ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 39 Mechanika z.8 1961

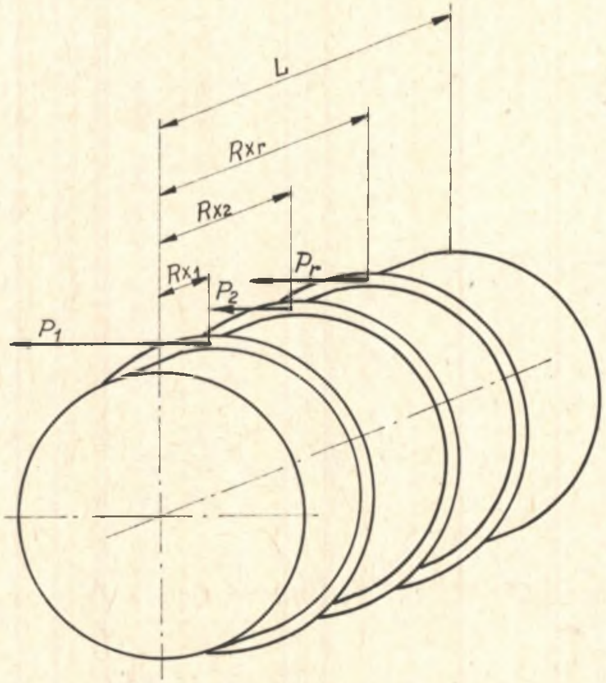
BOGDAN SKALMIERSKI

Katedra Mechaniki Technicznej

POWŁOKA WALCOWA OBCIĄŻONA POPRZEZ PIERŚCIENIE*)

Wstęp

W niniejszej publikacji zostanie podane rozwiązanie ścisłe zagadnienia powłoki walcowej na brzegach przegubowo zamocowanej i obciążonej poprzez pierścienie.



Rys.1

*) Referat wygłoszony w dniu 4 października 1960 r. na sesji naukowej Wydziału Mechanicznego (sekcja mechaniki technicznej) z okazji XV-lecia Politechniki Śląskiej.

Pod słowem "ścisłe" będziemy rozumieli akcent, iż rozważania będą przeprowadzone w oparciu o możliwie najściślejsze układy równań różniczkowych, a więc taki, który zawiera najmniejszą ilość uproszczeń. Jest to ten sam układ, z którego autor skorzystał w artykule poprzednim (por. [1]). W ten sposób również oznaczenia pozostają takie same, jak również sposób przyjęcia wielkości wewnętrznych i układów współrzędnych.

1. Rozważania wstępne

Równania równowagi elementu połwoki wyrażone w przemieszczeniach zostały podane na str. 36 i 37 pracy [1]. Pierścień, poprzez który przenosi się obciążenie na powłokę, będziemy traktować jako pręt słabo zakrzywiony. Równania równowagi takiego pręta wyrażone w przemieszczeniach są

$$D_{11} V + D_{12} W = - p_z$$
$$D_{21} V + D_{22} W = - q_z \tag{1}$$

gdzie operatory D_{ik}

$$D_{11} = \left(\frac{AE}{R^2} + \frac{EI}{R^4}\right) \frac{d^2}{d\varphi^2}$$

$$D_{12} = \frac{AE}{R^2} \frac{d}{d\varphi} - \frac{EI}{R^4} \frac{d^3}{d\varphi^3} \tag{2}$$

$$D_{21} = - D_{12}$$

$$D_{22} = - \left(\frac{EI}{R^4} \frac{d^4}{d\varphi^4} + \frac{AE}{R^4}\right);$$

tu p_z - obciążenie styczne

q_z - obciążenie normalne

Równania różniczkowe (1) poz. [1] i (1) można przekształcić następująco:
układ (1) poz. [1]

$$
\begin{aligned}
L_{11}\, u &= X - L_{12}\, V - L_{13}\, W \\
\Omega\, v &= G_v\, Z + F_v\, Y + K_v\, X \\
\Omega\, w &= G_w\, Z + F_w\, Y + K_w\, X
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

i układ (1) przy wprowadzeniu

$$
a_i = \frac{A_i\, E_i}{R^2} \quad \text{i} \quad b_i = \frac{E_i\, I_i}{R^4}
$$

dla i - tego pręta

$$
D\, V_i = -\frac{p_{iz}}{b_i} - \frac{1}{a_i}\,\frac{d^4\, p_{iz}}{d\varphi^4} - \frac{1}{b_i}\,\frac{d\, q_{iz}}{d\varphi} + \frac{1}{a_i}\,\frac{d^3\, q_{iz}}{d\varphi^3} \qquad (4)
$$

$$
D\, W_i = \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right)\frac{d^2\, q_{iz}}{d\varphi^2} + \frac{1}{b_i}\,\frac{d\, p_{iz}}{d\varphi} - \frac{1}{a_i}\,\frac{d^3\, p_{iz}}{d\varphi^3}
$$

W układach powyższych poszczególne operatory mają postać

$$\Omega = \nu(1+\nu)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}\left\{1 - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left\{1 - \right.$$

$$\left. - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\}^2 - \nu^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + c^2\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (1 + c^2\nabla^4)\left\{\frac{1-\nu}{2}\nabla^4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\} \qquad (5)$$

$$G_v = \begin{vmatrix} L_{13} & L_{23} \\ L_{11} & L_{21} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\nu\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{1 - c^2\left[(2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\}\right\} \qquad (6)$$

$$G_w = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\nu}{2} \nabla^4 + c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \times$$

$$\times \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \tag{7}$$

$$F_v = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{31} & L_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(1 + c^2 \nabla^2 \nabla^2 \right) - \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tag{8}$$

$$F_w = \begin{vmatrix} L_{12} & L_{32} \\ L_{11} & L_{31} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \nu \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ 1 - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} \right\} \tag{9}$$

$$K_v = \begin{vmatrix} L_{23} & L_{33} \\ L_{21} & L_{31} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi} \left\{ \nu \left\{ 1 - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1+\nu}{2} (1 + c^2 \nabla^4) \right\} \tag{10}$$

$$K_w = \begin{vmatrix} L_{32} & L_{22} \\ L_{31} & L_{21} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \left\{ 1 - c^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \right\} - \right.$$

$$-\nu \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \right.$$

$$\left. \left. + c^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \right\} \right\} \tag{11}$$

$$D = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right)^2 \tag{12}$$

Operatory (7) - (11) jak widać, są dopełnieniami algebraicznymi wyznacznika

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} = \Omega$$

2. Rozwiązanie równań (3)

Powłoka została odkształcona pod wpływem oddziaływania pierścieni. Ze względu na sposób obciążenia samego pierścienia (równolegle do osi) i sposób zamocowania brzegów powłoki, można przewidzieć i poszukiwać rozwiązania na funkcje przemieszczeń V i W w formie:

$$\left.\begin{aligned} V &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} V_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi \\ W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} W_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{gdy } n = 0 \quad m \geqslant 1 \\ 1 & \text{gdy } n \geqslant 1 \quad m \geqslant 1 \end{cases}$$

Wstawiając (13) do dwóch ostatnich równań układu (3) otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \lambda_{mn} \Omega_{mn} V_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \operatorname{con} n\varphi &= G_v Z + F_v Y \\ \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} \lambda_{mn} \Omega_{mn} W_{mn} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi &= G_w Z + F_w Y \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

tu

$$\Omega_{mn} = \nu(1+\nu) \frac{m^2 n^2 \pi^2}{l^2} \left\{1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} -$$

$$-\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) n^2 \left\{1+c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\}^2 -$$

$$-\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2 + c^2\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} \cdot x$$

$$x\, \nu^2 \frac{m^2\pi^2}{l^2} + \left[1 + c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2\right] x$$

$$x \left\{\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2 +\right.$$

$$\left. + c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2\right)\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right\} \quad (15)$$

Prawe strony powyższego układu nie zawierają składowej X, gdyż zakłada się, że każdy pręt oddziaływuje na powłokę tylko promieniowo i obwodowo, tzn.

$$X = 0$$

Pozostałe oddziaływania można wyrazić następująco:
styczne

$$q_2 = \sum_{i=1}^{r} p_{pi} = - \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{R \Delta x_i} \tag{16}$$

i normalne

$$q_n = \sum_{i=1}^{r} q_{pi} = - \sum_{i=1}^{r} \frac{q_1}{R \Delta x_1}$$

Obciążenie to działa w obszarze pasów równoleżnikowych przylegania r pierścieni, z których wszystkie względnie część będzie obciążona stycznie.

p_i i q_i można wyrazić za pomocą szeregów

$$p_i = \sum_{n}^{\infty} \lambda_n p_{in} \cos n\varphi$$

$$q_i = \sum_{n}^{\infty} \lambda_n q_{in} \sin n\varphi \tag{17}$$

Ażeby jednak obciążenia były wyrażone w podwójnych szeregach Fouriera, należy je pomnożyć przez jedynkę rozwiniętą na szerokości i - tego pasa

wg $\sin \frac{m\pi\xi}{l}$

$$1 = \sum_{m}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi\xi}{l}$$

$$b_m = \frac{2}{l} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \, d\xi =$$

$$= \frac{2\Delta x_i}{l} \sin \frac{m}{2l} (2x_i + \Delta x_i) \frac{\sin \frac{m\pi\Delta x_i}{2l}}{\frac{m\pi\Delta x_i}{2l}}$$

a zatem:

$$p_{pi} = -\frac{p_i}{R\Delta x_i} =$$

$$= -\sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} \frac{2\, p_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi}{2\,l} (2\, x_i + \Delta x_i) \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{m\pi \Delta x_i}{2\,l}}{\frac{m\pi\Delta x_i}{2\,l}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi ;$$

i
$$q_{pi} = -\frac{q_i}{R\Delta x_i} =$$

$$= -\sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} \frac{2\, q_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi}{2\,l} (2\, x_i + \Delta x_i) \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{m\pi \Delta x_i}{2\,l}}{\frac{m\pi\Delta x_i}{2\,l}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi ;$$

Dla małych Δx_i będzie:

$$\left.\begin{aligned} p_{pi} &= -\sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} \frac{2\, p_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi \\ q_{pi} &= -\sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} \frac{2\, q_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

W ten sposób:

$$Y = R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \sum_{i=1}^r \lambda_{mn} \frac{2\,p_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n\varphi$$

$$Z = -R^2 \frac{1-\nu^2}{E\delta} \sum_m^\infty \sum_n^\infty \sum_{i=1}^r \lambda_{mn} \frac{2\,q_{imn}}{L} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi$$

Wstawiając (19) do (14) i upraszczając otrzymuje się:

$$\Omega_{mn} V_{mn} = 2 \frac{R^2}{L} \frac{1-\nu^2}{E\delta} \times$$

$$\times \left(-G_{vmn} \sum_{i=1}^r q_{imn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} + F_{vmn} \sum_{i=1}^r p_{imn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right)$$

$$\Omega_{mn} W_{mn} = 2 \frac{R^2}{L} \frac{1-\nu^2}{E\delta} \times$$

$$\times \left(-G_{wmn} \sum_{i=1}^r q_{imn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} + F_{wmn} \sum_{i=1}^r p_{imn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \right) \tag{20}$$

Współczynniki występujące w równaniach są następujące:

$$G_{vmn} = n\left\{\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left(1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right) - \nu\frac{1+\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right\} \tag{21}$$

$$G_{wmn} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2 + c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\cdot\left[2(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right] \tag{22}$$

$$F_{vmn} = -\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left[1 + c^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right)^2\right] + \nu^2\frac{m^2\pi^2}{l^2} \tag{23}$$

$$F_{wmn} = n\left\{\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left(1 + c^2\left[(2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{l^2} + n^2\right]\right) - \nu\frac{1+\nu}{2}\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right\} \tag{24}$$

Jak widać $G_{vmn} = F_{wmn}$

3. Warunki nierozdzielności przemieszczeń

Z układu (20) nie można bezpośrednio wyznaczyć współczynników V_{mn} i W_{mn} ponieważ p_{imn} i q_{imn} są nieznane. Wielkości te można będzie określić z warunków nierozdzielności powłoka - pierścienie. Stan odkształcenia pierścieni- które traktujemy jako pręty słabo - zakrzywione, można określić w oparciu o równania (4). Rozwiązania będziemy poszukiwać w formie:

$$\left.\begin{aligned} V_i &= \sum_n^{\infty} \lambda_n V_{in} \cos n\varphi \\ W_i &= \sum_n \lambda_n W_{in} \sin n\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

natomiast obciążenia, na które składać się będzie obciążenie samych prętów oraz oddziaływanie powłoki, można przedstawić następująco:

$$\left.\begin{aligned} p_{iz} &= \sum_n^{\infty} \lambda_n p_{izn} \cos n\varphi \\ q_{iz} &= \sum_n \lambda_n q_{izn} \sin n\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Wstawiając (25) i (26) do (4) otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} &- n^2 (n^2 - 1)^2 V_{in} = - \frac{1}{b_i} p_{izn} - \frac{n^4}{a_i} p_{izn} - \frac{1}{b_i} n\, q_{izn} - \\ &- \frac{n^3}{a_i} q_{izn} \\ &- n^2 (n^2 - 1)^2 W_{in} = -\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right) n^2 q_{izn} - \frac{1}{b_i} n\, p_{izn} - \\ &- \frac{1}{a_i} n^3 p_{izn} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Wyliczając V_{in} i W_{in} oraz wstawiając je do (25) będzie:

$$V_i = \sum_n^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2 (n^2-1)^2} \left[\left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^4}{a_i} \right) p_{izn} + n \left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^2}{a_i} \right) q_{izn} \right] \text{con } n\varphi$$

$$W_i = \sum_n^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2 (n^2-1)} \left[n \left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^2}{a_i} \right) p_{izn} + \right. \tag{28}$$

$$\left. + n^2 \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right) q_{izn} \right] \sin n\varphi$$

Prawe strony (28) nie zmienią swojej wartości jeżeli pomnożymy je przez

$$1 = \sum_m b'_m \sin \frac{m\pi\xi}{l}$$

tu

$$b'_m = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{m\pi\xi}{l} \, d\xi = \frac{4}{\pi m} \sin^2 \frac{m\pi}{2}$$

Po dokonaniu operacji otrzymuje się:

$$V_i = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{4 \lambda_{mn} \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{\pi mn^2 (n^2 - 1)^2} \left[\left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^4}{a_i} \right) p_{izmn} + \right.$$

$$\left. + n \left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^2}{a_i} \right) q_{izmn} \right] \sin \frac{m\pi x_i}{l} \cos n\varphi \tag{29}$$

$$W_i = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \frac{4\lambda_{mn}\sin^2\frac{m\pi}{2}}{\pi mn^2(n^2-1)^2}\left[n\left(\frac{1}{b_i}+\frac{n^2}{a_i}\right)p_{izmn} + \right.$$

$$\left. + n^2\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{b_i}\right)q_{izmn}\right]\sin\frac{m\pi x_i}{l}\sin n\varphi \qquad (29)$$

Tymczasem przemieszczenia powłoki w tych samych miejscach odpowiednio wniosą

$$\left.\begin{aligned} V_i &= \sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} V_{mn}\sin\frac{m\pi x_i}{l}\cos n\varphi \\ W_i &= \sum_m^\infty \sum_n^\infty \lambda_{mn} W_{mn}\sin\frac{m\pi x_i}{l}\sin n\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Ze względu na zgodność przemieszczeń prawe strony równań (29) i (30) muszą być sobie odpowiednio równe. Stąd wynika, że

$$\left.\begin{aligned} V_{mn} &= A_{vmn}\,p_{izmn} + B_{vmn}\,q_{izmn} \\ W_{mn} &= A_{wmn}\,p_{izmn} + B_{wmn}\,q_{izmn} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

gdzie:

$$A_{vmn} = \frac{4\sin^2\frac{m\pi}{2}}{\pi mn^2(n^2-1)^2}\left(\frac{1}{b_i}+\frac{n^4}{a_i}\right) \qquad (32)$$

$$B_{vmn} = A_{wmn} = \frac{4 \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{\pi mn^2 (n^2 - 1)^2} \, n \left(\frac{1}{b_i} + \frac{n^2}{a_i} \right)$$

$$B_{wmn} = \frac{4 \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{\pi mn^2 (n - 1)^2} \, n^2 \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right) \tag{32}$$

Wyliczając p_{izmn} i q_{izmn} z układu (31) otrzymuje się:

$$p_{izmn} = A_{pimn} V_{mn} + B_{pimn} W_{mn}$$
$$q_{izmn} = A_{qimn} V_{mn} + B_{qimn} W_{mn} \tag{33}$$

tu

$$A_{pimn} = \frac{\pi a_i \cdot b_i \cdot m}{4 \sin^2 \frac{m\pi}{2}} \, n^2 \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right)$$

$$B_{pimn} = A_{qimn} = - \frac{\pi a_i \cdot b_i \cdot m}{4 \sin^2 \frac{m\pi}{2}} \, n \left(\frac{n^2}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right) \tag{34}$$

$$B_{qimn} = \frac{\pi a_i \cdot b_i \cdot m}{4 \sin^2 \frac{m\pi}{2}} \left(\frac{n^4}{a_i} + \frac{1}{b_i} \right)$$

4. Funkcje przemieszczeń

Do wyznaczenia funkcji W i V potrzebna jest znajomość współczynników W_{mn} i V_{mn}. Współczynniki te można wyznaczyć z układu (20) przy udziale (33).

Pamiętając, że na obciążenie i-tego pręta (pierścienia) składa się obciążenie zewnętrzne i reakcja powłoki można napisać:

$$p_{izmn} = p^{*}_{in} + p_{imn}$$

$$q_{izmn} = q^{*}_{in} + q_{imn}$$

stąd:

$$\left.\begin{aligned} p_{imn} &= p_{izmn} - p^{*}_{in} \\ p_{imn} &= q_{izmn} - q^{*}_{in} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

albo uwzględniając (33)

$$\left.\begin{aligned} p_{imn} &= A_{pimn} V_{mn} + B_{pimn} W_{mn} - p^{*}_{in} \\ q_{imn} &= A_{qimn} V_{mn} + B_{qimn} W_{mn} - q^{*}_{in} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Wprowadzając (36) do układu (20) otrzymuje się

$$\Omega_{mn} V_{mn} = - K G_{vmn} \sum_{i=1}^{r} (A_{qimn} V_{mn} + B_{qimn} W_{mn}) \sin \frac{m\pi x_i}{l} +$$

$$+ K F_{vmn} \sum_{i=1}^{r} (A_{pimn} V_{mn} + B_{pimn} W_{mn}) \sin \frac{m\pi x_i}{l} +$$

$$+ K G_{vmn} \sum_{i=1}^{r} q^{*}_{in} \sin \frac{m\pi x_i}{l} - K F_{vmn} \sum_{i=1}^{r} p^{*}_{in} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \tag{37a}$$

$$\Omega_{mn} W_{mn} = - K G_{wmn} \sum_{i=1}^{r} (A_{qimn} V_{mn} + B_{qimn} W_{mn}) \sin \frac{m\pi x_i}{l} +$$

$$+ K F_{wmn} \sum_{i=1}^{r} (A_{pimn} V_{mn} + B_{pimn} W_{mn}) \sin \frac{m\pi x_i}{l} +$$

$$+ K G_{wmn} \sum_{i=1}^{r} q^*_{in} \sin \frac{m\pi x_i}{l} - K F_{wmn} \sum_{i=1}^{r} p^*_{in} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \qquad (37b)$$

tu

$$K = 2 \frac{R^2}{L\delta} \frac{1 - \nu^2}{E} . \qquad (38)$$

Po przekształceniach układu (37) można napisać następująco:

$$\begin{aligned} a_{11mn} V_{mn} + a_{12mn} W_{mn} &= a_{10mn} \\ a_{21mn} V_{mn} + a_{22mn} W_{mn} &= a_{20mn} \end{aligned} \qquad (39)$$

gdzie:

$$a_{11mn} = \Omega_{mn} + K G_{vmn} \sum_{i=1}^{r} A_{qimn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} -$$

$$- K F_{vmn} \sum_{i=1}^{r} A_{pimn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} ; \qquad (40a,b)$$

$$a_{12mn} = K G_{vmn} \sum_{i=1}^{r} B_{qimn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} -$$

$$- K F_{vmn} \sum_{i=1}^{r} B_{pimn} \sin \frac{m\pi x_i}{l} ;$$

$$\left.\begin{aligned} a_{21mn} &= K\,G_{wmn}\sum_{i=1}^{r} A_{qimn}\sin\frac{m\pi x_i}{l} - \\ &- K\,F_{wmn}\sum_{i=1}^{r} A_{pimn}\sin\frac{m\pi x_i}{l} \\ a_{22mn} &= \Omega_{mn} + K\,G_{wmn}\sum_{i=1}^{r} B_{qimn}\sin\frac{m\pi x_i}{l} - \\ &- K\,F_{wmn}\sum_{i=1}^{r} B_{pimn}\sin\frac{m\pi x_i}{l}\,; \end{aligned}\right\} \quad (40c,d)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{10mn} &= K\left(G_{vmn}\sum_{i=1}^{r} q^*_{in}\sin\frac{m\pi x_i}{l} - F_{vmn}\sum p^*_{in}\sin\frac{m\pi x_i}{l}\right) \\ a_{20mn} &= K\left(G_{wmn}\sum_{i=1}^{r} q^*_{in}\sin\frac{m\pi x_i}{l} - F_{wmn}\sum_{i=1}^{r} p^*_{in}\sin\frac{m\pi x_i}{l}\right) \end{aligned}\right\} (40e,f)$$

Z układu (39) z łatwością wyliczyć można V_{mn} i W_{mn}, a więc poszukiwane funkcje przemieszczeń można zapisać w formie:

$$V = \sum_{mn}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\begin{vmatrix} a_{10mn} & a_{12mn} \\ a_{20mn} & a_{22mn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11mn} & a_{12mn} \\ a_{21mn} & a_{22mn} \end{vmatrix}} \sin\frac{m\pi\xi}{l}\cos n\varphi \quad (41,a)$$

$$W = \sum_{mn}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\begin{vmatrix} a_{11mn} & a_{10mn} \\ a_{21mn} & a_{20mn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11mn} & a_{12mn} \\ a_{21mn} & a_{22mn} \end{vmatrix}} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi \tag{41b}$$

Pozostałą składową przemieszczenia u można wyznaczyć w oparciu o pierwsze równanie układu (1a) bowiem kładąc

$$u = \sum_{mn}^{\infty} \lambda_{mn} u_{mn} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi$$

otrzymuje się:

$$\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2} - \frac{1-\nu}{2} n^2\right) u_{mn} = \frac{1+\nu}{2} \frac{mn\pi}{l} V_{mn} - \frac{m\pi}{l} W_{mn}$$

stąd:

$$u_{mn} = -\frac{\left(\frac{1+\nu}{2} n V_{mn} - \nu W_{mn}\right) \frac{m\pi}{l}}{\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2}$$

czyli:

$$u = \sum_{m,n}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\nu \begin{vmatrix} a_{11mn} & a_{10mn} \\ a_{21mn} & a_{20mn} \end{vmatrix} - \frac{1+\nu}{2} n \begin{vmatrix} a_{10mn} & a_{12mn} \\ a_{20mn} & a_{22mn} \end{vmatrix}}{\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{1-\nu}{2} n^2\right) \begin{vmatrix} a_{11mn} & a_{12mn} \\ a_{21mn} & a_{22mn} \end{vmatrix}} \cdot$$

$$\cdot \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \sin n\varphi \tag{42}$$

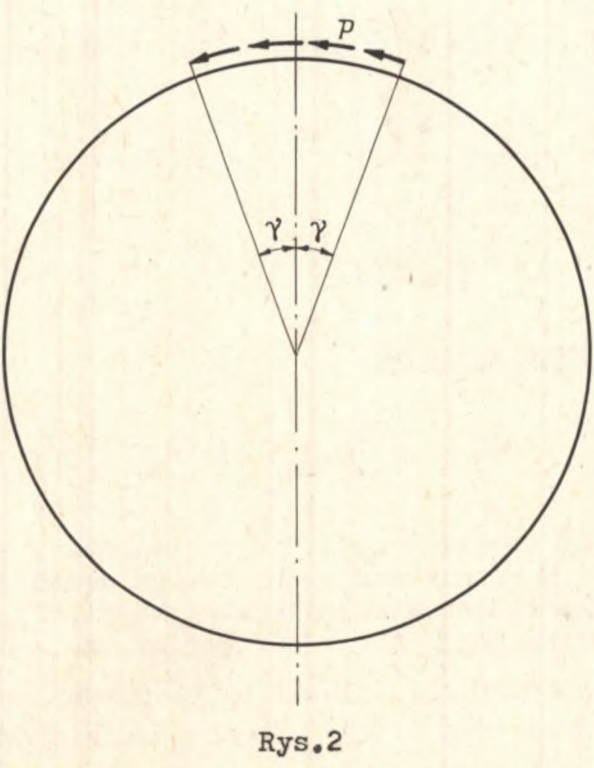
Powyższe wzory określają składowe przemieszczeń, na podstawie których można znaleźć wszystkie wielkości wewnętrzne. Współczynniki a_{10mn} i a_{20mn} zawierają q^*_{in} i p^*_{in}. Te ostatnie reprezentują obciążenie i-tego pierścienia. I tak, dla przypadku sił skupionych, zaczepionych w punkcie $\varphi = \pi$ będzie:

1) obciążenie styczne

$$p^*_i = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p^*_{in} \cos n\varphi$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad n = 0$$

$$\lambda_n = 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$



Rys.2

$$p_i^* = \frac{P_i}{2\pi\gamma R}\left[\int_{-\pi}^{-\pi+\gamma} d\varphi + \int_{\pi-\gamma}^{\pi} d\varphi\right] = \frac{P_i}{\pi R}$$

$$p_{in}^* = \frac{P_i}{2\pi\gamma R}\, 2\int_{\pi-\gamma}^{\pi} \cos n\varphi \quad d\varphi = \frac{P}{\pi n\gamma R} \sin(\gamma - \pi)\ n;$$

a zatem:

$$p_i^* = \frac{P_i}{\pi R} + \frac{2P_i}{\pi R\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n(\gamma - \pi) \cos n\varphi$$

albo

$$p_i^* = \frac{P_i}{\pi R} + \frac{2P_i}{\pi \cdot R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\gamma} \sin n\gamma \cos n\varphi$$

gdy γ dąży do zera (przypadek siły skupionej)

to

$$p_i^* = \frac{P_i}{\pi R} + \frac{2P_i}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\varphi \tag{43}$$

czyli

$$p_{in}^* = \frac{2P_i}{\pi R}(-1)^n \tag{44}$$

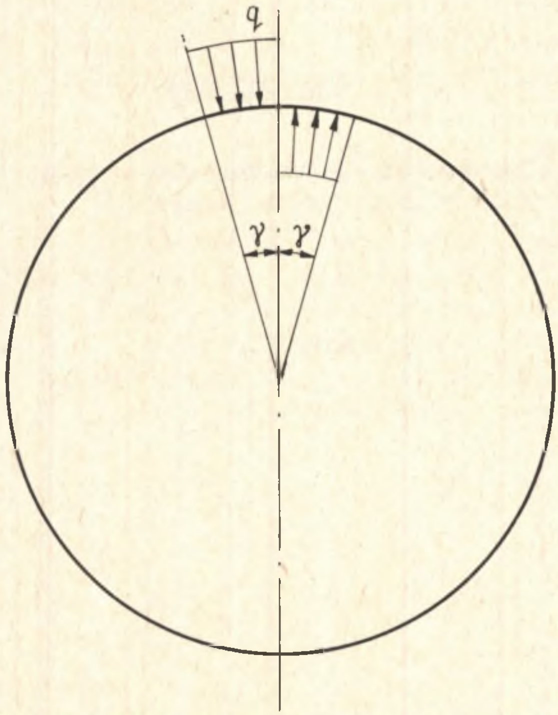
2) <u>obciążenie normalne</u>

$$q_i^* = \sum_{n=1}^{\infty} q_{in}^* \sin n\varphi$$

Obciążanie normalne musi być tak dobrane, ażeby jego działanie było równoważne z działaniem momentu, jaki wywołuje mimośrodowe działanie siły na pierścień, jeżeli siła P_i znajduje się w odległości e_i od osi pręta. Dodatnia wartość e_i - jeżeli punkt zaczepienia siły znajduje się na zewnętrznej stronie osi pierścienia.

A zatem:

$$q^*_{in} = \frac{2\,P_z}{\pi R \gamma} \int_{\pi-\gamma}^{\pi} \sin n\varphi \; d\varphi = \frac{4\,P_z}{\pi R\, n\gamma} (-1)^{n+1} \sin^2 \frac{n\gamma}{2}$$



Rys.3

Ponieważ:

$$P_z = \frac{M_i}{R\gamma} = \frac{P_i\, e_i}{R\gamma}$$

przeto:

$$q^*_{in} = \frac{P_i\, e_i\, n}{\pi R^2} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 \frac{n\gamma}{2}}{\frac{n^2 \gamma^2}{4}}$$

gdy

$$q_{in} = \frac{P_i e_i n}{\pi R^2} (-1)^{n+1} \tag{45}$$

W ten sposób problem poruszany można uważać za rozwiązany.

LITERATURA

[1] Bogdan Skalmierski: Powłoka walcowa użebrowana (praca zamieszczona w niniejszym Zeszycie).

Цилиндрическая оболочка нагруженная посредством колец

В работе разрешена проблема статики цилиндрической замкнутой оболочки с краями подпертыми шарнирно и нагруженной посредством ребер, названных автором кольцами. Решение произведено методом Фурье. Нагрузку составляют силы сосредоточенные горизонтально оси колец, находящихся в радиальных плоскостях. Принято произвольный способ расположения упомянутых элементов на длине оболочки.

A cylindrical shell loaded through rings

In the paper a statics problem was solved of a cylindrically-circular shell, with edges supported by articulated joints, loaded through ribs, which the author called rings. The solution was carried out by means of Fourier's method. The load was made by forces concentrated parallelly to the rings axis, being in the radial planes. The way of mentioned elements spacing along the shell's length was totally free.