

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 46 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Die Auffindung der Lichtstufen beleuchteter Flächen mittels der Rodenbergschen Skala. Von August Schmidt (S. 85). — Ueber physikalische Schülerübungen. Von Karl Noack (S. 97). — Ueber die kubische Gleichung. Von Prof. Dr. Pasch (S. 101). — Geometrographie. (Von F. Pietzker) (S. 102). — Vereine und Versammlungen [Naturforscher-Versammlung zu Hamburg; XLVI. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Strassburg] (S. 102). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [Unterricht in der darstellenden Geometrie; Naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Berlin] (S. 103). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 103). — Zur Besprechung eingetroffene Bücher (S. 106). — Berichtigung. Von R. Hegor (S. 106). — Anzeigen.

Die Auffindung der Lichtstufen beleuchteter Flächen mittels der Rodenberg'schen Skala.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Giessen.*)
Von August Schmidt (Wiesbaden).

H. H. Die französischen Mathematiker, welche Ende des 18. und anfangs des 19. Jahrhunderts die darstellende Geometrie begründeten, bildeten die orthogonale Projektionsmethode bereits in einer Weise aus, dass den folgenden Generationen nach dieser Richtung hin verhältnismässig wenig zu thun übrig blieb.

Anders liegt die Sache auf dem Gebiete der Beleuchtungskunde. Das Fundamentalproblem derselben lautet bekanntlich: Es ist eine gesetzmässig gestaltete Fläche und die Richtung der Lichtstrahlen gegeben, man soll die Helligkeit irgend eines Punktes derselben und die Oerter der Punkte gleicher Helligkeit — die Isophoten — konstruieren. Zwar giebt Olivier**) eine Methode zur Auffindung der Isophoten an***).

aber sie erweist sich als praktisch unausführbar. Erst im Jahre 1855 schuf Egle*) in der Normalkugel einen brauchbaren Lichtmasstab und wandte ihn auf eine grosse Zahl regelmässiger Flächen an.

Hatte sich Egle auf eine einzige ganz bestimmte Strahlenrichtung beschränkt — seine Methode ist übrigens, wenn auch mit stark vermehrtem Zeitaufwande, für jede Strahlenrichtung verwendbar — so griff sieben Jahre später Tilscher in der schon angeführten Arbeit das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit an und löste es unter Benutzung dreier Skalen. Vom rein mathematisch-konstruktiven Standpunkte aus betrachtet, dürfte diese Lösung wohl unter den bis zum heutigen Tage erschienenen den ersten Platz einnehmen. Aber in dieser ganzen Frage hat ausser der reinen Mathematik auch die Technik mitzureden, und diese verlangt, dass die Aufgabe nicht blos mathematisch richtig, sondern auch bequem und schnell gelöst wird. Daher mag es kommen, dass Tilschers Verfahren kaum in die Technik eingedrungen ist,

*) S. Unt.-Bl. VII, 3, S. 55.

***) Développements de géométrie descriptive, pag. 193.

****) Sie ist in deutscher Uebersetzung zu finden bei Tilscher: „Die Lehre von den Beleuchtungskonstruktionen“, pag. 94.

*) „Abhandlung über das Schattieren der Oberflächen regelmässiger Körper.“

während Egles Methode von C. Riess*) weiter ausgebildet und von Adolf Göller**) unlängst auf alle Flächen angewandt worden ist, so dass die Normalkugel gegenwärtig der allgemein verbreitete Lichtmasstab ist. Unerwähnt darf die mit der Schattierungskunde von Riess gleichzeitig erschienene Arbeit Burmeisters***) nicht bleiben, in welcher er das Problem analytisch behandelte, die Resultate konstruktiv verwertete und auch die sogenannte „scheinbare Beleuchtung“ in Rechnung stellte.

Frägt man nach der Verwendbarkeit der kurz skizzierten Methoden für den Unterricht an den mittleren Lehranstalten (Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule), so scheiden Tilscher und Burmeister naturgemäss aus. Auch die Einführung der Normalkugel ist in anbeacht der für den Gegenstand verwendbaren Zeit kaum möglich. Das ist schmerzlich. Erfahrungsmässig wenden nämlich die Schüler den Schattenkonstruktionen erhöhtes Interesse zu. Während sie nun einerseits Schlagschatten und Dämmerungslinie mathematisch genau konstruieren, sehen sie sich bezüglich der Beleuchtung der Oberflächenteile der Körper auf blosse Vermutungen oder unzuverlässige Abschätzungen angewiesen — ein Uebelstand, den die intelligenten unter den Schülern sehr lebhaft empfinden. Diesem Mangel dürfte die Lichtskala abhelfen, welche Herr Prof. Rodenberg in seinen Vorlesungen am Polytechnikum in Hannover zur Anwendung bringt. Sein Lichtmasstab ist anderweitig noch nicht beschrieben, ich bringe Ihnen denselben, selbstverständlich mit der — freundlichst erteilten — Genehmigung des Herrn Autors, in dem folgenden zur Kenntnis.

Um auch denjenigen meiner Herren Zuhörer gerecht zu werden, welche diesem Gegenstande seither fern gestanden haben, will ich einige Fundamentalsätze der Beleuchtungskunde an die Spitze stellen und mich dabei, wie in den folgenden Darlegungen überhaupt, auf die Beleuchtung durch parallele Strahlen beschränken.

I. Die Lichtstufen.

Bekanntlich ist die Beleuchtung eines ebenen Flächenstücks dem Sinus des Winkels proportional, welchen die Strahlen mit der Ebene einschliessen. Ist dieser Winkel $\alpha = 90^\circ; 64^\circ; 53^\circ; 44\frac{1}{2}^\circ; 36\frac{3}{4}^\circ; 30^\circ; 23\frac{1}{2}^\circ; 17\frac{1}{2}^\circ; 11\frac{1}{2}^\circ; 5\frac{3}{4}^\circ; 0$, so ist teils genau, teils angenähert $\sin \alpha = 1; 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5; 0.4; 0.3; 0.2; 0.1; 0$.

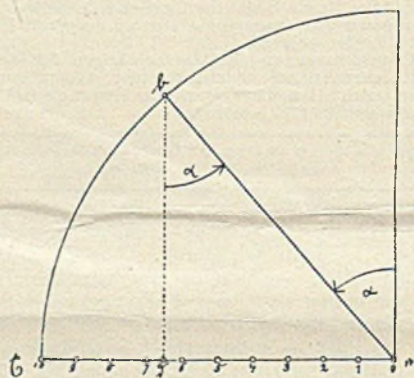
Setzen wir die Helligkeit eines ebenen Flächenstücks bei senkrechter Beleuchtung gleich zehn

Lichteinheiten irgend welcher Art, so ist sie für $64^\circ = 10 \cdot \sin 64 = 9$ Lichteinheiten, für $30^\circ = 5$ Lichteinheiten usw. Die Stärke der Beleuchtung, welche einem Flächenelement vermöge des Winkels zukommt, welchen die Strahlen mit ihm einschliessen, heisst die „Lichtstufe“ des Flächenstücks. Nach dem eben getroffenen Uebereinkommen liegen alle Lichtstufen zwischen dem Helligkeitsgrade 10 und 0.

Hiernach lässt sich die Aufgabe lösen:

Es ist die Lichtstufe einer ebenen Figur zu ermitteln, wenn ihre Projektionen und die Projektionen der Strahlenrichtung gegeben sind.

Wir konstruieren nach den gewöhnlichen Regeln der darstellenden Geometrie den Strahlenwinkel und multiplizieren seinen Sinus mit 10. Das Produkt stellt die gesuchte Lichtstufe dar. Das Aufschlagen des Sinus lässt sich bequem umgehen. Wir teilen (Fig. 1) den Radius $a \gamma$



(Fig. 1).

eines beliebigen Kreises in zehn Teile, tragen den Strahlenwinkel α vom Mittelpunkte aus an einen zu $a \gamma$ senkrechten Radius und fällen am Kreispunkte b seines Endschenkels das Lot $b \delta$ auf $a \gamma$. Dann ist $\sin \alpha = \frac{a \delta}{a \gamma}$, die Lichtstufe

demnach $= \frac{a \delta}{10} \cdot 10 = a \delta$. Schreiben wir an die einzelnen Teilpunkte von a an die zugehörigen Zahlen 0, 1, 2 ... 10, so lesen wir die Lichtstufe ohne weiteres an dem Fusspunkte b ab. Dem in der Figur angenommenen Strahlenwinkel entspricht beispielsweise die Lichtstufe 6,5.

Diese Methode ist theoretisch einfach, erfordert aber in der Praxis die zeitraubende Konstruktion des Strahlenwinkels. Eine erste Vereinfachung bietet die Theorie der Normalkugel.

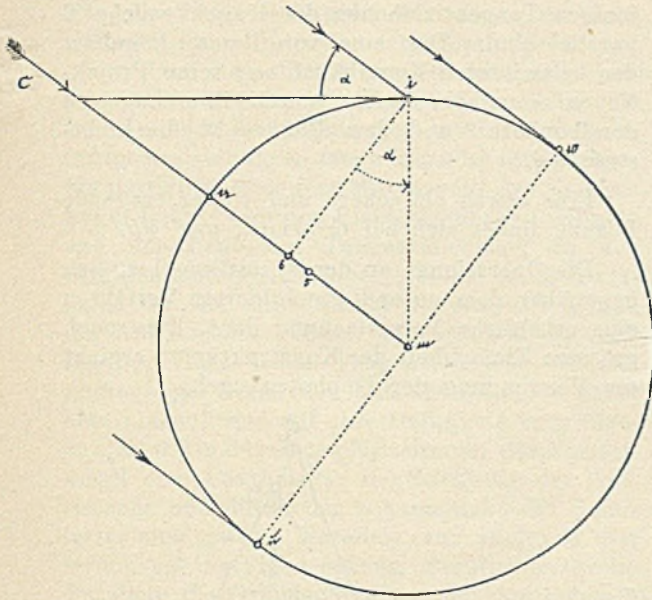
II. Die Normalkugel.

a) Eine Kugel (Fig. 2) von beliebigem Radius sei den Lichtstrahlen ausgesetzt. Einer von ihnen, der Centralstrahl c , geht durch den Kugelmittelpunkt m . Zu seinem Treffpunkte a auf der Kugeloberfläche gehört eine Tangentialebene,

*) C. Riess, „Schattierungskunde“, Stuttgart 1871.

**) Lehrbuch der Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, Stuttgart 1895.

***) „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen.“



(Fig. 2).

die auf ihm senkrecht steht. Daher kommt diesem Punkte die höchste Lichtstufe 10 zu. Legen wir durch den Centralstrahl eine beliebige Ebene, z. B. die durch die Ebene des Papiers in Fig. 2 dargestellte Vertikalebene und ziehen ihm parallel 2 Tangenten an den zugehörigen Kugelschnitt, so sind die Berührungspunkte u und v die Endpunkte eines zum Centralstrahl senkrechten Durchmessers. Bei der Rotation des Kugelschnitts um den Centralstrahl beschreiben die beiden Berührungspunkte einen grössten Kugelkreis und die Tangentialstrahlen einen Cylinder, welcher die Kugel in dem Kreise berührt. Dieser Kreis hat daher die Lichtstufe 0. Er scheidet die beleuchtete Hälfte der Kugel von der nichtbeleuchteten und heisst der „Dämmerungskreis“ der Kugel oder die Isophote 0 (Vergl. Einleitung Seite 1). Wir sehen nun ohne weiteres: Den Punkten des Viertelkreises a v vom hellsten Punkte a bis zum Dämmerungspunkt v kommen der Reihe nach alle möglichen Lichtstufen zwischen 10 und 0 zu. Wollen wir beispielsweise den Punkt finden, welcher die Lichtstufe 6 besitzt, so teilen wir den Radius m a in 10 gleiche Teile und errichten im Teilpunkte 6 das Lot, so ist sein Endpunkt i der gesuchte; denn Tangente und Strahl schliessen am Punkte i denselben Winkel α ein, wie der Radius m i und das Lot von 6 bis i , also ist $\sin \alpha = \frac{6}{10}$, also die Lichtstufe = 6. Rotiert die Figur um C , so beschreibt i einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Punkt 6 auf c ist; und die Tangente beschreibt einen Kegel, welcher die Kugel in dem Kreise i berührt. Alle Seitenlinien dieses Kegels, also auch alle Tangentialebenen desselben sind zu den Strahlen unter demselben Winkel α geneigt, also besitzen alle Punkte des Berührungskreises dieselbe Lichtstufe — hier die Lichtstufe 6.

Die Isophoten der Kugel sind also Kreise, deren Mittelpunkte dem Centralstrahl angehören und deren Ebenen auf dem Centralstrahl senkrecht stehen.

Eine Kugel von beliebigem Radius, auf welcher die zehn Hauptisophoten gezeichnet sind, stellt einen Lichtmasstab dar. Hält man sie nämlich als Tangentialkugel an ein beleuchtetes ebenes Flächenstück, so dass m a die Strahlenrichtung angiebt, so kommt dem Flächenstück die Lichtstufe des Berührungspunktes zu. Gehört dieser Berührungspunkt einer Isophote an, so hat er die Lichtstufe derselben. Andernfalls kann seine Helligkeit aus seiner Lage zu den beiden ihm benachbarten Isophoten ohne weiteres abgelesen werden. Eine solche Kugel heisst Normalkugel.

b) Nun ist die eben erwähnte Manipulation in der Geometrie nicht praktisch durchführbar; sie deckt sich aber dem Erfolge nach mit der Lösung der Aufgabe: „An die beleuchtete Hälfte der Normalkugel soll eine Tangentialebene gelegt werden, welche einer auf ihre Lichtstufe zu prüfenden Ebene parallel ist“, denn der Berührungspunkt dieser Tangentialebene hat die gesuchte Helligkeit.

Da in der darstellenden Geometrie die Gebilde durch ihre Projektionen gegeben werden, so haben wir nunmehr die Projektionen der Normalkugel zu konstruieren. Die Ellipsen, welche in der Grund- und Aufrissebene die zehn Isophotenkreise darstellen, können nach den elementaren Regeln der deskriptiven Geometrie gezeichnet werden. Doch ist hier noch eine Bemerkung zu machen. Ihre Beschaffenheit richtet sich nach ihrer Lage zu den Bildebenen, also, da die Isophotenkreise auf der Strahlenrichtung senkrecht stehen, nach der Strahlenrichtung. Ich schliesse mich in dem folgenden dem fast allgemein herrschenden Brauche an, die Strahlenrichtung so vorauszusetzen, dass ihr Grundriss und ihr Aufriss mit der x -Axe einen Winkel von 45° einschliessen. Bekanntlich ist dann jeder Strahl zu jeder der beiden Bildebenen unter $35^\circ 15' 53''$ oder angenähert unter $35\frac{1}{4}^\circ$ geneigt. Die Helligkeit jeder der Aufriss- oder der Grundebene parallelen Fläche ist daher $= \sin 35\frac{1}{4} \cdot 10 = 5,8$. Unter dieser Voraussetzung sind in Fig. 3 die Projektionen der Normalkugel mit den Hauptisophoten null, neun und dem Punkte 10 der grössten Helligkeit dargestellt.

c) Die Art, wie die Normalkugel verwertet wird, möge ein Beispiel veranschaulichen. Es soll die Lichtstufe des durch seine Projektionen a_1 b_1 c_1 und a_2 b_2 c_2 gegebenen Dreiecks a b c Fig. 3 a angegeben werden.

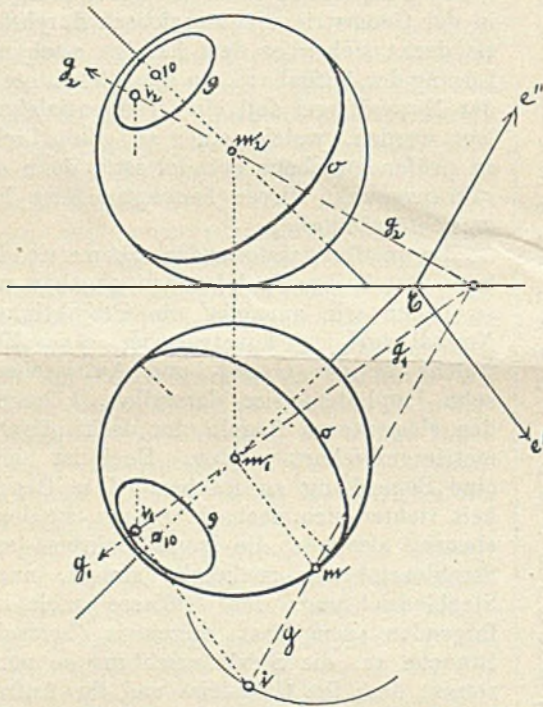
Die Gerade b_2 f_2 \parallel x -Axe stellt den Aufriss einer Dreieckstransversale dar, welche der Grundspur der Dreiecksebene parallel ist; ihr Grundriss b_1 f_1 ist die Richtung der Grundspur;

analog ist die Richtung $a_2 c_2$ der Aufrisspur gefunden. Die durch den Punkt γ der x -Axe gezogenen Geraden $e' \parallel b_1 f_1$ und $e'' \parallel a_2 c_2$ sind also die Spuren einer Ebene E , welche der Dreiecksebene parallel ist. Füllen wir von m_1 und m_2 je ein Lot g_1 und g_2 auf e' und e'' , so repräsentieren dieselben der Richtung nach die Projektionen des auf E senkrechten Kugeldurchmessers. Rein zufällig begegnen sie sich in der Figur in einem Punkte der x -Axe. Legen wir die Vertikalebene dieses Durchmessers samt ihrem Kugelschnitte und der Geraden g um g_1 in die Grundebene, so schneidet g den Kreis in den Berührungspunkten der-

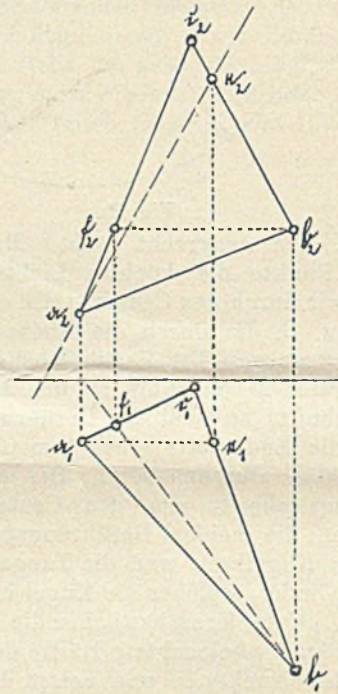
jenigen Tangentialebenen der Kugel, welche E parallel sind. Der eine von ihnen, i , gehört der beleuchteten Kugelhälfte an; seine Projektionen i_1 und i_2 liefern durch ihre Lage zu der Isophote 9 und dem Punkte 10 die Lichtstufe 9,4.

Eine etwas einfachere und weiter tragende Lösung findet sich bei Göller, pag. 95.

Die Operationen an der Normalkugel stellen gegenüber dem unter I geschilderten Verfahren eine erhebliche Vereinfachung dar. Eine noch grössere Einfachheit der Konstruktionen ergibt die Verwendung der Isophotenkegel.



(Fig. 3).



(Fig. 3 a).

III. Die Isophotenkegel und der Rodenberg'sche Lichtmassstab.

a) Den zu einer Isophote der Normalkugel gehörenden Berührungskegel wollen wir Isophotenkegel nennen und ihn durch die Helligkeitszahl der Isophote charakterisieren. Allen Tangentialebenen eines solchen Kegels kommt die Lichtstufe der entsprechenden Isophote zu. Wird daher eine Ebene durch Parallelverschiebung Berührungsebene an einem Isophotenkegel, so hat sie die durch ihn angegebene Lichtstufe. Tangentialebene an einem Kegel ist eine Ebene, wenn sie die Kegelspitze enthält und wenn ihre Grundspur die gleichnamige Kegelspur berührt.

Die Grundspuren der Isophotenkegel zerfallen in drei Gruppen, deren Unterscheidung

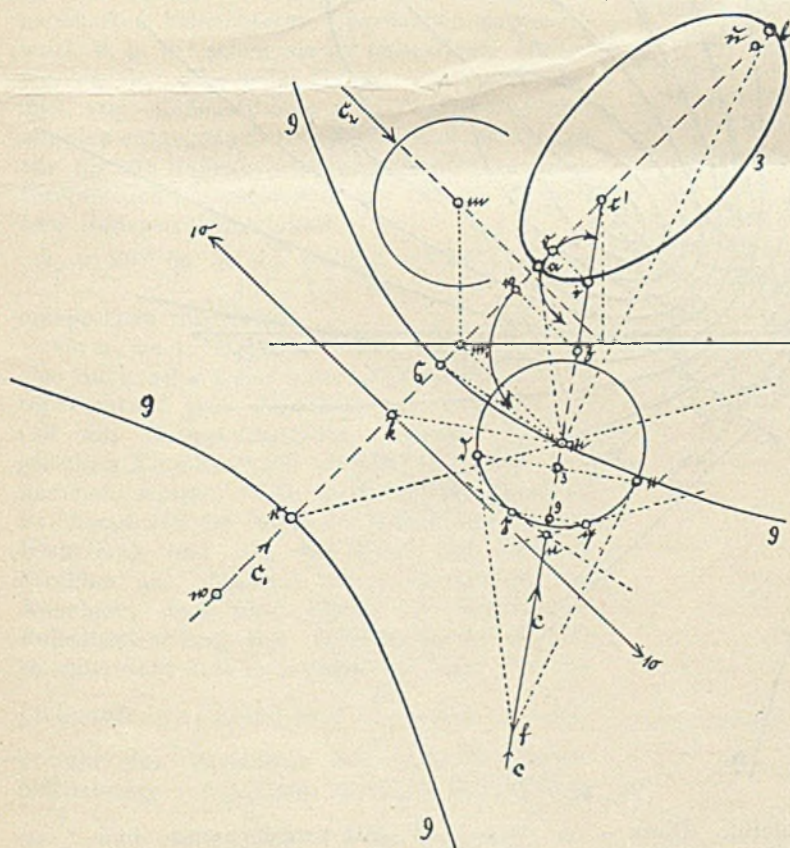
mittels der horizontalprojizierenden Ebene H des Centralstrahls leicht durchzuführen ist. Auf jedem Isophotenkegel gehören zwei Seitenlinien der Ebene H an. Aber nur bei einem dieser Kegel ist die eine dieser beiden Seitenlinien der Grundebene parallel. Die zu dieser Seitenlinie gehörende Tangentialebene liegt horizontal, ist also zu den Strahlen unter $35\frac{1}{4}^\circ$ geneigt, gehört somit dem Isophotenkegel 5,8 an. Darum ist die Grundspur dieses einen Kegels, der zwischen den Hauptkegeln 5 und 6 liegt, eine Parabel, während die Spuren der Kegel von 0 bis 5,8 sich als Ellipsen, diejenigen der Kegel von 5,8 bis 10 als Hyperbeln darstellen. Für den hellsten Punkt wird der Kegel zur Tangentialebene der Normalkugel, deren Spur auf dem Grundriss des Centralstrahls senkrecht steht.

Für die Isophote 0 geht der Kegel in einen Cylinder mit elliptischer Grundspur über.

b) Um diese Bemerkungen möglichst einfach zu verwerten, vereinigen wir zunächst die Spitzen aller Isophotenkegel in einem Punkte, indem wir sie alle so lange konaxial verschieben, bis ihre Spitzen in den Mittelpunkt der Normalkegel fallen. An der Richtung der Seitenlinien und der Lage der Tangentialebenen zu den Strahlen ändert sich dabei nichts. Endlich verlegen wir den Mittelpunkt der Normalkegel in die Aufrissebene. Dann geht nämlich die Aufrisspur einer jeden Tangentialebene der Isophotenkegel durch den Mittelpunkt. Ist daher eine ebene Figur auf ihre Helligkeit zu prüfen, so ziehen wir durch den Mittelpunkt der Normalkegel eine Parallele zu der Richtung der Aufrisspur und durch den x-Axenpunkt der Parallelen eine zweite Parallele zur Richtung der Grundspur der Figurenebene. Berührt die zweite Parallele die Grundspur eines der verschobenen Isophotenkegel, z. B. des Kegels 5, so kommt der Figur die entsprechende Helligkeit, hier also die Lichtstufe 5 zu. Und berührt die

bald die Grundspuren der parallel verschobenen Isophotenkegel bekannt sind. Diese aber sind unschwer zu konstruieren.

c) In Fig. 4 sei nämlich m_1 der Grundriss des in der Aufrissebene gelegenen Mittelpunktes m der Normalkegel, c stelle den um seinen Grundriss c_1 in die gleichnamige Bildebene gedrehten Centralstrahl, m den ungeklappten Mittelpunkt des zur Vertikalebene H von c gehörenden grössten Kugelkreises und $b c$ den aus der Ebene H heraus in die Grundebene gedrehten Durchmesser einer Isophote, z. B. der Isophote 3 dar. Dann sind die Tangenten $f b$ und $f e$ diejenigen beiden Seitenlinien des Kegels 3, welche in der Ebene H liegen. Da diese Ebene zugleich die Neigungsebene des Isophotenkreises und der Grundebene ist, so schneiden $f b$ und $f e$ auf c_1 die Hauptaxe der Kegelgrundspur ab. Um hiernach die Grundspur des Parallelkegels 3 zu finden, ziehen wir durch m die Parallelen $m a$ und $m b$ bzw. zu $f b$ und $f e$; sie schneiden auf c_1 die Hauptaxe der gesuchten Kegelspur ab. Die Brennpunkte derselben sind diejenigen Berührungspunkte o



(Fig. 4).

Parallele eine zwischen zwei benachbarten Hauptspuren, z. B. zwischen 5 und 6 gelegene Spur, so ist die Lichtstufe leicht mit hinreichender Genauigkeit abzuschätzen. Es steht uns also ein neues überaus einfaches Verfahren für Lichtstufenbestimmung zur Verfügung, so-

und u der beiden zur Seite $a b$ des Dreiecks $a b m$ gehörenden Berührungskreise, welche in $a b$ liegen. Von diesen beiden Kreisen ist in der Figur derjenige, welcher dem Berührungspunkt o entspricht, durch den Mittelpunkt i , den Radius $i o$ und einen Teil seiner Peripherie dargestellt. Aus der Hauptaxe und den beiden Brennpunkten wird der Kegelschnitt 3 in bekannter Weise konstruiert.

Die übrigen Spuren werden analog gefunden. Beispielsweise ist in der Figur noch die Spur des Parallelkegels 9 angegeben. Der in die Grundebene gedrehte vertikale Axenschnitt des Hauptkegels 9 ist durch $n p q$ dargestellt. Die Geraden $m s \parallel n p$ und $m r \parallel n q$ schneiden auf c_1 die Hauptaxe $r s$ der hyper-

bolischen Grundspur des Parallelkegels 9 ab, während der Berührungskreis an $m s, s c'$ und die Rückverlängerung von $m r$, dessen Mittelpunkt z und dessen Radius $z v$ ist, den einen Brennpunkt v liefert. —

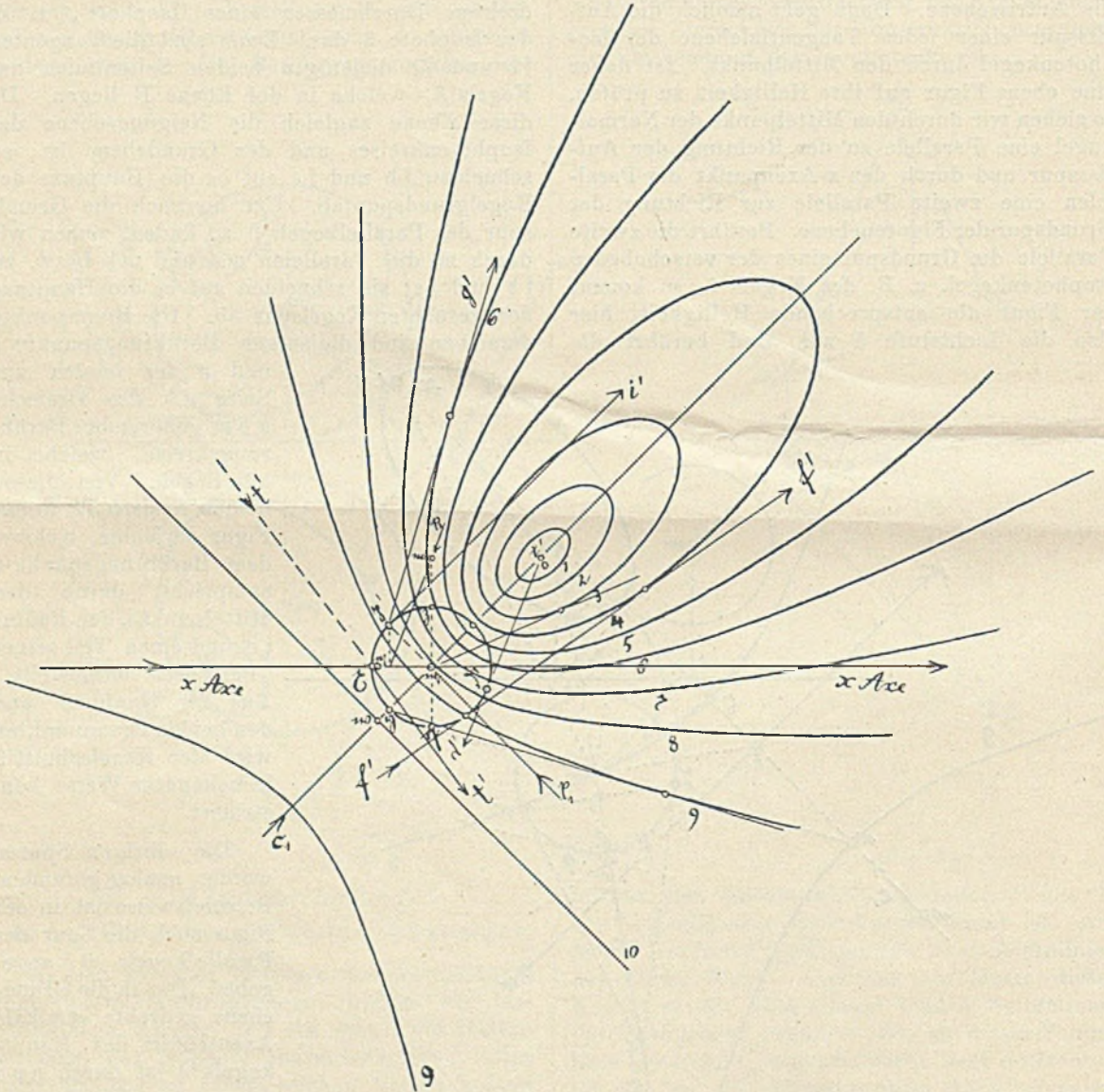
d) Die Grundspur 10 der nach m parallel ver-

schobenen Tangentialebene des hellsten Punktes ist $\perp c_1$ und geht durch denjenigen Punkt f von c_1 , in welchem das in m auf c errichtete Lot einschneidet.

Für den Isophotencylinder 0 hat die Parallelverschiebung keinen Sinn, doch lässt auch er sich in das vorige einfügen. Wie gross nämlich der Radius der Normalkugel ist, ist für die Richtung der Seitenlinien der Isophotenkegel gleichgültig; die Spuren der Parallelkegel bleiben also unverändert, so lange der Mittel-

Parallelkegel für eine Normalkugel von unendlich kleinem Radius zur Anschauung.

Nach den früheren Ausführungen (vergl. b in III) stellt die Tafel der Fig. 5 ebenso gut einen Lichtmassstab dar, wie die Normalkugel mit ihren zehn Isophoten. Wir wollen diesen Lichtmassstab, seinem Erfinder entsprechend, den Rodenberg'schen Lichtmassstab nennen. Eine wie bequeme und allgemeine Anwendung dieser Massstab gestattet, mag das folgende lehren.



(Fig. 5).

punkt der Normalkugel derselbe bleibt. Diese Schlussfolgerung gilt auch für eine Normalkugel von unendlich kleinem Radius; nur reduziert sich für diese die Grundspur des Isophotencylinders 0 auf einen Punkt, nämlich auf die Grundspur c' des Centralstrahls.

Fig. 5 bringt die nach der beschriebenen Methode konstruierten Grundspuren der zehn

IV. Anwendungen
des neuen Lichtmassstabes.
a) Die Lichtstufen ebener Flächenstücke. Es soll die Lichtstufe des Dreiecks abc in Fig. 3 a ermittelt werden. Die Spurenrichtungen der Dreiecksebene sind bereits früher (II c) aufgefunden worden. Die durch den Punkt m des Massstabes Fig. 5 gehende Parallele

$m \gamma$ zu $a_2 c_2$ ist die Aufrissspur einer dem Dreieck parallelen Tangentialebene eines Parallelkegels und liefert den Axenpunkt γ der Grundspur. Diese letztere ist dann die durch γ zu $b_1 f_1$ gezogene Parallele t' . Die Spur t' berührt eine zwischen den Hauptspuren 9 und 10 gelegene Spur des Massstabes, die sich als Spur 9,4 abschätzen lässt. Die Lichtstufe des Dreiecks ist also 9,4.

Dass diese Lösung einfacher ist, als die früher (IIIc) besprochenen, sehen wir ohne weiteres. Für vertikale Flächenstücke ist $m m_1$ bereits die Aufrissspur der Parallelebene, also liefert schon eine durch m_1 parallel zur Grundspur gezogene Gerade die Lichtstufe. Damit aber ist die Ermittlung der Lichtstufen der Seitenflächen aller Polyeder erledigt.

Ehe wir zu den gekrümmten Flächen übergehen, sei noch eine Bemerkung über den Reflex eingeschaltet.

b) Der Reflex. Kehrt uns eine Fläche die von direkten Lichtstrahlen nicht getroffene, die sogenannte dunkle Seite zu, so erscheint sie uns in dem Lichte, das ihr von den benachbarten beleuchteten Oberflächen zugesandt wird, d. h. wir sehen sie im Reflexlicht. Halten wir an der allgemein üblichen Annahme fest, dass die Reflexstrahlen den direkten Lichtstrahlen entgegengesetzt parallel sind, so können wir für die Reflexbeleuchtung ganz ebenso zehn Hauptstufen unterscheiden, wie für die direkte. Den Reflexstrahlenwinkeln

$$\alpha_r = 90^\circ \quad 64 \quad 58 \quad 44\frac{1}{2} \quad 36\frac{3}{4} \quad 30 \quad 23\frac{1}{2} \quad 17\frac{1}{2} \\ 11\frac{1}{2} \quad 5\frac{3}{4} \quad 0$$

entsprechen die Sinus

$$\sin \alpha_r = 1 \quad 0,9 \dots 0,5 \dots \dots 0,$$

also auch zehn verschiedene Lichtstufen. Doch repräsentiert jede derselben nur einen Bruchteil des Helligkeitsgrades, welcher ihr bei gleichem Einfallswinkel im direkten Lichte zukommen würde. Wie gross dieser Bruchteil ist, hängt von der Natur des Körpers und seiner Umgebung und von der Kraft der direkten Strahlen ab. Machen wir beispielsweise die Annahme, dass eine Ebene bei senkrechter Reflexbestrahlung den Helligkeitsgrad 4 hat, so entspricht dem Reflexstrahlenwinkel 64° die

$$\text{Lichtstufe } 4 \cdot \sin 64^\circ = 4 \cdot \frac{9}{10} = 3,6. \text{ Ist all-$$

gemein das Verhältnis der hellsten Reflexbeleuchtung zur hellsten direkten Beleuchtung $= \frac{r}{d}$, und stellt l irgend eine Lichtstufe der direkten Beleuchtung dar, so ist die entsprechende Reflexstufe $= l \cdot \frac{r}{d}$.

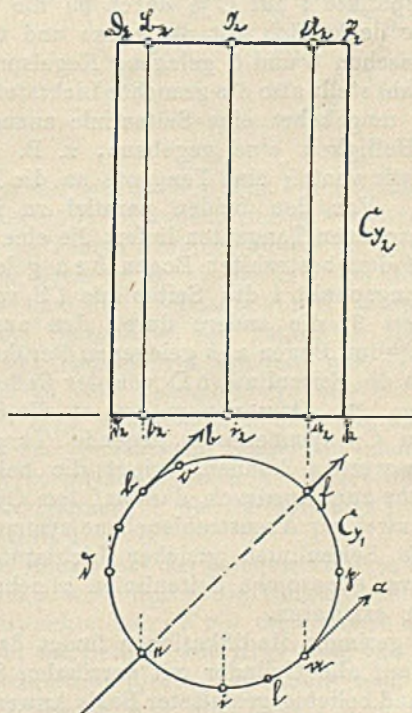
Die Isophoten der Reflexstrahlen, die Reflexisophoten der Normalkugel sind 9 Kugelkreise der unbeleuchteten Kugelhälfte, welche ein-

schliesslich des hellsten Reflexpunktes zur Iso-
phote 0 ebenso liegen, wie die Hauptisophoten der bestrahlten Hälfte. Dem entsprechend liegen die Reflexisophotenkegel symmetrisch zu den ursprünglichen Kegeln. Verschieben wir sie konaxial, bis ihre Spitzen in den Mittelpunkt der Normalkugel fallen, so ist je ein Reflexkegel die Rückerweiterung des ihm entsprechenden Hauptkegels; folglich sind die Grundspuren beider identisch. Also kann der Lichtmassstab Fig. 5 genau ebenso zur Ermittlung der Reflexstufen benutzt werden, wie er zur Bestimmung des Helligkeitsgrades diente.

Würde beispielsweise das Dreieck abc der Fig. 3a dem unbeleuchteten Oberflächenteile eines Polyeders angehören, so würden wir genau nach der Konstruktion in a) die der dort gefundenen Lichtstufe 9,4 entsprechende Reflexstufe $9,4 \cdot \frac{r}{d} = 9,4 \cdot \frac{4}{10} = 3,8$ erhalten.

c) Die Lichtstufen der gekrümmten Flächen. Eine systematische Behandlung der Beleuchtung gekrümmter Flächen geht über den Rahmen eines Vortrags hinaus. Ich will daher die einfachsten der abwickelbaren gekrümmten Flächen, die Kegelfläche und die Cylinderfläche herausgreifen und dann zeigen, wie die erhaltenen Resultate an zwei weiteren ausgezeichneten Flächengruppen verwertet werden können.

1. Der gerade Cylinder. In Fig. 6 ist ein gerader Kreiscylinder, der mit einer Grundfläche auf der Horizontalebene ruht, durch seine Projektionen Cy_1 und Cy_2 dargestellt.



(Fig. 6.)

Die obere Grundfläche hat nach dem Vortragenen die Helligkeit 5,8.

Jede Seitenlinie hat die Helligkeit ihrer Tangentialebene. Alle Tangentialebenen sind senkrecht zur Grundebene; alle ihre durch m (Fig. 5) gehenden Parallelebenen haben daher in m m_1 ihre gemeinsame Aufrissspur; die Grundspuren gehen alle durch m_1 und entscheiden durch ihre Lage zu den Kegelspuren des Lichtmasstabes über die Lichtstufe der entsprechenden Tangentialebene und der in ihr liegenden Seitenlinie des Cylinders.

So entsprechen der Grundspur $m_1 c'$ (c_1 oder $m_1 0$) zwei Tangentialebenen des Cylinders, deren Grundspuren a und b zwei zu $m_1 c'$ parallele Tangenten an Cy_1 sind; die Berührungspunkte a und b derselben sind die Anfangspunkte der beiden Seitenlinien mit dem Helligkeitsgrad 0 (der beiden Dämmerungsseitenlinien); die Aufrisse dieser Seitenlinien sind $a_2 \mathcal{A}_2$ und $b_2 \mathcal{B}_2$.

Die durch $m_1 \perp c_1$ gehende Grundspur berührt eine Kegelspur 8,2 in ihrem Scheitel; alle anderen Parallelsuren berühren Kegelspuren niederen Helligkeitsgrades. Die beiden an $Cy_1 \perp c_1$ gezogenen Tangenten liefern demnach durch ihre Berührungspunkte e und f je die hellste Seitenlinie $e \mathcal{C}$ von der Lichtstufe 8,2, deren Aufriss sich mit $b_2 \mathcal{B}_2$ deckt und die Seitenlinie des stärksten Reflexes $f \mathcal{F}$, deren Helligkeit $8,2 \cdot 0,4 = 3,3$ ist und deren Aufriss mit $a_2 \mathcal{A}_2$ zusammenfällt.

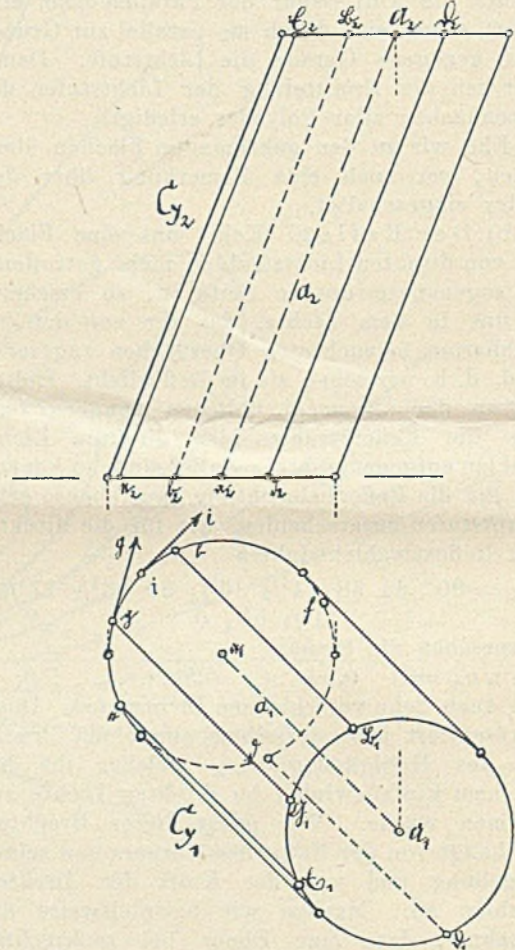
Um die Helligkeit irgend einer Seitenlinie $i \mathcal{J}$ zu finden, ziehen wir zur Tangente in ihrem Anfangspunkte i auf Cy_1 durch m_1 die Parallele; sie deckt sich mit der x -Axe und tangiert eine zwischen 5 und 6 gelegene Kegelspur 5,8. Diese Zahl stellt also die gesuchte Lichtstufe dar.

Um umgekehrt eine Seitenlinie anzugeben, deren Helligkeit eine gegebene, z. B. 3 ist, ziehen wir von m_1 eine Tangente an die Kegelspur 3. Von den beiden parallel zu ihr an Cy_1 gezogenen Tangenten liefert die eine durch den auf dem bestrahlten Bogen $b e a$ gelegenen Berührungspunkt l die Seitenlinie $l \mathcal{L}$ von der Helligkeit 3, die andere durch den auf dem unbestrahlten Bogen $a f b$ gelegenen Berührungspunkt o die Seitenlinie $o \mathcal{D}$ von der Reflexstufe $3 \cdot 0,4 = 1,2$. Dass von m_1 aus an die Spur 3 zwei zu C_1 symmetrisch liegende Tangenten gezogen werden können, bringt die bekannte Thatsache zum Ausdruck, dass auf dem Cylinder sowohl zwei zur Axenstrahlenebene symmetrisch gelegene Seitenlinien gleicher Lichtstufe, als auch zwei ebensolche Seitenlinien gleicher Reflexstufe existieren.

Mit geringen Modifikationen findet das Verfahren auf alle Cylinder mit vertikalen Seitenlinien und beliebig gestalteter Basis Anwendung.

2. Der schiefe Cylinder. Cy_1 und

Cy_2 seien in Fig. 7 die Projektionen eines schiefen Kreiscylinders, a_1 und a_2 die Projektionen seiner Axe a . Alle seine Tangentialebenen sind seiner Axe a parallel. Ziehen wir daher durch m im Raume eine Parallele p zu a und verschieben die Tangentialebenen parallel nach m , so bilden sie ein Ebenenbüschel, dessen Axe p (p_1, p_2) ist. Also stellen die Grundspuren der Parallelebenen ein Strahlenbüschel dar, dessen Strahlenpunkt die Grundspur p' von p ist. Die Grundspur p' wird (Fig. 5) aus $p_1 \parallel a_1$ und $p_2 \parallel a_2$ in bekannter Weise gefunden.



(Fig. 7.)

Die der Parallelsur $m_1 0$ parallelen, in Fig. 7 nicht gezeichneten Tangenten b und d an den Grundkreis von Cy_1 ergeben durch ihre Berührungspunkte b und d die Dämmerungsseitenlinien $b \mathcal{B}$ und $d \mathcal{D}$.

Durch p' geht die in der Figur 5 nicht gezeichnete Kegelspur 8,6; ihrer Tangente in p' entsprechen zwei parallele Tangenten an den Grundkreis von Cy_1 ; der Berührungspunkt e der einen liegt auf dem beleuchteten Bogen des Grundkreises und ist der Anfangspunkt der hellsten Seitenlinie $e \mathcal{C}$ von der Lichtstufe 8,6. Der Berührungspunkt f der anderen liegt auf

dem dunklen Bogen des Grundkreises und liefert die Seitenlinie $f\mathfrak{F}$ des stärksten Reflexes $8,6 \cdot 0,4 = 3,4$. Die hellste Seitenlinie ist $e\mathfrak{E}$, weil in Figur 5 alle von p' aus nach den Kegelspuren gezogenen Tangenten, ausser der erwähnten an 8,6 im Punkte p' Kegelspuren berühren, deren Ordnungszahl kleiner als 8,6 ist.

Die Helligkeit irgend einer Seitenlinie, z. B. der Seitenlinie $i\mathfrak{I}$ finden wir, indem wir zur Tangente i im Punkte i an den Grundkreis von Cy_1 die Parallele i' durch p' ziehen; sie berührt die Kegelspur 2,9, welche die gesuchte Lichtstufe ansagt.

Um innerhalb der auf Cy vorkommenden Lichtstufen zwischen 8,6 und 0 die Seitenlinien von vorgeschriebener Helligkeit, z. B. von der Helligkeit 6 zu ermitteln, ziehen wir in Fig. 5 von p' eine Tangente g' an die Kegelspur 6. Von den beiden zu g' parallelen Tangenten an den Grundkreis von Cy_1 liefert die eine g durch ihren Berührungspunkt g die geforderte Seitenlinie, die andere (in der Figur weggelassen) die Seitenlinie von der entsprechenden Reflexstufe.

Dass von p' aus zwei Tangenten an eine Kegelspur gezogen werden können, bringt die bekannte Thatsache zum Ausdruck, dass es auch auf dem schiefen Kreiscylinder sowohl zwei Seitenlinien gleicher Lichtstufe, als auch zwei Seitenlinien gleicher Reflexstufe giebt.

Für schiefe Cylinder mit irgend welcher Seitenlinie bleibt das Verfahren im wesentlichen dasselbe.

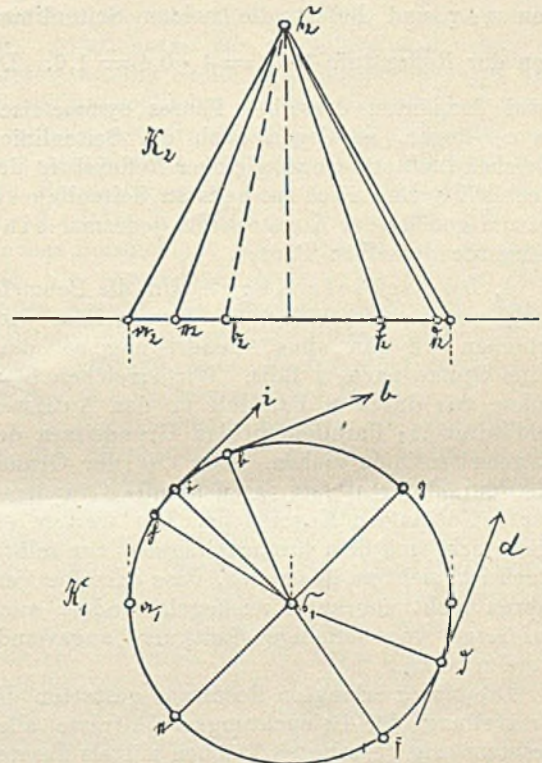
3. Der gerade Kegel. In Fig. 8 ist ein gerader Kreiskegel K durch seine Projektionen K_1 und K_2 dargestellt.

Wir verschieben ihn ohne Axendrehung so, dass seine Spitze sich mit m in Fig. 5 und seine Axe der Richtung nach sich mit $m_1\mathfrak{r}$ deckt. Dies geschieht, indem wir durch m parallel zu $\mathfrak{s}_2 a_2$ eine Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte \mathfrak{r} mit der x -Achse ziehen und mit $m_1\mathfrak{r}$ einen Kreis schlagen. Dieser Kreis ist die Grundspur des Parallelkegels K_p des Kegels K . Jede Tangentialebene der Fläche K_p , welche zugleich auch einen der von m ausgehenden Isophotenkegel berührt, hat die Helligkeit des letzteren. Dieselbe Lichtstufe kommt der Berührungsseitenlinie auf K_p und der entsprechenden — der parallelen — auf K zu. Da die Kegelfläche K_p und die Isophotenkegel in m ihre gemeinsame Spitze haben, so ist jede Tangentialebene durch ihre Grundspur charakterisiert.

Der Kreis $m_1\mathfrak{r}$ in Fig. 5 trifft c_1 in η . Die dort an ihn gezogene Tangente berührt den Scheitel einer Kegelspur zwischen der Spur 9 und der Spur 10, welche sich als Spur 9,7 ablesen lässt. Der Seitenlinie $m\eta$, also auch der entsprechenden — der parallelen — des Kegels K , nämlich der Seitenlinie $\mathfrak{s} e$, kommt somit die

Lichtstufe 9,7 zu. Sie ist die hellste, weil alle anderen Tangenten des Kreises $m_1\mathfrak{r}$ nur Kegelspuren niederen Grades berühren können.

Die von der Spur c' des Isophotencylinders 0 an den Grundkreis $m_1\mathfrak{r}$ gezogenen Tangenten $c'd'$ und $c'b'$ (in der Figur ist nur die erstere gezeichnet) liefern durch ihre Berührungspunkte die Dämmerungsseitenlinien $m d'$ und $m b'$ von K_p . Durch Parallelverschiebung der beiden Spuren an K_1 nach d und b erhalten wir die Anfangspunkte d und b der beiden Dämmerungsseitenlinien $\mathfrak{s} d$ und $\mathfrak{s} b$ von K .



(Fig. 8).

Um die Lichtstufe irgend einer Seitenlinie $\mathfrak{s} i$ des Kegels K zu finden, ziehen wir parallel zur Tangente i ihres Anfangspunktes die Tangente i' an den Kreis $m_1\mathfrak{r}$; sie berührt die Kegelspur 2,9, welche die Lichtstufe von $\mathfrak{s} i$ ansagt.

Eine Seitenlinie von gegebener Helligkeit, z. B. der Helligkeit 4 erhalten wir, indem wir an den zu dem beleuchteten Teile des Grundkreises $m_1\mathfrak{r}$ gehörenden Bogen und die Kegelspur 4 eine gemeinsame Tangente f' ziehen. Ihre Parallelverschiebung nach K_1 liefert durch den Berührungspunkt f die Seitenlinie $\mathfrak{s} f$ von der Lichtstufe 4 —.

Die Seitenlinie des hellsten Reflexes auf dem Kegel K_p wird durch die Tangente im zweiten Schnittpunkte von c_1 mit dem Kreise $m_1\mathfrak{r}$ bestimmt; sie berührt die Kegelspur 4,5, also ist die Reflexstufe dieser Seitenlinie und der ihr entsprechenden $\mathfrak{s} g$ des Kegels $K = 4,5 \cdot 0,4 = 1,8$. Die Reflexstufe irgend einer Seitenlinie

ergibt sich aus der Parallelverschiebung der Tangente ihres Anfangspunktes an den unbeleuchteten Bogen des Kreises $m_1 \zeta$.

Wir sehen noch ohne weiteres: Zu der Spur des Kegels K_p (dem Grundkreise $m_1 \zeta$) und irgend einer Isophotenkegelspur, z. B. der Spur 4 gehören zwei Paare Tangenten. Das eine Paar berührt den beleuchteten Bogen von $m_1 \zeta$ und liefert zwei Seitenlinien von der Lichtstufe 4; das andere Paar, das sich zwischen den beiden Kegelspuren schneidet und in der Figur 5 weggelassen ist, berührt den unbeleuchteten Bogen von $m_1 \zeta$ und liefert die beiden Seitenlinien von der Reflexstufe $4 \cdot \frac{r}{d} = 4 \cdot 0,4 = 1,6$. Da

zwei Tangenten desselben Paares symmetrisch zu c_1 liegen, so liegen auch die Seitenlinien gleicher Lichtstufe und gleicher Reflexstufe des Kegels K symmetrisch zur hellsten Seitenlinie ξc . Darum genügt zur Konstruktion jedesmal eine Tangente desselben Paares.

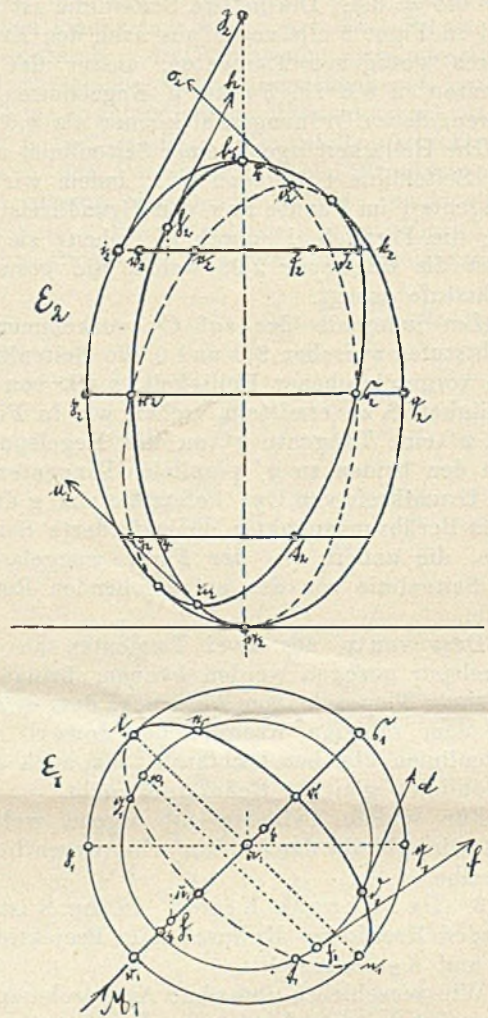
4. Der schiefe Kegel. Um die Beleuchtung eines schiefen Kegels darzustellen, verschieben wir ihn ohne Axendrehung so, dass seine Spitze nach m fällt. Wir erreichen dies, indem wir durch m Parallele zu den Aufrissen und durch m_1 Parallele zu den Grundrissen der Kegelseitenlinien ziehen. Der Ort der Grundspuren der Parallelen ist dann die Grundspur der verschobenen Kegelfläche. Das weitere ergibt sich nach dem vorangegangenen von selbst. Auch ist leicht zu übersehen, dass dasselbe Verfahren nicht nur auf Kreiskegel, sondern auch auf Kegel von beliebiger Leitkurve angewandt werden kann.

Die bisher erlangten Resultate gestatten die Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse aller gesetzmässig gestalteten Flächen mittels unseres Lichtmasstabes. Ich will das an zwei ausgezeichneten Flächengruppen, den Rotationsflächen und den Rückungflächen erläutern.

5. Die Rotationsflächen. In Fig. 9 stellt E_1 den Grundriss und E_2 den Aufriss eines Rotationsellipsoids dar, das durch Drehung einer Ellipse um ihre zur Grundebene senkrechte Axe entstanden ist. Die Projektionen der Strahlenrichtung seien kurz mit s_1 und s_2 bezeichnet; $r_1 \xi_1$ oder M_1 ist der Grundriss und $r_2 a_2 \xi_2 b_2$ oder M_2 der Aufriss des in der Axenlichtebene gelegenen Meridians M .

Wir geben zunächst von der Dämmerungslinie (der Isophote 0) den obersten und untersten Punkt an. Der erste gehört der obersten, der zweite der untersten Seitenlinie des der Strahlenrichtung parallelen Berührungscylinders des Ellipsoids an. Beide Seitenlinien liegen in der Axenlichtebene M . Ziehen wir daher an M_2 zwei Tangenten o_2 und u_2 parallel zu s_2 , so sind ihre Berührungspunkte o_2 und u_2 die Auf-

risse der gesuchten Punkte; ihre Grundrisse o_1 und u_1 liegen auf M_1 .



(Fig. 9).

Um beliebig viele Punkte der Isophote 0 zu finden, benutzen wir die Berührungskegel der Parallelkreise zwischen o und u , z. B. den Kegel $\zeta i f$, dessen Aufriss durch $\zeta_2 i_2 f_2$ angedeutet ist. Die Lichtstufen seiner Seitenlinien sind auch diejenigen ihrer Berührungspunkte auf dem Parallelkreise. Ganz wie in 3) konstruieren wir zu $\zeta i f$ den Parallelkegel K_p in Fig. 5, indem wir durch m die Parallele $m \zeta$ zu $\zeta_2 i_2$ ziehen; der Kreis $m_1 \zeta$ ist dann die Grundspur von K_p . Ziehen wir nun von c' (o) aus die Tangente $c' d'$ an $m_1 \zeta$ und verschieben sie parallel an den Grundriss von $i f$ in Fig. 8 nach d , so ist der Berührungspunkt d_1 der Paralleltangente der Grundriss des einen Dämmerungspunktes auf $i f$; der Grundriss e_1 des anderen ergibt sich entweder aus der von c' nach $m_1 \zeta$ gezogenen zweiten Tangente, oder kürzer aus der Bemerkung, dass d_1 und e_1 symmetrisch zu M_1 liegen. So werden die Dämmerungspunkte auf jedem Parallelkreise er-

mittelt. Für den grössten Parallelkreis wird der Berührungskegel zu einem Cylinder mit vertikaler Axe. Zwei Tangenten an E_1 , die s_1 (oder $c' m_1$) parallel sind, liefern daher in ihren Berührungspunkten l_1 und n_1 die Grundrisse der beiden Dämmerungspunkte; ihre Aufrisse decken sich mit r_2 und z_2 . Wegen der symmetrischen Lage der oberen und der unteren Hälfte der Dämmerungslinie zu dem grössten Parallelkreise und der damit verknüpften symmetrischen Lage der beiden Hälften ihres Grundrisses zu $l_1 n_1$ kann aus der oberen Hälfte die untere ohne weiteres hergeleitet werden. So sind die Punkte t und g ($t_1 t_2, g_1 g_2$) mittels d und e gefunden.

Die übrigen Isophoten erhalten wir, indem wir auf den einzelnen Parallelkreisen unter Benutzung der Parallelkegel ihrer Berührungskegel die Punkte der gesuchten Lichtstufe angeben. Um beispielsweise auf dem Parallelkreise $i f$ die Punkte von der Lichtstufe 4 — die Viererpunkte — zu finden, ziehen wir die der Kegelspur 4 und dem beleuchteten Bogen des Grundkreises $m \chi$ von K_p gemeinsame Tangente f' . Die Paralleltangente f an den Grundriss von $i f$ liefert in ihrem Berührungspunkte f_1 den Grundriss des einen Viererpunktes auf $i f$; der Grundriss v_1 des anderen ergibt sich aus der symmetrischen Lage beider zu M_1 . Eine Tangente des zweiten Tangentenpaares, das zu der Kegelspur 4 und dem Grundkreis $m_1 \chi$ gehört, würde die Reflexpunkte $4 \cdot 0,4 = 1,6$ auf dem Parallelkreise $i f$ geliefert haben. Zu beachten ist: Da die Berührungskegel der Parallelkreise, welche unterhalb des grössten Parallelkreises $p q$ liegen, zu den entsprechenden oberen symmetrisch sind, so vertauschen die beiden Tangentenpaare, die zu 4 und $m_1 \chi$ gehören, ihre Rollen. Das erste liefert für die unteren Parallelkreise die Reflexstufen, das zweite die Lichtstufen. Der oberste und der unterste Punkt der Isophote 4 liegen auf M und lassen sich folgendermassen angeben. Die von m in Fig. 5 nach den Scheiteln der Kegelspur 4 gezogenen Geraden sind die in der Parallelebene von M gelegenen Seitenlinien des Isophotenkegels 4. Projizieren wir daher die Scheitel auf die x -Axe, verbinden die beiden Projektionen mit m und ziehen zu diesen Verbindungsgeraden je eine parallele Tangente an M_2 , so stellen die Berührungspunkte die Aufrisse des höchsten und des tiefsten Viererpunktes dar. Sie sind in Fig. 9, ebenso wie ihre Grundrisse, mit „4“ bezeichnet. Angedeutet sei noch, dass sich dabei auch der höchste und tiefste Punkt der Reflexisophote $4 \cdot 0,4$ oder $1,6$ ergeben. Wie Isophote 4 werden die anderen Isophoten konstruiert.

Der hellste Punkt des Ellipsoides ist der Berührungspunkt derjenigen Tangentialebene

der beleuchteten Hälfte des Ellipsoids, welche der Isophotenebene 10 parallel ist. Sie wird von der Ebene des Meridians M nach einer Tangente geschnitten, welche dem durch m (Fig. 5) gehenden Endschenkel des Neigungswinkels der Ebene 10 parallel ist. Füllen wir daher von m_1 das Lot $m_1 w$ auf Spur 10, projizieren w auf die x -Axe nach w_2 und ziehen zu $m w_2$ an M_2 in Fig. 9 die parallele Tangente h , so haben wir in ihrem Berührungspunkte h_2 den Aufriss des hellsten Punktes; sein Grundriss h_1 liegt in M_1 .

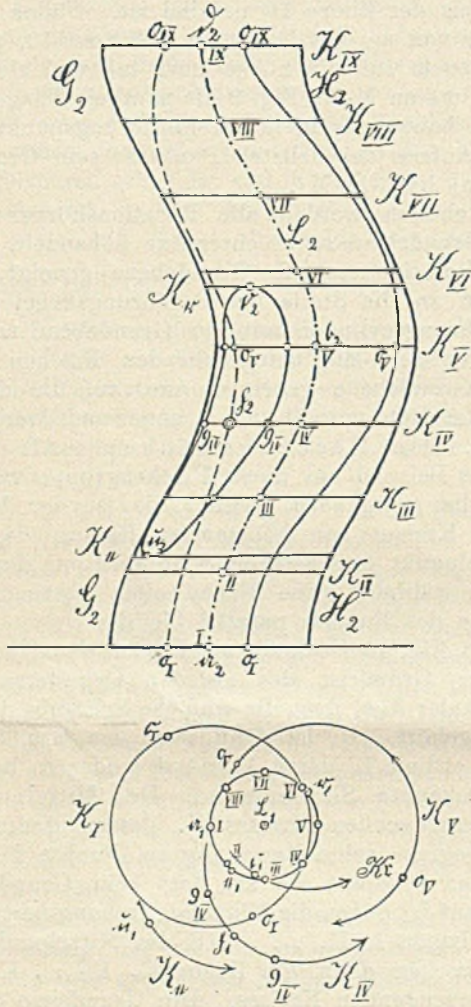
Aehnlich werden alle Rotationskörper mit zur Grundebene senkrechter Axe behandelt. Ist die Rotationsaxe zur Grundebene geneigt, so treten an die Stelle der Berührungskegel und Berührungscylinder mit zur Grundebene senkrechter Axe die entsprechenden Flächen mit zur Grundebene geneigter Axe, auf die dann die Resultate von 2) und 4) angewandt werden.

6. Die Rückungsflächen. Als einfaches Beispiel aus dieser Flächengruppe wähle ich die gewundene Säule. Sie ist der Weg eines Kreises von konstantem Radius, dessen Mittelpunkt eine gemeine Schraubenlinie durchläuft, während seine Ebene einer bestimmten Ebene des Raumes parallel bleibt.

In Fig. 10 ist der Kreis L_1 mit dem Radius ρ der Grundriss des geraden Cylinders mit vertikaler Axe, dem die einfache Schraubenlinie L angehört. L_1 ist dann auch der Grundriss der Leitlinie L , deren Aufriss L_2 oder $a_2 b_2 d_2$ die bekannte Sinuslinie ist. Der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises K , dessen Radius r ist, beginne seine Bewegung im Punkte I von L_1 und vollziehe sie so, dass sein Grundriss sich auf L_1 gegen die Uhrzeigerdrehung bewegt. Den Lagen $I, II, \dots VIII$ des Mittelpunktes entsprechen dann die Lagen $K_1 K_2 \dots K_{VIII}$ des erzeugenden Kreises. Die Grundrisse derselben sind kongruente Kreise, deren Mittelpunkte die gleichnamigen Projektionen der Punkte $I \dots VIII$ sind; die Aufrisse sind Strecken, welche der x -Axe parallel und dem Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich sind und deren Endpunkte von den Aufrissen der zugehörigen Mittelpunkte um r abstehen. Darum sind die Grenzlinien des Aufrisses der Säule zwei der Kurve L_2 parallele Sinuslinien G_2 und H_2 , während die Grenzlinie des Grundrisses der alle Grundrisse der Kreise K einhüllende mit L_1 konzentrische Kreis vom Radius $r + \rho$ ist; er ist in der Figur weggelassen:

Die Beleuchtungsverhältnisse der Fläche ergeben sich aus folgenden Bemerkungen. Die Helligkeit der Punkte des erzeugenden Kreises K in irgend einer Lage stimmt überein mit den Lichtstufen der Mantellinien des schiefen Cylinders, dessen Leitlinie der erzeugende Kreis und dessen Axe die durch den Mittelpunkt von

K an L gezogene Tangente ist. Die Lichtstufen der Seitenlinien dieses Cylinders aber werden nach 2) ermittelt; eine Wiederholung der Konstruktion für eine genügende Zahl von Lagen des Kreises K löst die Aufgabe.



(Fig. 10).

In der Praxis gestaltet sich diese Lösung sehr einfach. Der Winkel α , welchen die Tangente von L mit der Grundebene einschliesst, ist bekanntlich konstant. Er ergibt sich aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi \rho}$, worin h die Höhe des Schraubenganges $= a_2 \delta_2$ und $2\pi \rho$ hinreichend genau $= 3\frac{1}{7} \cdot 2\rho$ die Peripherie von L ist. Wegen der erwähnten Beschaffenheit des Winkels α bilden alle durch m in Fig. 5 gehenden Parallelstrahlen zu den Axen aller schiefen Cylinder einen geraden Kegel, dessen Axe in die Gerade $m_1 \gamma$ fällt. Die Grundspur dieses Kegels hat m_1 zum Mittelpunkt; ihr Radius ist die Kathete $m_1 \gamma$ eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete $m m_1$ mit $\alpha = m \angle m_1$ als Gegenwinkel ist. Der zu $m_1 \gamma$ gehörende Kreis in Fig. 5 ist also der Ort der Grundspuren aller durch m gehenden Parallelaxen zu den den verschiedenen

Lagen von K entsprechenden Cylinderaxen. In der Lage I des erzeugenden Kreises liegt die Tangente durch I an L (die Axe des ersten schiefen Cylinders) in einer zur x-Axe senkrechten Ebene. Die Grundspur der Parallelaxe ist daher der Schnittpunkt ξ der in $m_1 \perp x$ -Axe gezogenen Geraden mit dem Kreise $m_1 \gamma$. Während der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises die Lagen I, II, III, . . . durchläuft, durchläuft die Spur der Parallelaxe die Lagen ξ, ξ, η, \dots . Hiernach lehrt die Lage des Kreises $m_1 \gamma$ zu den Kegelspuren: Die Isoptoten 0, 1, 2, 3 und 4 bestehen aus je zwei nicht in sich zurücklaufenden Kurven; die Isoptoten 5 bis 9 aber sind je durch eine einzige in sich zurücklaufende Linie dargestellt. Der hellste Punkt liegt auf demjenigen erzeugenden Kreise K, welchem die Parallelaxenspur η entspricht, d. h. auf K_{IV} . Zu dem Punkte η gehört der Scheitel der Kegelspur 9,7; der hellste Punkt der Fläche hat also die Lichtstufe 9,7.

Behufs Konstruktion der Isoptoten beginnen wir mit dem Kreise K_I . Da die Grundspur ξ der Parallelaxe auf der Kegelspur 6,3 liegt, so gehören die Punkte von K_I den zwischen 6,3 und 0 gelegenen Lichtstufen an. Nach 2) liefert die Paralleltangente zu $\xi c'$ ($\xi 0$) an den Grundriss von K_I in ihren Berührungspunkten O_I die Grundrisse der Nullpunkte auf K; die Aufrisse sind ebenso bezeichnet. Dem Kreise K_V entspricht die Parallelaxenspur η ; die beiden Paralleltangenten an den Grundriss von K_V zu $\eta c'$ ergeben in ihren Berührungspunkten O_V die Grundrisse der Nullpunkte an K_V , deren Aufrisse dem Aufriss des Kreises angehören. So sind die Aufrisse $O_I \dots O_{IX}$ der beiden Isoptoten Null (der beiden Dämmerungslinien) entstanden. Die Grundrisse sind weggelassen.

Um die Viererpunkte auf K_I zu finden, ziehen wir von ξ in Fig. 5 die beiden Tangenten an Kegelspur 4. Von den vier Paralleltangenten — die Zeichnung ist in Fig. 10 nicht ausgeführt — an den Grundriss von K_I berühren zwei den beleuchteten, zwei den nicht beleuchteten Bogen. Die Berührungspunkte der beiden ersten sind die Grundrisse der beiden Viererpunkte auf K_I , die der beiden letzten die Grundrisse der Punkte von der Reflexstufe $4 \cdot 0,4 = 1,6$. Wenden wir das gleiche Verfahren auf die übrigen Lagen des Kreises K an, so erhalten wir sowohl die beiden Isoptoten 4, als auch die beiden Reflexisoptoten 1,6.

Von den in sich zurücklaufenden Isoptoten ist in Fig. 10 die Linie 9 konstruiert. Sie liegt, wie ein Blick auf den Kreis $m_1 \gamma$ in Fig. 5 lehrt, zwischen den Kreisen K_{VI} und K_{II} . Dem Kreise K_{IV} beispielsweise entspricht die Parallelaxenspur η . Den beiden von η an Kegelspur 9 gezogenen Tangenten — in der Figur ist nur eine gezeichnet — entsprechen

an dem beleuchteten Bogen des Grundrisses von K_{IV} zwei parallele Tangenten, deren Berührungspunkte 9_{IV} die gleichnamigen Projektionen der Neunerpunkte von K_{IV} sind; mit den Grundrissen sind die Aufrisse der Punkte gegeben. Der oberste und der unterste Punkt liegen auf denjenigen Kreisen K zwischen K_{IV} und K_{II} , welche den als Parallelastensuren aufgefassten Schnittpunkten des Kreises m_1 ϵ mit der Kegelspur 9 entsprechen. Die Grundrisse ihrer Mittelpunkte sind r_1 und e_1 . Die Aufrisse beider Kreise ergeben sich aus der Bemerkung, dass dieselben den Abstand zweier benachbarten Hauptkreise K_{VI} und K_V , oder K_{II} und K_{III} in demselben Verhältnisse teilen, wie die Punkte r_1 und e_1 die Bögen zwischen VI und V oder zwischen II und III. Zu den beiden Parallelastensuren der Kreise K_r und K_e gehören zwei Tangenten an Spur 9; die zu ihnen an die beleuchteten Bögen der Grundrisse von K_r und K_e gezogenen Paralleltangenten liefern die Grundrisse v_1 und u_1 des obersten und untersten Punktes, deren Aufrisse v_2 und u_2 bzw. auf den gleichnamigen Projektionen von K_r und K_e zu suchen sind.

Der hellste Punkt hat nach der Einleitung die Helligkeit 9,7 und liegt auf K_4 . Sein Grundriss h_1 ist der Berührungspunkt derjenigen Tangente an die gleichnamige Projektion von K_4 , welche der Scheiteltangente der Kegelspur 9,7 (der Scheitel ist der Punkt u) in Fig. 5 parallel ist. —

Tritt an Stelle des Kreises eine andere Kurve mit konstanten Dimensionen, so bleibt das Verfahren fast wörtlich dasselbe. Ändert der Kreis K während der Bewegung seinen Radius nach einem konstruktiv darstellbaren Gesetze, so treten an Stelle der einhüllenden Cylinder einhüllende Kegel, auf welche die Konstruktionen 3) und 4) Anwendung finden.

Das Vorgetragene dürfte genügen, um Sie mit dem neuen Lichtmasstab bekannt zu machen. Vergleichen Sie seine Leistungen mit den entsprechenden der Normalkugel, was an der Hand des oben zitierten Göller'schen Werkes leicht geschehen kann, so werden Sie durchweg die grössere Einfachheit der Konstruktionen auf seiner Seite finden. Sollte es mir gelungen sein, Sie von seiner Verwendbarkeit in dem Schulunterrichte zu überzeugen und damit dem Unterrichte in der darstellenden Geometrie eine neue Stütze zuzuführen, so wäre der Zweck dieses Vortrages erreicht. Der Dank aber würde Herrn Prof. Rodenberg gebühren, der seinen Lichtmasstab den Mittelschulen zur Verfügung gestellt hat. —

Ueber physikalische Schülerübungen

Vortrag, gehalten auf der Hauptversammlung zu Giessen*)

von Karl Noack (Giessen).

Meine Herren! Als ich mich vor kaum zwei Monaten dem Vorsitzenden des Ortsausschusses zur Verfügung stellte für einen Vortrag in der physikalischen Abteilung, geschah dies in der sicheren Erwartung, dass, wie sonst immer so auch diesmal, Herr Direktor Schwalbe der Versammlung beiwohnen würde. Und gerade diese Erwartung leitete mich bei der Wahl meines Themas über den Betrieb physikalischer Uebungen, denn der Verstorbene hat auch auf diesem besonderen Gebiete des naturwissenschaftlichen Unterrichts eine führende Rolle gespielt, und ich würde mich gefreut haben, mich an dieser Stelle mit ihm über einen Gegenstand unterhalten zu können der auch mir sehr am Herzen liegt. Denn der Weg des einen ist ja doch nur selten auch der Weg des andern und hätte ich mir daher von einem mündlichen Gedankenaustausch reiche Früchte versprochen.

In einem Punkte besonders weichen meine Ansichten und Erfahrungen über Einrichtung und Betrieb der Schülerübungen von denen Schwalbes nicht unerheblich ab, nämlich in der Wertschätzung und Verwendung rein qualitativer Versuche. Ich habe von Anfang an ein grösseres Gewicht auf messende Versuche legen zu müssen geglaubt und ich muss gestehen, dass ich im Laufe der Jahre und an der Hand der gesammelten Erfahrungen in dieser Ansicht noch verstärkt worden bin und solche Uebungen noch weiter beschränkt habe.

Nicht als ob ich sie ganz beseitigt wissen wollte; die Darstellung von Chladnis Klangfiguren, das Entwerfen von magnetischen Kraftlinien-Bildern und deren Fixierung auf Lichtpauspapier (wovon ich hier einige Proben angehängt habe), das Aufsuchen einer reibungselektrischen Spannungsreihe, Herstellung und Zeichnung elektrischer Strahlungsfiguren nach Lichtenberg und Antolik, oder der Aufbau und das Studium der optischen Instrumente auf der optischen Bank haben auch in unserem Lehrplan ihre gebührende Stelle gefunden, aber sie verschwinden doch an Zahl und Bedeutung gegenüber den messenden Versuchen, und ich habe auch in all den Jahren nicht gefunden, dass sich bei den beteiligten Schülern der Wunsch und das Bedürfnis nach mehr qualitativen Versuchen regte; im Gegenteil werden mit lebhafterem Interesse und grösserem Eifer solche Versuche und Aufgaben behandelt, bei denen ein durch Zahl oder Kurve verfolgbares Resultat gewonnen wird.

Dabei muss ich allerdings besonders bemerken, dass an unserer Anstalt die Uebungen nur in den drei obersten Klassen eingeführt sind; es mag daher diese Geschmacksrichtung wenigstens teilweise ihre Erklärung in der grösseren Reife des Schülermaterials finden.

Von einer Anfertigung und Zusammensetzung von Apparaten im Rahmen der Uebungen sehe ich dagegen vollständig ab, einmal weil dafür doch die beschränkte Zeit von wöchentlich anderthalb bis zwei Stunden nicht ausreichend wäre, dann aber auch, weil diejenigen Schüler, die für solche Bethätigung Interesse und Geschick haben, im Anschluss an ihre Thätigkeit bei den Uebungen in ihren häuslichen Mussestunden diese Seite der Experimentierkunst freiwillig mit bestem Erfolg pflegen.

*) S. Unt.-Bl. VII, 3, S. 54.

Man hat ja vielfach die Ansicht ausgesprochen, dass physikalische Uebungen für die höheren Schulen dasselbe sein könnten, was für die Volksschulen der Handfertigkeitunterricht ist; ich kann nur sagen, dass mir der Gedanke durchaus sympathisch ist, nur glaube ich nicht, dass es zu diesem Zweck nun notwendig ist, kostbare Unterrichtsstunden, wenn sie auch fakultativ, sind, heranzuziehen. Vielmehr finden die Uebungen, wie schon angedeutet in der häuslichen Beschäftigung der Schüler ihre angemessene Fortsetzung und Ergänzung, andererseits sind sie selbst eine vorzügliche Schule der Handfertigkeit.

Wer solche Uebungen aus eigener Erfahrung kennt und wer einmal gesehen hat, wie der Anfänger mit Wage und Gewichtssatz umgeht oder bei magnetischen Versuchen Eisenfeilspäähne gleichmässig auszubreiten versucht, während man demselben Schüler zwei Jahre später die Bestimmung einer spezifischen Wärme, Versuche über Brechungsexponenten oder eine andere kompliziertere Aufgabe ohne Bedenken anvertrauen kann, der wird mir gern zugeben, dass auf diesem Wege ganz Wesentliches auch in der Ausbildung der Handfertigkeit geleistet werden kann, ohne dass es nötig wäre, diese Seite der Uebungen als Hauptzweck in den Vordergrund zu rücken.

Ich meine der Schwerpunkt solcher Veranstaltungen müsste für uns wo anders liegen. Mit unseren acht oder neun Stunden Physik ist an und für sich nicht sehr viel zu machen, um so weniger, als leider an der grossen Mehrzahl der Gymnasien dieser Unterrichtszweig bis jetzt noch nicht von dem Gesamtunterricht assimiliert worden ist, sondern wie ein lästiger Fremdkörper von dem Schulorganismus nur geduldet wird.

Da muss uns doch jedes Mittel recht und willkommen sein, das uns ermöglicht, wenigstens einem gewissen Bruchteil der Schüler ein tieferes Eindringen in den Geist der Naturwissenschaften zu gewähren. Nicht darum handelt es sich meines Erachtens, den Umfang des Wissens der Schüler durch die Uebungen zu vermehren, sie sollen vielmehr erkennen und lernen, wie in den Naturwissenschaften ein Problem erfasst und behandelt wird, wie experimentelle Prüfung und logische Erwägung miteinander abwechseln, mit einem Wort, sie sollen in der naturwissenschaftlichen Methode der Erkenntnis geübt werden, die zwar immer mehr auch auf anderen Wissensgebieten ihre Früchte trägt, die aber in gleicher Reinheit und Durchsichtigkeit, wie in Physik und Chemie wohl nicht wieder in Wirksamkeit tritt.

Dies ist das Ziel, von dem ich glaube, dass wir mit allen Kräften versuchen müssen, es zu erreichen, und der Arbeitsplan, den ich für die Uebungen an unserer Anstalt aufgestellt habe, ist wesentlich der Absicht entsprungen, an der Lösung dieser schwierigen Aufgabe mitzuwirken.

Sie werden begreifen, dass bei grösserer Wertschätzung messender Versuche im Rahmen der Uebungen naturgemäss auch der graphischen Darstellung der gewonnenen Resultate eine entsprechende Bedeutung zukommt. Um Ihnen eine Vorstellung von der Art der Verwendung dieser Methode und ihrer Fruchtbarkeit gerade für die Zwecke der Schülerübungen zu geben, habe ich einige Kurven nach den Massresultaten unserer Schüler in grösserem Massstab ausführen lassen.

Sie sehen hier die Schmelz- und Erstarrungskurve von Natriumhyposulfit mit der Erscheinung der Unterkühlung, die Ausdehnungskurve des Wassers zwischen

den Temperaturen 0° bis 10° und schliesslich eine Darstellung der Ablenkung des Lichtstrahls im gleichseitigen Prisma.

Diese letzte Zeichnung lehrt besonders deutlich den didaktischen Wert graphischer Darstellung kennen. Es wird den Schülern die Aufgabe gestellt, für wachsenden Einfallswinkel sowohl Austrittswinkel als auch Ablenkung zu bestimmen. Die Tabelle der Resultate würde wohl bei den Wenigsten zu einer Erkenntnis des Zusammenhangs führen; dagegen lehrt die Zeichnung sofort, dass ein Minimum der Ablenkung stattfindet und dass es zusammenfällt mit dem Momente symmetrischen Durchgangs, der bestimmt ist als der Schnittpunkt der Kurve zwischen Einfallswinkel einerseits und der Winkelhalbierenden des Koordinatensystems andererseits.

Wenn auch der Hauptgewinn einer derartigen Behandlungsweise naturgemäss dem Verständnis der physikalischen Zusammenhänge zufällt, so möchte ich doch die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne auf den Nutzen wenigstens hingewiesen zu haben, den auch der mathematische Unterricht aus solchen Darstellungen ziehen kann.

Es ist natürlich nicht möglich, Ihnen den Arbeitsplan, wie er sich im Lauf von reichlich 10 Jahren hier entwickelt hat, im Einzelnen vorzuführen. Ich habe mir deshalb erlaubt, Ihnen hierneben eine tabellarische Uebersicht über die Reihenfolge und die Art der Gruppierung der Uebungen zusammen zu stellen, aus der Sie in Verbindung mit einer etwaigen nachfolgenden Besichtigung der Apparatsammlung ein ungefähres Bild des Betriebes gewinnen können*).

Es dürfte aber doch vielleicht den einen oder anderen von Ihnen interessieren, wenigstens an einigen Beispielen noch ausserdem zu sehen, wie sich im einzelnen Falle die Behandlung des Gegenstandes praktisch gestaltet, und welcher Art insbesondere die dabei benutzten Apparate sind, und es wird mir gleichzeitig vielleicht möglich sein, ein weitverbreitetes Vorurteil zu zerstreuen, welches sich der Einführung solcher Schülerübungen vielfach hindernd entgegenstellt, ich meine die falsche Vorstellung, als ob es hierfür eines ganz besonderen Geldaufwandes bedürfte. Sie werden sich nachher bei der Besichtigung der hier aufgestellten Gruppen von Apparaten und der übrigen Sammlung leicht überzeugen, dass gar manche Vorrichtung mit einiger Geschicklichkeit und geringen Mitteln vom Leiter der Uebungen oder einem geeigneten Schüler leicht hergestellt werden kann und dass allmählich bei wachsender Beteiligung und zunehmender Ausdehnung des Betriebes sich mit ein paar Hundert Mark recht viel erreichen lässt.

Ich habe Ihnen zunächst hier diejenigen Apparate vorgeführt, die zu der Gruppe Wiegen und Bestimmung des spezifischen Gewichts gehören, Aufgaben, mit denen wohl am passendsten in O II der Reigen begonnen wird.

Ich lasse zuerst eins der Objekte nach dem Schwingungsverfahren wiegen, wobei die Methode der Interpolation besprochen wird; daran schliesst sich unmittelbar die einfachste spezifische Gewichtsbestimmung durch Wasserverdrängung mit einem in Kubikcentimeter geteilten Messcylinder und hierauf durch Wiegen des verdrängten Wassers mit dem Ausflussgläschen.

Dann folgt die Methode des Gewichtsverlustes mit der hydrostatischen Wage und als fünfte Aufgabe die

*) Siehe unten.

Bestimmung mit der Senkwage; daran kann sich dann zweckmässig die Aufgabe anreihen, den mittleren Durchmesser eines dünnen Drahtes durch Wägung und Längenmessung zu bestimmen.

Nun lässt man das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit, etwa von Alkohol, zunächst mit dem Messcylinder, dann mit dem Pycnometer bestimmen; hierauf mit Wage und Glaskörper und schliesslich aus Steighöhen; bei letzterem Verfahren lernen die Schüler die unsichere Nullpunktsbestimmung für die Höhenmessung zu umgehen durch Benutzung der Höhenunterschiede unter Anwendung des Satzes von der korrespondierenden Subtraktion.

Eine weitere Aufgabe bildet dann die Frage nach dem Zusammenhang zwischen spezifischem Gewicht und Prozentgehalt einer Salzlösung. Ich lasse zu diesem Zweck eine 50% Normallösung von Pottasche herstellen und allmählich den Prozentgehalt durch Zusatz der zuvor berechneten Wassermenge auf 45, 40, 35% und so fort herabsetzen; die spezifische Gewichtsbestimmung erfolgt mittels der Mohr'schen Wage und die Resultate werden graphisch dargestellt.

Als Abschluss dieser Aufgabengruppe wird dann mittels einer cylindrischen Glasröhre als Schwimmer und unter wachsender Belastung mit Schrot die Richtigkeit des archimedischen Satzes durch eine Reihe von Messungen geprüft; die Bestimmung des Röhrendurchmessers geschieht dabei mit der Schublehre oder dem Schraubenmikrometer.

Als weiteres Beispiel für die Uebungen der Obersekunda habe ich im Nebenzimmer die Apparate für einige reibungselektrische Versuche aufgestellt, auf die ich Ihre Aufmerksamkeit besonders deshalb lenken möchte, weil sich fast alles, was nicht so schon zum eisernen Bestand einer Schulsammlung gehört, mit geringen Mitteln herstellen lässt.

Dagegen möchte ich Ihnen hier noch eine Gruppe von Aufgaben und Apparaten aus dem Pensum der Unterprima vorführen; sie beziehen sich auf optische Versuche über Spiegel- und Linsenbilder.

Zuerst lasse ich auf der optischen Bank an einem Kugelhohlspiegel die Richtigkeit der Reziprokenformel nachweisen; dann wird die Brennweite einer Sammellinse unter Zugrundlegung dieser Formel aus einer Reihe von Versuchen bestimmt; die dritte Aufgabe lehrt, wie dieselbe Grösse rascher und genauer nach Bessels Verfahren gefunden werden kann, und zwar zunächst unter Ablendung der Randstrahlen; blendet man dann im Gegenteil die centralen Strahlen ab, so liefert eine neue Bestimmung den abweichenden Wert für die Brennweite der Randstrahlen; ebenso ergibt ein Doppelversuch unter Einschaltung eines roten bzw. eines blauen Glases den Unterschied in der Brennweite dieser beiden Strahlenarten.

Hierauf lasse ich die Zerstreungsweite einer schwächeren Konkavlinse durch Kombination mit der obigen Sammellinse bestimmen und den Schluss bildet die direkte Messung dieser Grösse durch Aufsuchen des virtuellen Bildortes auf der optischen Bank; die hierbei sich ergebenden Beobachtungen über die parallaxtische Verschiebung, die auch bei Gelegenheit der virtuellen Bilder von ebenen Spiegeln gemacht werden können, sind auch um ihrer selbst willen sehr lehrreich.

Für eine weitere Aufgabengruppe aus dem Pensum der Unterprima habe ich Ihnen im Nebenzimmer die Apparate zusammengestellt. Es handelt sich dabei um galvanometrische Uebungen.

Die Apparate, die ich Ihnen zum Schluss hier noch vorführen möchte, gehören zu einer Aufgabengruppe für die Oberprimaner über Schwingungsbewegungen; die Zeitbestimmungen werden hierbei mit einem arretierbaren Chronoskop, gelegentlich auch mit dem Sekundenpendel oder dem Metronom gemacht.

Zunächst erfolgt der experimentelle Nachweis der Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von Masse und Amplitude beim Fadenpendel, darauf die Untersuchung des Zusammenhangs von Pendellänge und Schwingungsdauer; schliesslich wird eine Bestimmung der Beschleunigung der Schwere vorgenommen.

Alsdann werden die Versuche zur Prüfung der allgemeinen Schwingungsformel behandelt. Den einfachsten Fall bildet die Masse, die an einer Spiralfeder auf und ab schwingt; daran schliesst sich die Untersuchung der Schwingungen eines am Ende in wagrechter Lage festgeklemmten elastischen Stabes, an dessen anderem Ende die schwingende Masse befestigt ist, und ferner die Torsionsschwingungen einer an einem Drahte aufgehängten Masse; endlich wird die Schwingungsdauer einer in U-förmiger Röhre schwingenden Flüssigkeit geprüft und zum Schluss die Unabhängigkeit dieser Schwingungsdauer vom spezifischen Gewicht der angewandten Flüssigkeit festgestellt.

Im Anschluss an diese Uebungen wird man dann die Versuche nehmen, die sich auf das Trägheitsmoment und seine Bestimmung beziehen.

Von weiteren Aufgaben für die Oberprima erwähne ich die Gruppe der kalorimetrischen Messungen, wofür die Apparate im Nebenzimmer zusammengestellt sind; sie zeichnen sich auch wieder dadurch aus, dass sie mit einem sehr geringen Aufwand von Mitteln beschafft werden können.

Zur Ergänzung des vorstehenden Vortrages folgt hier noch eine Uebersicht über die von mir festgehaltene Gruppierung und Reihenfolge der Versuche.

I. Obersekunda.

1. Wiegen.

Wiegen nach der Schwingungsmethode.

Spezifisches Gewicht eines festen Körpers mit Messcylinder.

Dasselbe mit Ausflussgläschen.

Dasselbe mit der hydrostatischen Wage.

Dasselbe mit der Senkwage.

Bestimmung eines Drahtdurchmessers durch Wiegen.

Spezifisches Gewicht einer Flüssigkeit mit Messcylinder.

Dasselbe mit dem Pycnometer.

Dasselbe mit dem Glaskörper.

Dasselbe mit der Mohr'schen Wage.

Dasselbe aus Steighöhen.

Spezifisches Gewicht und % Gehalt einer Pottaschelösung.

Nachweis des archimedischen Satzes mit Cylinderaräometer.

2. Elastizität.

Elastizitätskonstante einer Spiralfeder.

Herstellung einer Wiegeskala.

Biegungselastizität eines Stahlstabes.

Einfluss der Stablänge auf die Elastizität.

Einfluss der Dicke auf die Elastizität.

Torsionselastizität eines Drahtes.

Einfluss der Drahtlänge auf die Torsionskraft.

Einfluss des Durchmessers auf die Torsionskraft.

3. Einfache Maschinen.

Gesetz der schiefen Ebene.
 Hebelgesetz mit Neu's Apparat (Messfedern).
 Versuche über Drehungsmomente mit Kreisscheibe.

4. Schall.

Entwerfen und Zeichnen von Chladni's Klangfiguren.
 Abhängigkeit von Tonhöhe und Saitenlänge.
 Schwingungszahl einer Schreibstimmgabel mit rotierenden Trommel.

5. Wärme.

Fundamentalphunkte der Thermometer.
 Vergleichung zweier Thermometer von 0° — 100° .
 Bestimmung des Siedepunktes einer Flüssigkeit.
 Siedepunkt und $\%$ Gehalt einer Salzlösung.
 Ausdehnungskoeffizient fester Körper.
 Ausdehnungskoeffizient von Flüssigkeiten.
 Thaupunktbestimmung.
 Schmelzung und Erstarrung von Paraffin.
 Schmelzung und Erstarrung von Natriumhyposulfit.
 Ausstrahlung eines blanken Gefäßes.
 Ausstrahlung eines herussten Gefäßes.

6. Licht.

Reflexionsgesetz am Goniometer.
 Bestimmung von Prismenwinkeln.
 Aufsuchen des virtuellen Bildortes eines ebenen Spiegels.
 Gesetz der Beleuchtungsstärke mit Wachskerzen.
 Vergleichung von Lichtstärken mit dem Photometer.
 Lichtstärke eines Flachbrenners quer und längs.
 Lichtschwächung durch Rauchgläser.
 Lichtschwächung durch Mattgläser.

7. Magnetismus.

Magnetische Felder von Magnetstäben, einpoliges Feld.
 Dasselbe, Feld zweier gleichnamiger Pole.
 Dasselbe, Feld zweier ungleichnamiger Pole.
 Dasselbe, dreipoliges Feld.
 Feld eines Stabmagnetes.
 Feld zweier paralleler, gleichgerichteter Stäbe.
 Feld zweier paralleler, entgegengesetzter Magnete.
 Feld eines Hufeisenmagnetes ohne Anker.
 Dasselbe mit Anker.
 Bestimmung der Inklination.
 Bestimmung der Deklination.

8. Reibungselektrizität.

Aufstellen einer elektrischen Spannungsreihe.
 Darstellung Lichtenbergscher Figuren.
 Antolische Strahlungsfiguren.
 Leitungsvermögen mit dem Entladungselektrometer.
 Entladung eines Elektroskopes durch Faden.
 Entladung eines Elektroskopes durch Zerstreuung.
 Graduierung eines Elektrometers mit Leydener Flasche.
 Graduierung eines Elektrometers mit Kugelkonduktor.
 Bestimmung der Dichtigkeit und Verteilungskurve.

9. Galvanismus.

Graduierung eines Galvanometers mit Magneten.
 Graduierung mit der Thermobatterie.
 Aichung mit Normalelement und Rheostat.
 Aichung der Tangentenbussole.
 Strommessung mit Cu-Voltmeter.
 Strommessung mit Knallgasvoltmeter.
 Widerstandsmessung durch Substitution.
 Aichung eines Galvanoskopes mit dem Galvanometer.
 Herstellung eines 1Ω -Widerstandes.

II. Unterprima.

1. Mechanik.

Kräfteparallelogramm am Goniometer.
 Dasselbe mit Neu's Apparat (Messfedern).
 Fallgesetze an der schiefen Ebene.
 Abhängigkeit von Beschleunigung und Neigungswinkel.

2. Schall.

Versuche mit Melde's Fadenschwingungen.
 Gesetz der Saitenlänge und Spannung.
 Aichung einer Stimpfpfeife mit dem Monochord.
 Tonhöhe einer singenden Flamme mit dem Monochord.

3. Wärme.

Ausdehnungskoeffizient einer Flüssigkeit in U-Röhre.
 Nachweis des Gesetzes von Gay-Lussac.
 Abhängigkeit der Dampfspannung von der Temperatur.
 Dichte-Maximum des Wassers.

4. Licht.

Brennweite eines Hohlspiegels (Nachweis der Reziproken-Formel).
 Brennweite einer Sammellinse zu bestimmen.
 Bestimmung der Brennweite nach Bessels Verfahren.
 Unterschied der Brennweite für centrale und Randstrahlen.
 Dasselbe für blau und rote Strahlen.
 Zerstreuungswerte durch den virtuellen Bildort.
 Zerstreuungswerte durch Kombination mit Sammellinse.

5. Magnetismus.

Polstärke mit der Polwage bestimmen.
 Fernwirkung am Ablenkungsmagnetometer.
 Vergleichung zweier Magnete durch Ablenkung.
 Einfluss der Strichzahl auf das magnetische Moment.
 Einfluss von Erschütterungen auf das mag. Moment.
 Vergleichung eines Solenoïds mit Normalmagnet.
 Einfluss der Windungszahl auf das Moment.
 Moment eines Solenoïds mit und ohne Eisenkern.

6. Reibungselektrizität.

Graduierung eines Elektroskopes mit Faraday's Gefäß.
 Graduierung mit der Trockensäule.
 Messung von Elektrizitätsmengen mit der Massflasche.
 Schlagweite und Ladung.
 Entladungsstrom in Leinenschnur.
 Dasselbe; Abhängigkeit von Länge und Querschnitt.

7. Galvanismus.

Stromstärke und Moment eines Solenoïdes.
 Stromstärke und Joule'sche Wärme.
 Aichung des Volta-Manometers.
 Galvanometerkonstante mit Cu-Voltmeter zu bestimmen.
 Dasselbe mit dem Knallgasvoltmeter.
 Bestimmung von e und w ; eines Demonstrationselementes.
 Vergleichung zweier elektromotorischer Kräfte.
 Dasselbe durch Gegenschaltung.
 Abhängigkeit der thermoelctrischen Kraft von der Temperatur.

III. Oberprima.

1. Mechanik.

Nachweis der Formel $t = 2\pi\sqrt{m:k_1}$ für Spiralen.
 Nachweis für Torsionsschwingungen.
 Nachweis für elastische Stabschwingungen.
 Nachweis für das Wasserpfeifenpendel.
 Isochronismus von Centrifugal- und Fadenpendel.
 Einfluss der Masse und Amplitude auf die Schwingungsdauer.

Bestimmung von g.

Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Massenverteilung.

Trägheitsmoment eines Messingstabes.

Trägheitsmoment einer Kreisscheibe.

2. Schall.

Bestimmung der Schwingungszahl mit Resonanzröhre.

Dasselbe mit der Kundt'schen Röhre.

Geschwindigkeit des Schalles im Leuchtgas.

Dasselbe für Glas, Holz, Messing.

3. Wärme.

Bestimmung der spezifischen Wärme fester Körper.

(Kupfer und Glas)

Spezifische Wärme einer Flüssigkeit. (Alkohol)

Bestimmung der Joule'schen Wärme.

Schmelzwärme des Eises.

Schmelzwärme von Salmiak.

Verdampfungswärme des Wassers.

4. Licht.

Brechungsexponent eines Glaswürfels.

Brechungsexponent eines Halbcylinders von Glas.

Dasselbe mit Hohlzylinder und Wasserfüllung.

Brechungsexponent im Prisma bei senkrechtem Eintritt.

Zusammenhang von Einfallswinkel, Austrittswinkel und Ablenkung.

Brechungsexponent eines Prismas in Minimumstellung.

Brechungsexponent einer Flüssigkeit mit Hohlprisma.

Dispersion im Schwefelkohlenstoffprisma.

5. Magnetismus.

Vergleichung von Momenten durch Schwingungen.

Strichzahl und Schwingungszahl.

Bestimmung von M und H.

6. Reibungselektrizität.

Vergleichung von Kapazitäten mit dem Entladungselektrometer.

Graduieren eines Elektrometers mit dem Kondensator.

Vergleichung zweier Kapazitäten nach Cavendish's Verfahren.

Abhängigkeit der Kapazität vom Plattenabstand.

Bestimmung einer Dielektrizitätskonstante.

7. Galvanismus.

Untersuchung des Potentialabfalls in ausgespanntem Draht.

Prinzip der Wheatstoneschen Brücke.

Abhängigkeit des Widerstands von der Drahtlänge.

Abhängigkeit des Widerstands vom Querschnitt.

Bestimmung des spezifischen Widerstands.

Einfluss der Temperatur auf den Widerstand von Metallen.

Widerstand von steifem und geglühtem Messingdraht.

Widerstand einer Kupfervitriollösung.

Änderung ihres Widerstandes mit der Temperatur.

Ueber die kubische Gleichung

Vortrag auf der Hauptversammlung in Giessen *)

von Prof. Dr. Pasch (Giessen).

Der im Jahre 1893 erschienene erste Jahresbericht des Vereins, dessen zehnte Hauptversammlung heute eröffnet wurde, enthält auf Seite 36 einen Beitrag von Herrn Gusserow zu der von der Invariantentheorie gelösten Aufgabe, die kubische Gleichung durch lineare Substitution in eine reine überzuführen. Ich gestatte mir, ein mit einfachen Mitteln arbeitendes Verfahren mitzutheilen, dessen ich mich seit dem Jahre 1888 in Vorlesungen bediene, um die Gleichung

$$a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d = 0$$

durch lineare Substitution

$$\xi = \frac{x - \lambda}{x - \mu}, \text{ oder } x = \frac{\lambda - \mu \xi}{1 - \xi}$$

in die Form

$$a' \xi^3 + 3 b' \xi^2 + 3 c' \xi + d' = 0$$

so überzuführen, dass die mittleren Glieder herausfallen. Die allgemeinen Werthe von a', b', c', d' sind dabei:

$$\begin{aligned} a' &= a \mu^3 + 3 b \mu^2 + 3 c \mu + d, \\ -b' &= a \lambda \mu^2 + b \mu (2 \lambda + \mu) + c (\lambda + 2 \mu) + d, \\ c' &= a \lambda^2 \mu + b \lambda (\lambda + 2 \mu) + c (2 \lambda + \mu) + d, \\ -d' &= a \lambda^3 + 3 b \lambda^2 + 3 c \lambda + d. \end{aligned}$$

Führt man abkürzende Bezeichnungen ein:

$$a \lambda \mu + b (\lambda + \mu) + c = I_1, \quad b \lambda \mu + c (\lambda + \mu) + d = M,$$

$$a \lambda + b = I_2, \quad b \lambda + c = I_3, \quad c \lambda + d = I_4,$$

$$a \mu + b = M_1, \quad b \mu + c = M_2, \quad c \mu + d = M_3,$$

so wird:

$$I_1 = I_2 \mu + I_3 = M_1 \lambda + M_2,$$

$$M = I_3 \mu + I_4 = M_2 \lambda + M_3,$$

$$-b' = I_1 \mu + M, \quad c' = I_2 \lambda + M,$$

$$b' + c' = (\lambda - \mu) I_1, \quad b' \lambda + c' \mu = (\mu - \lambda) M,$$

$$a' + b' = (\mu - \lambda) (a \mu^2 + 2 b \mu + c) = (\mu - \lambda) (M_1 \mu + M_2),$$

$$c' + d' = (\mu - \lambda) (a \lambda^2 + 2 b \lambda + c) = (\mu - \lambda) (I_2 \lambda + I_3),$$

$$a' + 2b' + c' = (\lambda - \mu)^2 M_1, \quad b' + 2c' + d' = -(\lambda - \mu)^2 I_4,$$

$$I_1 M_1 = a I_1 - (a c - b^2).$$

Nun sollen b' und c' Null werden. Das gibt: I₁ = 0, M = 0, und daraus:

$$I_2 I_3 - I_4^2 = 0, \quad M_1 M_3 - M_2^2 = 0,$$

d. h.: λ und μ sind die Nullstellen der Funktion Δ = 1 x² + 2 m x + n = 2 (a x + b) (c x + d) - 2 (b x + c)², der Determinante der kubischen Gleichung. Es wird

$$\Delta = 1 (x - \lambda) (x - \mu),$$

und man erhält die gewünschte Substitution, indem man die linearen Faktoren der Determinante durch einander dividiert. Da jetzt

$$a' = (\lambda - \mu)^2 M_1, \quad d' = -(\lambda - \mu)^2 I_4,$$

so lautet die Gleichung für ξ:

$$\xi^3 = \frac{a \lambda + b}{a \mu + b}.$$

Berechnet man noch:

$$a x + b = \frac{a \lambda + b - (a \mu + b) \xi}{1 - \xi},$$

$$\frac{a x + b}{a \mu + b} = \frac{\xi^3 - \xi}{1 - \xi} = -\xi^2 - \frac{\xi}{1 - \xi} = -\frac{a \lambda + b}{a \mu + b} \frac{1}{\xi} - \xi,$$

so erhält man:

$$a x + b = -\frac{I_1}{\xi} - M_1 \xi = r + s,$$

wo $r = -\frac{I_1}{\xi}, \quad s = -M_1 \xi, \quad \frac{r}{s} = \xi.$

Weiter ist:

$$r s = b^2 - a c = -\frac{1}{2}, \quad r^3 = (a c - b^2) I_1,$$

$$s^3 = (a c - b^2) M_1$$

und schliesslich (Eisenstein, Journal f. d. r. u. a. Math. 1844 Bd. 27):

$$a x + b = \sqrt[3]{(a c - b^2) (a \lambda + b)} + \sqrt[3]{(a c - b^2) (a \mu + b)}$$

mit der Massgabe, dass das Produkt der beiden Kubikwurzeln gleich b² - a c sein muss.

Besondere Verfahren sind nötig, wenn Δ linear oder ein Quadrat wird.

In betreff des Casus irreducibilis sei auf die Arbeiten von Hölder (Math. Ann. 1891 Bd. 38), Kneser (ebendas. 1893 Bd. 41) und Gegenbauer (Monatshefte für Math. und Physik 1893 Jahrgang 4) aufmerksam gemacht.

*) S. Unt.-Bl. VII, 3, S. 54.

Geometrographie.

(Kurze Mitteilung von F. Pietzker.)

Unter der oben genannten Bezeichnung hat Herr E. Lemoine in Paris eine neue Disziplin in die Geometrie eingeführt, die die vergleichsweise Einfachheit der geometrischen Konstruktionen zum Gegenstand der Beurteilung macht. Alle Operationen mit Zirkel und Lineal sind von folgender Art: Einsetzung eines Zirkelfusses in einen Punkt (C_1), des zweiten Zirkelfusses in einen zweiten Punkt (C_2), Schlagen des Kreises (C_3), Anlegen des Lineals an einen Punkt (R_1), Ziehen der Geraden (R_2) — dabei erfordert das Ziehen einer Geraden durch zwei Punkte zweimal die Operation R_1 und einmal die Operation R_2 . Jede Konstruktion setzt sich aus Operationen $C_1 C_2 C_3 R_1 R_2$ *) zusammen, sie lässt sich also durch einen Ausdruck von der Form $l_1 R_1 + l_2 R_2 + l_3 C_1 + l_4 C_2 + l_5 C_3$ charakterisieren, die Faktoren-Summe $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$ ist die Gesamtzahl der überhaupt vorgekommenen Operationen. — Herr L. nennt diese Summe den Einfachheitsgrad (eigentlich giebt sie, wie er bemerkt, vielmehr den Grad der Verwickelung an). Die Zahl der den vorbereitenden Operationen ($R_1 C_1 C_2$) zukommenden Faktoren nennt er den Genauigkeitsgrad (richtiger Ungenauigkeitsgrad, wie er selbst bemerkt).

Als Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens wähle ich die bekannten beiden elementaren Konstruktionen für die Tangente von dem Punkt A an den Kreis vom Mittelpunkt O.

I. Bei der ersten schlage ich über A O einen Halbkreis, der den gegebenen Kreis in B schneidet, verbinde A mit B. In dieser Konstruktion stecken folgende Operationen: Verbindung von A mit O ($2 R_1 + R_2$), Halbierung von A O durch 2 sich schneidende Kreise von gleichem Radius und Verbindung ihrer Schnittpunkte ($2 C_1 + 2 C_2 + 2 C_3 + 2 R_1 + R_2$), Konstruktion des Kreises über dem Durchmesser A O ($C_1 + C_2 + C_3$), Verbindung von A mit B ($2 R_1 + R_2$), im Ganzen also an Operationen: $3 C_1 + 3 C_2 + 3 C_3 + 6 R_1 + 3 R_2$; Einfachheitsgrad: 18; Genauigkeitsgrad: 12.

II. Bei der zweiten Konstruktion schlägt man um O einen Kreis, der den Durchmesser des gegebenen Kreises zum Radius hat, dieser Kreis wird von dem um A mit A O geschlagenen Kreise in C geschnitten, die Linie O C schneide den gegebenen Kreis in E, dann ist A E die gesuchte Tangente. Hierin stecken folgende Operationen:

Ziehen einer beliebigen von O ausgehenden Geraden ($R_1 + R_2$); Abmessung des Radius auf seiner Verlängerung ($C_1 + C_2 + C_1 + C_2$); Schlagen des konzentrischen Hilfskreises ($C_1 + C_2 + C_3$); Zeichnen des Kreises mit dem Radius A O ($C_1 + C_2 + C_3$); Ziehen der Linie O E ($R_1 + R_2 + R_3$) und der Linie A F ($R_1 + R_2 + R_3$); Operationszahl im Ganzen: $4 C_1 + 4 C_2 + 2 C_3 + 3 R_1 + 2 R_2 + 3 R_3$; Einfachheitsgrad: 18; Genauigkeitsgrad: 13.

Demnach würden die beiden Konstruktionen an Einfachheit einander gleichstehen, die erste würde vermöge der kleineren Zahl für den Genauigkeitsgrad eine etwas grössere Genauigkeit verbürgen.

Die Prinzipien dieser Betrachtungsweise sind von Herrn Lemoine auch auf stereometrische Konstruktionen ausgedehnt worden, wobei zwei neue Kategorien von (allerdings gewissermassen fiktiven) zur Herstellung einer Ebene und einer Kugel dienenden Operationen

*) Die Buchstaben R und C (den Worten Règle und Compas entlehnt) sind die von Herrn Lemoine selbst gebrauchten Bezeichnungen für Lineal- und Zirkel-Operationen.

($P_1 P_2$; $S_1 S_2 S_3$) auftreten. Herr L. fungiert dabei zwei ideale, diese Konstruktionen ermöglichende Instrumente (Planque und Sphérètre nach seiner Bezeichnung). (Nähere Angaben s. Comptes rendus de l'Académie des Sciences; Comptes rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Congress mathematical papers (Chicago), sowie Archiv der Mathem. und Physik, III. Reihe, I. Band 1901).

* * *

Die vorstehend kurz skizzierten Gedanken des Herrn Lemoine lassen auch eine Uebertragung auf rechnerische Lösungen zu, zu deren Erläuterung ich vielleicht eine seit Jahren von mir im Unterricht verwendete Darlegung der Vereinfachung anführen darf, die beispielsweise bei der Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten dadurch erwächst, dass man zunächst den Wert für den Radius des einbeschriebenen Kreises berechnet.

Bekanntlich gelten bei Anwendung der üblichen Bezeichnungen die Gleichungen

$$I. \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \text{ und}$$

$$II. \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\rho}{s-a}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{\rho}{s-b}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\rho}{s-c}, \text{ wenn}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \text{ ist.}$$

In beiden Fällen, bei Verwendung des Gleichungssystems I, wie des Systems II sind dieselben vorbereitenden Handlungen nötig, nämlich die Bestimmung von s , $s-a$, $s-b$, $s-c$ und die Entnahme der Logarithmen dieser Grössen aus der Tafel.

Vergleicht man die weiteren Rechnungen in beiden Fällen mit einander, indem man jedes Hinschreiben eines Logarithmus, jede Addition, jede Subtraktion, jede Division als eine Operation rechnet (das Aufschlagen der Winkel in der Tafel erfordert in beiden Fällen die gleiche Operationszahl), so findet sich bei der Verwendung des Gleichungssystems I eine Gesamtzahl von 24, bei Verwendung des Systems II eine solche von 15 Operationen, also eine wesentliche Ersparnis. Aehnliche Betrachtungen sind bei einer grossen Zahl verwandter Aufgaben möglich.

* * *

Vereine und Versammlungen.

Naturforscher-Versammlung zu Hamburg. Zu den in No. 4, S. 80, gebrachten Mitteilungen ist ergänzend nachzutragen, dass auch ein zweiter Abteilungsvortrag eine unmittelbare Beziehung zum Unterricht aufweist, nämlich in Abteilung 4, Chemie (einschliesslich Elektrochemie), wo Rischbieth (Hamburg) über gasvolumetrische Schul- und Vorlesungsversuche vortragen wird.

XLVI. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Strassburg (Elsass) vom 1. bis 4. Oktober in den Räumen des Allgemeinen Kollegengebäudes der Kaiser Wilhelm-Universität.

Von den für die Allgemeinen Sitzungen angemeldeten 18 Vorträgen behandelt keiner ein Thema exaktwissenschaftlichen Inhalts. Von den Vorträgen der Pädagogischen Sektion bietet ein gewisses Interesse, namentlich auch wegen der Person des

Redners: Alois Höfler (Wien): Kann und will unser Gymnasium das Lehrziel „Allgemeine Bildung“ noch anstreben? In der Mathematischen Sektion (Obmänner: Prof. Dr. Weber und Prof. Dr. Simon) werden sprechen: Treutlein (Karlsruhe) über den mathematischen Unterricht am Reformgymnasium und Schwering (Cöln a. Rh.) über das Thema: Zum mathematischen Unterricht am Gymnasium. Vorträge über Themata aus dem Gebiet des naturwissenschaftlichen Unterrichts fehlen ganz.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Unterricht in der darstellenden Geometrie. In meiner Nachschrift zu der Diskussion über die Gestaltung des Unterrichts in der darstellenden Geometrie (Unt.-Bl. VII, Nr. 4 S. 76) hatte ich angegeben, dass dieser Unterricht an den sechsstufigen preussischen Realschulen, wo er wahlfrei ist, bis auf eine Ausnahme (Potsdam) in den Händen des Zeichenlehrers liege. Wie mir mitgeteilt wird, trifft dies auch für die Realschule zu Cassel nicht zu, wo dieser Unterricht regelmässig von einem Mathematiker erteilt wird. Ausnahmsweise ist dies im Jahre 1899 zufällig nicht geschehen, sondern da vertretungsweise durch den Zeichenlehrer erteilt worden. Ich hatte aber gerade die Jahresberichte für 1899/1900 meinen Angaben zugrunde gelegt und aus diesen war der Zusammenhang nicht ersichtlich. An der Realschule zu Sobernheim scheint die Sache ähnlich zu liegen. Da die Schulprogramme doch nie vollständig eingehen, mag es wohl sein, dass meine Angaben auch für einige andere Anstalten nicht ganz zutreffen. Zur Vervollständigung der Uebersicht würde es beitragen, wenn auch über anderweitige Abweichungen Mitteilung gemacht würde.

Hamdorff.

In dem Bericht über die vorstehend genannte Diskussion selbst sind einige Druckfehler zu verbessern, insbesondere muss es in der vorletzten Zeile des ersten Absatzes (Unt.-Bl. VII, 4, S. 70, Zweite Spalte) statt einfach vielmehr heissen vielfach.

Naturwissenschaftlicher Ferienkursus in Berlin vom 1. bis 12. Oktober 1901. Der unter Leitung des Provinzial-Schulrats Geheimen Regierungsrats Dr. Vogel stehende Kursus umfasst I. an Vorträgen: Professor Dr. Lummer: Die neuesten Ergebnisse aus den Strahlungsmessungen als Grundlage einer neuen Temperaturskala bis zu den höchsten Temperaturen (5 St.). Dr. Martelli: Ueber ultraviolette Strahlung (3 St.). Geheimer Medizinalrat Prof. Dr. Fritsch: Die Verhältnisse des menschlichen Körpers nach Rasse und Geschlecht (3 St.). Dr. med. Abelsdorff: Die Hygiene des Auges (3 St.). Prof. Dr. Pfuhl: Ueber Pflanzengärten, ihre Anlage und ihre Verwertung an den höheren Schulen (2 St.). Oberlehrer Fischer: Die Antarktis und die bevorstehende Südpolarrundfahrt Erich von Drygalskis (1 bis 2 St.).

II. an Uebungen: Mechaniker und Optiker Hintze unter Beirat von Prof. Heyne: Praktische Uebungen in der mechanischen Werkstatt; Prof. Dr. Szymanski: Elektrische und magnetische Messungen unter Berücksichtigung der in der Elektrotechnik gebräuchlichen Methoden und Apparate; Prof. Dr. Spies: Uebungen im Projizieren und in der objektiven Darstellung physikalischer Erscheinungen; Oberlehrer

Dr. Röseler unter Beihülfe eines Präparators: Uebungen in der Anfertigung zoologischer Präparate; Privatdozent Dr. Kolkwitz: Uebungen aus dem Gebiete der Mikroskopie und Physiologie der Pflanzen. (Für jede dieser Uebungen sind 8 Doppelstunden bestimmt, sodass eine Gruppe der Teilnehmer an der ersten und zweiten, eine an der ersten und dritten, eine an der vierten und fünften teilnimmt, wobei die erste Uebung in zwei Cöten abgehalten werden soll).

III. an Exkursionen und Besichtigungen: Besichtigung der in der alten Urania veranstalteten Ausstellung physikalischer und chemischer Lehrmittel (Führer: Prof. Heyne); Besichtigung des physiologischen Instituts, der Elektrizitätswerke, der im Bau begriffenen Hoch- und Untergrund-Bahn; geologische Exkursion nach dem Harz (Führer: Prof. Dr. Potonié). Die Vorträge und Uebungen finden im Lokal der alten Urania (Invalidenstr. 57/62) statt, der Schluss des Kursus erfolgt in Thale am Harz.

Lehrmittel-Besprechungen.

Ausstellung von Schülerzeichnungen und Lehrmitteln aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie auf der Hauptversammlung zu Giessen.*)

1) Professor Dr. Chr. Beyel vom Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich stellte 7 Tafeln aus, die die Lösung von Aufgaben aus der darstellenden Geometrie in Gemässheit der von ihm herausgegebenen Dispositionen zu solchen Aufgaben erläutern. Jeder Aufgabenlösung war eine Anschauungsfigur in schräger Parallelprojektion beigelegt. Beigelegt war ein kleiner, von ihm selbst beim Unterricht benutzter zusammenlegbarer Apparat, der zur körperlichen Veranschaulichung der Dispositionen dient, in zwei Exemplaren, das eine fertig montiert, das andere in einer Kartonschachtel (25:25:4 cm) verpackt, dazu kamen noch einige Modelle.

2) Professor Dr. E. Gerland von der Berg-Akademie zu Clausthal hatte aus der Sammlung der Akademie eine Reihe von Modellen gesandt, die Körperdurchdringungen darstellten, nämlich 1) eines drei- und eines vierseitigen Prismas, 2) eines vierseitigen Prismas und einer fünfseitigen Pyramide, 3) einer vierseitigen und einer fünfseitigen Pyramide, 4) zweier Cylinder, 5) zweier Kegel — beide Körper jedesmal in beliebigen Lagen zu einander.

3) Die Oberrealschule zu Braunschweig (Prof. Grotefend) stellte die von Jullien angegebenen, unter Titel *Méthode nouvelle pour l'enseignement de la géométrie descriptive* bei Alphonse Picard in Paris herausgegebenen Modelle aus, die zwar in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt sind, sich aber auch für den Klassenunterricht mit Vorteil anwenden lassen.

Sie geben zunächst die Projektionen des Punktes, der Geraden und der Ebenen in den verschiedensten Lagen gegen die Projektionsebenen, dann eine Reihe höchst durchsichtiger Lösungen von Aufgaben, die sich aus der Zusammenstellung von Punkt, Linie und Ebene ergeben.

4) Die Oberrealschule zu Charlottenburg (Oberlehrer Hupe) stellte eine Reihe von Zeichnungen aus, welche den Lehrgang in der Projektionslehre ver-

* S. Unt.-Bl. VII, 3, S. 54. — Der Bericht stützt sich auf die eigenen Angaben der Aussteller.

anschaulichen; besonders zu erwähnen sind die graphischen Lösungen stereometrischer Aufgaben.

Die Lehrmittel, welche die Anstalt gesandt hatte, waren:

Witt: Zirkelzeichnen. Dazu Modelle.

Heinzel: Vorschule für das Maschinenzeichnen.

Gottlob-Groegler: Einführung in das technische Zeichnen nach Modellen. Dazu Modelle.

A. zur Megede: Wie fertigt man technische Zeichnungen an?

K. Hartmann: Technische Vorlageblätter.

Schlottke: Stereometrische Figuren für den Unterricht in der Stereometrie, Trigonometrie und in der Projektionslehre.

5) Die von der Oberrealschule zu Elberfeld (Professor Dr. Sellentin) ausgestellten, in zwei Tuschen und drei Farben (Lampenschwarz, gebr. Terra siena, Preussisch-Blau) nach Skizzen des Lehrers an der Wandtafel unter Zuhilfenahme von Modellen ausgeführten Schülerzeichnungen veranschaulichten den nachstehend angegebenen an der genannten Anstalt bestehenden Lehrgang, der keine systematische Einführung in den Gegenstand, sondern nur eine Vorbereitung auf eine spätere systematische Behandlung durch passend gewählte Aufgaben bezweckt.

Ober-Tertia. Zeichnen von Kurven (Ellipse, Hyperbel, Parabel, Cykloiden etc.); Projektion von Körpern in drei Projektionsebenen mit einfachen Schnitten und Abwickelungen. Axonometrische Darstellungen.

Unter-Sekunda. Drehung von Körpern um Axen, die senkrecht zu einer der Projektionsebenen sind; Durchdringung von Körpern und Abwicklung der Oberflächen. Bedeutung der Hilfsebenen für die Zeichnung von Durchdringungen.

Ober-Sekunda. Kurze Wiederholung der Elemente der orthogonalen Parallelprojektion. Die Schattenkonstruktion (schiefe Parallelprojektion). Schlag- und Eigenschatten einfacher Körper. Isophoten der Kugel.

Unter-Prima. Schattenkonstruktion durch Einführung von Hilfsebenen; Aufsuchung der Schatten an Körperdurchdringungen mit Hilfe der Schlagschatten. Einführung in die Perspektive (Zentralprojektion). Begriff der Verschwindungspunkte.

Ober-Prima. Perspektivische Darstellung einfacher Körper und Gebäudeteile in Frontal- und Uebereckstellung. Wiederholungsaufgaben.

6) Die Oberrealschule zu M.-Gladbach (Oberlehrer Rother) stellte eine Reihe von Zeichnungen aus, die den sich an Holz Müller, Einführung in das stereometrische Zeichnen, anlehnenden, übrigens erst seit wenigen Jahren erprobten Gang des Unterrichts an dieser Anstalt in der Ober-Sekunda und der ungetrennten Prima dieser Anstalt veranschaulichen.

Das Pensum der Ober-Sekunda umfasst die Darstellung von Körpern in schräger Parallel-Projektion, von einfachen Körpern in Uebereckstellung, von Körpern, die durch Aufsetzen von Pyramiden auf die Flächen von einfachen Körpern, durch Abstumpfung oder Zuspitzung von Ecken und Kanten entstehen, Herstellung von Grundriss und Aufriss der regelmässigen Körper, die dann durch Drehung in die allgemeinste Lage gebracht werden, von leichten Kombinationen zweier Körper, Konstruktion der Parallelperspektive aus Grundriss und Aufriss, endlich Zeichnen von Körpern in Parallelperspektive nach Angabe der Strecken, welche die Seitenflächen auf den Axen vom Mittelpunkt aus abschneiden.

Der in engster Verbindung mit dem Unterricht in Stereometrie und analytischer Geometrie stehende Lehrgang der Prima behandelt die krummflächigen Körper, wobei in dem einen Jahre mehr die affine Verwandtschaft betont wird. Nach Zeichnung der Ellipse als des affinen Bildes vom Kreise folgt die Herleitung der Kegelschnitte als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, dann die Darstellung der Ellipse als Parallelprojektion des Kreises, zeichnerische Ausführung zahlreicher Konstruktionsaufgaben, Ableitung der Kurven II. Ordnung als Schnitte des Kreiskegels, einfache Durchdringungen, wenn Zeit vorhanden, Zeichnen der flachen und der scharfen Schraube, der Loxodrome auf der Kugeloberfläche, Darstellung einfacher Rotationskörper im Grundriss und Aufriss, sowie in dem durch Drehung gewonnenen anschaulichen Bilde.

Das Pensum des zweiten Jahres beginnt mit Aufsuchung des Spurpunktes und der Spurlinien, des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene, der Schnittlinie zweier Dreiecke im Raume, worauf Durchdringungen von Prismen, Pyramiden und Kegeln behandelt werden. Es folgt das Zeichnen von Cylinder und Kegel in Grund- und Aufriss, Drehung dieser Körper. Darstellung derselben in schräger Parallelperspektive.

7) Die Ausstellung der städtischen Oberrealschule zu Halle a. S. wies folgende Gegenstände auf (I—III nach Angaben des Oberlehrers H. Rühlmann hergestellt vom Mechaniker R. Schultze, Halle a. S. — IV. 1—4 angefertigt von Oberlehrer K. Weise, 5—6 von Oberlehrer H. Rühlmann. — V. aus der Klempnerei von A. Haupt, Halle a. S.).

I. Halterstativ (1,30 m) für Drahtmodelle (z. B. Pyramide $h = 0,35$ m), Drehungen in vertikaler und horizontaler Ebene sind messbar, also genaue Wiedereinstellung möglich.

II. Kugelmodell ($d = 0,60$ m) für stereographische Projektion; durch Verlegen der Bildebene für äquatoriale und polare geeignet. Es besteht aus zwei gegeneinander verstellbaren Meridianen, Äquator und 1 Parallelkreis aus Eisendraht, Stahlnadeln durchstossen vom Projektionscentrum aus, die Bildebene aus Drahtgaze. Da die Kreise durch lösbare Klauenschrauben aneinander gefügt sind, eignet sich der Aufbau auch für die Anfänge in der Geographie.

III. Klapptafel (1 qm) an eisernem Stativ (2,50 m). Sie kann aus einer Ecke (0,50 m³ wie in IV) nach Lösung eines Hakens und Lockerung einer Schraube durch Drehen resp. Herunterklappen in eine ebene Tafel verwandelt werden, die durch eine kurze Seilführung vermittels eines Schlittens in Wandtafelhöhe zu bringen ist, sodass auch die nach unten geklappte Grundrissebene sich in normaler Gesichtshöhe befindet. Die Rückführung in die rechtwinklige, räumliche Lage geschieht durch Herablassen des Schlittens und Heben eines Stützringes.

Messinghülsen und Holzadeln (0,10—0,40 m) gestatten den Einbau von Punkten, Geraden und einfachen Körpern, so dass ihre Projektionen, die auf der geschwärzten Tafel in räumlicher Lage gezeichnet wurden, sich nach dem Auseinanderklappen als ebene Zeichnungen darstellen.

Eine verstellbare Klammer kann an der Aufrissebene so befestigt werden, dass sie Drahtmodelle (z. B. von dem in IV. 1—4 benutzten Quader) durch Verschieben und Drehen in jede Lage bringt.

Leicht drehbare Aufhängung der Tafel am Stativ

erlaubt von jedem Klassenplatz aus senkrechten Anresp. Einblick.

IV. Feste Eckmodelle ($0,50 \text{ m}^3$) mit erläuternden Farben in Oel gestrichen. 1--4 stellen einen Quader aus Holz ($0,08 \times 0,12 \times 0,23$) in den 4 Hauptlagen dar, abgelotet nach den 3 Ebenen durch Holznadeln, und zeigen so die an III durch Bewegung erläuterten Stellungen fest.

5 zeigt ein beliebiges Viereck (Glas) mit Spuren von Geraden und Ebene, 6 eine Gerade, welche ein Dreieck (Glas) durchstößt.

V. 10 Durchdringungsmodelle ($0,60 \text{ m}$ hoch) aus Weissblech mit mattweissem Anstrich die gewöhnlichsten Kombinationen von Prisma, Pyramide, Kegel, Cylinder darstellend.

8) Die erste Realschule zu Leipzig (Dr. M. Richter) hatte 11 Mappen mit Schülerzeichnungen ausgestellt, die die Jahreskurse der zweiten und der ersten Klasse aus den letzten vier Jahren zur Darstellung brachten. Der Unterricht an dieser Anstalt erfolgte in Anlehnung an das Werk von Weishaupt, das Ganze des Linearzeichnens, Bearbeitung von M. Richter (Leipzig, Herm. Ziegler) nach den Grundsätzen, die im Programm der Anstalt von 1901, No. 618 (M. Richter, das geometrische Zeichnen in der Realschule) näher dargelegt sind. Dieses Programm, ebenso wie das genannte Werk (1. Abt. Planimetrische Konstruktionen; 2. Abt. Projektionslehre; 3. Abt. Schattenkonstruktionen nebst den Grundzügen der Beleuchtungskunde) waren zugleich ausgelegt worden.

9) Die Baugewerkschule zu Magdeburg (Oberlehrer H. Bessell) stellte eine Reihe von Schülerarbeiten aus, die den Lehrgang in der vierten (untersten) und dritten Klasse dieser Anstalt veranschaulichen (die Kurse sind halbjährig mit 6 resp. 4 Wochenstunden).

Das Pensum der vierten Klasse umfasst Projektionen von Körpern in der einfachsten Lage, Drehungen, schiefe Schnitte, wahre Grösse solcher Schnitte, Durchdringungen, praktische Anwendungen.

Die dritte Klasse wiederholt und erweitert das Pensum der Vorklasse unter stärkerer Betonung der Bautechnik, sowie unter Hinzunahme von Schattenkonstruktionen, bei steter Annahme einer Lichtstrahlenrichtung parallel der Diagonale eines Würfels, dessen Flächen der Projektionsebene parallel sind. Ein Teil der Zeichnungen betraf stereometrische Konstruktionen, die in beiden Klassen gelegentlich geübt werden.

Ausgestellt waren ferner von Unterrichtshilfsmitteln die stereoskopischen Bilder von Schlotke (Hamburg 1871) und die aus der Praxis des Unterrichts an der Technischen Hochschule in Hannover hervorgegangene Aufgabensammlung von Gerke (Hannover, Selbstverlag 1861).

10) Die Ausstellung von Schülerzeichnungen der Oberrealschule zu Metz (Dr. Dörr) bestand zunächst aus einer einleitenden Gruppe von Körperbildern in schräger Parallel-Projektion nach Herrn Holzmüllers Methode. Daran schloss sich der systematische Aufbau der Orthogonalprojektion, ungefähr in der Ordnung des Wiesbadener Realgymnasiums und mit Anwendung der dort üblichen Bezeichnung, die an Klarheit und Folgerichtigkeit wohl nicht übertroffen ist. Der Lehrgang umfasst weiter die Schatten- und Beleuchtungslehre und die Perspektive; er beschränkt sich durchweg auf die wichtigsten Aufgaben und benutzt zur Förderung der Anschauung vielfach Schau-

figuren in schräger Projektion, sowie Modelle (von Schröder in Darmstadt).

11) Die von der Realschule zu Pirna (Dr. Muhle) ausgestellten Zeichnungen umfassten einen vollen Lehrgang (zwei Jahrgänge mit je einer Wochenstunde) und stellten dar: Einfache Projektionen von Punkten, Geraden und Flächen, Konstruktion wahrer Grössen und Spuren, Drehungen und Abwickelungen von Körpern, Kegelschnitte. Bei den Darstellungen war Rücksicht auf mineralogische Körper und einfache physikalische Maschinen sowie auf graphische Darstellungen meteorologischer und physikalischer Vorgänge genommen. Beigefügt waren einige vom Lehrer selbst gefertigte, den Schülern zur Nachahmung empfohlene Modelle aus Karton und Fäden, z. B. die Dreieckspuren oder den Schnitt zweier Ebenen darstellend.

12) Die vom Realgymnasium zu Wiesbaden (Professor August Schmidt) ausgestellten Lehrmittel geben ein Bild des in den drei obersten Klassen dieser Anstalt herrschenden Lehrganges, sie zerfallen in drei Gruppen.

A. Erste Gruppe. Pensum der Obersekunda (7 Tafeln).

a) Die wichtigsten Lagebeziehungen zwischen den Grundgebilden Punkt, Gerade und Ebene, dargestellt in zwei aufeinander senkrechten Bildebenen — 3 Tafeln.

b) Die Projektionen der Strecke, des Polygons und des Kreises in den Hauptlagen zu den beiden Bildebenen; Konstruktionen an der Ellipse, soweit diese Konstruktionen aus der Entstehung der Kurve durch Orthoprojektion des Kreises hergeleitet werden können — 2 Tafeln.

c) Die Projektionen der elementar-stereometrischen Körper in den Hauptlagen zu den Bildebenen — 2 Tafeln.

Anmerkung. Die Krystallformen werden von dem Fachlehrer für Naturgeschichte bereits in Untersekunda in Parallelperspektive dargestellt.

B. Zweite Gruppe. Pensum der Unterprima (11 Tafeln).

a) Ebene Flächenschnitte.

Die Projektionen der drei Kegelschnitte, des schrägen Cylinderschnittes, schräger pyramidaler oder prismatischer Schnitte und ebener Kugelschnitte nebst den Netzen der Körperstumpfe — 6 Tafeln.

b) Räumliche Flächenschnitte.

Schnitte der Flächen der pyramidal-konischen und der prismatisch-cylindrischen Gruppe untereinander und mit der Kugel, bei einfacher und allgemeiner Lage der Flächen — 5 Tafeln.

c) Modelle zu a) und b), welche von den Schülern selbst nach ihren Zeichnungen angefertigt worden sind. (Die Anfertigung solcher Modelle ist eine freiwillige Leistung, an der sich nur ein Bruchteil der Schüler beteiligt).

C. Dritte Gruppe. Pensum der Oberprima. (11 Tafeln).

a) Schattenkonstruktionen.

1. Der Schlagschatten des Punktes, der Strecke und des Polygons — 1 Tafel.

2. Schlagschatten und Beleuchtungsverhältnisse der elementar-stereometrischen Körper — 2 Tafeln.

3. Schlagschatten und Beleuchtungsverhältnisse von Körper-Kombinationen (Schatten eines stehenden Kegels auf einen liegenden Cylinder u. a. m.) — 3 Tafeln.

b) Centralprojektionen (5 Tafeln) (auf Grund eines vorhergehenden theoretischen, etwa sechs Wochen beanspruchenden Kursus).

1. Centralprojektionen der elementar-stereometrischen Körper einschliesslich ausgewählter Krystallformen nebst dem Schlagschatten, den sie in der Grundebene erzeugen — 2 Tafeln.
2. Centralprojektionen von Körperkombinationen und der Schlagschatten, die sie aufeinander werfen — 3 Tafeln.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Cossmann's deutsche Schulflora, neu bearbeitet von H. Cossmann und F. Huisgen. 2. Auflage. Breslau 1901. Mk. 4.25.

Fortschritte der Physik im Jahre 1900. Teil I (Physik der Materie) und Teil II (Physik des Aethers) red. von K. Scheel; Teil III (Kosmische Physik) red. von R. Assmann. Braunschweig 1900, Vieweg & Sohn.

Frenkel, F., Anatomische Wandtafeln für den naturgeschichtlichen Unterricht an höheren Lehranstalten. Tafel V und VI mit Text. Jena 1901. Fischer.

Fricke, K., & Klein, F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. 2. Bd. 1. Lfg. Mit 34 Abb. Leipzig 1901, Teubner. Mk. 10.—

Geyer, H., Katechismus für Terrarienliebhaber. Mit 7 Tafeln und 34 Abb. Magdeburg 1901, Creutz. Mk. 1.50.

Greve, E., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst mathem. u. naturw. Hilfstafeln. Glogau 1901, Flemming. Mk. 2.50 geb.

Haberland, M., Flora von Neustrelitz, Verzeichnis der im Grossherzogtum Mecklenburg-Strelitz beobachteten wildwachsenden Gefäss-Pflanzen. Neustrelitz 1901. Bohl.

Berichtigung:

In dem Aufsatz von R. Heger, Auflösung der Kreis- und der Kugelberührungsaufgaben durch die Kreis- und die Kugelverwandtschaft (Unt.-Bl. VII, 4, S. 77—80) ist in den Schlussformeln auf S. 79 unten, S. 80 oben ein Fehler zu berichtigen. Es muss dort statt $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ überall heissen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Anzeigen.

Ein Werk für Jedermann!

2. verbesserte Auflage.

Mit Karten u. Abbildungen



Die Erde

und die
Ercheinungen ihrer Oberfläche.

Eine physische Erdbeschreibung nach
E. Reclus
von

Dr. Otto Me.

Preis 10 Mf., geb. 12 Mf.

Verlag Otto Salle, Berlin W. 30.

E. Seybold's Nachfolger

Köln

übersenden auf Wunsch franko

die ausführliche Beschreibung mit Preisangaben des in No. 3 dieser Zeitschrift besprochenen

Universal- * * * * *

* * Projektionsapparates.

IBACH

hat ein Jahrhundert lang Pianos für Lehrer gebaut und sich dabei zur Pflicht gemacht, stets alle ihre Wünsche zu berücksichtigen, so dass heute das Piano von

Rud. Ibach Sohn

Hof-Pianofabrikant
Sr. Maj. des Königs und Kaisers,
Barmen-Berlin-Bremen-
Hamburg-Köln.

„das Lehrer-Piano“ heissen darf unter allen anderen

PIANOS

Filiale: Berlin, Potsdamerstr. 22b.

Dr. F. Krantz

Rhein. Mineralien-Contor. ≙ Verlag mineralog.-geolog. Lehrmittel

Geschäftsgründung 1833. Bonn a. Rh. Geschäftsgründung 1833.

Mineralien, Meteoriten, Edelsteinmodelle, Versteinerungen, Gesteine, sowie alle mineralogisch-geologischen Apparate u. Utensilien.

Lehrmittel für den Unterricht in Mineralogie, Geologie und Geographie.

Eigene Werkstätten zur Herstellung von

- a) Krystallmodellen in Holz, Glas und Pappe, sowie von krystallograph. Apparaten,
- b) Dünnschliffen von Mineralien und Gesteinen zum mikroskopischen Studium,
- c) Gypsabgüssen berühmter Goldklumpen, Meteoriten, seltener Fossilien und Reliefkarten mit geognostischer Colorirung,
- d) Geotektonischen Modellen nach Prof. Dr. Kalkowsky u. Prof. Dr. Dupere.

Ausführliche Kataloge stehen portofrei zur Verfügung.

Soeben erschien: **Katalog Ia: Mineralien und Mineralogische Apparate und Utensilien.**

Katalog Ib: Krystallmodelle und krystallogr. Apparate.

Verlag Art. Institut Orell Füssli, Zürich.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.

Mit vielen angewandten Aufgaben für
Gymnasien und techn. Mittelschulen.
Von Prof. Dr. F. Bützberger, Zürich.
2. umgearb. Auflage. Preis 2 Mk.
Zu bezieh. durch alle Buchhandlungen.

Verlag
von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der Unterricht in der analytischen Geometrie

Für Lehrer und zum Selbstunterricht.

Von
Dr. Wilh. Krumme,
weil. Direktor der Ober-Realschule
in Braunschweig.

Mit 53 Figuren im Text.

Preis 6 Mk. 50 Pf.

Die Formeln

für die Summe der natürlichen Zahlen
und ihrer ersten Potenzen abgeleitet
an Figuren.

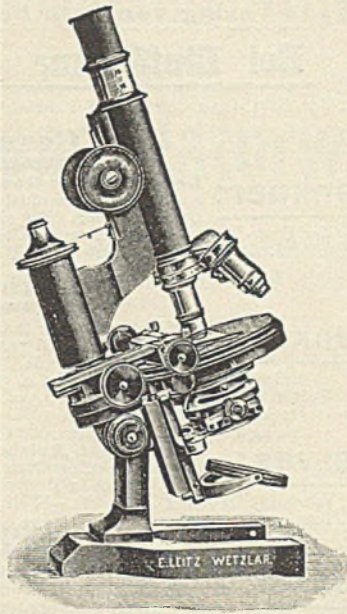
Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer in Magdeburg.
Preis 1 Mk.

Grundsätze und Schemata
für den

Rechen-Unterricht an höheren Schulen.

Mit einem Anhang:
Die periodischen Dezimalbrüche
nebst Tabellen für dieselben.

Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer a. d. Realschule zu Magdeburg.
Preis 1.20 Mk.



E. Leitz,

Optische Werkstätte
Wetzlar

Filialen: Berlin NW., Luisenstr. 45
New-York 411 W. 59 Str.
Chicago 659 W.

Mikroskope

Mikrotome

Lupen-Mikroskope
Mikrophotographische Apparate.
Photographische Objektive
Projektions-Apparate.

Ueber 60 000 Leitz-Mikroskope
im Gebrauch.

Deutsche, englische und französische
Kataloge kostenfrei.

Wissenschaftliche Projektionsapparate.

zur Projektion von:

Lichtbildern, Experimenten, horizontal u. vertikal.
Mikroskopie und Polarisation.
Projektion undurchsichtiger Gegenstände.

Mit allen Lichtquellen:

Sonnenlicht, Elektrisches Bogen- und Glühlicht,
Kalklicht, Gasglühlicht, Acetylen, Petroleumlicht.
Doppelte und dreifache Apparate.

Laternbilderlager von ca. 30 000 Stück.

Ed. Liesegang, Düsseldorf.

Spezialhaus für Projektion.

Gegründet 1854.

Gegründet 1854.

Th. G. Fisher & Co. Verlagsbuchhandlung, Cassel (Hessen.)

Kürzlich erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Zhiere der Vorwelt

Mk. 48.—. Einzelne Tafeln roh Mk. 6.—, aufgezogen Mk. 9.—.

Wandtafeln vorweltlicher Tiere. Entworfen von Gustav Keller,
München. Mit Text von Professor Dr. Andreae, Direkt. d. Römer-
Museums, Hildesheim. Tafel 1: Seekuh. 2. Ichtyosaurus. 3. Mam-
muth. 4. Triceratops, Agathaumas. 5. Plesiosaurus. 6. Riesenhirsch.
Format jeder Tafel 102×136 cm. Preis roh: Mk. 30.—, aufgezogen
Mk. 48.—.

Kurzes Lehrbuch der Chemie.

An Fachlehrer Probe-Exemplar auf Wunsch kostenfrei.

Zunächst für den Unterricht an höh. Lehranstalten
von Professor Dr. E. Volckmar. Zweite vermehrte
Auflage mit 71 Abbild. Mk. 3.— geb., Mk. 2.40 broch.

Leuckart-Chun, Zoologische Wandtafeln.

aufgezogen Mk. 8.— mit Text.

II. 10 Amphibia, Gefäßsystem.
II. 11 Amphibia, Darmsystem.
Preis einer Tafel roh Mk. 5.—,

Schröder, chem.-techn. Wandtafeln.

Lief. (5 Tafeln) Mk. 10.— roh, Mk. 16.— aufgez. Einz. Taf. Mk. 2.50 roh, Mk. 4.— aufgez. mit Text.

Lf. VII. Tafel 31: Kohlenmeiler. 32: Koks-
ofen. 33: Eisenerz-Rostofen. 34: Eisen-
hochofen. 35: Winderhitzer. Preis der
Lief. (5 Tafeln) Mk. 10.— roh, Mk. 16.— aufgez. mit Text.

* * * Ausführliche illustrierte Kataloge auf Wunsch kostenfrei! * * *



Bestes galvanisch. Element
für physikal. und chem. Unterricht. Giebt dauernd starke Ströme. In Referenzen hoher Schulen. Ausführliche Broschüre gratis.

Umbreit & Matthes, Leipzig-Pl. 1.

Die Gestaltung des Raumes.

Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

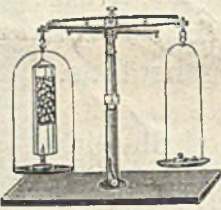
Von **Prof. F. Pietzker.**
Mit 10 Figuren im Text. — Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Soeben ist in der Herderschen Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Naturlehre

für den Unterricht an Mittelschulen und höheren Mädchenschulen sowie für den Selbstunterricht. Von **Dr. M. Wildermann,** Gymnasialdirektor. Mit 130 Abbildungen. Dritte, verbesserte und stark vermehrte Auflage. 8^o. (XII u. 144 S.) Mk. 1: geb. in Leder-Imitation Mk. 1.50.



Zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin liefert sämtliche Apparate

genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst

Richard Müller-Uri,

Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften. Braunschweig, Schleinitzstrasse 19.

Verlag

von Otto Salle in Berlin W. 30.

Das Wetter

Meteorologische Monatschrift für Gebildete aller Stände.

Herausgegeben von

Prof. Dr. R. Assmann,

Abteilungs-Vorsteher im Kgl. Preuss. Meteorologischen Institut.

18. Jahrgang.

Mit kolorierten Kartenbeilagen über die monatlichen Niederschläge nebst den Monats-Isobaren und -Isothermen.

Preis pro Jahrgang von 12 Heften 6 Mk.

Ein Probeheft gratis und franko.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

sieien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor **Dr. Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Mit einem Vorwort von **Dr. W. Krumme,** Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 3. Aufl. Preis 2 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 2. Aufl. Preis 1 M. 40 Pf.

Arithmetik.

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor **Dr. Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 4. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 2. Aufl. Preis 1 M. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 2. Aufl. geb. 2 M.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer **Dr. H. Servus** in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertia und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima). Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von **Dr. J. Heussi.** 15. verbesserte Aufl. Mit 152 Holzschnitten. Bearbeitet von **H. Weinert.** Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Grundbegriffe der Chemie.“ Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von **Dr. J. Heussi.** 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von **Dr. Leiber.** Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor **Dr. Wilh. Levin.** 3. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **H. Weinert.** 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 50 Pf.

Verlag von Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Die Geometrie der Lage.

Vorträge

von

Dr. Th. Reye,

ordentlicher Professor der Universität Strassburg i. Els.

Abth. I, 4. Aufl. 1899. Mit 90 Textfiguren. Brosch. 8 Mk. Geb. 10 Mk.

Abth. II, 3. Aufl. Mit 26 Textfiguren. Brosch. 9 Mk. Geb. 11 Mk.

Abth. III, 1. Aufl. Brosch. 6 Mk. Geb. 8 Mk.

Aus einigen Beurtheilungen dieses Werkes:

Die Vorzüge der Geometrie der Lage werden durch dies vortreffliche Lehrbuch in das deutlichste Licht gesetzt. Die Anordnung und Reichhaltigkeit des darin behandelten Stoffes ist geradezu mustergültig. Der Inhalt bietet eine so grosse Fülle an Aufgaben und Lehrsätzen, dass jeder aufmerksame Leser zu aufrichtiger Bewunderung für den geistvollen Verfasser und zu warmem Interesse für den Gegenstand hingerissen wird. Im Vergleich zu dem v. Staudt'schen Werke über die Geometrie der Lage ist das Buch von Reye um Vieles leichter verständlich.

L. Kiepert in Zeitschr. f. Archit. u. Ingenieurwesen. Hannover.

Man wird selten ein Buch finden, in welchem ein schwieriger Gegenstand so leicht und flüssig behandelt ist, wie hier. Gleich im Anfange werden Anregungen gegeben, welche sofort zeigen, wo das Ganze hinsteuert. Zahlreiche Figuren sind eingestreut und stets wird der Leser ermahnt, selbst zu construieren, um sich durch Übung und Anschauung zum Meister des Gegenstandes zu machen. Mit einem Worte: es handelt sich um ein Meisterwerk.

Direktor **Dr. Holzmüller** in Zeitschr. f. lateinlose höhere Schulen, 1899, No. 11.

Hierzu eine Beilage der Firma Carl Flemming, Verlag in Glogau, welche geneigter Beachtung empfohlen wird.