Jahrgang VII. 1901. Nr. 1.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Herausgegeben von

Prof. Dr. B. Schwalbe,
Direktor des Dorotheenstädt. Realgymnasiums zu Berlin.

und

Prof. Fr. Pietzker,
Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Wie bereits in Nummer 3 des abgelaufenen Jahrganges zur Kenntnis der Vereinsmitglieder gebracht worden ist, wird die zehnte Hauptversammlung in der Pfingstwoche d. J. in Giessen abgehalten werden. Der Direktor des Realgymnasiums daselbst, Herr Dr. Rausch, hat den Vorsitz des dortigen Ortsausschusses übernommen.

Anmeldungen zu Vorträgen für die allgemeinen Sitzungen, wie für die Sitzungen der Fachabteilungen sind auch jetzt noch sehr willkommen. Wir bitten, sie an Herrn Direktor Rausch oder an den Hauptvorstand zu Händen von Prof. Pietzker (Nordhausen) zu richten.

Ferner werden die Vereinsmitglieder in Gemässheit des § 4 der Vereinssatzungen ersucht, den Beitrag für das laufende Vierteljahr 1901, soweit es noch nicht geschehen ist, bis zum 1. April d. J. unter Benutzung des dieser Nummer beiliegenden Postanweisungsformulars an den Vereins-Schatzmeister (Professor **Presler** in Hannover, Lindenerstrasse 47) einzusenden. Die bis dahin nicht eingegangenen Beiträge werden im Laufe des nächsten Vierteljahrs durch Postnachnahme eingezogen werden (§ 5 der Satzungen). Die Mitgliedschaft des Vereins kann auch durch eine einmalige Zahlung von 45 *M.* erworben werden (siehe die Notiz am Kopfe d. Bl.).

Zur Erleichterung für die Kassenführung, wie zur Ersparnis für die Mitglieder selbst, würde es dienen, wenn die an demselben Orte wohnenden Vereinsmitglieder ihre Beiträge zusammen in einem Posten einsenden wollten. Die ausserhalb des Deutschen Reiches wohnenden Vereinsmitglieder werden noch besonders um direkte Einsendung ersucht, um die durch Postnachnahme erwachsenden Weiterungen und Mehrkosten zu vermeiden.

Ein neues Verzeichnis der Vereinsmitglieder, deren Zahl während des vergangenen Jahres auf mehr als 900 gestiegen ist, wird voraussichtlich im Laufe des Jahres erscheinen.

Der Vereinsvorstand.

Zur Methode des mathematischen Schulunterrichts.

Von
J. Hermes (Osnabrück.)

Unter „Methode“ will ich in ursprünglicher Bedeutung des Wortes den Weg verstanden wissen, den man beim Unterrichte einschlägt, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen.

Solcher Wege wird es viele geben und dies deckt sich mit dem „Unterrichtsblätter 1895; No. 2“ erwähnten Ausspruche von F. Klein: „Wonach man jedes Semester eine andere Methode haben kann“.

Man wird aber gern in Rücksicht auf die noch nicht völlig entwickelten Kräfte der Schüler einen kurzen, vielleicht ein wenig schmalen, doch nicht zu steilen Pfad der Landstrasse vorziehn, die allerdings weitere Ausblicke und Uebersichten gestattet und für den, der ohne Führer geht, auch sicherer zum Ziele führt. Der Lehrer ist hier aber der Führer und kennt das Terrain und weiss auch in jedem Falle, was er den Kräften der Schüler zumuten kann.

Hierin ist mitenthalten, was Pietzker a. a. Ort 1899; No. 3 und 4 in seinem Aufsatze: „System und Methode im exaktwissenschaftlichen Unterricht“ an die Spitze stellt, nämlich das „psychologische Moment“.

Unser Ziel ist nun, allgemein gesprochen, freilich der durch die Mathematik vermittelte Teil der Gesamtbildung des Schülers. Es gehört dazu [und das wird im Prinzip auch nirgends bestritten!] ebensowohl A) eine gewisse Fertigkeit im Lösen von Aufgaben also im „Heuristischen“ und „Induktiven“, als auch B) die erworbene Fähigkeit, ein Lehrgebiet „systematisch“ zu durchdringen und eventuell irgend ein Resultat „deduktiv“ sicher stellen zu können, namentlich auch einen falschen Satz als solchen zu erkennen.

Spezieller gefasst ist aber unser Ziel das in den Lehrplänen angegebene, doch beabsichtige ich in diesem Aufsatze nur die daselbst auch angeführte „analytische Geometrie“ und zwar in denkbar geringstem Umfange, aber doch abgerundet, in Angriff zu nehmen.

Nicht, als ob von derselben, soweit sie im Schulunterrichte behandelt wird, eine besondere Förderung der Raumvorstellungen zu erwarten wäre, sondern, weil gerade durch sie, wie mir scheint, der Schüler von der in B) verlangten auf das „Systematische“ gerichteten Schulung das Nötigste zu gewinnen vermag.

Meine Aufgabe ist nun, den Pfad zu skizzieren, den ich hierbei einschlage und zwar abgesehen von A), der Behandlung einzelner Aufgaben, was freilich die meiste Zeit des Unterrichts beansprucht. [Einige Beispiele finden sich am Schlusse].

Wollte man nämlich B) beim Unterrichte völlig vernachlässigen, um noch mehr Zeit zu den Aufgaben zu gewinnen, so würde die Schulung eine einseitige genannt werden müssen.

Die Form mancher Sätze der analytischen Geometrie lässt es wünschenswert erscheinen, wenn die Schüler zuvor (also in UI oder OII) schon über die algebraischen Ausdrücke, die bei der Auflösung linearer Gleichungen auftreten, unterrichtet sind.

Dies sei jetzt zunächst besprochen.

I. Lineare Gleichungen.

Es wird vorausgesetzt, dass lineare Gleichungen und dazu gehörige Aufgaben bereits durchgenommen und eingeübt sind. Dann lässt sich die folgende Darstellung in drei bis vier Stunden bewältigen, die keineswegs im Gebiete der Gleichungen nützt, sondern nur anregen und für spätere Zwecke vorbereiten soll und mehr als Vortrag, wenn auch nicht ohne eingestreute Fragen zu denken ist, um Verständnis und Aufmerksamkeit zu beleben.

[Auch der Begriff eines Index muss schon bei früherer Gelegenheit (Reihen) erörtert sein, so dass: $a\ a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a'\ a''$ unterschieden und nicht im entferntesten mehr mit $a^2, a^3 \ldots$ verwechselt werden]. —

1) Können wohl die Werte der Unbekannten x und y aus folgender Gleichung $a_1 x + b_1 y = 0$ bestimmt werden?

Wird der Fall, dass $x = 0$ und zugleich $y = 0$ ist, als selbstverständlich ausgeschlossen, so könnte die Gleichung, die kein freies Glied hat, etwa so behandelt werden.

Man dividiere durch y und erhält dann für $\frac{x}{y}$ den Wert: $\frac{-b_1}{a_1}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{+b_1}{-a_1}$; es kann also nur das Verhältnis der Unbekannten zu einander ermittelt werden; $x : y = +b_1 : -a_1$. Einer der Unbekannten könnten wir einen beliebigen Wert erteilen, z. B. $x =: 1$ oder auch $y =: 1$ setzen.*)

Wir erhalten dann eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Denken wir uns in der Zeile über der Gleichung + und — geschrieben, also $\begin{cases} + \qquad\quad - \\ a_1 x + b_1 y = 0, \end{cases}$ so kann das erhaltene Resultat $x : y = +b_1 : -a_1$ so aufgefasst werden, als hätte man das + mit dem in der Diagonale stehenden b_1, das — mit dem in der anderen Diagonale befindlichen a_1 multipliziert, eine Auffassung, die im Verfolg von Nutzen sein wird, wenn wir dieses superponierte Plus und Minus nicht hinschreiben, sondern nur am ersten und zweiten Platze wirksam denken.

*) Bei Einsätzen schreibe nach dem Gleichheitszeichen ein Kolon; Bestimmungsgleichung: $x = 4$. Auflösung $x =: 4$, also $4 = 4$ identisch.

2) Wir nehmen nun zu der eben behandelten Gleichung noch die Gleichung $ax + by = 0$ hinzu, so dass wir zugleich $ax + by = 0$ und $a_1 x + b_1 y = 0$ erfüllen sollen und dabei von $x = 0$ und $y = 0$ absehen mögen. Es ist leicht einzusehen, dass ohne eine Bedingung zwischen den vier Koeffizienten nicht dasselbe Verhältnis aus jeder Gleichung erhalten werden kann; setzen wir den Wert für $\frac{x}{y}$, nämlich $\frac{+b_1}{-a_1}$ aus der unteren Gleichung in die obere ein, so wird $\frac{a \cdot b_1}{-a_1} + b = 0$ oder auch $ab_1 - ba_1 = 0$ erhalten. Es soll nun unter der Form: $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ der eben gewonnene Ausdruck: $ab_1 - ba_1$ verstanden werden, der als $+a|b_1| - b|a_1|$ gedeutet werden möge, worin $+$ und $-$ an die beiden Plätze der oberen Zeile superponiert gedacht sind und $|m| = : m$ sein soll.

Die Bedingungsgleichung wird also $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ [zwischen den Buchstaben bleibe ein Raum oder es kann auch ein Semikolon (;) gesetzt werden.]

3) Vertauschen wir die beiden gegebenen Gleichungen, $\begin{matrix} a_1 x + b_1 y = 0 \\ ax + by = 0 \end{matrix}$, so kann die Bedingungsgleichung $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ an sich keine andere geworden sein, doch dürfen die linken Seiten, also oben $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ und jetzt $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}$ noch nicht als identisch angesehen werden, denn es könnte ein Faktor hinzugetreten sein.

In der That, wie die Vergleichung des Gliedes $+ab_1$ und $-b_1 a$ zeigt, ist der Faktor: minus gewonnen.

Satz: Die Vertauschung zweier (der beiden) Zeilen bei einer zweidimensionalen Form dieser Art verändert das Vorzeichen ihres Wertes; ähnlich: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ma & mb \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}$.

4) Wären die Koeffizienten beider Gleichungen dieselben, so würde die Bedingungsgleichung $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ als Bedingung keinen Sinn haben können, die linke Seite müsste also schon an sich d. h. identisch gleich Null sein [oder auch aus 3) zu schliessen]. Satz: Sind zwei (die beiden) Zeilen einer zweidimensionalen Form die nämlichen, so ist die Form identisch Null.

5) Wir multiplizieren die gegebenen Gleichungen $\left.\begin{matrix} ax + by = 0 \mid \text{mit } \xi \\ \text{und } a_1 x + b_1 y = 0 \mid \text{mit } \eta \end{matrix}\right.$ und addieren.

Die erhaltene Gleichung $x(a\xi + a_1\eta) + y(b\xi + b_1\eta) = 0$ denken wir an Stelle der letzten Gleichung. Wir können sie erfüllen, wenn wir $\begin{matrix} a\xi + a_1\eta = 0 \\ \text{und } b\xi + b_1\eta = 0 \end{matrix}$ setzen und auflösen. Das erfordert die Bedingung $\begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = 0$; In diesem Falle bleibt nur $ax + by = 0$ allein übrig und es tritt keine weitere Bedingung hinzu. Daher muss die ursprüngliche Bedingungsgleichung $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ mit der hier erhaltenen $\begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = 0$ identisch sein, denn ein Faktor tritt nicht auf, wie die Vergleichung von ab_1 mit ab_1 zeigt. Satz: „Es können die Zeilen einer zweidimensionalen Form der Reihe nach zu Kolonnen gemacht werden, ohne den Wert der Form zu ändern".

1') Es seien die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

gegeben, die scheinbar drei, eigentlich nur zwei Unbekannte haben, man könnte $z = : 1$ setzen vgl. 1). Wir fassen $a_1 x + b_1 y$ in einen Wert m_1 und $a_2 x + b_2 y$ in den Wert m_2 zusammen, indem wir für x und y schon die gefundenen Werte eingesetzt denken.

Aus den Gleichungen:

$$\begin{matrix} m_1 + c_1 z = 0 \\ m_2 + c_2 z = 0 \end{matrix} \text{ folgt nach 2) } \begin{vmatrix} m_1 & c_1 \\ m_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{oder auch } \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y \,; & c_1 \\ a_2 x + b_2 y \,; & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder wegen der nach 5) erlaubten kolonnenweisen Berechnung und nach Umstellung der Summanden

$$\begin{vmatrix} a_1 x \,; & c_1 \\ a_2 x \,; & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 y \,; & c_1 \\ b_2 y \,; & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder auch}$$

$$x \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ und hieraus}$$

$$x : y = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$x : z$ wird sich durch Vertauschung von b mit c ergeben müssen,

$$\text{als } \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

Die gegebenen Gleichungen:
(superponiert $+ \quad - \quad +$)

$$\left\{\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{matrix}\right. \text{ haben also}$$

die Auflösung:

$$x : y : z = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2') Zu obigen Gleichungen werde $ax + by + cz = 0$ hinzugenommen.

Die Bedingungsgleichung erhält man durch Einsetzen der aus 1') gewonnenen Werte in diese letztere Gleichung; Sie wird:

$$+ a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

und die linke Seite definiert zugleich, was unter

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ bei „zeilenweiser“ Berechnung verstanden werden soll. [Das Cyklische werde auf dieser Stufe noch vermieden]. Es wird immer abwechselnd superponiertes Plus und Minus hinzugefügt, die Unterformen aber so genommen, wie sie bei Fortlassung der ersten Zeile und der jedesmaligen Kolonne übrig bleiben.

Die Bedingung ist also: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

3′) Aus der Darstellung der Form:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ als Summe betreffender zwei dimensionaler Unterformen, mit $+a$; $-b$; $+c$ der Reihe nach multipliziert, folgt schon, dass die Vertauschung zweier mit Indices versehenen Zeilen nach 3) die Form in ihren entgegengesetzten Wert übergehen lässt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch die Vertauschung der beiden ersten Zeilen dasselbe bewirkt.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ können sich analog dem Schlusse in 3) nur durch einen Faktor unterscheiden. Das Glied $a\,b_1\,c_2$ muss aber in der zweiten Form wegen des superponierten Minus: $-b_1\,a\,c_2$ sein. Also tritt der Faktor minus hinzu.

4′) und 5′) sind völlig analog 4) und 5) und die dort gegebenen Sätze sind also auch für drei dimensionale Formen giltig.

1″) Es seien die Gleichungen:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0 \text{ gegeben.}$$

Man fasst $a_1x + b_1y$ zu m_1; $a_2x + b_2y$ zu m_2 und $a_3x + b_3y$ zu m_3 zusammen und hat dann die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} m_1 & c_1 & d_1 \\ m_2 & c_2 & d_2 \\ m_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ welche in}$$

$$x \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ übergeht, also}$$

$$x : y = + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{ ergiebt,}$$

durch Vertauschung der b mit den c wird $x : z$, durch Vertauschung der c mit den d $x : u$ erhalten.

Es wird hier eine weitere Ausführung nicht von nöten sein, da sie die Schüler selbstthätig machen. Es ist klar, dass sich alle Schlüsse auf beliebig viele lineare Gleichungen ausdehnen lassen. Es möchte aber eine solche Durchführung von $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1;n-1} \end{vmatrix}$ auf $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$ nur für andere als für Schulzwecke ihren Wert haben. Auch die Multiplikation zweier Formen ist mit Gleichungen ganz einfach zu bewerkstelligen, aber auch hier glaube ich mich beim kleinsten Umfange begnügen zu müssen.

Die Schlussweise in 5) möchte allerdings schon die Bezeichnung eines schmalen Pfades, aber doch wohl noch nicht die eines zu steilen Zuganges verdienen. Im Grunde genommen sind im Vorstehenden nur Gleichungen mit zwei Unbekannten besprochen und es liesse sich daher auch alles bequem direkt verifizieren. Zahlenbeispiele müssen ebenfalls geboten werden. [Zeilenweise und kolonnenweise Berechnung].

II. Behandlung der analytischen Geometrie im Schulunterrichte.

Nach einer Vorbemerkung sollten drei Abschnitte zur Besprechung kommen, von denen der dritte die Kegelschnitte behandelt; doch will ich ihn in diesem Aufsatze fortlassen, da er sich von anderen Darstellungen hauptsächlich dadurch unterscheiden würde, dass ich eine Menge Detail übergehe, wovon einiges allerdings unter A) als Aufgabe nachgeholt wird.

Dagegen ziehe ich den Raum in die Betrachtung, weil bei geforderter, genauer Ausdehnung der für die Ebene gewonnenen Sätze auf den Raum das Interesse des Schülers erfahrungsgemäss bedeutend zunimmt und er thatsächlich so nur einen Vorteil von der neuen Disziplin verspürt, abgesehen von der graphischen Methode und den Kegelschnitten, die aber als zum zweiten Grad gehörig, erst später gelehrt werden.

Vorbemerkung.

Manche Fachgenossen sehen es als unzulässig an, einen Satz, der für einen Punkt in der Ebene des Dreiecks gilt, nur für den Fall zu beweisen, dass der Punkt etwa innerhalb des Dreiecks liegt und die Ausdehnung des Beweises zu übergehen. Prinzipiell haben sie Recht; in der Praxis aber drängt oft die Zeit so sehr, dass man, um überhaupt zu einem Abschlusse und einer Abrundung zu kommen, eine solche Zeitersparnis sich gestatten muss. Freilich möge man es nicht mit Stillschweigen übergehen, sondern die Ausdehnung nur vertagen und Sorge tragen, dass dies dem Schüler auch bewusst bleibt. Es kommt aber hierbei ein wesentliches Moment hinzu. Eine solche zeitliche Zerlegung in einen vorbereitenden Teil und in eine spätere Vervollständigung ist pädagogisch von grossem Vorteile und, wie ich glaube, anzustreben. Man nehme also $\sin(\alpha + \beta)$ für spitzen Winkel $\alpha + \beta$ durch und lasse die Ausdehnung auf die andern Quadranten für eine spätere Wiederholung zur Ergänzung übrig. Hierin unterscheidet sich namentlich der Lehrgang auf der Universität von dem auf der Schule.

Wenn ich also auch jetzt bei der analytischen Geometrie mich zuerst nur auf den ersten Quadranten (Oktanten) beziehe, so kann ich freilich das folgende nur als eine „Vorbereitung“ angesehen wissen wollen. Die Festsetzung der Halbaxen als positiv und negativ hat ja etwas Willkürliches an sich, die Beziehung auf ein rechtwinkliges System etwas Erzwungenes. Je weniger man sich bei Erörterung dieser Schwierigkeiten aufhält, desto besser scheint es mir zu sein! Freilich man biete mehrere Zahlenbeispiele und lasse die errechneten Resultate mit der Figur vergleichen. [$a - (-b) = a + b$.] Man thut auch gut, den Kreis, dessen Mittelpunkt O der Koordinatenursprung ist, gleich vorweg zu nehmen und in den 4 Quadranten zu diskutieren; man hat ja nach Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$ oder $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ oder $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 = 0$, was nachher zur Ellipse und Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ überleitet.

Auf schiefwinklige Koordinaten, Verschiebung und Drehung des Systems geht man genauer erst bei den Kegelschnitten ein.

Anfangs vermeide ich die Worte: „Abscisse, Ordinate, Koordinaten“, sogar „analytische Geometrie“, sondern spreche vom horizontalen und vertikalen Abstand, [im Raume: Front-, quer-, vertikal-] und betone nur, Teile der Figur beweglich zu denken, während die Axen fest bleiben, indem jetzt im Gegensatze zu I mehr Unbekannte als Gleichungen*) vorhanden sind [Begriff der variabeln Grössen].

Abschnitt I.

1) Vereinigte Lage von Punkt P, dessen Abstände x und y sind, und der Geraden 𝔊, die durch ihre auf den Axen erzeugten Abschnitte a und b gegeben ist. Man ziehe OP [Fig. 1]. Die Fläche des Dreiecks OAB, nämlich $\frac{1}{2}ab$ ist durch die beiden Teildreiecke ausgedrückt, $\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay$ also: $bx + ay = ab$,

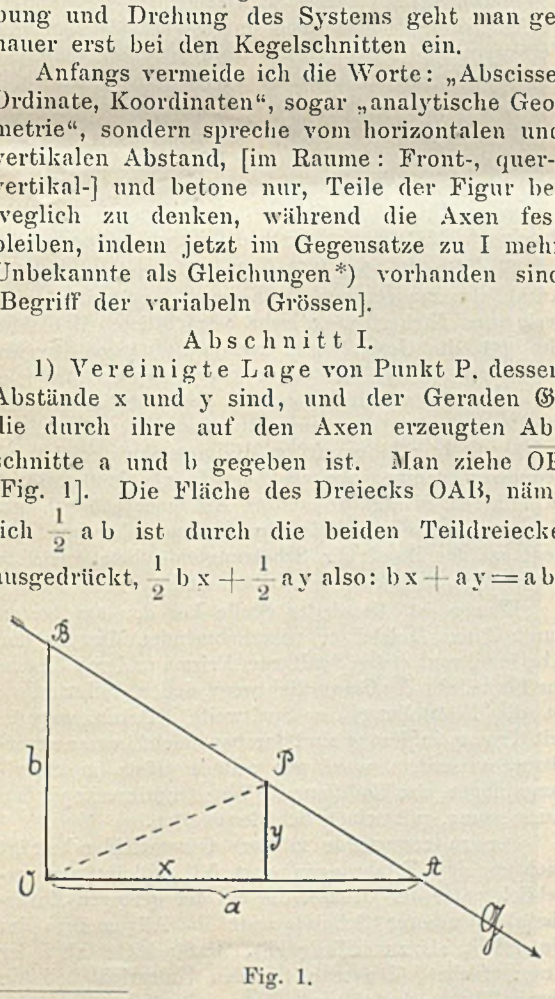

Fig. 1.

*) Dies ist auch die Stelle, eventuell Diophantische Gleichungen als Nebengebiet einzuschalten.

oder auch $-bx - ay + ab = 0$, oder auch: $\frac{-x}{a} + \frac{-y}{b} + 1 = 0$ oder auch $ux + vy + 1 = 0$, wenn $u =: \frac{-1}{a}$ und $v =: \frac{-1}{b}$ als zweckmässige Abkürzungen eingeführt werden. [Man schreibe auch an die Gerade $ux + vy + 1 = 0$ heran.]

Die allgemeine Form: $Ax + By + C = 0$ geht nach Division mit C in $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ über und in $ux + vy + 1 = 0$ wenn $u =: \frac{A}{C}$; $v =: \frac{B}{C}$ ist.

Aus $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ergiebt sich der Schnittpunkt beider Linien

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Wird $A_1x + B_1y + C_1$ durch I und $A_2x + B_2y + C_2$ durch II abgekürzt, so wird $I + \lambda II = 0$ durch den Schnittpunkt der Geraden $I = 0$ und $II = 0$ identisch erfüllt, also geht $I + \lambda II = 0$ durch diesen Schnittpukt als „Strahl“ [Strahlenbüschel].

Analog: Punktreihe und weitere Folgerungen, falls man hierbei verweilen wollte, besser erscheint es, sogleich zu 1′) überzugehen, zumal die Schüler diese Ausdehnung auf den Raum selbstthätig zu leisten pflegen. [Das „Dualistische“ werde erst später bei Repetitionen erwähnt.]

1′) Vereinigte Lage von Punkt P [Abstände x; y; z] und Ebene E, die auf den Axen die Abschnitte a; b; c bildet. Man ziehe PO; AP; BP; CP Fig. 2. Das Tetraeder OABC

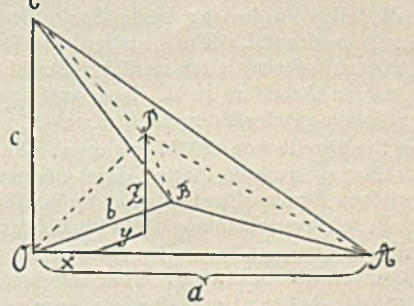

Fig. 2.

zerfällt in 3 Teiltetraeder; hieraus $\frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}abz + \frac{1}{6}cay + \frac{1}{6}bcx$, schliesslich $ux + vy + wz + 1 = 0$, wenn $u =: -\frac{1}{a}$; $v =: -\frac{1}{b}$; $w =: -\frac{1}{c}$ eingeführt werden etc.

(Fortsetzung folgt.)

Eine einfache Methode der Bestimmung der Wellenlängen des Lichtes

von Bernh. Hoffmann (Nordhausen).

Zu einer annähernden Bestimmung der Wellenlängen einzelner Lichtarten gelangt man im Unterricht wohl zumeist durch Betrachtung und Messung des Grimaldischen Fransenbildes mittels farbiger Gläser oder sonstiger Farbenfilter. Die Ungenauigkeiten dieser Bestimmung und ihre Beschränkung auf einzelne Farbengebiete kann man aber umgehen und ein in mehrfacher Hinsicht viel brauchbareres Ergebnis erzielen, wenn man die Erscheinung spektral zerlegt und der photographischen Platte anvertraut.

Dazu ist nur notwendig, aus dem durch den ersten Spalt erzeugten Fransenbild durch einen zweiten, zum ersten senkrecht gestellten Spalt ein schmales Strahlenbündel herauszuschneiden und durch ein Prisma zerlegt auf eine photographische Platte fallen zu lassen. Der so entstehende sehr charakteristische Fransenfächer (Bild 3) ist bei grösserer Breite des zweiten Spaltes auch in einiger Entfernung auf einem weissen Schirm sichtbar, für die Ausmessung aber durchaus ungeeignet, weil die Fransen namentlich am blauen Ende des Spektrums zu lichtschwach sind. Dagegen giebt eine je nach Bedarf für die rote Seite des Spektrums sensitierte Platte das Bild in überraschender Schärfe, zur Vollkommenheit fehlen ihr nur die Fraunhoferschen Linien. Die müssen vielmehr durch den ersten Spalt und das Prisma gesondert auf einer der ersten in der Lage entsprechenden zweiten Platte dargestellt werden. Kopiert man nun beide Platten richtig übereinander, so erhält man ein zur Bestimmung von Wellenlängen jederzeit fertiges Bild (4), wenn ausserdem noch die Breite des ersten Spaltes und die Gesamtlänge des Lichtweges von ihm bis zur Platte gemessen sind.

Ueber die Anordnung des Versuchs gestatte ich mir folgende Bemerkungen:

Zur Herstellung reiner Fransenbilder ist an der Eintrittsstelle des vom Heliostaten kommenden Sonnenlichts in den Fensterladen ein Vorspalt von 0,3 bis 0,5 cm Breite anzubringen und das Büschel erst in etwa 2 m Entfernung auf den zuverlässig gearbeiteten Hauptspalt fallen zu lassen; beide Spalte stellt man zweckmässig horizontal. Um zerstreutem Tageslicht den Eintritt zu wehren, leitet man den Strahl wie bei allen derartigen Arbeiten durch einen aus Pappe hergestellten, innen geschwärzten Lichtschacht.

Eine Spaltbreite von 0,0317 cm ergab ohne Lichtfilter auf einer sensitierten Platte (Vogel-Obernettersche Eosinplatte von Perutz-München) die durch Bild 1 dargestellte Beugungserscheinung. Die Belichtungsdauer beläuft sich hierbei, gutes, volles Sonnenlicht vorausgesetzt, auf etwa 5 Sekunden, dabei erscheint meist die Mitte des hellen Hauptstreifens, wie auch im Bilde 1, bereits überbelichtet. Unter Anwendung einer 0,3 cm dicken Schicht einprozentiger Kaliumdichromatlösung als Farbenfilter erhält man das Bild 2. Die schon schärfer getrennten Fransen sind breiter und entsprechen etwa der Wellenlänge der D-Linie; die Belichtungsdauer beläuft sich auf 20 bis 30 Sekunden. Nicht für D sensitierte Platten sind für diese Erscheinung natürlich unverwendbar.

Zur prismatischen Zerlegung des Mischfarbenbildes (1) lässt man es in der Entfernung von einem halben Meter auf den zweiten vertikalen Spalt von 0,1—0,2 cm Breite fallen, der unverrückbar aufzustellen ist und zweckmässig einen grossen Schirm zum Schutz der Platte trägt. Dicht hinter diesem steht das Prisma mit senkrechter brechender Kante und erst in einem Abstande von etwa 2 m folgen Auffangeschirm oder Platte. Die Belichtungsdauer beträgt hier, wenn man eine grössere Zahl von Fransen auf die Platte bannen will, etwa eine Minute; diese Zeit kann aber erheblich überschritten werden, und man erhält noch mehr Fransen, als das zur Ausmessung der Streifenbreite wohlgeeignete Bild 3 aufweist.

Die Eigentümlichkeit der Eosinplatten, zwischen E und F weniger empfindlich zu sein als zwischen D und E, gestattet von vornherein, die ungefähre Lage auch der übrigen Linien in diesem Bilde zu bestimmen. Zu genauer Festlegung der Linien ist aber die Aufnahme des durch den nunmehr vertikal zu stellenden ersten Spalt und das in seiner Lage belassenen Prisma entstehenden Spektrums notwendig. Um seitlichen Verschiebungen des Spektralbildes vorzubeugen, lässt man den zweiten Spalt zunächst stehen, verengt den ersten auf die zur Erzeugung scharfer Linien erforderliche Weite und überzeugt sich, dass die Mitte des dabei entstehenden Diffraktionsbildes den zweiten Spalt trifft. Erst dann entfernt man den zweiten Spalt und stellt die Kollimatorlinse genau central in den Lichtweg ein.

Statt dieses mit einigen Schwierigkeiten verknüpften Verfahrens kann man auch durch Parallelstellen und Verengern beider Spalte ohne Kollimatorlinse die Lage der Hauptlinien auf einer der Platte gleichenden Tafel von Kartonpapier andeuten und diese Linien auf die fertig entwickelte und getrocknete Platte übertragen.

In dem durch Uebereinander-Kopieren des Fransenfächers und des Spektrums erhaltenen Bilde 4 sind die Linien D, E, F künstlich verstärkt, um sie für die Druckvervielfältigung widerstandsfähig genug zu machen.

Wie diese beiden Bilder (3 und 4) zeigen, ist die Anzahl der zur genauen Ausmessung der Streifenbreite geeigneten Fächerfransen sehr beträchtlich. Man thut also gut, die Gesamtbreite von je 10 solcher Streifen zu messen und die Messung solcher Gruppen für jede Linie so oft vorzunehmen, als die Sichtbarkeit der Streifen erlaubt. Das kann mit einem Zirkel und einer auf ihre Richtigkeit geprüften Millimeterskala geschehen, bequemer ist eine Glasskala (Zeiss-Jena), die auch sonst zu feineren Messungen andrer Art unentbehrlich ist. Dass man auf diese Weise drei Stellen sicher gewinnt, liegt auf der Hand; die Schätzungfehler betragen stets nur wenige Einheiten der dritten Stelle.

Ebenso ist die dritte Stelle bei der am besten durch dünne Holzleisten vorzunehmenden Messung der Abstände vom ersten Spalt zum Prisma und von diesem zur Platte, also des Gesamtlichtwegs, sicher. Schwieriger ist die Feststellung der Spaltweite. Präzisionsspalte mit Trommelablesung sind durchaus nicht immer zuverlässig, ausserdem wohl nur seltene Gäste in Schulsammlungen, also bleibt nur der Weg der mikroskopischen Ausmessung, mit seinen Schwierigkeiten.

Der zu erwartende mittlere Gesamtfehler beträgt nach meinen Erfahrungen etwa 5‰ bleibt also erheblich unter der Grenze, die bei der geringen Zuverlässigkeit unserer Schulapparate im Allgemeinen im Unterricht als zuverlässig gilt. Dafür bietet aber der Fransenfächer, den man für den Unterricht beliebig vervielfältigen kann, ein sehr anschauliches Bild der relativen Grösse der Wellenlängen zwischen D und N.

Dass man durch Sensiticren der Platte mit Erythrosin und Cyanin auch den fehlenden Teil des Rotspektrums erhalten kann, scheint mir zweifellos, indessen habe ich Erfahrungen nach dieser Seite hin ebensowenig gemacht, wie bezüglich der Frage, ob es nicht zweckmässiger ist, im Lichtweg Prisma und Hauptspalt zu vertauschen. Ich behalte mir vor gelegentlich darüber zu berichten.

Fig. 1.

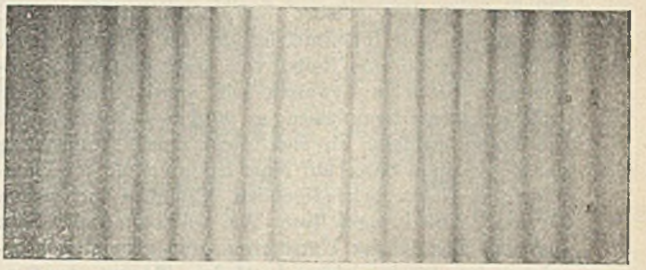

Fig. 2.

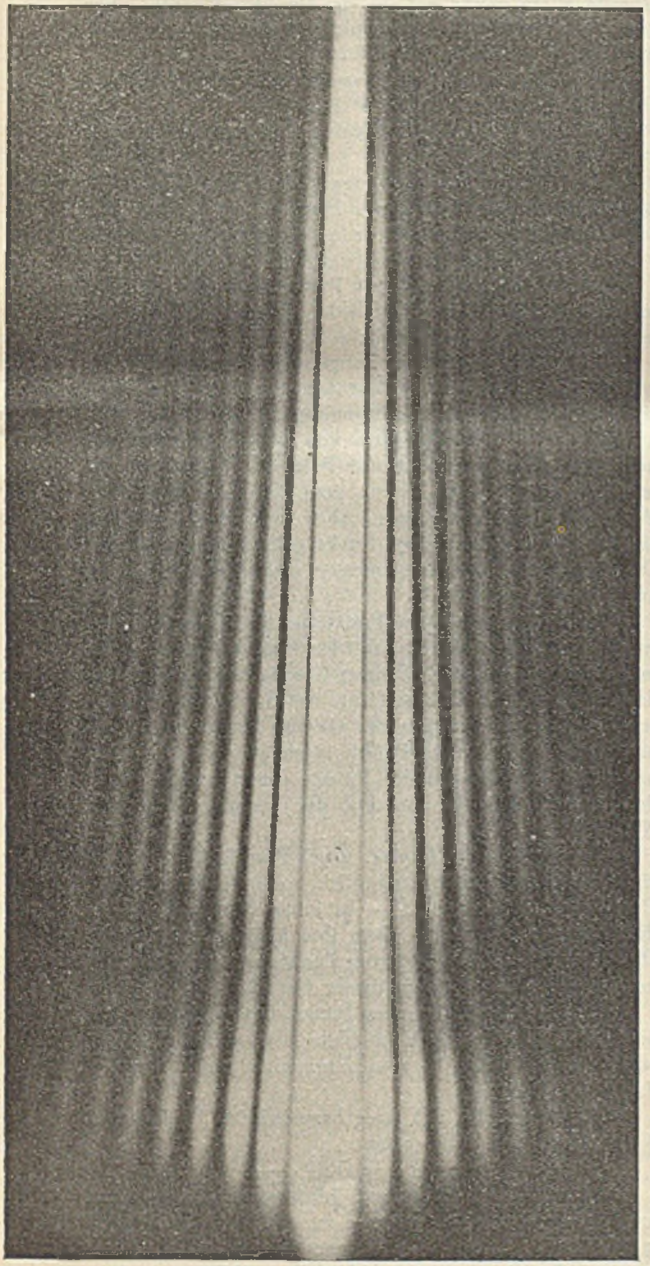

Fig. 3.

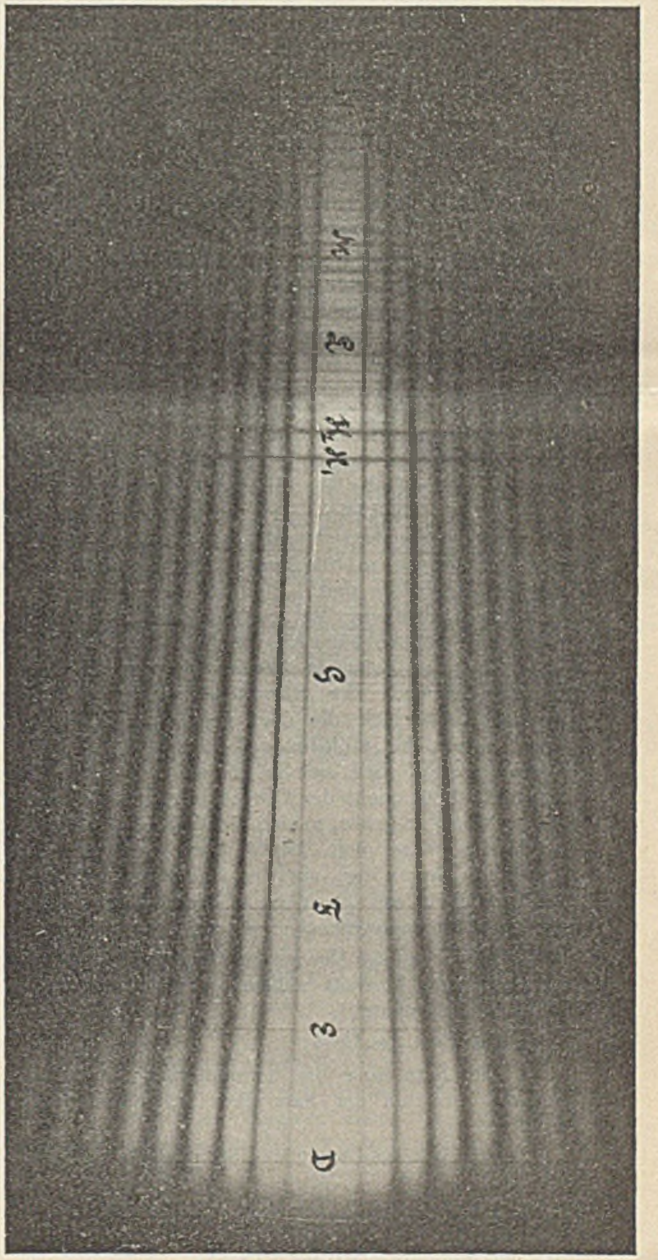

Fig. 4.

Geometrisches aus der Obersekunda.

Von Rudolf Böger in Hamburg.

1. Die folgenden Bemerkungen wenden sich an diejenigen Kollegen, die von der Planimetrie, wie sie uns von den Alten überliefert ist und im wesentlichen noch in unsern Tertien gelehrt wird, nicht befriedigt sind. Die Mängel der Planimetrie, die im Grunde daher rühren, dass sie eine Reihe von besondern Fällen allgemeiner Sätze zu beweisen hat, werden sich kaum vollständig beseitigen lassen; es wird sich deswegen um die Frage handeln, ob sich nicht durch Aufdeckung der allgemeinen Sätze auf einer höhern Stufe die Planimetrie zu einem befriedigenden Abschluss auch schon für die Schule bringen lässt. Am vollkommensten lässt sich dies Ziel in der Unterprima rein geometrisch erreichen (wie ich in meinem Leitfaden *Elemente der Geometrie der Lage* zu zeigen versucht habe). Aber schon in der Obersekunda kann diese Ergänzung vorbereitet werden, da man bereits auf dieser Stufe, indem man noch die planimetrische Beweis*form* beibehält, den *Inhalt* der allgemeinen Sätze, wenigstens für den Kreis, giebt. Um das Ziel dieser Bemerkungen an einem Beispiel zu erläutern, sei auf den planimetrischen Satz hingewiesen: Schneidet ein Strahl des Punktes A einen Kreis in den Punkten K und L, so ist das Produkt A K . A L konstant. Unwillkürlich drängt sich die Frage auf: Welche Beziehung besteht zwischen dem Kreis und einem Strahl, der ihn nicht schneidet? Die Antwort, welche die Planimetrie (im engern Sinne) nicht zu geben vermag, findet man (15) durch eine Ausgestaltung des Kapitels, das in den Lehrplänen bezeichnet wird als Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen, Chordalen und Aehnlichkeitspunkten. Soll dies Kapitel nicht des innern Zusammenhangs entbehren, so müssen ihm, wie es auch in den Lehrbüchern geschieht, einige Sätze über Pol und Polare hinzugefügt werden. Nur diese ermöglichen eine schärfere Fassung des Begriffs der Chordale, und die Lehre von der Chordale führt von selbst zu einer Erweiterung der Apollonischen Berührungsaufgabe, soweit unter den gegebenen Stücken zwei Punkte oder zwei Tangenten enthalten sind.

Diese Ausdehnung der Apollonischen Aufgabe auf „imaginäre" Stücke habe ich als besondere Fälle von Sätzen über das Polarfeld zweiter Ordnung bereits in meinem Lehrbuch der *Ebenen Geometrie der Lage* gegeben. Dass sich die dort gegebenen Konstruktionen aber auch mühelos auf elementarem Wege beweisen lassen, wird erst im folgenden gezeigt. Da diese Zeitschrift nicht der Ort ist, eine Darstellung in Lehrbuchform zu geben, so sind die allgemein bekannten einleitenden Sätze ohne Begründung gegeben. Ihre Aufzählung war nötig, um den Verallgemeinerungen der Planimetrie, auf die allein es hier ankommt, ihre richtige Stelle anzuweisen.

2. Als Grundlage der neuern Geometrie kann man den Satz des Menelaus wählen. — Aus ihm werden unmittelbar abgeleitet

3. Der Satz des Ceva;

4. Der Satz über die harmonischen Punkte am Viereck (aus ihm der Satz über die harmonischen Strahlen);

5. Der Satz des Desargues über perspektiv liegende Dreiecke;

6. Der Satz des Pascal über das Kreissechseck. — Wichtiger noch als der allgemeine Satz des Pascal ist seine Beschränkung auf das Viereck:

7. Die Tangenten zweier Ecken eines Kreisvierecks schneiden sich in einem Punkte der zugeordneten Diagonallinie (wenn man unter „zugeordneter" Diagonallinie diejenige versteht, die die beiden nicht in der Seite liegenden Diagonalpunkte verbindet).

Auf den Sätzen 4 und 7 lässt sich aufbauen

8. Die *Polarentheorie*. — Diese giebt man am besten gleich in der allgemeinsten (auch für Kegelschnitte geltenden) Form, indem man ausgeht von der folgenden Konstruktion: Die Gerade, welche den Punkt P mit einem beliebigen Kreispunkte S verbindet, schneidet den Kreis noch in einem zweiten Punkte S_1; zeichnet man den von P durch S und S_1 harmonisch getrennten Punkt U und ferner den Schnittpunkt T der Tangenten in S und S_1, so heisst die Verbindungslinie U T die Polare des Punktes P. — Wegen des (auf Nr. 4 und 7 sich stützenden) Beweises, dass die so konstruierte Gerade allein von der Lage des Punktes P, nicht aber von der Wahl des Kreispunktes S abhängt, darf ich wohl auf § 4 meines Leitfadens verweisen.

Dieser Beweis lässt sich zusammenfassen in den Satz: In der Polare des Punktes P liegen

a) die von P durch den Kreis harmonisch getrennten Punkte;

b) die Schnittpunkte derjenigen Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch P gehen;

c) zwei Diagonalpunkte jedes Kreisvierecks, dessen dritter Diagonalpunkt P ist.

Zusatz. Liegt der Punkt P ausserhalb des Kreises, so kann man zur Konstruktion der Polare die Tangenten benutzen; dann ergiebt sich:

a) Gehen durch P zwei Tangenten, so ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte die Polare;

b) Die Polare eines Kreispunktes ist seine Tangente.

9. Aus den drei Teilen von Nr. 8 ergeben sich noch drei Konstruktionen der Polare. Wählt man die letzte, so ergiebt sich, wenn man als einen Strahl des Punktes P den Durchmesser wählt, (weil die drei Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen) der Lehrsatz: Die Polare und der Durchmesser eines Punktes stehen auf einander senkrecht.

10. Nennt man einen Punkt den Pol einer Gerade, wenn die Gerade die Polare des Punktes ist, so kann man nach Nr. 9 den Pol einer Gerade konstruieren, indem man auf dem Durchmesser, welcher auf der Gerade senkrecht steht, den von der Gerade durch den Kreis harmonisch getrennten Punkt zeichnet, und den Satz beweisen: Die Polaren der Punkte einer Gerade gehen durch einen Punkt, den Pol der Gerade (Elemente Nr. 39).

11. *Konjugierte Punkte.* Zwei Punkte heissen hinsichtlich eines Kreises konjugiert, wenn der eine in der Polare des andern liegt. — In einer Gerade giebt es daher zu jedem Punkte einen ihm konjugierten Punkt. Der Inbegriff der konjugierten Punktpaare einer Gerade heisst die *Punktinvolution* dieser Gerade.

12. Zum uneigentlichen Punkt einer Gerade p erhält man den konjugierten (den *Fluchtpunkt* der Gerade), indem man (9) vom Kreismittelpunkt 0 auf p das Lot OF fällt.

13. Sind A B; X Y vier harmonische Punkte und 0 die Mitte von A B, so ist

$$OX \cdot OY = OA^2. —$$

Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, dass man, um allgemein gültige Beweise zu erhalten, im Gegensatz zu den meisten Lehrbüchern vom Satz des Menelaus an, die Strecken nicht bloss ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach zu unterscheiden hat, sodass, welches auch die Lage der Punkte A B C ist, die Gleichung

$$AB + BC = AC$$

richtig ist. Bei dem angeführten Satz hat man z. B. aus

$$XA : XB = -YA : YB \text{ zu bilden:}$$

$$(XO + OA)(XO + OB) + (YO + OA)(YO + OB) = 0$$

und aus dieser Gleichung vermittelst der weitern Voraussetzung $OA = -OB$ den Lehrsatz abzuleiten.

14. *Potenz einer Gerade.* Ist A (Fig. 1) ein beliebiger Punkt der Gerade p, so erhält man (9; 10) den konjugierten B, indem man von dem Pol P

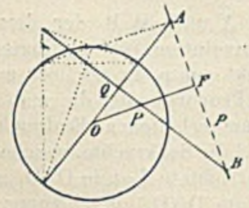

Fig. 1.

der Gerade p auf OA das Lot fällt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FBP und FAO ergiebt sich $FA \cdot FB = -FP \cdot FO = -(FO + OP)FO = -FO^2 + OP \cdot OF$. Das Produkt $FA \cdot FB$ ist also konstant; es heisst die Potenz (der Involution) der Gerade p. Bezeichnet man es durch $(p)^2$ und beachtet noch (13), dass $OP \cdot OF = r^2$ ist, so hat man

$$(p)^2 = FA \cdot FB = -FO^2 + r^2.$$

Zusatz. Eine Punktinvolution ist gegeben, wenn ihr Fluchtpunkt (12) und ihre Potenz bekannt ist.

15. *Potenz eines Punktes.* Ist A (Fig. 1) ein beliebiger Punkt, p ein beliebiger Strahl von A, F der Fluchtpunkt von p und B der dem Punkte A in $(p)^2$ konjugierte, so heisse das Produkt $AF \cdot AB$ die Potenz des Punktes A. Es ist

$$AF \cdot AB = AQ \cdot AO = (AO + OQ)AO = AO^2 - OQ \cdot OA.$$

Bezeichnen wir die Potenz des Punktes A durch $(A)^2$, so ist also

$$(A)^2 = AF \cdot AB = AO^2 - r^2. -$$

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des in der Einleitung erwähnten Satzes. Schneidet nämlich die Gerade p den Kreis (Fig. 2) in K und L, so ist F die

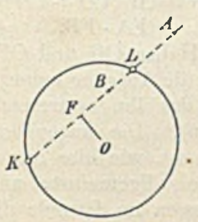

Fig. 2.

Mitte von KL und B von A durch K und L harmonisch getrennt (8a), daher

$$AF \cdot AB = AF(AF + FB) = FA^2 - FA \cdot FB = (13)$$

$$AF^2 - FL^2 = (AF + FL)(AF + FK) = AL \cdot AK.$$

Zusatz. Aus $(p)^2 = FA \cdot FB$ (14) und

$$(A)^2 = AF \cdot AB \text{ folgt}$$

$$(p)^2 + (A)^2 = FA \cdot FB + AF \cdot AB =$$

$$FA(FB + BA) = FA^2.$$

16. *Chordale.* Der Mittelpunkt des Kreises ist der Pol der uneigentlichen (unendlich fernen) Gerade (8a). Ist A ein Punkt dieser uneigentlichen Gerade, so schneidet das im Kreismittelpunkte O auf AO errichtete Lot die uneigentliche Gerade in dem konjugierten Punkte B. Konstruiert man den dem Punkt A hinsichtlich eines zweiten Kreises O_1 konjugierten Punkt, so erhält man denselben Punkt, weil die auf AO und AO_1 errichteten Lote einander parallel sind, mit andern Worten, sich in demselben Punkt der uneigentlichen Gerade schneiden. Alle Kreise erzeugen daher in der uneigentlichen Gerade dieselbe Involution.

Definition: Eine Gerade, in welcher zwei Kreise dieselbe Involution erzeugen, heisst eine Chordale der beiden Kreise.

Lehrsatz: Zwei Kreise haben stets (ausser der uneigentlichen noch) eine eigentliche Chordale.

Erste Konstruktion der Chordale. Man geht von einer beliebigen Gerade p (Fig. 3) aus; in dieser

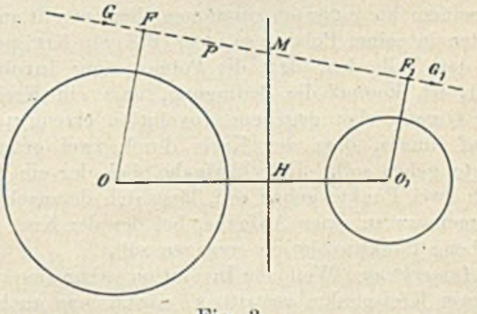

Fig. 3.

erzeugt der Kreis O eine Involution $(p)^2$, der Kreis O_1 eine Involution $(p)_1^2$. Man zeichnet von $(p)^2$ und $(p)_1^2$ die Fluchtpunkte F und F_1, indem man (12) von O und O_1 auf p die Lote fällt, und konstruiert (14) zu F den in $(p)_1^2$ konjugierten Punkt G_1 und zu F_1 den in $(p)^2$ konjugierten Punkt G. Das von der Mitte M der Strecke GG_1 auf die Zentrale OO_1 gefällte Lot MH ist die Chordale der beiden Kreise.

Beweis: $(M)^2 = (15\,Z)\ MF^2 - FF_1 \cdot FG =$

$$MF^2 - (FM + MF_1)(FM + MG) =$$

$$-MF_1 \cdot FM - FF_1 \cdot MG = MF \cdot MF_1 + \tfrac{1}{2} FF_1 \cdot GG_1.$$

Bildet man die Potenz des Punktes M für den zweiten Kreis, so erhält man denselben Wert. Der Punkt M hat also für beide Kreise dieselbe Potenz; daher hat das durch ihn gehende Lot der Zentrale für beide Kreise dieselbe Involution; denn (15 Z) für die beiden Kreise ist die Involution dieser Gerade $HM^2 - (M)^2$.

Zweite Konstruktion der Chordale. Man geht von einem beliebigen Punkte P (Fig. 4) aus, zeichnet zu

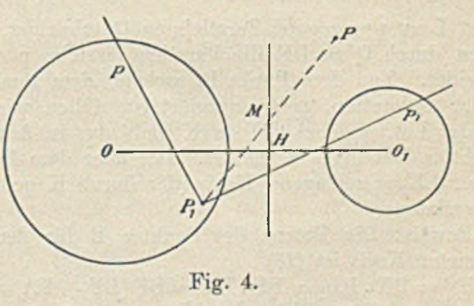

Fig. 4.

diesem die Polare p für den ersten Kreis O und die Polare p_1 für den zweiten Kreis O_1. Verbindet man den Schnittpunkt P_1 von p und p_1 mit P, so ist das von der Mitte M der Strecke PP_1 auf die Zentrale gefällte Lot MH die Chordale.

Beweis: Bezeichnet man den Fusspunkt des von O auf die Gerade PP_1 gefällten Lotes durch F, so ist (15 Z) die Potenz des Punktes M für den ersten Kreis

$$(M)^2 = MF^2 - FP \, . \, FP_1 =$$
$$MF^2 - (FM + MP)(FM + MP_1) =$$
$$MF^2 - (FM + MP)(FM - MP) = MP^2.$$

Da sich für den zweiten Kreis derselbe Wert der Potenz von M ergiebt, so ist auch (15 Z) die Potenz der Gerade MH für beide Kreise dieselbe.

17. *Imaginäre Stücke.* Ist die Potenz einer Involution positiv, so haben FA und FB immer dasselbe Vorzeichen, A und B liegen also immer auf derselben Seite des Fluchtpunktes F. Es giebt daher in diesem Fall zwei (Ordnungs-) Punkte K und L, für welche FK = — FL gleich der Wurzel aus der positiven Potenz ist. Fällt daher A in den Ordnungspunkt K (oder L), so fällt auch B in K (oder L). Fällt aber ein Punkt mit seinem konjugierten zusammen, liegt er mit andern Worten in seiner Polare, so ist er (8 Z) ein Kreispunkt. Für den Fall also, dass die Potenz einer Involution positiv ist, kommt die Bedingung, dass ein Kreis in einer Gerade eine gegebene Involution erzeugen soll, darauf hinaus, dass der Kreis durch zwei gegebene Punkte gehen soll. Jede Aufgabe, bei der ein Kreis durch zwei Punkte gehen soll, lässt sich demnach verallgemeinern zu einer Aufgabe, bei der der Kreis eine gegebene Punktinvolution erzeugen soll.

Anmerkung. Weil eine Involution, wenn sie positiv ist, zwei Kreispunkte vertritt, so ersetzt man auch allgemein „Involution" durch „zwei Kreispunkte" und nennt diese, wenn die Potenz der Involution negativ ist, imaginär. Das Wort imaginär aber, dem keine Vorstellung entspricht, wird besser vermieden.

18. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt L geht und in einer gegebenen Gerade p eine gegebene Involution erzeugt (der durch drei gegebene Punkte geht).

Konstruktion: Wir errichten im Fluchtpunkte F (Fig. 5) auf p das Lot, welches die durch den gegebenen

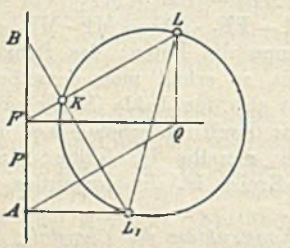

Fig. 5.

Punkt L zu p gezogene Parallele in Q schneidet, und ziehen durch Q zu LF die Parallele, welche p in A schneidet. Von dem Punkt B, welcher dem Punkt A in der Involution $(p)^2$ konjugiert ist, fällen wir auf LF das Lot, welches (LF in K und) das in A auf p errichtete Lot in L_1 schneidet. Der über dem Durchmesser LL_1 geschlagene Kreis (der durch K geht) ist der verlangte.

Beweis: Die Potenz des Punktes B für den gezeichneten Kreis ist (15)

$$(B)^2 = BK \, . \, BL_1 = BF \, . \, BA = BF\,(BF + FA) =$$
$$BF^2 - FA \, . \, FB;$$

folglich (15 Z) ist die durch den gezeichneten Kreis in p bestimmte Involution (die mit der gegebenen übereinstimmende) FA . FB.

19. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade l berührt und in einer gegebenen Gerade p eine gegebene Involution erzeugt (durch zwei gegebene Punkte geht).

Konstruktion: Schneidet die Tangente l (Fig. 6)

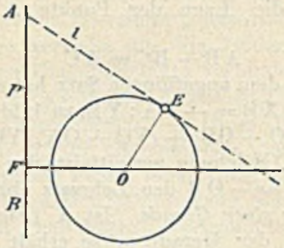

Fig. 6.

die Gerade p in A und ist B der dem Punkte A in der gegebenen Involution $(p)^2$ konjugierte Punkt und F der Fluchtpunkt von p, so zeichnet man zu AF und AB die mittlere Proportionale, die man von A aus auf l abträgt. In dem erhaltenen Endpunkt E (oder E_1) zeichnet man auf l die Senkrechte, welche das im Fluchtpunkt F auf p errichtete Lot in O (O_1) schneidet. Der mit OE (O_1E_1) um O (O_1) geschlagene Kreis ist der verlangte.

Beweis: Die Potenz des Punktes A für den gezeichneten Kreis ist (15)

$$(A)^2 = AO^2 - OE^2 = AE^2 = AF \, . \, AB;$$

folglich (15 Z) ist die Potenz der Gerade p:

$$p^2 = FA^2 - (A)^2 = FA^2 - AF \cdot AB =$$
$$FA\,(FA + AB) = FA \cdot FB.$$

Anmerkung. Die Aufgabe hat keine Lösung, wenn AF und AB entgegengesetzte Richtungen haben (da es in diesem Falle keine mittlere Proportionale zu AF und AB giebt).

20. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, für den eine Involution p^2 und ein Punkt O des im Fluchtpunkt F auf p errichteten Lotes als Mittelpunkt gegeben ist.

Konstruktion: Man verbindet O mit einem beliebigen Punkt A von p und fällt von dem dem Punkte A in $(p)^2$ konjugierten Punkt B auf OA das Lot, welches OF in G schneidet. Die mittlere Proportionale zu OG und OF ist der Radius des gesuchten Kreises.

Beweis: Für den gezeichneten Kreis ist die Potenz der in p erzeugten Involution (14)

$$-OF^2 + OF \cdot OG = OF\,(FO + OG) = -FO \cdot FG =$$
$$FA \cdot FB.$$

Anmerkung. Haben OG und OF entgegengesetzte Richtungen, so hat die Aufgabe keine Lösung (der Kreis wird „imaginär"; das ihn vertretende Polarfeld aber lässt sich zeichnen). Die angegebene Bestimmungsweise eines Kreises ist, wie hier nur nebenbei erwähnt werden kann, die allgemeinste und darum fruchtbarste; aus ihr fliessen im Grunde die sämtlichen hier gegebenen Konstruktionen.

21. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der in einer gegebenen Gerade eine gegebene Involution erzeugt und einen gegebenen Kreis berührt (der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt).

Konstruktion: Man kennt die Involution, welche der gesuchte Kreis in p erzeugt, und ebenso die Involution, die der gegebene Kreis in p induziert. Aus beiden erhält man durch die erste in Nr. 16 angegebene Konstruktion den Punkt M der Chordale der beiden Kreise. Da diese Chordale ausserdem eine Tangente des gegebenen Kreises sein soll, so ist sie durch M bestimmt. Konstruiert man ihren Berührungspunkt L, so ist noch die Aufgabe 18 zu lösen.

22. *Konjugierte Strahlen.* Definition: Zwei Strahlen heissen hinsichtlich eines Kreises konjugiert, wenn der eine durch den Pol des andern geht. — Ist P ein beliebiger Punkt und a ein beliebiger Strahl von P, so liegt (10) der Pol B von a in der Polare p von P; PB = b ist der dem Strahle a von P konjugierte. Man erhält also die sämtlichen konjugierten Strahlenpaare eines Punktes P, wenn man aus P die Punktinvolution seiner Polare p projiziert. Die beiden Strahlen f und u von P, welche den Fluchtpunkt und den uneigentlichen Punkt von p projizieren, stehen auf einander senkrecht (9); kennt man ausser diesem rechtwinkligen Strahlenpaare fu von P noch irgend ein zweites ab, so ist die Strahleninvolution $(P)^2$ von P bestimmt (14 Z).

Fällt ein Strahl l mit seinem konjugierten zusammen, geht also ein Strahl durch seinen Pol, so ist er eine Tangente des Kreises (17). — Zeichnet man zu einer Gerade p den Pol P für den Kreis O und den Pol P_1 für den Kreis O_1, so ist die Verbindungslinie $PP_1 = p_1$ der Gerade p für beide Kreise konjugiert.

Definition: Ein Punkt, in dem zwei Kreise dieselbe Strahleninvolution erzeugen, heisst ein Aehnlichkeitspunkt (die Begriffe Chordale und Aehnlichkeitspunkt sind hiernach dual).

Lehrsatz: Die beiden Punkte, welche die Zentrale zweier Kreise nach dem Verhältnis der Radien teilen, sind Aehnlichkeitspunkte.

Beweis: Teilt S die Zentrale OO_1 nach dem Verhältnis $r : r_1$ (oder $- r : r_1$) und ist p eine beliebige durch S gehende Gerade, so erhält man die Pole von p, indem man von den Mittelpunkten auf p die Lote OF und O_1F_1 fällt, welche die Kreise in den Punkten CD und C_1D_1 schneiden und auf diesen Loten die von p durch die Kreispunkte CD und C_1D_1 harmonisch getrennten Punkte P und P_1 zeichnet; die der Gerade p für beide Kreise gemeinsam konjugierte Gerade $PP_1 = p_1$ geht aber durch S, weil die Verbindungslinien CC_1 und DD_1 durch S gehen.

Zusatz: Ist p (Fig. 7) eine beliebige (nicht durch

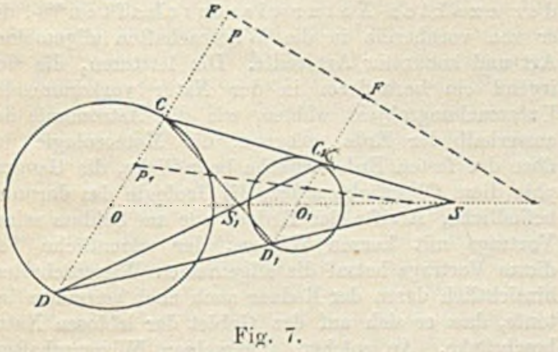

Fig. 7.

S gehende) Gerade und p_1 die ihr für beide Kreise konjugierte, so werden p und p_1 durch die Aehnlichkeitspunkte S und S_1 harmonisch getrennt.

Beweis: Die vier Geraden CC_1, DD_1, CD_1, C_1D bilden ein Vierseit, von dem S und S_1, C und D, C_1 und D_1 je zwei Gegenecken sind. Die Richtigkeit der Behauptung folgt aus dem Satz: Die drei Punkte, welche von einer beliebigen Gerade durch je zwei Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennt sind, liegen in einer Gerade.

23. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der in einem gegebenen Punkte P eine gegebene Strahleninvolution erzeugt und durch einen gegebenen Punkt L geht (der zwei gegebene Geraden berührt und durch einen gegebenen Punkt geht).

Konstruktion: Die beiden konjugierten Strahlen von $(P)^2$, welche auf einander senkrecht stehen, seien f und u (Fig. 8); dem Strahl PL = c sei in $(P)^2$ der

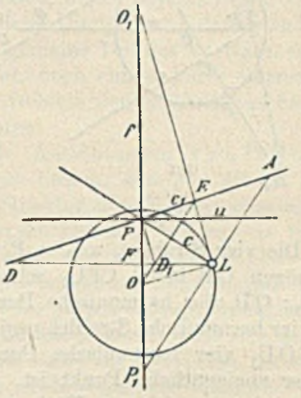

Fig. 8.

Strahl c_1 konjugiert, welcher das in L auf PL errichtete Lot in A schneiden möge. Von den beiden Parallelen, die man durch L zu f und u ziehen kann, schneidet immer die eine die Strecke PA aussen, die andere innen. Man wählt diejenige (in der Figur die Parallele zu u), welche PA aussen (in D) schneidet. Man zeichnet die mittlere Proportionale DE zu DA und DP und fällt von E auf PL das Lot, welches f in dem Mittelpunkte O des gesuchten Kreises schneidet.

Beweis: Den Nachweis, dass c_1 durch den Pol von c geht, führt man dadurch, dass man zeigt, dass E der Pol von c, also (8 Z) EL eine Tangente, also EL senkrecht auf OL ist. Wir bezeichnen die Punkte, in denen f von LD, LA, LE geschnitten wird, durch F, P_1, O_1; ferner verbinden wir den Punkt D_1, in welchem EO die Gerade FD schneidet, mit P.

$$DL : DD_1 = DA : DE = DE : DP;$$

folglich PD_1 parallel EL; folglich

$$FP : FO_1 = FD_1 : FL = FO : FP_1;$$

folglich $FO \cdot FO_1 = FP \cdot FP_1$; folglich, da $LP_1 \perp LP$, auch $LO_1 \perp LO$, mithin LO_1 eine Tangente des gezeichneten Kreises. Da ferner EO die Mittelsenkrechte der vom Kreis auf PL ausgeschnittenen Sehne ist, so geht auch die Tangente des zweiten Endpunktes dieser Sehne durch E; E ist daher der Pol von PL (8 Z).

Anmerkung. Da sich DE von D aus auch in entgegengesetzter Richtung abtragen lässt, so hat die Aufgabe stets zwei Lösungen.

24. Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der in einem gegebenen Punkt P eine gegebene Strahleninvolution erzeugt und eine gegebene Gerade l berührt (der drei gegebene Geraden berührt).

Konstruktion: Die beiden auf einander senkrecht stehenden Strahlen u und f (Fig. 9) von $(P)^2$ mögen die gegebene Tangente l in Q und Q_1 schneiden; ferner möge dem Strahl c von $(P)^2$, welcher l in dem uneigentlichen Punkte U schneidet, der Strahl c_1 homolog sein, welcher l in A schneidet. Man fällt von P auf l das Lot PD und zeichnet zu AD und AQ die mittlere Proportionale, welche man auf l von A aus nach beiden Seiten hin abträgt. Das in dem Endpunkt E (oder E_1) auf l errichtete Lot schneidet u in dem Mittelpunkte O des gesuchten Kreises, der den Halbmesser OE hat.

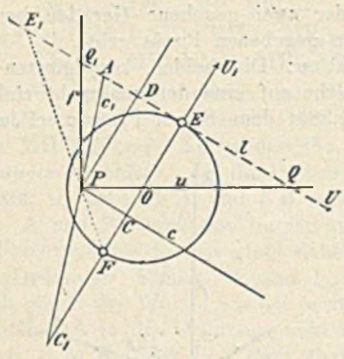

Fig. 9.

Beweis: Die vier Strahlen, welche P mit A U E_1 D verbinden, mögen OE in C_1 CFU_1 schneiden. Weil nun (13) EE_1; QD vier harmonische Punkte sind, die aus P durch vier harmonische Strahlen projiziert werden, so sind EF; OU_1 vier harmonische Punkte; folglich ist, weil U der uneigentliche Punkt ist, O die Mitte von EF, d. h. der gezeichnete Kreis geht durch F. Weil ferner EE_1; AU vier harmonische Punkte sind, so sind auch EF; C_1C vier harmonische Punkte; folglich ist, weil OC_1 senkrecht auf c steht, C_1 der Pol von c (10); mithin sind c und c_1 einander konjugiert für den gezeichneten Kreis.

Anmerkung. Teilt der Punkt A die Strecke QQ_1 aussen, so haben sowohl AD und AQ als auch AD und AQ_1 dieselbe Richtung; es lassen sich also vier Kreise zeichnen. Teilt A die Strecke QQ_1 innen, so haben entweder AD und AQ oder AD und AQ_1 dieselbe Richtung; es lassen sich also zwei Kreise zeichnen. Die Aufgabe hat mithin stets zwei oder vier Lösungen.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Neuordnung des höheren Schulwesens in Preussen. Der unter dem 26. November v. J. ergangene Königliche Erlass, der eine Aenderung der Lehrpläne an den höheren preussischen Lehranstalten fordert, und für diese zugleich die Richtungslinie vorzeichnet, hat inzwischen durch eine im Dezember erlassene Ministerial-Verfügung insoweit eine Ausführung erfahren, als die Stundenverteilung in Betracht kommt. Ende Dezember ist dann gleichfalls in Ausführung des Königlichen Erlasses die Abschaffung der sogenannten Abschluss-Prüfung verfügt worden.

An der neuen Stundenverteilung sind die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer nur in geringem Maasse beteiligt. Der mathematische Unterricht, dessen Verkürzung am Gymnasium für einige Zeit zu drohen schien, ist völlig unverändert geblieben, dagegen hat der physikalische Unterricht am Realgymnasium (zu Gunsten des Lateins) eine Stunde (in Unter-Sekunda) eingebüsst. An der Ober-Realschule ist in den drei oberen Klassen je eine besondere Stunde für den Unterricht in der Erdkunde neu eingerichtet worden. — Der allgemein verbindliche Zeichenunterricht an allen Anstaltsarten, auch den realistischen ist ausschliesslich dem Freihandzeichnen vorbehalten worden, ein zweistündiger Unterricht im Linearzeichnen an den Realanstalten wird wahlfrei sein, an der Oberrealschule von Obertertia, am Realgymnasium von Obersekunda an.

Die ganze Neuordnung soll zu Ostern 1901 in Kraft treten.

Lehrpläne für die darstellende Geometrie. In der der No. 6 des Jahrgangs VI, 1900 beigefügten Anlage, Gutachten über den Unterricht in der darstellenden Geometrie, finden sich einige Versehen, die zwar von dem einsichtigen Leser selbst in jedem Falle als solche erkannt sein werden, aber auf Wunsch der Herren Verfasser hier noch berichtigt werden sollen.

In dem G e r l a n d schen Gutachten auf S. 2, rechte Spalte, Z. 17. v. o. muss es statt „multa non multum" vielmehr heissen: m u l t u m n o n m u l t a.

In dem H o l z m ü l l e r schen Gutachten muss es auf S. 4, rechte Spalte unten, statt „Kugelschnittsflächen" und „Kugel" heissen: K e g e l s c h n i t t s f l ä c h e n und K e g e l.

Auf S. 5, rechte Spalte, Z. 11/12 v. o. muss statt „in ihren Ebenen" vielmehr stehen i n i h r e r E b e n e.

In derselben Spalte muss auf Z. 14 v. o. statt „Drehungen" stehen D e h n u n g e n, in Z. 20 und 35 v. o. statt „Cykloide" vielmehr C y k l i d e (gemeint ist die Dupinsche Cyklide).

Vereine und Versammlungen.

72. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Aachen 1900.

Bericht über die in den allgemeinen Sitzungen gehaltenen Vorträge naturwissenschaftlichen Inhalts.*)

Die erste allgemeine Sitzung am 17. September war einer übersichtlichen Darstellung der Fortschritte gewidmet, die die Naturforschung und die Heilkunde im 19. Jahrhundert zu verzeichnen haben. Während die letztere Aufgabe durch die Herren N a u n y n (Innere Medizin nebst Bakteriologie und Hygiene) und C h i a r i (Pathologische Anatomie und deren Einfluss auf die äussere Medizin) gelöst wurde, fiel die Darstellung der Fortschritte der Naturforschung den Herren van 't H o f f und O. H e r t w i g zu.

Van 't H o f f behandelte d i e E n t w i c k e l u n g d e r e x a k t e n N a t u r w i s s e n s c h a f t e n**), die er von vornherein in die Wissenschaften allgemeiner Art und konkreter Art teilte. Die letzteren, die sich irgend ein besonderes in der Natur vorkommendes Untersuchungsobjekt wählen, wie die Astronomie das ausserhalb der Erde gelegene, die Meteorologie das über der festen Erdoberfläche befindliche, die Geographie diese Oberfläche selbst, die Geologie das darunter befindliche, streifte der Redner nur am Schluss seines Vortrags mit kurzen Worten, der wesentliche Teil dieses Vortrags betraf die allgemeinen Wissenschaften, hinsichtlich deren der Redner auch noch besonders betonte, dass er sich auf das Gebiet der leblosen Natur beschränke. An solchen allgemeinen Wissenschaften, deren Begriffe dann das Rüstzeug für die Behandlung der speziellen (konkreten) Wissenschaften liefern, unterschied er die drei sich an die Grundbegriffe der Quantität, des Raumes und der Zeit anschliessenden mathematischen Grundwissenschaften, Analysis, Geometrie und Mechanik, und die beiden experimentellen Naturwissenschaften, Physik und Chemie.

Ueber Analysis und Geometrie glaubte der Redner deswegen kurz hinweggehen zu dürfen, weil trotz der grossen Erkenntnisfortschritte im Einzelnen seiner

*) S. Unt.-Bl. VI, 6, S. 117.

**) Im Sonderabdruck erschienen bei Leopold Voss Hamburg und Leipzig.

Meinung nach an den allgemeinen Grundsätzen dieser Wissenschaften, „Dank ihrer ideal einfachen Gestaltung“, sich im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts nichts wesentliches geändert habe. Anders liege die Sache auf dem Gebiete der Mechanik, die am Anfang des Jahrhunderts die Wissenschaft von Kraft und Bewegung gewesen sei, um sich im Laufe dieses Zeitraums zur Wissenschaft von der Arbeit oder Energie umzuwandeln. Auf ihrem Gebiete vollzog sich die Entdeckung des die ganze Physik umgestaltenden Prinzips der Erhaltung der Energie.

Was die experimentellen Wissenschaften anlangt, so sei das Ziehen einer vollkommen scharfen Grenzlinie zwischen Physik und Chemie nicht möglich, die Einheitlichkeit des Objekts und die Einheitlichkeit unserer (mechanischen) Auffassung der Naturerscheinungen stehe dem im Wege, indessen lasse sich doch ein gewisser Anhalt für diese Unterscheidung insofern gewinnen, als die Forschung das Studium der Naturerscheinungen von zwei Seiten in Angriff genommen habe, einerseits durch Betrachtung der Kraft, andererseits durch Betrachtung des Stoffes.

Die Betrachtung der Verwandlungen der Kraft, die sich allmählich in eine Betrachtung der Umwandlungen der Arbeitsform umgebildet habe, bilde den Inhalt der physikalischen Forschung, bei der der Redner vier bedeutsame Schritte unterschied, erstens die Feststellung der gegenseitigen Verwandelbarkeit der Arbeitsformen, an der besonders Faraday beteiligt sei, zweitens die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Arbeitsleistung, welche dabei als gemeinsames Mass sämtlicher Naturerscheinungen auftritt, drittens die Beantwortung der Frage nach dem Sinne, in dem jedesmal die Umwandlung stattfindet, durch das Gesetz, welches zuerst als der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie formuliert worden ist, viertens das allmähliche Aufkommen der Kinetik der Schwingungszustände, die wir bei den kleinsten Teilchen sowohl des Aethers als der Materie voraussetzen. Indem der Redner hier der glänzenden Entdeckungen aus den letzten Dezennien des Jahrhunderts, der Arbeiten von Maxwell und Hertz, der Röntgenstrahlen usw. gedachte, stellte er als höchstes zur Zeit dastehendes Ergebnis der Forschung die Regel der übereinstimmenden Zustände hin, die die spezifischen Differenzen von Körper zu Körper auf drei Fundamentalgrössen, den kritischen Druck, die kritische Temperatur und die kritische Dichte zurückzuführen gestattet.

Auf dem Gebiete der Chemie, zu dem die letzte Bemerkung einen natürlichen Uebergang bildet, stellte der Redner fest, dass eine Zurückführung der Elemente aufeinander bisher nicht geglückt sei, dass vielmehr der Unveränderlichkeit der Arbeitsmenge auf physikalischem Gebiete die Unveränderlichkeit des Quantums für eine jede Elementart zu entsprechen scheine, wenn auch durch Lothar Meyers und Mendelejeffs Untersuchungen eine merkwürdige systematische Beziehung zwischen den einzelnen Stoffen ausser Zweifel gesetzt sei. Im Anschluss an die Erwähnung der Bedeutung, die die Wöhlersche Darstellung des Harnstoffs auf anorganischem Wege besitzt, erklärte es der Redner für die Ueberzeugung eines jeden Chemikers, dass er bis an die Zelle gehen werde, die als organisierte Substanz dem Biologen zufalle. Indem er die Entwickelung der Atomistik von Dalton und Avogadro an bis zu den Lehren der modernen Stereochemie charakterisierte, bezeichnete er als besonders bedeutsam für den Fortschritt der chemischen Forschung im neunzehnten Jahrhundert die Heranziehung der physikalischen Forschungsmittel und Forschungsmethoden, wodurch die Chemie eine sichere, besonders auf dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie fussende Grundlage erhalten habe. Mit einer Kennzeichnung der bis jetzt als sicher festgestellten Grundsätze dieser physikalischen Chemie, sowie der nächsten dieser Disziplin sich darbietenden Aufgaben schloss der allgemeine Teil des Vortrags, dem sich, wie bereits erwähnt, noch einige kurze Bemerkungen über die speziellen Gebiete der exaktwissenschaftlichen Forschung anreihten.

Wenn die Ausführungen van 't Hoffs keinen Zweifel darüber liessen, dass für diesen Forscher die atomistische Struktur der Materie eine nicht mehr zu bestreitende reale Existenz besitze, so bekannte sich Oskar Hertwig, der die Entwickelung der Biologie*) im neunzehnten Jahrhundert zu schildern unternahm, zu der gerade entgegengesetzten Auffassung, nach der die atomistische Struktur nur den Wert eines vom denkenden Geist zur leichteren Bewältigung der Erscheinungen ersonnenen Vorstellungsschemas besitze.

Es war dies ein Ausfluss der universellen Anschauung, mit der der Redner an sein Thema herantrat, der vollen nicht durch dogmatische Schulbegriffe eingeengten Freiheit des Geistes, die allein imstande ist, der Fülle der bereits gewonnenen Forschungsergebnisse wie dem unermesslichen Gebiet der der Lösung noch harrenden Aufgaben gegenüber den richtigen Standpunkt zu gewinnen.

Im Einzelnen begann dieser höchst bedeutsame Vortrag mit der Feststellung der Bedeutung, die für die biologische Forschung des neunzehnten Jahrhunderts die mikroskopische Anatomie gewonnen hat, als erstes Ergebnis derselben war die Erkenntnis der Bedeutung der Zelle für alles Leben zu konstatieren, als ferneres die Beseitigung der Annahme der Urzeugung mittels des durch allseitige Beobachtung geführten Nachweises, dass für alle Lebewesen, auch für die Mikroben, der Satz gelte, „omne vivum e vivo“ (dem sich der andere Satz „omnis cellula e cellula“ beigesellen lässt).

Nachdrücklich verwahrte sich der Redner gegen die Idee, dass die Zelle sozusagen nur ein eigentümliches chemisches Riesenmolekül sei, das früher oder später dem Arbeitsgebiet einer fortgeschritteneren Chemie anheim fallen werde.

Mit diesen Ausführungen stellte sich der Vortragende in ausgeprägten Gegensatz nicht nur zu der bereits erwähnten Aeusserung van 't Hoffs, sondern auch — und das ist bei dem Redner, der selbst bekanntlich Jahre hindurch einer der hervorragendsten Mitarbeiter Haeckels gewesen ist, besonders bedeutsam — auch zu Haeckel selbst, der ja bekanntermassen den Ausspruch gethan hat, dass „die Urzeugung leugnen das Wunder statuieren“ heisst.

Dieser Gegensatz trat aber auch noch weiterhin bei der Erwähnung der für das scheidende Jahrhundert so bedeutsam gewordenen Entwickelungslehre hervor. Der Redner machte einen scharfen Unterschied zwischen der Descendenzlehre im allgemeinen und der Selektionslehre im besonderen. Während er die Entwickelungslehre für eine unantastbare Errungenschaft des Jahrhunderts erklärte, betonte er mit aller Entschiedenheit den hypothetischen Charakter der Selektionslehre, er

*) In Sonderausgabe (mit einigen Zusätzen) erschienen bei Gustav Fischer in Jena.

wies auf die unzulängliche Bestimmtheit der Begriffe hin, die sich mit den zur Erklärung aufgestellten Ausdrücken und Formeln verbinden, ohne doch auch bei aller dieser der Selektionslehre gegenüber beobachteten Vorsicht den ausserordentlichen Gewinn zu verkennen, den der um diese Lehre entbrannte Kampf der Klärung unserer Einsicht gebracht hat.

Die Entwickelungslehre bot dem Redner den natürlichen Uebergang auf das Gebiet der Physiologie, innerhalb dessen er den Wert des planmässigen Experiments am lebenden tierischen wie pflanzlichen Organismus hervorhob, unter entschiedener Betonung der Unentbehrlichkeit insbesondere des Tierversuchs gerade für den Gewinn tieferer Einsicht in die schwierigsten Gebiete der physiologischen Forschung.

Er erwähnte die gewaltigen Erfolge, die die Untersuchung der parasitischen Krankheitserreger aufzuweisen hat, um dann die Aufmerksamkeit auf die Bedeutung zu lenken, die Chemie und Physik in immer steigendem Masse für die Biologie gewonnen haben. Ausgehend von Wöhlers bahnbrechender Entdeckung wies er darauf hin, wie der Vitalismus durch die chemisch-physikalische Richtung abgelöst wurde, um bei aller Anerkennung des unermesslichen Gewinnes, den die Physiologie der Unterstützung durch Chemie und Physik verdankt, sich doch mit der grössten Entschiedenheit gegen die Anschauung zu verwahren, die die Physiologie sozusagen in Biophysik und Biochemie auflösen zu können glaubt.

Hier fand sich für den Redner der Anlass zu der bereits oben erwähnten Stellungnahme dem Atomismus gegenüber, hier konnte er mit überzeugender Klarheit hervorheben, dass die Grundbegriffe und Erklärungsprinzipien der Chemie und Physik für die Erklärung der spezifischen Lebenserscheinungen völlig versagen, wie durch die Organisation der Organismen selbst die Quellen von Vorgängen und Wirkungen geschaffen werden, die bei dem unbelebten Organismus gänzlich ausser Betracht bleiben.

Mit einer nach Form und Inhalt gleich ausgezeichneten Charakterisierung der nie zum Abschluss kommenden Aufgabe, die der Wissenschaft im allgemeinen gestellt sei und der besonderen Bedeutung, die innerhalb dieser Forschungsaufgabe der Biologie zufalle, schloss der Vortrag, den man mit Recht zu den bedeutendsten der jemals auf den Naturforscherversammlungen gehaltenen Vorträge rechnen darf.

Im Gegensatz zu der Allgemeinheit der Themata, die die in der ersten allgemeinen Sitzung gehaltenen Vorträge behandelten, beschäftigten sich die Vorträge der zweiten allgemeinen Sitzung am letzten Versammlungstage (21. September) mit Gegenständen spezieller Art. Es sprach zunächst Holzapfel (Aachen) über Ausdehnung und Zusammenhang der deutschen Steinkohlenfelder. Der mehrfach auf eine Karte Bezug nehmende Vortrag begann mit einem Hinweis auf die Bedeutung der Steinkohle, bei dem der Redner die Bemerkung machte, dass in der Bezeichnung der Kohlen als „schwarze Diamanten" eine Ueberschätzung des Wertes der Diamanten zu Tage trete, dann ging der Redner auf die Entstehung der Steinkohle über, kennzeichnete den Gegensatz der allochthonen und der, von ihm selbst geteilten, autochthonen Anschauung und wandte sich dann speziell den deutschen Kohlenlagern zu, deren Beziehung zu der Bildung der verschiedenen mit ihnen im Zusammenhang stehenden Gebirge er hervorhob. Ganz besonders machte er auf die Verschiedenheit aufmerksam, die das Vorkommen von mariner Fauna und Flora und von Süsswasser-Pflanzen und Tieren bei den einzelnen Kohlenbecken zeigt und auf die Schlüsse, die sich daraus ergeben. Nach Ansicht des Redners stellen die beiden hauptsächlichsten Kohlenbecken, das rheinisch-westfälische und das oberschlesische zwei untereinander nicht zusammenhängende vom Meere allmählich abgetrennte Becken vor, die in der Carbonzeit nach und nach ausgefüllt sind infolge von Bewegungen, die anfänglich im Osten, später im Westen die grössere Intensität zeigten.

Eine grosse Schwierigkeit biete die genaue Feststellung der Grenzen dieser Kohlenfelder, die namentlich durch die auf die zersetzende Thätigkeit des Wassers zurückzuführenden Einbrüche jüngeren Gesteins sehr erschwert sei. Hier reiche die blosse geologische Untersuchung nicht aus, vielmehr müsse eine planmässige Tiefbohrung ergänzend mitwirken, wie sie nur der Staat einrichten könne. Doch sei schon jetzt, für Oberschlesien, durch ganz neuerdings erfolgte Bohrungen festgestellt, dass die Kohlenfelder sich erheblich weiter erstrecken, als die Grenzen der bis jetzt zum Abbau herangezogenen Gebiete, so dass die Schätzung von Schultz (Bochum), der den Kohlenvorrat im westfälischen Becken als für 200 Jahre ausreichend bewertet habe, jedenfalls als viel zu niedrig angesehen werden müsse.

Zuletzt ergriff, mit lebhaftem Beifall begrüsst, Erich v. Drygalski (Berlin) das Wort, um über Plan und Aufgaben der deutschen Südpolar-Expedition zu sprechen. Diese auf Kosten des Deutschen Reichs erfolgende Expedition, die unter Leitung des Redners im August 1901 hinausgehen soll, wird durch den Atlantischen Ocean nach der Kapstadt, von da nach den Kerguelen gehen, wo einige Teilnehmer behufs Anstellung erdmagnetischer und meteorologischer Beobachtungen zurückbleiben sollen. Anfang Dezember 1901 wird die Hauptexpedition weiter gehen, ihr Forschungsgebiet wird das antarktische Land südlich vom Atlantischen und vom Indischen Ocean sein, an der Westseite des von Ross im Osten befahrenen Landes hofft sie ein Gelände zu finden, wo sie überwintern kann. Dort soll eine wissenschaftliche Station angelegt werden, die physikalische und biologische Arbeiten ausführen wird; Schlittenreisen von da aus sollen die Ausdehnung und Gestaltung des antarktischen Landes, die zunächst nur sehr unsichere, wenn auch auf dem Victorialande vermutete Lage des magnetischen Nordpols (der Redner bediente sich der Bezeichnung „Südpol") der Erde u. a. m. festzustellen suchen, für die Rückfahrt ist der Weg über Süd-Georgien durch den westlichen Teil des Atlantischen Oceans, über Tristan da Cunha in Aussicht genommen. Die Zeit ist auf zwei Jahre berechnet, doch wird die Ausrüstung auf eine dreijährige Frist bemessen werden.

Gleichzeitig mit der deutschen wird eine englische Expedition in See gehen, die die pazifische Seite des südlichen Eismeeres als Feld ihrer Thätigkeit wählen wird, vielleicht werden auch noch von Schottland und Schweden Expeditionen ausgesandt werden; Nord-Amerika wird die Ziele der Südpolar-Expeditionen durch Anlegung neuer erdmagnetischer Stationen fördern.

Alle diese Unternehmungen werden sich mit einander zu gemeinsamer Arbeit in Verbindung setzen, wie sie zugleich auch stets im Auge halten werden, dass die Aufgabe der Südpolar-Forschung nur dann zweckmässig gelöst werden kann, wenn sie der Arbeit der Nordpolar-Forschung parallel geht, beide Forschungsunternehmungen ergänzen einander.

Der durch den Hinweis auf eine Karte unterstützten Darlegung des Planes der Expedition fügte dann der Redner auch eine eingehende Darstellung der Ausrüstung an, von der hier nur das eine bemerkt sein möge, dass das auf den Howaldtschen Werken in Kiel zur Zeit im Bau begriffene Schiff der Expedition eine etwas andere Gestalt erhalten soll, als Nansens „Fram“, die zu einer so langen Seereise, wie der hier in Betracht kommenden, weniger geeignet sein würde, zugleich nannte der Redner die Namen der bereits jetzt schon ausgewählten wissenschaftlichen Teilnehmer an der Expedition. Der am Schluss des Vortrags laut werdende Beifall bekundete die Sympathien, die dem Unternehmen des Redners schon jetzt allseitig entgegengebracht werden.

In der gemeinsamen Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe, die zwischen den beiden allgemeinen Sitzungen (am 19. September) unter dem Vorsitz von Prof. van 't Hoff stattfand, sprach zunächst Felix Klein (Göttingen) über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit besonderer Rücksicht auf den Band 4 derselben (Mechanik). Er gab eine kurze Uebersicht über die Entstehung dieses von den Akademien zu Wien, München und Göttingen unterstützten Unternehmens, das die Firma B. G. Teubner in Leipzig in Verlag genommen hat, stellte fest, dass für dies Werk eine für Werke solcher Art ganz ungewöhnlich hohe Zahl von Abnehmern schon jetzt gesichert sei und betonte besonders auch den internationalen Charakter desselben, der durch die Mitarbeit bedeutender Gelehrter aus allen Kulturnationen verbürgt sei und in der schon jetzt in Aussicht genommenen von Teubner und Gauthier-Villars (Paris) gemeinsam herauszugebenden französischen Uebersetzung auch einen deutlichen Ausdruck finde.

Während die ersten drei Bände die rein mathematischen Disziplinen behandeln, sind die folgenden den Anwendungen der Mathematik gewidmet: Band 4 der Mechanik, 5. der theoretischen Physik, 6. der Geodäsie und den mathematischen Seiten der Geophysik und der Astronomie, in einem 7. Band, dessen Einzelgestaltung noch nicht feststeht, sollen historische, philosophische und didaktische Fragen berücksichtigt werden, zugleich wird er ein Generalregister enthalten.

Die verschiedenen Gesichtspunkte, die bei diesem umfassenden Werk zu berücksichtigen sind, skizzierte nun der Redner, indem er dabei ganz besonders auf den Inhalt des von ihm selbst zu redigierenden 4. Bandes einging, er setzte die Gründe auseinander, die für die Auswahl unter den mannigfachen, von vornherein sich darbietenden Stoffgruppierungen thatsächlich massgebend gewesen sind, und kennzeichnete kurz die Punkte, um die es sich vorzugsweise handelte, wobei er namentlich die Rolle, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei physikalisch-mathematischen Problemen zufällt, in überaus fesselnder Weise auch dem Laien zum klaren Verständnis zu bringen wusste.

An zweiter Stelle ergriff Bakhuis-Rozeboom (Amsterdam) das Wort zu einem Vortrag über die Bedeutung der Phasenlehre. Diese von Willard Gibbs 1873—1876 begründete Lehre gipfelt in der Gleichung $F = n + 2 - p$, bei der n eine Zahl von gleichzeitig neben einander existierenden Stoffen, p die Zahl der verschiedenen diesen Stoffen zukommenden Erscheinungsformen, F die Zahl der Möglichkeiten für solche Coexistenz („Freiheitsgrade des Systems“) bedeutet. Jenachdem F die Werte 0, 1, 2 usw. aufweist, spricht man von „nonvarianten“, „monovarianten“, „divarianten“ Systemen usw. Ist nur ein Stoff vorhanden, z. B. Wasser mit seinen drei Aggregatzuständen, so ist $n = 1$, $p = 3$, $F = 0$. Das System ist nonvariant, Wasser, Eis und Wasserdampf können nur in einem Falle gleichzeitig nebeneinander bestehen (wie die Erfahrung zeigt, bei $+ 0{,}0076^0$ Temperatur und 4,6 mm Druck). Fassen wir beim Wasser nur zwei Phasen ins Auge, so ist $n + 2 - p = 1$, der Freiheitsgrad hat den Wert Eins, d. h. Coexistenz von Wasser und Wasserdampf oder von Wasser und Eis ist auf unendlich verschiedene Arten möglich, jedoch mit der Massgabe, dass dabei entweder der Druck variabel und die jedem Druck zugehörige Temperatur fest bestimmt ist oder umgekehrt. Divariante und monovariante Systeme treten bei Verwendung von mehr als einem Stoffe auf.

Nach Auseinandersetzung der Grundbegriffe dieser Lehre erörterte der Redner, der die Weiterbildung derselben zu seiner Lebensaufgabe gemacht hat, in sehr eingehenden Ausführungen deren Tragweite. Er wies zunächst darauf hin, wie die weitgehende Uebereinstimmung im Verhalten der Systeme von dem gleichen Freiheitsgrad eine vorzügliche, von ihm selbst zuerst verwertete, Klassifikation der verschiedenen Gleichgewichtszustände ermögliche.

Demnächst erörterte er die sich auf diesem Wege ergebende Möglichkeit für die Bestimmung der Existenzgrenzen, welche für gewisse besonders eingehend untersuchte Stoffe (Chlor und Jod) durch eine räumliche, die einander entsprechenden Werte von Konzentration, Druck und Temperatur aufzeigende graphische Darstellung zum Ausdruck gebracht werden kann.

Ebenso lassen sich die Existenzgrenzen für die flüssigen Mischungen zweier Stoffe durch wenige einfache Schemata ausdrücken, wobei die Umstände, unter denen die Ausscheidung der verschiedenen Bestandteile je nach den thermischen Eigenschaften derselben erfolgt, durch graphische Darstellungen verdeutlicht werden können.

Den theoretischen Darlegungen schloss der Redner dann eine Uebersicht der praktischen Anwendungen der Phasenlehre an, die beim Studium der Metalllegierungen schon jetzt zu Tage treten, insofern sie eine Feststellung der Strukturbestandteile der erstarrten Masse ermöglichen, die sich aber nach des Redners Meinung in Zukunft auch für physiologische und biologische Untersuchungen als fruchtbar erweisen werden.

Der durch eine Reihe von Zeichnungen erläuterte Vortrag, der ohnehin bei dem Hörer eine gewisse Vertrautheit mit den Hauptgesichtspunkten und der ganzen Anschauungsweise der physikalischen Chemie voraussetzte, war leider nur für die ersten Reihen der Zuhörer überhaupt verständlich. Infolgedessen befand sich die Versammlung zum Teil bereits in dem Zustande einer gewissen Ermüdung, als der dritte Redner, Pietzker (Nordhausen) das Wort zu seinem Vortrag über Sprachunterricht und Sachunterricht (vom naturwissenschaftlichen Standpunkt)* erhielt. Er ging von der Feststellung der Thatsache aus, dass die mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehr-

*) In Sonderausgabe (unter Erweiterung durch eine Reihe von Anmerkungen) erschienen bei Emil Strauss in Bonn.

fächer trotz alles nicht wegzuläugnenden Fortschritts die volle Gleichberechtigung mit den sprachlich-geschichtlichen Fächern noch nicht errungen hätten, die zur Zeit noch als die fast ausschliesslichen Träger der eigentlichen Bildungsaufgabe der Schule anzusehen seien. Den Grund hierfür fand der Vortragende hinsichtlich des Sprachunterrichts darin, dass dieser zugleich Literatur-Unterricht und in dieser Eigenschaft der hauptsächlichste Vermittler des allgemein bildenden Sachunterrichts sei. Dieser letztere leide infolgedessen an einer gewissen Einseitigkeit, deren Ergänzung durch Verwertung der dem exactwissenschaftlichen Unterricht innewohnenden allgemein bildenden Momente erfolgen müsse. Der Vortragende skizzierte die Anknüpfungspunkte, die der letztere Unterricht für diesen Zweck biete, sowohl hinsichtlich der Vermittlung des Verständnisses für die Verhältnisse des menschlichen Gesellschaftslebens als auch hinsichtlich der Bildung der für das ganze Geistesleben grundlegenden Anschauungen. Er schloss mit dem Ausdruck des Wunsches, dass das neue Jahrhundert die hier bestehende Lücke ausfüllen und, indem es sich ebenfalls als ein Jahrhundert der naturwissenschaftlichen Forschung erweise, sich zugleich den Namen eines Jahrhunderts der naturwissenschaftlichen Bildung verdienen möge.*) — P.

Lehrmittel-Besprechungen.

Koehne, Dr. E., Repetitions-Tafeln für den zoologischen Unterricht an höheren Lehranstalten. I. Heft. Wirbeltiere. 6. Auflage. Berlin, H. W. Müller, 1898. Preis 80 Pf.

Die vorliegenden Tafeln enthalten auf 5 Blättern, von denen je eins einer Wirbeltierklasse gewidmet ist, teils nach der Natur entworfene Zeichnungen — nur sehr wenige sind Kopien — teils schematische Figuren, welche dazu dienen sollen, dem Schüler die Einprägung des in den naturgeschichtlichen Lehrstunden durchgenommenen Pensums zu erleichtern. Als Beispiel für die Säugetiere dient der Hund, für die Vögel der Seeadler, für die Reptilien die Flussschildkröte, für die Amphibien der Frosch, für die Fische ein Weissfisch (Rotauge). Ueberall sind in diesen Zeichnungen nicht nur die äusseren Umrisse des Körpers, sondern vor allem die wichtigsten inneren Organe, bisweilen auch die Entwickelung (Frosch) in klarer und anschaulicher Weise zur Darstellung gebracht. Der begleitende Text ermöglicht es dem Schüler, sich nötigenfalls selbst zu orientieren.

Die Benutzung der Tafeln ist in sehr verschiedenen Modificationen möglich, wie auch vom Verfasser in der Vorrede zum Text näher dargelegt wird, z. B. durch Anfertigung von Figurenerklärungen von Seiten der Schüler entweder in der Klasse unmittelbar im Anschluss an das Durchgenommene oder nachträglich als häusliche Arbeit oder durch Anfertigung von Kopien, durch weitere Ausführung einzelner Figuren, durch Eintragung schematischer Farben etc. Es ist keine Frage, dass eine derartige Benutzung der Tafeln eine wesentliche Ergänzung und Förderung des Unterrichts bildet, zumal an den Realanstalten, wo der Behandlung der Zoologie immerhin ein etwas grösserer Spielraum gewährt ist, insofern daselbst für den vorliegenden Fall nicht nur Sexta und Quinta, sondern auch die mittleren Klassen in Betracht kommen.

Schliesslich sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass sich dem Text der Figuren-Erklärung in ansprechender, knapper Form eine Zusammenstellung der Diagnosen der Wirbeltierklassen und ihrer Ordnungen anschliesst, ungefähr das, was als Grundlage des systematischen Unterrichts der Wirbeltiere angesehen werden muss. Petry (Nordhausen).

Bücher-Besprechungen.

Prof. Dr. Rudolf Arendt, Technik der Experimentalchemie. Anleitung zur Ausführung chemischer Experimente für Lehrer und Studierende sowie zum Selbstunterricht. Dritte vermehrte Auflage. Hamburg und Leipzig 1900, Verlag von Leopold Voss. (Preis M. 20).

Die jetzt vorliegende dritte Auflage des vortrefflichen Arendtschen Werkes weist gegenüber der zweiten einen Zuwachs von etwa vier Druckbogen auf. Diese erhebliche Erweiterung des Umfangs ist die Folge der Aufnahme sehr vieler im letzten Jahrzehnt bekannt gewordener neuer Vorlesungsversuche, auch die Beschreibung der Akkumulatorenbatterie und die Anleitung zu ihrem Gebrauch bei chemischen Versuchen ist neu. Liegt doch überhaupt ein wesentlicher Vorzug des Buches darin, dass der Verfasser unablässig bemüht ist, das in den deutschen und ausländischen Zeitschriften auftauchende neue Material zu sichten und bei den Neuauflagen seines Werkes sinngemäss zu verwenden. Die Ausstattung des Buches mit seinen 878 tadellosen Holzschnitten genügt den höchsten Anforderungen. Dass der Stoff streng methodisch angeordnet ist, dass also ein bestimmter logischer Fortschritt von den einfachen Reaktionen zu den verwickelten in allen Teilen des Buches hervortritt, wird gerade der Schulmann immer als einen Vorzug des Werkes empfinden, auch wenn er dasselbe, wie es gewöhnlich geschieht, nur zum Nachschlagen benutzt. — Die an manchen Stellen hervortretende Neigung des Verfassers, die Versuche mit einer gewissen Grossartigkeit auszustatten, wird den eigentlichen Fachmann nicht gerade stören, weil dieser sofort erkennt, in welchen Fällen die eine oder andere der abgebildeten Trockenflaschen unbedenklich fortgelassen oder vielleicht eine böhmische Röhre mit vier Porzellanschiffchen durch eine einfache Kugelröhre ersetzt werden kann. Dem Anfänger dagegen würde es bei der Vorbereitung der Versuche viel Zeit ersparen, wenn der Verfasser sich damit begnügt hätte, nur das für den Unterricht Notwendige zu bieten; ebenso ist nicht zu verkennen, dass ein Anfänger bei der Ueberfülle von Material in manchen Einzelfällen mehr Zeit gebraucht, um zu erkennen, welcher Versuch der im Unterricht allgemein übliche ist, als das z. B. bei der Benutzung der Heumannschen Anleitung zum Experimentieren der Fall sein würde. Levin (Braunschweig).

* * *

Dr. P. Bräuer, Oberlehrer am Realgymnasium I zu Hannover, Aufgaben aus der Chemie und der physikalischen Chemie, zum Gebrauch für die oberen Klassen höherer Schulen, sowie zum Selbstunterricht. Leipzig 1900, Verlag von B. G. Teubner.

*) Der Bericht über die Verhandlungen der Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht folgt in der nächsten Nummer.

Die Bräuersche Aufgabensammlung befriedigt ein von den Lehrern der Chemie oft empfundenes Bedürfnis, denn eine den heutigen Ansprüchen genügende und dabei kurze und übersichtliche Sammlung von chemischen Schulaufgaben fehlte bislang vollständig. Sehr dankenswert ist es, dass der Verfasser gerade die zur Zeit im Vordergrunde des Interesses stehenden Grenzgebiete zwischen Chemie und Physik eingehend berücksichtigt hat durch Aufgaben über die Regel von Avogadro, die Dissociation der Gase, die Gesetze von Ohm, Faraday und Joule, den osmotischen Druck und über thermochemische Vorgänge.

Levin (Braunschweig).

* * *

Heyer, Richard, Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höheren Schulen bearbeitet. IV und 112 S. Leipzig und Berlin 1900, Teubner. Preis geb. M. 1.60.

Diese neue Tafel bietet einige Vorzüge, zunächst in dem eigentlichen logarithmischen Teil, wo für die trigonometrischen Logarithmen eine neue Anordnung verwirklicht ist. Jede Seite enthält die Logarithmen von nur zwei Funktionen, die linke allemal die von Sinus und Cosinus, die rechte die von Tangens und Cotangens, wobei für die mit dem Winkel wachsenden Funktionen die Tafel von oben, für die Cofunktionen von unten zu gebrauchen ist. Das ist eine sehr gute Neuerung, die einer grossen Zahl von Verwechselungen, wie sie sich bei der bisherigen Einrichtung fast täglich im Schulleben ereignen, gründlich vorbeugt. Bis zum Werte von 5 Grad schreiten die Logarithmen von 10″ zu 10″ fort, für die grösseren Winkel von Minute zu Minute, wobei das Prinzip, die Unterabteilungen in derselben Weise, wie bei den Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen in parallelen Kolonnen anzuordnen, zur Verwendung kommt. Die Logarithmen der natürlichen Zahlen zeigen wie bei anderen guten Tafeln die Anordnung, dass je 1000 auf einer Doppelseite stehen, vorn abgetrennt sind zwei Ziffern.

An ferneren Tafeln sind zu bemerken Tafeln der Summen- und Differenz-Logarithmen in praktischer Anordnung, Tafeln der Werte selbst von Arcus, Sinus und Cosinus für den Radius Eins, immer um 10′ fortschreitend, eine ausserordentlich grosse Reihe von Tabellen vielfach gebrauchter Werte mathematischer, physikalischer, chemischer, geographischer und astronomischer Art. Der Verfasser will, wie er in der Vorrede sagt, dadurch die Verwendung von Aufgaben ermöglichen, die bisher im Unterricht wegen der umständlichen Zahlenrechnungen nur wenig Verwendung finden konnten; ich will nicht verschweigen, dass mir der Wert dieser Tabellen für den Unterricht teilweise fraglich erscheint, durch einige von ihnen dürfte ein mehr mechanischer Unterrichtsbetrieb begünstigt werden. Zum teil aber sind sie sehr verdienstlich, ganz besonders willkommen ist die Tabelle (Nr. 30) der wichtigsten Elemente der Lebensversicherungsrechnung, fussend auf der von Zeuner berechneten Absterbeordnung des Königreichs Sachsen. Den Schluss bildet eine Erläuterung der verschiedenen Tabellen, die mit einer kurzen Theorie der Annäherungsmethoden für die Auflösung numerischer Gleichungen beginnt.

Die äussere Ausstattung der aussergewöhnlich inhaltreichen Tafeln ist vortrefflich. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Kraepelin, K., Naturstudien im Garten. Plaudereien am Sonntag Nachmittag. Ein Buch für die Jugend. Mit Zeichnungen v. O. Schwindrazheim. Leipzig 1901, Teubner. Mk. 3.60 geb.

Krass, M. und Landois, H., Lehrbuch für den Unterricht in der Botanik. Mit 313 Abb. 5. Aufl. Freiburg 1900, Herder. Mk. 3.20.

Kraus, K. und Bötlger, H., Grundriss der Chemie. Mit 62 Holzschnitten. Wien 1901, Pichler's Wwe. & Sohn. Mk. 1.70 geb.

Mahler, G., Ebene Geometrie. Mit 111 Fig. 3. Aufl. (Sammlung Göschen No. 41) Leipzig 1900, Göschen. Mk. —.80 geb.

Mewes, R., Uebereinstimmung der Spannungs-, Volumen- und Temperaturgesetze der Stoffe mit den Absorptions-, bezw. Emissionsgesetzen der Aetherschwingungen. Sonderabdruck aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses. Berlin 1900, Mewes.

Müller, G., Zeichnende Geometrie. Mit 11 Tafeln und mehreren Abb. 6. Aufl. Stuttgart 1901, Neff. Mk. 2.20 geb.

Müller H. u. Kutnewsky, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Ausgabe A. Teil I. Ausgabe B. Leipzig 1900, Teubner. A. I. Mk. 2.80 geb., B. Mk. 2.60 geb.

Obermayer, A., Leitfaden für den Unterricht in der Physik. Mit 709 Abb. Wien 1900, Braumüller. Mk. 13.40.

Ostwald, W., Grundlinien der anorganischen Chemie. Mit 122 Fig. Leipzig 1900, Engelmann. Mk. 16.— geb.

Pahde, A., Erdkunde für höhere Lehranstalten. II. Teil: Mittelstufe, erstes Stück. Mit 8 Vollb. und 3 Textabbild. Glogau 1900, Flemming. Mk. 1.80 geb.

Püning, H., Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. 2. Aufl. Mit 324 Fig. und einer Spektraltafel. Münster 1900, Aschendorff. Mk. 3.50.

Richter, A., Körners Lehrbuch der Physik. Mit 734 Abb. Wien 1900, Deuticke. Mk. 6.— geb.

Rössler, R., Die Raupen der Grossschmetterlinge Deutschlands. Eine Anleitung zum Bestimmen der Arten. Mit 2 Tafeln. Leipzig 1900, Teubner. Mk. 2.20 geb.

Rudolphi, M., Die Bedeutung der physikalischen Chemie für den Schulunterricht. Vortrag, gehalten am 26. Oktober 1900, zur Erlangung der venia legendi für Physik und physikalische Chemie an der Grossh. Techn. Hochschule zu Darmstadt. Göttingen 1900, Vandenhoeck & Ruprecht. Mk. —.60.

Russner, Joh., Elementare Experimental-Physik für höhere Lehranstalten. 2. Teil: Mechanik flüssiger und gasförmiger Körper. Wellenlehre. Hannover 1900, Jänecke. Mk. 4.—.

Sachs, J., Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie. 1. Teil: Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität. Mit 97 Fig. Stuttgart 1900, Maier. Mk. 5.—.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Teil: Aufgaben aus der Integral-Rechnung. 4. Aufl. bearb. von Prof. Dr. R. Henke. Mit Holzschn. Leipzig 1900, Teubner. Mk. 9.—.

Schmidt, J., Ueber die praktische Bedeutung chemischer Arbeit. Stuttgart 1900, Enke. Mk. 1.60.

Schmidt, M. C. P., Realistische Chrestomathie aus der Literatur des klassischen Altertums. In 3 Büchern. 1. Buch mit 56 Fig. Leipzig 1900, Dürr. Mk. 2.40.

Schmid-Monnard, Die Ursachen der Minderbegabung von Schulkindern. Sonderabdruck aus der „Zeitschrift für Schulgesundheitspflege“, XIII. Jahrgang 1900, Hamburg. Voss.

Schwippel, K., Verbreitung der Pflanzen und Tiere. Wien 1900, Pichler. Mk. 1.70.

Sickenberger, A., u. Bauschinger, C. W., Leitfaden der kaufmännischen Algebra. Leipzig, Verlag der Handelsakademie. Mk. 2.75 geb.

Simon, M., Analytische Geometrie der Ebene. Mit 57 Abb. 2. Aufl. (Sammlung Göschen No. 65) Leipzig 1900, Göschen. Mk. —.80 geb.

Smolík, F., Elemente der darstellenden Geometrie. Neu bearb. v. Jos. F. Heller. Mit 334 Holzschn. 2. Aufl. Prag 1900, Tempsky. Mk. 4.— geb.

Torka, Joh., Grundlage der Getriebelehre. Eine Geometrie der Bewegung. 1. Heft. Berlin 1900, Mewes. Mk. 2.—.

v. Trotha, Th., Die kubische Gleichung und ihre Auflösung für reelle, imaginäre unb komplexe Wurzeln. Berlin 1900, Ernst & Sohn. Mk. 2.60.

Urteile namhafter Männer der Wissenschaft und Technik über das Wesen und die Bedeutung des Zeichnens und des Schulzeichenunterrichts, sowie drei preisgekrönte Arbeiten über das Thema: Hat die bildende Kunst dieselbe Bedeutung und denselben Wert für die Erziehung und die allg. Bildung unserer Jugend wie die Wissenschaft? Bochum 1900, Hengstenberg. Mk. 1.—.

Wachter, V., Das Wichtigste der organischen Chemie. München 1900, Oldenbourg. Mk. 1.— kart.

Wimmenauer, Th., Arithmetische Aufgaben nebst Lehrsätzen und Erläuterungen. 1. Teil: Lehraufgabe der beiden Tertien und der Untersekunda des Gymnasiums. 2. Teil: Lehraufgabe der Obersekunda und der Prima des Gymnasiums. Breslau 1900, Hirt. Teil I Mk. 2.—; Teil II Mk. 4.—.

Züge, H., Allgemeine pythagoreische Zahlen. Abdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik; 2. Reihe, 17. Teil, 4. Heft.

Für den botanischen Unterricht empfehle meine in eigener Werkstätte sorgsamst hergestellten

zerlegbaren Blütenmodelle,

prämiiert mit der preuss. Staats-, sowie 21 goldenen und silbernen Ausstellungs-Medaillen.

R. Brendel, Grunewald bei Berlin
Bismarck-Allee 37.
Preisverzeichniss auf Verlangen gratis und franko.

IBACH

hat ein Jahrhundert lang Pianos für Lehrer gebaut und sich dabei zur Pflicht gemacht, stets alle ihre Wünsche zu berücksichtigen, so dass heute das Piano von

Rud. Ibach Sohn

Hof-Pianofabrikant
Sr. Maj. des Königs und Kaisers,
Barmen-Berlin-Bremen-Hamburg-Köln,
„das Lehrer-Piano" heissen darf unter allen anderen

PIANOS

Filiale: Berlin, Potsdamerstr. 22b.

Verlag von Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Die Geometrie der Lage.

Vorträge
von
Dr. Th. Reye,
ordentlicher Professor der Universität Strassburg i. Els.

Abth. I, 4. Aufl. 1899. Mit 90 Textfiguren. Brosch. 8 Mk. Geb. 10 Mk.
Abth. II, 3. Aufl. Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 Mk. Geb. 11 Mk.
Abth. III, 1. Aufl. Brosch. 6 Mk. Geb. 8 Mk.

Aus einigen Beurtheilungen dieses Werkes:

Die Vorzüge der Geometrie der Lage werden durch dies vortreffliche Lehrbuch in das deutlichste Licht gesetzt. Die Anordnung und Reichhaltigkeit des darin behandelten Stoffes ist geradezu mustergültig. Der Inhalt bietet eine so grosse Fülle an Aufgaben und Lehrsätzen, dass jeder aufmerksame Leser zu aufrichtiger Bewunderung für den geistvollen Verfasser und zu warmem Interesse für den Gegenstand hingerissen wird. Im Vergleich zu dem v. Staudt'schen Werke über die Geometrie der Lage ist das Buch von Reye um Vieles leichter verständlich.

L. Kiepert in Zeitschr. f. Archit. u. Ingenieurwesen, Hannover.

Man wird selten ein Buch finden, in welchem ein schwieriger Gegenstand so leicht und flüssig behandelt ist, wie hier. Gleich im Anfange werden Anregungen gegeben, welche sofort zeigen, wo das Ganze hinsteuert. Zahlreiche Figuren sind eingestreut und stets wird der Leser ermahnt, selbst zu construiren, um sich durch Uebung und Anschauung zum Meister des Gegenstandes zu machen. Mit einem Worte: es handelt sich um ein Meisterwerk.

Direktor Dr. Holzmüller in Zeitschr. f. lateinlose höhere Schulen, 1899, No. 11.

Ein neues Urteil

über das

Rechenbuch

für Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare, Präparanden-Anstalten etc.

von

Chr. Harms weiland Professor in Oldenburg. und **Dr. Alb. Kallius** Professor am Königstädt. Gymnasium in Berlin.

20. Auflage. 150. bis 170. Tausend. (Preis *M.* 2,85 eleg. u. solide gebd.)

Der soeben erschienene **„Pädagogische Jahresbericht"**, Band 52 (ausgegeben Ende Oktober 1900 im Verlage von Friedr. Brandstetter in Leipzig) veröffentlicht über obiges Unterrichtswerk nachfolgendes Urteil:

„Ein Rechenbuch, das in der 20. Auflage erscheint und an rund 300 Schulen eingeführt ist, muss sicherlich vorzüglich „sein. Dies bestätigen 40 uns vorliegende fachmännische Urteile über die ausgezeichnete Brauchbarkeit des Buches. Doch „haben wir, unbeeinflusst von ihnen, das Buch eingehend geprüft und dabei gefunden, dass wir allerdings in ihm „ein Lehrmittel vor uns haben, das wohl unübertroffen und unerreicht dastehen dürfte. Die Dar„stellung der Bruchrechnung ist ein Meisterwerk. Das Gleiche lässt sich von den Aufgaben sagen, die dem algebrai„schen Unterricht vorarbeiten sollten. Auch die Art und Weise, wie die Lösung der Aufgaben auf jeder neuen Stufe durch „wenige bestimmte Fragen angedeutet wird, muss bewundert werden. Wir wüssten, um nur eins herauszugreifen, nicht, „wie man die Schüler besser in die Rabatt- und Diskontrechnung einführen kann, als es hier geschieht. Dadurch wird das „Buch zugleich zu einem methodischen Leitfaden. Dass wir dies und jenes vielleicht geändert sehen möchten, kann bei „einem so eigenartigen Buche kein Tadel sein. Es sind dies Kleinigkeiten, die auf persönlicher Anschauung beruhen.

„Doch wozu Eulen nach Athen tragen! Wer diese so gross angelegte und reichhaltige Aufgaben„sammlung noch nicht kennt, lasse sie sich kommen, und selbst, wenn sie ihm zur Einführung an der „Schule nicht geeignet erscheint, wird er so viel Anregung aus ihr schöpfen können, dass er niemals bereuen wird, „sie sich angeschafft zu haben."

An weit über 340 Gymnasien, Realschulen und sonstigen höheren Unterrichtsanstalten offiziell eingeführt, in Berlin allein an 26 Gymnasien und Realschulen.

Gesamtverbreitung: 149,000 Exemplare. ☞ **Zur Einführung empfohlen!** ☜

(Neu-Einführungen werden durch Freiexemplare an die Herren Fachlehrer und die Bibliotheka pauperum gern unterstützt. — Gebundene Probeexemplare stehen den Herren Fachlehrern kostenfrei zur Verfügung.)

Oldenburg i. Gr. **Gerhard Stalling,** Verlagsbuchhandlung, gegr. im Jahre 1789.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.