$$

Przechodząc do współrzędnej bezwymiarowej $\alpha=x/R$ możemy napisać

$$\frac{d^4y}{d\alpha^4} + k^4.p(\alpha) = 0 \tag{31.1}$$

gdzie

$$k^4 = \frac{R^4}{EJ_z}. \tag{32}$$

---

*) Uwzględnienie obciążenia ciągłego o natężeniu $q(x)$ nie nastręcza zasadniczych trudności. W tym celu po prawej stronie równania (31) należałoby dodać wyrażenie $-q(x)$, a w dalszym ciągu zastosować rozwinięcie $q(\alpha) = \sum_n^{\infty} Q_n.X_n(\alpha)$ gdzie $Q_n$ określone jest wzorem podobnym do wzoru (15).

Z kolei należy podstawić tu szeregi (27) i (14); otrzymamy wtedy

$$\sum_{n}^{\infty} H_n \cdot X_n^{IV}(\alpha) + k^4 \sum_{n}^{\infty} P_n \cdot X_n(\alpha) = 0.$$

Wykorzystując dalej równanie (3), przepisane w postaci

$$X_n^{IV}(\alpha) = \lambda_n^4 X_n(\alpha)$$

otrzymujemy po wykonaniu prostych działań poszukiwany związek

$$\lambda_n^4 H_n + k^4 P_n = 0 \tag{33}$$

Tak więc łącznie z zależnością (30) dysponujemy dwoma równaniami do wyznaczenia współczynników $H_n$ i $P_n$. Tym samym rozważane zagadnienie jest zasadniczo rozwiązane.

2.3. Pozostaje tylko jeszcze wyznaczyć moment zginający, jaki wystąpi w belce współpracującej z powłoką. Posiłkujemy się w tym celu równaniem osi odkształconej

$$M_g(\alpha) = -\frac{EJ_z}{R^2} \cdot \frac{d^2y}{d\alpha^2} .$$

Podstawiając tutaj szereg (27) znajdujemy ostatecznie

$$M_g(\alpha) = -\frac{EJ_z}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n''(\alpha) . \tag{34}$$

## 3. Przykład liczbowy

3.1. Dana jest powłoka walcowa, stalowa ($E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm$^2$) o następujących danych: kąt rozwarcia $2\beta_1 = 150^0$ ($\beta_1 = 1{,}309$ rd), promień powierzchni środkowej $R = 70$ cm długość $L = 110$ cm, grubość $h = 7$ cm.*) Powłoka wzmocniona jest na brzegach prostoliniowych dwoma belkami o wymiarach przekroju poprzecznego: $b = 27$ cm, $h = 26$ cm Brzegi krzywoliniowe powłoki oraz końce belek są podparte przegubowo. Obciążenie stanowią dwie siły skupione $Q$ przyłożone w środku rozpiętości każdej belki. Należy wyznaczyć maksymalny moment zginający w belkach.

3.2. Obliczenia dotyczące pierwszego wyrazu ($n=1$) szeregu (2). W rozważanym przypadku obustronnego przegubowego podparcia funkcja własna ma postać

$$X_n(\alpha) = \sin \lambda_n \alpha$$

gdzie $\lambda_n = \frac{n\pi R}{L}$.

Jest zatem

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1^4}{c^2} = \left(\frac{\pi R}{L}\right)^4 \cdot \frac{12R^2}{h^2} = 19200$$

$A_1 = 16{,}66$ $\quad r_1 = 3{,}10$ $\quad s_1 = 1{,}34$

$B_1 = 16{,}65$ $\quad \bar{r}_1 = 1{,}29$ $\quad \bar{s}_1 = 3{,}24$

---

*) Powłoka o grubości względnej $h/R = 1/10$ zasadniczo nie może być traktowana jako cienkościenna. Przytoczone dane dotyczą jednak konkretnego przypadku, dla którego podanie rozwiązania ścisłego, tj. w ujęciu teorii powłok grubościennych byłoby zbyt uciążliwe i nieprzydatne do obliczeń praktycznych. Mimo więc tego zastrzeżenia podany przykład spełnia zadanie ilustracji toku obliczeń podanej tu metody.

Wartości całek szczególnych $Y_{1i}(75^{\circ})$:

$Y_1 = 29{,}004 \cdot 0{,}985 \cong 28{,}60$ $\quad Y_5 = -2{,}802 \cdot 0{,}891 = -2{,}495$

$Y_2 = -29{,}03 \cdot 0{,}1736 \cong -5{,}04$ $\quad Y_6 = -2{,}802 \cdot 0{,}454 = -1{,}271$

$Y_3 = -29{,}014 \cdot 0{,}1736 \cong -5{,}04$ $\quad Y_7 = -2{,}6175 \cdot 0{,}454 = -1{,}188$

$Y_4 = 29{,}014 \cdot 0{,}985 \cong 28{,}60$ $\quad Y_8 = -2{,}6175 \cdot 0{,}891 = -2{,}330.$

Układ równań (18.1), (18.2), (21), (22) ma postać

$$895\, C_2 - 1353\, C_4 - 109\, C_6 + 117{,}2\, C_8 = P_1$$

$$283\, C_2 - 204\, C_4 - 32{,}5\, C_6 - 5{,}53\, C_8 = 0$$

$$-33{,}1\, C_2 + 20{,}3\, C_4 - 9{,}74\, C_6 + 3{,}81\, C_8 = 0$$

$$28{,}6\, C_2 + 5{,}04\, C_4 + 2{,}33\, C_6 - 1{,}271\, C_8 = 0.$$

Jego rozwiązaniem są następujące wartości stałych całkowania:

$C_2 = 2{,}280 \cdot 10^{-4}\, P_1$ $\quad C_6 = 8{,}90 \cdot 10^{-4}\, P_1$

$C_4 = -2{,}153 \cdot 10^{-4}\, P_1$ $\quad C_8 = 50{,}4 \cdot 10^{-4}\, P_1$.

Obliczamy dalej wg (20.1): $V_1(\beta_1) = 0{,}334 \cdot 10^{-4}\, P_1$.
Równanie (30) daje

$$H_1 - G_1 + 1{,}29 \cdot 10^{-4}\, P_1 = 0,$$

zaś z (33) wynika: $H_1 = -0{,}200 \cdot 10^{-4} P_1$. Eliminując z tych równań $P_1$ znajdujemy $H_1 = -0{,}1834\, G_1$.
Z kolei obliczamy wartość współczynnika $G_1$ (wzór 26).
Moment zginający belkę swobodną określa równanie

$$M_g^{o}(\alpha) = \frac{1}{2} QR\alpha,$$

a zatem równanie osi ugiętej belki (swobodnej) ma postać

$$\frac{d^2 y_o}{d\alpha^2} = -\frac{QR}{2K}\alpha$$

gdzie $K = EJ_z/R^2$. Po dwukrotnym scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych znajdujemy

$$y_o(\alpha) = \frac{QR}{12K}\left(\frac{L}{R}\right)^2 \alpha - \alpha^3.$$

Obliczamy dalej

$$\int_0^{L/R} y_o(\alpha)\, X_1(\alpha)\, d\alpha = \frac{QR}{12K}\int_0^{L/R}\left[\left(\frac{L}{R}\right)^2 \alpha - \alpha^3\right]\sin\lambda_1\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{QR}{12K}\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{L}{R}\right)^4 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{L}{R}\right)^2 + \frac{6}{\pi^3}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right] = 0{,}262\,\frac{QL}{4K}$$

$$\int_0^{L/R} X_1^2(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{L/R}\sin^2\lambda_1\alpha\, d\alpha = \frac{L}{2R} = 0{,}785;$$

a zatem

$$G_1 = \frac{0{,}262}{0{,}785}\cdot\frac{QL}{4K} = 0{,}334\,\frac{QL}{4K}$$

$$H_1 = -0{,}06125\,\frac{QL}{4K}.$$

3.3. Z uwagi na symetrię obciążenia oraz podparcia belki, w szeregu (2) należy zachować jedynie człony odpowiadające nieparzystym wartościom $n$; a zatem następny człon wyznaczymy dla $n = 3$.
Stałe całkowania w tym przypadku mają wartości następujące:

$$C_2 = 2{,}311\cdot 10^{-8}\,P_3 \qquad C_6 = 1256\cdot 10^{-8}\,P_3$$

$$C_4 = -0{,}404\cdot 10^{-8}\,P_3 \qquad C_8 = -704\cdot 10^{-8}\,P_3$$

zaś $H_3 = -0{,}1951\,G_3$.

Z kolei znajdujemy $G_3 = 0{,}01188 \frac{QL}{4K}$, a następnie

$$H_3 = -\,0{,}00232 \frac{QL}{4K}.$$

Wzór (34), z uwagi na przyjętą postać funkcji własnej można napisać w postaci

$$M_g(\alpha) = K \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \lambda_n^2 H_n X_n(\alpha).$$

Zachowując dwa wyrazy tego szeregu, znajdujemy po podstawieniu

$$M_g(\alpha) = -(2^2.0{,}06125 \sin \frac{\pi R}{L}\alpha + 6^2.0{,}00232 \sin \frac{3\pi R}{L}\alpha)\frac{QL}{4}$$

W połowie rozpiętości belki (tj. dla $\alpha = L/2R$) będzie

$$M_g(L/2R) = -\,(0{,}2445-0{,}0835)\frac{QL}{4} = -\,0{,}161\frac{QL}{4}.$$

Wynika stąd, że maksymalny moment zginający w belce współpracującej z powłoką stanowi tylko ~ 16% analogicznego momentu dla belki samodzielnej. Jest to rezultatem "usztywniającego" działania powłoki. Na podstawie orientacyjnych obliczeń można przypuszczać, że uwzględnienie następnego wyrazu w szeregu (2) (tj. dla $n = 5$) podwyższyłoby tę liczbę do ~ 18%.

## LITERATURA

[1] В. З. Власов — Общая теория оболочек — Москва 1949.

[2] Л. В. Канторович, В. И. Крылов — Приближенные методы высшего анализа — Москва 1952.

[3] M.T.Huber - Stereomechanika Techniczna t.II - W-wa 1951

## Балка совместно работающая с цилиндрической оболочкой открытого профиля

Рассмотрено случай тонкостенной цилиндрической оболочки открытого профиля, укрепленной на прямолинейных краях двумя балками одинаковой жесткости. Балки эти нагружены одинаково. Задача решена при помощи разложения в ряды, как функции напряжений, так и других вспомагательных функции согласно собственным функциям свободновибрирующей балки. Благодария этому на криволинейных краях оболочки, а также на коньцах балок можно применять произвольные условия закрепления. Цифровой пример, поданный в коньце работы, иллюстрирует „придавание жесткости" оболочке, которая вообще принимает на себя значительную часть нагрузки, приложенной к балкам.

## A beam, collaborating with the cylindrical shell of an open profile

A case of thin walled cylindrical shell with an open profile reinforced at the straightlined edges by two beams of the same rigidity was being considered. These beams were also loaded in the same way. The problem was solved by means of the development of both stress function and other auxiliary functions into series of proper functions of a beam that vibrates freely. Thanks to that we can accept any support conditions at the edges of curvolinear shells and at the ends of beams. The number example, given at the end of the paper, illustrates the "stiffening" action of a shell, that takes generally a great part of a beam load.