B 105

Jahrgang VIII. 1902. Nr. 1.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Wie bereits in Nummer 3 des abgelaufenen Jahrganges zur Kenntnis der Vereinsmitglieder gebracht worden ist, wird die elfte Hauptversammlung in der Pfingstwoche d. J. in Düsseldorf abgehalten werden.

Anmeldungen zu Vorträgen für die allgemeinen Sitzungen, wie für die Sitzungen der Fachabteilungen sind auch jetzt noch sehr willkommen. Wir bitten, sie an den Vorsitzenden des Ortsausschusses, Herrn Oberrealschul-Direktor Prof. Viehoff in Düsseldorf oder an den Hauptvorstand zu Händen von Prof. Pietzker (Nordhausen) zu richten.

Besonders erwünscht werden uns namentlich Meinungsäusserungen und Vorschläge hinsichtlich der Stellung des biologischen Unterrichts im Lehrplan der höheren Schulen sein, dieselbe wird einen wichtigen Verhandlungsgegenstand auf der bevorstehenden Versammlung bilden. Nur wenn die Vertreter der einzelnen Lehrfächer selbst immer wieder Anlass nehmen, ihre Anschauungen und Wünsche betreffs der Stellung und Ausgestaltung des Unterrichts in diesen Fächern im Vereinsorgan und namentlich auf den Vereinsversammlungen zum Ausdruck zu bringen, vermag der Verein seine Aufgabe, die in einer möglichst gleichmässigen Wahrnehmung der Interessen aller Zweige des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts besteht, voll zu lösen.

Auf einen regen Besuch der diesjährigen Versammlung hoffen wir umsomehr rechnen zu dürfen, als die gleichzeitig in Düsseldorf stattfindenden Ausstellungen der rheinisch-westfälischen Industrie und der gesamten deutschen Kunst diesen Besuch doppelt lohnend und anregungsreich zu machen versprechen.

Ferner werden die Vereinsmitglieder in Gemässheit des § 4 der Vereinssatzungen ersucht, den Beitrag für das laufende Jahr 1902, soweit es noch nicht geschehen ist, bis zum 1. April d. J. unter Benutzung des dieser Nummer beiliegenden Postanweisungsformulars an den Vereins-Schatzmeister (Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47) einzusenden. Die bis dahin nicht eingegangenen Beiträge werden im Laufe des nächsten Vierteljahrs durch Postnachnahme eingezogen werden (§ 5 der Satzungen). Die Mitgliedschaft des Vereins kann auch durch eine einmalige Zahlung von 45 *M.* erworben werden (siehe die Notiz am Kopfe d. Bl.).

Der Vereins-Vorstand.

Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik.

Vortrag in der mathematischen Sektion der XLVI. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Strassburg i. E.*)

von
Paul Natorp,
ordentl. Prof. d. Philosophie a. d. Univ. Marburg.

Ich hätte nicht den Mut, mich, als Nichtfachmann, an Mathematiker zu wenden, wenn ich nicht sachliche Gründe dafür zu erkennen glaubte, dass die Logik, die Erkenntniskritik enge Fühlung mit der Mathematik zu suchen hat; nicht um sie zu belehren, mehr, von ihr zu lernen, genauer, ihre Mitarbeit an einigen ihrer schwersten Aufgaben zu erbitten, die ohne die Mithilfe der Mathematik nicht zu bewältigen sind. Ich denke dabei nicht so sehr an einen besonderen Zweig unserer Wissenschaft, dem, nachdem er lange in aristotelischer Tradition erstarrt war, durch die mathematische Behandlung neues Leben zugeführt worden ist: die Syllogistik, sondern ich denke an die ganz allgemeine Tendenz der neueren Mathematik, sich zu einer rein logischen Gestaltung durchzuarbeiten, so dass die Berufung auf „Anschauung" mehr und mehr überflüssig wird. Die Konsequenz dieses Bestrebens muss dahin führen, dass man nicht zufrieden ist, in der Mathematik überhaupt, wie in jeder Wissenschaft, logisch zu verfahren, d. h. Widerspruch zu meiden und, was man behauptet, zu beweisen, sondern dass man sich die weitergehende Aufgabe stellt, auch als Voraussetzung nichts zuzulassen, was irgend noch aus fundamentaleren Voraussetzungen herleitbar, also noch nicht schlechthin einfach ist. Die Frage aber nach den letzten Voraussetzungen einer so fundamentalen Wissenschaft, wie die Mathematik, führt unmittelbar in das Herz der Philosophie als Erkenntniskritik. Nun lässt sich zwar verstehen, dass die Pfadfinder der Wissenschaft, die Entdecker und Eroberer neuer Provinzen mathematischer Erkenntnis, in der Wahl ihrer Voraussetzungen möglichst wenig beengt sein wollen; und sie sind es am wenigsten, wenn man ihnen überhaupt jede Voraussetzung gestattet, die nicht einen inneren Widerspruch einschliesst. Aber, neben der Aufgabe der Entwickelung der Konsequenzen aus gegebenen Voraussetzungen besteht jedenfalls noch die andere, des Zurückgehens auf die letzten erreichbaren Grundlagen. Für diese Aufgabe sollte vor allem der Lehrer der Mathematik Verständnis haben, denn lehren heisst, wissenschaftliche Wahrheit im Geiste des Lernenden vom ersten Anfang an aufbauen; es heisst, sie aus ersten, wenn es sein kann, den ersten, schlechthin fundamentalen Voraussetzungen entwickeln. Aber auch rein sachlich angesehen, ist die Frage nach den letzten Voraussetzungen nun einmal nicht zu umgehen. Aus dem Einfachen baut doch das Zusammengesetzte sich auf. Ist erwiesen, dass eine Voraussetzung einfacher ist, so steht es fortan nicht in unserer Wahl, sie zu Grunde zu legen oder die minder einfache; sie liegt eben zu Grunde, und die Theorie, die etwas anderes zu Grunde legt, verfährt unsachlich. Auch ist es unnötig, für diese Forderung sich erst auf den psychologischen oder biologischen Grund der Denkökonomie zu stützen. Jedenfalls wird am Ende der Rechnung die Wahrheit der Sache den Sieg behalten, also ist jedes Verfahren, das nicht der Wahrheit der Sache entspricht, gewiss auch eitle Kraftverschwendung. Aber, wenn es so ist, so ist die ökonomische Begründung ganz überflüssig; es genügt sich rein an die Sache zu halten.

Meine Absicht ist nun, Ihnen von einigen Versuchen in der eben bezeichneten Richtung Bericht zu geben, wie gesagt, nicht in der Meinung, Sie etwas sonderlich Neues zu lehren, mehr, von Ihrer Kritik zu lernen, jedenfalls aber, Ihr Interesse für dies Gebiet von Fragen anzuregen. Es handelt sich um die letzten gemeinsamen Grundlagen der Arithmetik und Geometrie, deren Bloslegung nichts geringeres bedeuten würde, als eine rein logische Deduktion des Raumes wie auch der Zeit. Die bezüglichen Untersuchungen sind niedergelegt in zwei Abhandlungen, die eine aus Anlass des internationalen philosophischen Kongresses bei der Pariser Weltausstellung, daher in französischer Sprache veröffentlicht: *Nombre, temps et espace**); die andere „Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik", im „Archiv für systematische Philosophie"**). Ich werde aber hier einen etwas anderen Weg einschlagen, da ich glaube, dass auf diesem neuen Wege der Beweisgang logisch strenger wird, obgleich er zu keinem anderen Ergebnis führt.

Ich ging dort so zu Werke, dass ich zunächst die Gesetze der Zahl herleitete aus den Grundgesetzen der „quantitativ-qualitativen Synthesis", d. h. aus den beiden, überhaupt fundamentalsten, von einander untrennbaren Denkverfahren, durch die wir, einerseits ein Mannigfaltiges als solches, andererseits jene Einheit eines Mannigfaltigen, die einen Denkinhalt konstituiert, gedanklich erzeugen. Es erwies sich, dass die Zeit, in ihren rein mathematischen Eigenschaften, mit Absehung dagegen von ihren existentiellen Bestimmungen (wie, dass zwei Zeiten sich in der Existenz ausschliessen, wenn die eine, dann nicht die andere in der Existenz gegeben ist u. dgl.) sich völlig deckt mit den Eigenschaften der stetigen homogenen eindimensionalen Zahlreihe. Beides deckt sich aber

*) S. S. 14.

*) In: *Bibliothèque du congrès international de philosophie.* Vol. I. (Paris, A. Colin. 1900), p. 342—389.
**) Bd. VII, 1901, S. 177—209 und 372—384.

ferner, wenn man wiederum von den existentiellen Eigenschaften des Raumes absieht (z. B. dass die Teile des Raumes sich in der Existenz bedingen und geben, dass sie koexistieren), auch mit dem Grundgebilde des Raumes, der geraden Linie. Es fragte sich nur noch, ob auch das einzige übrig bleibende Unterscheidungsmerkmal des Raumes, die Mehrdimensionalität, und ob etwa auch ein Gesetz für die Dimensionen des Raumes sich auf der gleichen Grundlage, nämlich der der reinen Zahl, ableiten lasse. Hier kam mir zu Hilfe einerseits der Begriff der gewöhnlichen komplexen Zahl, insbesondere in der Erweiterung zum Hamiltonschen Quaternionbegriff, andererseits die extensionale Algebra Grassmanns. Ich glaubte zwischen beiden eine wesentliche Verbindung, und damit zugleich die vermisste Grundlage zu finden für das Gesetz der räumlichen Dimensionen.

Ich glaube nun, wie gesagt, dass das Ergebnis stehen bleibt; dagegen finde ich es jetzt richtig, die Untersuchung etwas anders und zwar radikaler einzufädeln, indem ich zunächst so wenig von der Zahl wie vom Raume rede, sondern von Setzung (Denksetzung) schlechtweg, dann fortschreite zu Reihen von Setzungen, die sich nach bestimmten Gesetzen aufbauen und endlich in einem System abschliessen sollen. Es soll sich dann zeigen, dass die Grundeigenschaften und Gesetze einerseits der Zahl, andererseits der Zeit und des Raumes darin gegeben sind. Ich will versuchen, diesen neuen Gang meiner Beweisführung in aller Kürze zu skizzieren; freilich auf die Gefahr, dass die Beweisführung, der notwendigen Kürze halber, nicht in aller Absicht vollständig sein kann. Man wird aber auf Grund der beiden angegebenen Abhandlungen das Fehlende meist ergänzen können.

Es scheint sehr natürlich, auszugehen von der einfachen a b s o l u t e n Setzung (in der Zahl: der Einheit); dann erst überzugehen zur Setzung des Anderen zum Einen, als der einfachsten r e l a t i v e n Setzung; und auf diesen ersten Grundlagen dann weiter zu bauen. Allein dabei ergeben sich Schwierigkeiten. Es scheint dann nicht in ganz homogener logischer Entwickelung die Null und die negative Zahl hergeleitet werden zu können, und die Schwierigkeiten wachsen, wenn man zum Imaginären und Irrationalen fortzuschreiten versucht. Aber der wahrhaft letzte Grundbegriff des mathematischen und alles strengen Denkens überhaupt ist vielmehr die Relation. Es ist Täuschung, dass man die Termini voraus haben könnte, um erst aus ihrem Zusammentritt die Relation hervorgehen zu lassen. Mit Recht fragte bereits Plato: Waren die zwei etwa nicht zwei, bevor man sie zusammenthat? Mathematik hat überhaupt nichts zu thun, sie hat nur zu betrachten, und zwar zuletzt nichts anderes als Relationen. Die Relata sind erst gesetzt durch die Relation als deren Termini. Will man von der absoluten Setzung ausgehen, so entsteht, hinsichtlich der Zahl, sogleich die Schwierigkeit, was das Fundamentale ist, die Null oder die Eins. Für die Null, ohne die Eins, will sich überhaupt kein haltbarer Sinn ergeben, sie sagt den Ausgangspunkt, den letzten Bezugspunkt der Zahlsetzung, ein Ausgangspunkt aber will sich nicht denken lassen ohne das was davon ausgeht, ein Bezugspunkt nicht ohne etwas, das sich darauf bezieht. Setzt man als erstes die Eins, ohne die Beziehung zur Null darin mitdenken zu wollen, so ist zur Null und zur relativen Zahl nur durch Willkürdefinition, nicht in homogener logischer Weiterentwickelung zu gelangen. Also ist vielmehr auszugehen von der e i n f a c h e n r e l a t i v e n S e t z u n g, von der Setzung der einfachen Relation, im Zahlausdruck: 1 zu 0; wo 0 den letzten Bezugspunkt, 1 das erste in Bezug auf die Null gesetzte besagt. Das Merkmal der „Einfachheit“ dieser letzten Grundrelation, auf der alle weiteren in der Mathematik zu betrachtenden Relationen sich aufbauen sollen, besagt: dass der Inhalt des darin Gedachten erschöpfend und in strenger Identität bestimmt sei allein durch die angegebenen Elemente, die Eins und die Null, ohne irgend eines sonstigen, von aussen hinzukommenden Bestimmungsstücks zu bedürfen. Für unser streng genetisches Vorgehen sollte zwar der Ausschluss anderweitiger Bestimmungsstücke sich von selbst verstehen, aber ich betone ihn eben, um damit zu betonen, dass wir streng genetisch, aufbauend vorgehen, nicht eine, wie man sagt, „gegebene“ Mannigfaltigkeit oder dergleichen voraussetzen, um sie dann erst zu Begriff zu bringen.

Alle reinen Denksetzungen ohne Unterschied aber setzen nicht einzelnes, existentes, sondern allgemein bestehende, immer wiederum anzuwendende Relationen. So ist also unsere Grundrelation auch immer wiederum setzbar; so zwar, dass diese wiederholten Setzungen derselben (der Art nach derselben, numerisch aber verschiedenen) Relation gleichfalls zu einander in Relation gesetzt werden. Dies geschieht so, dass, nachdem erst die Eins in Beziehung auf die Null gesetzt war, nun ein neues, eine neue Eins gesetzt wird in Beziehung auf das vorige Endglied (Eins) als nunmehriges Ausgangsglied (also als relative Null). Ich erhalte so eine Reihe, die sich etwa schreiben lässt:

$$\begin{array}{llll} \overset{\frown}{0\;1} & & & \\ & \overset{\frown}{0\;1} & & \\ & & \overset{\frown}{0\;1} & \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \end{array}$$

oder, in einer Schreibung, die in den Zeichen selbst, nicht blos in der räumlichen Anordnung, erstens die Verschiedenheit und zweitens die Ordnung der einfachen Setzungen zum Ausdruck bringt:

$$\overset{\frown}{0\;1}\overset{\frown}{\;2}\overset{\frown}{\;3}\overset{\frown}{\ldots},$$

wo die übergeschriebenen Bogen die Immergleichheit der Relation jedes nachfolgenden zum vorhergehenden Glied der Reihe andeuten. Hat man sich das ein für allemal klar gemacht, so lässt man die Bogen weg und hat die sogenannte absolute Zahlreihe.

An dieser, die also nunmehr nichts als ein streng reines, d. h. nichts von aussen entnehmendes *Verfahren des Denkens* bedeutet — was Sie sonst unter Zahlen verstanden haben, bitte ich Sie für diese Stunde ganz zu vergessen — ist nun sehr vielerlei zu bemerken, wovon ich nur das für die weitere Deduktion Unerlässlichste ausführe; vor allem zwei Vergleichungsweisen für irgend welche Paare von Terminis:

1) 1 hat zu 3 gewissermassen gleiche Relation wie 2 zu 4 u. s. f., aber auch wie 3 zu 1, 4 zu 2, nämlich es erfordert gleichviel einfache Schritte, um vom einen Terminus zum anderen, und zwar immer wechselseitig, zu gelangen. Diese Identität definiere ich als *Abstand* oder numerischen Wert des Unterschieds.

2) 1, 2. 3 . . . haben, ohne Unterschied des Abstands, der Art nach gleiche Relation gegen 0 wie 2, 3, 4 . . . gegen 1 oder 3, 4, 5 . . . gegen 2, kurz jedes in der Reihe nachfolgende zu jedem vorausgehenden Glied, andererseits jedes vorausgehende zu jedem nachfolgenden unter sich der Art nach dieselbe Relation; welche beiden Relationsarten dagegen unter einander sich ausschliessen. Diese Identität oder Verschiedenheit definiere ich als die der *Richtung*.

Es ist, wie man sieht, der Abstand gewissermassen unabhängig von der Richtung und die Richtung vom Abstand; beide Momente sind, obwohl eins nie ohne das andere gegeben und im Aufbau unserer Reihe gleich ursprünglich begründet, doch von einander begrifflich verschieden und nicht eins aufs andere reduzierbar.

Da aber die ursprüngliche Relation, Eins gegen Null, schlechthin einfach, die ganze Reihe aber gebildet ist durch blosse, reine, identische Wiederholung dieser selben Grundrelation, so ist bisher überhaupt keine Mehrheit der Relationsart oder Richtung gegeben; wenn man nämlich nicht die beiden sich gegenseitig gebenden Beziehungsweisen, Eins gegen Null und Null gegen Eins, als zwei Richtungen bezeichnet; in geläufiger Sprache sind es vielmehr die beiden „Sinne" *einer* Richtung, Plus und Minus. Somit ist die Richtung der ganzen Reihe nur einzig (obwohl doppelsinnig), und als solche ins Unendliche identisch fortbestehend. Ins Unendliche, denn ein Zurücklaufen der Reihe in sich selbst ist durch das Gesetz ihres Aufbaus so sicher ausgeschlossen, wie die Fortsetzung der Zahlreihe nicht zu Null zurückführen kann. Ein Zurücklaufen der Reihe in sich selbst besagt Aenderung der Richtung, und die stetige Aenderung der Richtung führt allerdings, wie sich später erweisen wird, notwendig in die Grundrichtung zurück. Aber ehe man Richtungsänderung einführt, muss man Identität der Richtung setzen. Es genügt also nicht, wenn man streng genetisch vorgehen will, zu sagen, der Uebergang von B nach C sei ebenso zu vollziehen, wie von A nach B, womit er gewiss notwendig nur unbegrenzt, nicht unendlich würde*), sondern, da der Uebergang schlechthin einfach gesetzt werden muss, wenn er fundamentale Bedeutung haben soll, so muss er auch als schlechthin einfacher fortbestehen, dann aber nicht blos unbegrenzt, sondern unendlich, denn unbegrenzt endlich könnte er nur werden durch kontinuierliche Aenderung, die unweigerlich anderweitige Bestimmungsstücke fordern, nicht durch die einfache Setzung der Termini A und B eindeutig gesetzt sein würde. Aus demselben letzten Grunde kann die projektivische Distanzdefinition nach *Cayley* und *Klein*, so wertvoll sie für den Zweck, für den sie eingeführt wurde, ohne Frage ist, als logisch fundamental nicht gelten**).

Auf diese Betrachtung gründe ich den Begriff der von uns konstruierten Reihe als *gerader* Reihe, welcher Begriff des Geraden, wie Sie sehen, jetzt absolute Bedeutung hat, nicht blos eine Art von Reihen unter verschiedenen an sich mit gleichem Recht wählbaren, sondern wahllos die einzige mögliche Beschaffenheit einer Reihe, die fundamental sein soll, ausdrückt. Geradheit sagt in der That, dass durch Anfangs- und Endpunkt und nichts ausserdem der Weg als einziger bestimmt sei. Ein Weg ist auch bestimmt auf der Kugeloberfläche, aber schon nicht in allen Fällen, nämlich nicht, wenn die beiden Punkte Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind, und, worauf hier mehr ankommt, nicht ohne anderweitige Bestimmungsstücke, nämlich die, welche die Kugeloberfläche selbst definieren. Ebenso verhält es sich im endlichen Raum. Damit ist nicht gesagt, dass der allgemeine Raumbegriff zu verwerfen, wohl aber, dass er nicht, weil allgemein, auch logisch fundamental sei.

---

*) *Max Simon*, Zu den Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie. (Prgr. 1891, Nr. 512). S. 12.

**) Darüber s. die zweite der zitierten Abhandlungen, Arch. f. syst. Philos. VII, S. 202 ff.

Die Ableitung der Rechnungsarten sei nur kurz angedeutet*). Der Aufbau unserer Reihe ergiebt ohne weiteres, dass 3 zu 2, 2 zu 1, 1 zu 0 die gleiche Stellung hat; in welcher Aussage ich zusammenfasse, dass 1) der Abstand, die Schrittzahl, die vom einen zum anderen Glied führt, die gleiche, 2) die Vergleichungsrichtung die nämliche ist. Ebenso hat 2 zu 3, 1 zu 2, 0 zu 1 die gleiche Stellung. Dies sagt die Subtraktionsgleichung, die, wie man sieht, jetzt sofort die beiden Fälle umfasst, dass der Subtrahend „grösser", und dass er „kleiner" als der Minuend ist. Die Additionsgleichung ist nur ein anderer Ausdruck desselben Sachverhalts, keineswegs etwa fundamentaler. $2 + 1 = 3$ heisst: von 2 ein Schritt weiter (in der Plusrichtung) führt auf 3, was nur in anderen Worten sagt: 3 hat gegen 2 dieselbe Stellung (d. h. den gleichen Abstand in gleicher Richtung) wie 1 gegen 0. Das Stellverhältnis ist der Grundbegriff, dieses aber kommt direkt zum Ausdruck in der Subtraktionsgleichung.

Ebenso lege ich der multiplikativen Beziehung die andere Art des Verhältnisses, das metrische, wie ich es nenne, zu Grunde. Es stützt sich auf die Erzeugung der Reihe durch Wiederholung immer derselben Grundrelation. Ich kann nun auch die gleichen Wiederholungen wiederholen, z. B. 2 als neue Einheit, als einen Zweier setzen und dann die neue Reihe bilden: zwei Zweier, drei Zweier u. s. f. Unter dieser Betrachtung ist, was 2 gegenüber 1, 4 gegenüber 2 u. s. f., und, was 1 gegenüber 2, 2 gegenüber 4 u. s. f. Auch hier bietet das Ausgehen von der Verhältnisbetrachtung**) den Vorteil, dass $\frac{1}{n}$ als reziproker Wert von $\frac{n}{1}$ dadurch ohne weiteres gegeben ist. Wollen Sie aber beachten, wie dies mit unserem logischen Ausgangspunkt übereinstimmt: die relative Setzung bestätigt sich auch in der Durchführung überall als die fundamentale. Es ist nichts als ein falscher Empirismus, wenn man von der absoluten Setzung ausgehen zu müssen meint. Eins ist kein absoluter Begriff, Eins kann ein Sandkorn oder eine Welt, ein Hundert oder eine Billion bedeuten; also ist es gar kein Problem, wieso die Eins teilbar sei, sei es in Hundert oder in Billion oder worein Sie wollen; während, wer von der Eins als einem Absoluten ausgeht, nicht anders als durch Willkürdefinition auch nur zu $\frac{1}{2}$ kommen kann.

Eine gewisse Schwierigkeit bereitet noch, wie ich offen gestehe, das Irrationale. Ich glaubte (in der ersten Abhandlung) der Sache Herr zu werden, indem ich erst hypothetisch Reihen von verschiedener Einheit (sagen wir n und ν), aber identischer Richtung von einem gemeinsamen Nullpunkt ausgehen liess, jede für sich rational konstruiert, aber zu einander irrational; und indem ich dann (wesentlich nach Dedekind) zeigte, wie beide, nicht durch Gleichungen, aber durch Systeme von Ungleichungen, sich so zu einander in Beziehung setzen lassen, dass von jedem Werte der n-Reihe bestimmt werden kann, ob er diesseits oder jenseits von ν oder irgend einem Werte der ν-Reihe liegt und umgekehrt, sodass die Begriffe grösser und kleiner und alles, was darauf beruht, auf die Vergleichung zwischen n-Werten und ν-Werten anwendbar werden. Aber es hilft einmal in der Mathematik nichts, sich etwas weiszumachen, also will ich lieber gleich offen eingestehen, dass ich hierbei jetzt eine fundamentale Schwierigkeit empfinde. Zählen heisst in eine Reihe ordnen, auch sollen ja die irrationalen Werte mit den rationalen in eine Reihe fallen; die Einheit einer einzigen Reihe aber kann nur einzig, nicht mehrfach angesetzt werden, wenn sie doch rein und fundamental, nicht durch Willkürdefinition gesetzt werden soll. Ausserdem stört, dass die irrationalen Werte sich nicht in einer erschöpfenden positiven Definition geben lassen; man kann definieren die algebraischen Irrationalen und gewisse Klassen von transcendenten, aber nicht die irrationalen Werte überhaupt. Wie also habe ich überhaupt die Allheit der Werte eines gegebenen Intervalls, z. B. 0 bis 1, die ich doch zu haben behaupte, wenn ich aussage, dass eine Grösse x dies Intervall stetig durchlaufe? Nur eins ist mir in dieser Erwägung stets klar geblieben und hat sich immer mehr befestigt, dass diese Allheit, welche die Stetigkeit besagt, überhaupt nicht setzbar wäre aus rein metrischen Erwägungen, sondern dass sie den Begriff der Richtungseinheit zu Grunde legt und zu Grunde legen muss. Ich entscheide jetzt nicht, ob dies das Problem etwa schon löst, ich behaupte aber, dass es ein Moment ist, ohne dessen Beachtung die Lösung nicht gelingen kann. Es giebt doch so ein positives Merkmal, welches nicht blos alle rationalen Setzungen eines Intervalls umfasst, sondern die beliebig zu verengenden Lücken zwischen diesen selbst wie etwas vorhandenes zu denken erlaubt und fordert, eben das Merkmal der Beziehungsrichtung, welches, wie zu Anfang festgestellt wurde, fortbesteht, unabhängig von der metrischen Relation. Weil alle rationalen Setzungen (Zahlen in der Zahlreihe, Punkte in der Geraden) in einer und derselben Richtung (Nullbeziehung) gesetzt sind, so lässt

*) Näheres *„Nombre, temps et espace"*, § 2.

**) Worin ich besonders bestärkt worden bin durch M. Simons anregungsreiche Bearbeitung der Methodik des Mathematikunterrichts in Baumeisters Handbuch.

sich, eben da sie einen stetigen Zusammenhang nicht ergeben, die rational nicht besetzte oder zu besetzende Lücke als für neue Setzungen verfügbar gegeben ansehen, und das ermöglicht auch die irrationalen Werte zu setzen, insofern für diese ein Verhältnis des mehr und weniger zu den rationalen auf die angegebene Weise (durch ein System von Ungleichungen) definierbar ist.

Was hier nun auch in der logischen Ableitung noch lückenhaft ist oder scheint, es hilft nichts, zur Ergänzung der Lücke sich auf die Anschauung zu berufen. Anschauung vermag ein für allemal nicht dem Denken etwas zu geben, was nicht das Denken aus seinen eignen Mitteln darstellen kann. Das Angeschaute muss gedacht werden können, wenn es erkannt werden soll. Auch die Erzeugung der Geraden durch „Bewegung" eines Punktes bringt die Stetigkeit nicht anders als im eben erläuterten Sinne zu wege; denn Bewegung ist in der Geometrie*) „nur ein anderer Ausdruck für Gesamtheit aller Lagen"; fragt man aber, durch welche Definition diese Allheit der Lagen gegeben sei, so kommt man genau auf die eben angestellte Betrachtung zurück.

Angenommen aber, wir hätten die stetige homogene eindimensionale Reihe, so haben wir damit, wie leicht zu ersehen, nicht nur die reelle Zahlreihe, sondern ebenso die Zeitreihe und die gerade Linie, hinsichtlich ihrer rein mathematischen Eigenschaften; beide unterscheiden sich in der That von der Zahlreihe wie untereinander nur durch existentielle, nicht durch mathematische Bestimmungen. Es bleibt dann nur übrig, auch die Mehrheit der Dimensionen des Raumes abzuleiten, und womöglich ein Gesetz für diese zu finden. Hier gab, wie schon angedeutet, die Ausdehnungslehre einerseits, die Quaternionenlehre andererseits den entscheidenden Wink. Aber weder G r a s s m a n n noch H a m i l t o n hat sich die Aufgabe gestellt, die Mehrheit der Dimensionen radikal abzuleiten, beide nahmen sie vielmehr als gegeben. Ich ging nun hier früher aus von der Voraussetzung der Möglichkeit mehrerer verschieden gerichteter, aber in einem gemeinsamen Punkte, den man als Nullpunkt nehmen kann, zusammenhängender Reihen, und stellte dann das Gesetz auf für die Konstitution eines stetigen Zusammenhanges der von einem und demselben Punkte aus möglichen Richtungen. Diese Ableitung dürfte richtig bleiben in dem was sie positiv enthält, aber sie lässt eine Lücke, indem wieder nicht ohne weiteres einleuchtet, inwiefern überhaupt etwas ausserhalb der Grundreihe setzbar sei. Das will besonders dann nicht einleuchten, wenn man sogleich von der Zahl ausgeht (wie ich früher that). Zählen heisst, wie gesagt, in e i n e Reihe ordnen, also gäbe es insoweit nichts ausser der einen Reihe.

Indessen diese Lücke liess sich, sobald sie einmal erkannt war, auch leicht schliessen. Unsere Reihe bedeutet ja nicht ein Ding, sondern ein Verfahren; ich kann also nicht blos e i n e solche Reihe bilden, sondern eine Reihe von Reihen, jede von derselben einfachen Struktur, und alle verbunden durch eine Beziehung völlig gleicher Art, wie die Einzelglieder in der Grundreihe verbunden sind. Dieser Reihe zweiter Ordnung kommen dann alle dieselben Merkmale zu, wie der Grundreihe, mit dem einzigen Unterschied, dass die Glieder jetzt Reihen, nicht Einzelsetzungen sind. Weiter lässt sich dann auch eine Reihe von Reihen von Reihen bilden u. s. f. So haben wir die Dimensionen vor den Richtungen, und zwar unendliche. Aber damit ist nun auch die zuvor vermisste Grundlage gegeben für die Ableitung der Richtungen. Bisher hatten wir nur die e i n e Richtung der Grundreihe mit ihren zwei Sinnen, welche in allen Reihen, da sie von genau identischer Struktur sein sollen, als dieselbe wiederkehrt (Begriff der Parallelen). Es ist aber für die weitere Ableitung geeigneter, auch die zwei Sinne einer Richtung Richtungen zu nennen; beide, Richtungen wie Sinne, sagen ja nur verschiedene Relationsarten, Arten der Nullbeziehung, unter denen die wie Plus und Minus sich verhaltenden nur dadurch ausgezeichnet sind, dass die eine unmittelbar mit der andern gegeben ist, indem man nur die Termini zu vertauschen hat. Und zwar ist die Relation von Plus zu Minus, für sich genommen, dieselbe, wie die von Minus zu Plus; man kann daher nicht sagen, eine von beiden Richtungen sei ursprünglicher, die andre daraus erst hergeleitet; das Ursprüngliche ist vielmehr die Relation von Plus und Minus oder von Minus und Plus, und diese ist schon gegeben mit der Grundrelation, auf der wir bisher alles sich aufbauen sahen, der Relation 1 zu 0, welche die Relation 0 zu 1 und die Relation dieser beiden Relationsarten unmittelbar einschliesst. Man kann nun durch Wiederholung dieser immer gleichen Relation, Plus zu Minus oder Minus zu Plus, eine Reihe bilden: $+ \frown - \frown + \frown - \frown \ldots$, oder $-^0, -^1, -^2 \ldots$, wo die gradzahlig bezeichneten Glieder den $+$ der ersten Reihe, die ungradzahlig bezeichneten den $-$ entsprechen. So verhält es sich innerhalb der Grundreihe, ebenso in jeder eindimensionalen geraden Reihe. Führt man aber mehrere Dimensionen ein, so entstehen damit auch mehr Richtungen in folgender Weise. In allen gleich konstruierten Reihen findet sich das Glied 0, das Glied 1 u. s. f. Unterscheide ich die entsprechenden Glieder der verschiedenen Reihen

*) Nach den Worten M a x S i m o n s. Zu d. Grundl. d. nichteukl. Geom., S. 12.

durch Indices, so kann ich z. B. die Reihe bilden $0_0\, 0_1\, 0_2 \ldots$ (d. h. die Null der Reihe Null, der Reihe Eins u. s. f.), welche mit der Grundreihe ($0_0\, 1_0\, 2_0 \ldots$) das Glied 0_0 gemein hat. Auch die erstere Reihe ist gerade, denn da die übrigens in aller Hinsicht identischen Reihen zugleich in derselben einfachen Relation zu einander geordnet sein sollen, wie die Glieder der Grundreihe, so kann auch zwischen den identischen Gliedern sämtlicher Reihen nur dieselbe einfache Relation, die wir als Geradheit definiert haben, stattfinden. Diese Reihe hat also auch für sich eine Plus- und Minusrichtung; es fragt sich, wie diese sich zur Plus- und Minusrichtung der Grundreihe verhalten. Antwort, beide müssen sich zu beiden gleich verhalten, d. h. es ist die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Grundreihe durch die Querreihe, ebenso die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Querreihe durch die Grundreihe halbiert zu denken. Denn es ist, wie stets in genetischer Ableitung, der Fall der Gleichheit zu Grunde zu legen; eine ungleiche Beziehung würde anderweitige Bestimmungsstücke fordern, die durch das genetische Prinzip der Ableitung ausgeschlossen sind. Wir haben also in unsere Reihe $-^0 -^1 -^2 \ldots$ jetzt schon die Glieder $-^{1/2} -^{3/2} \ldots$ einzufügen. Es lässt sich unschwer beweisen, dass die erstere Reihe, also auch die so vervollständigte, ganz als Reihe der Potenzen von -1 oder $-n$ behandelt werden kann, so dass die Senkrechte, die durch unsere Querreihe dargestellt wird, durch die gewöhnliche Imaginärzahl auszudrücken ist, nicht in einer blossen Analogie oder Metapher, sondern zufolge der Konstruktion, in der überhaupt die Senkrechte, und andererseits die Imaginärzahl, sich uns erzeugt hat. Beide drücken sich so zwingend gegenseitig aus, wie die gerade Linie die eindimensionale, homogene Zahlreihe und umgekehrt. Ebenfalls leicht lässt sich die weitere Winkelteilung ableiten, die mit demselben logischen Zwange der beliebigen Radizierung der Einheit entspricht. Sie werden auf diesen Grundlagen leicht die entscheidenden Sätze der Planimetrie ableiten können, was zu verfolgen ich Ihrem Interesse und Ihrer Musse überlasse. Ich habe den Weg eine Strecke weit verfolgt und bin nirgends auf solche Schwierigkeiten gestossen, die etwa dieser Art der Ableitung eigentümlich wären.

Nur eins bleibt noch zu entscheiden, nämlich die Frage, ob auf den nachgewiesenen Grundlagen auch ein Gesetz sich ableiten lässt für die Dimensionen des Raumes. Den Mathematikern ist zwar der allgemeine Begriff von Räumen beliebiger Dimensionenzahl und verschiedener Charakteristik so in Fleisch und Blut übergegangen, dass ihnen oft jedes Verständnis abgeht für den Euklidischen, Newtonschen und Kantschen Begriff d e s Raumes, welchem das Merkmal der Einzigkeit wesentlich ist. Das hat einen begreiflichen Grund: dies Merkmal der Einzigkeit ist in der That nicht mehr von rein mathematischer Begründung, sondern es ist gefordert durch den Begriff der E x i s t e n z, der überhaupt nichts weiter als Bestimmtheit in einziger Weise, im Unterschied von der unendlichen Vielheit offener Möglichkeiten, besagt. Dieser aber fordert sie in der That bedingungslos. Es ist kein Ort des Existierens eindeutig bestimmt, wenn nicht der Raum selbst, der ja nur das System der Bedingungen der Ortsbestimmung besagt, eindeutig bestimmt ist. Daraus entsteht aber, obwohl die Forderung selbst keine rein mathematische ist, doch die Aufgabe für die Mathematik, nachzuweisen, aus welchen Voraussetzungen diese verlangte Geschlossenheit und damit Einzigkeit des Systems der Ortsbestimmung möglich ist. In unserem nachgewiesenen System ist nun zwar Zusammenhang genug, aber kein geschlossener, da wir eine Unendlichkeit nicht nur innerhalb jeder Einzelreihe, auch nicht nur eine unendliche Reihe von Reihen, sondern eine Unendlichkeit von Dimensionen, d. h. Reihen von Reihen von Reihen u. s. f. in infinitum, zuzulassen uns genötigt fanden. Die Unendlichkeit der Dimensionen aber schliesst die Bestimmbarkeit eines Ortes aus. Es fragt sich also jetzt nicht mehr, wie weit ein raumartiger Zusammenhang sich überhaupt ausdehnen lasse, sondern welche Voraussetzungen einerseits notwendig, andrerseits hinreichend sind, einen durchgängig stetigen Zusammenhang herzustellen. Es lässt sich aber beweisen, dass dazu drei Dimensionen notwendig und zugleich hinreichend sind. Es sei durch eine unendliche Gerade XX' die Grundreihe repräsentiert, und es bezeichne in ihr O den Nullpunkt, OA die Einheit in der Grundrichtung, so kann ich von dieser in die Gegenrichtung OA', so lange ich in der Geraden XX' verbleibe, nicht stetig, sondern nur sprungweise übergehen. Soll ein stetiger Zusammenhang hergestellt werden, so muss ich den Strahl OA drehen,*) brauche also die Ebene, etwa XZ. Die Drehung ist nun wiederum in doppeltem Sinne möglich, aus der Lage OA etwa nach links über OP oder nach rechts über OP' in OA'. Die Linksdrehung des Strahls (im Sinne AP) kann nun in die Rechtsdrehung (im Sinne AP') wiederum nicht stetig übergeführt werden, so lange ich in der Ebene verbleibe, sondern ich muss die Ebene drehen im Raume. Diese Drehung ist wiederum zweifach möglich, von

*) An der Einführung des Begriffs der Drehung wird man keinen Anstoss nehmen nach dem was oben (S. 6) allgemein über den Begriff der Bewegung in der Geometrie bemerkt worden ist.

OP etwa nach vorn über OQ oder nach hinten über OQ' in OP'. Die Vorwärtsdrehung der Ebene (im Sinne PQ) kann nun aber in die Rückwärtsdrehung (im Sinne PQ') stetig übergeführt werden ohne Einführung einer weiteren Dimension, nämlich durch Drehung der Ebene XZ nicht um die X-Achse, sondern um die Z-Achse; es wird dann aus der Vorwärtsdrehung um die X-Achse die Rückwärtsdrehung, PQP' kommt in die Lage $PQ'P'$. Die Drehung um die Z-Achse kann wiederum zweifach geschehen, aber von dieser doppelten Drehung gilt dasselbe wie vorher von der doppelten Drehung um die X-Achse. — Auf eine ähnliche, gelegentliche Bemerkung von Felix Klein (Math. Ann. XXXVII, S. 565) hat mich H. Grassmann d. j. (brieflich) aufmerksam gemacht; Klein geht aber von einem ganz andern Gesichtspunkt aus und hat sich die Frage im hier gemeinten Sinne gar nicht gestellt. Er bestätigt indessen doch indirekt die Richtigkeit des Resultats: dass drei Dimensionen notwendig und hinreichend sind, um einen durchgängig stetigen Zusammenhang des Raumes herzustellen. *)

Ich betone noch, obwohl es überflüssig scheinen mag, dass dieser Beweis den Begriff von mehr-als-dreidimensionalen Räumen keineswegs anficht. Aber es fragt sich, wenn ein geschlossenes System gefordert ist (und es ist gefordert, obwohl nicht aus mathematischem Gesichtspunkt, sondern durch den Begriff der Existenz, mit dem die Mathematik als solche nichts zu schaffen hat), wie diese Geschlossenheit des Systems mathematisch zu begründen ist. Wenn auf die angegebene Weise, und wenn nicht auf eine andere, so ist damit allerdings die Dreidimensionalität des Raumes der Existenz erwiesen. In jedem Falle ist die Frage auf keinem denkbaren Wege empirisch zu entscheiden, sondern sie ist ganz und gar eine Frage der Konstruktion, also auch rein aus Gründen der Konstruktion zu entscheiden.

Auf solche Weise stände denn reine Mathematik da „als ein Koloss“, wie Kant sagt, „zum Beweise durch alleinige reine Vernunft erweiterter Erkenntnis“, d. h. nach unseren Begriffen, als typisches Beispiel einer auf der alleinigen Grundlage reiner Denksetzungen streng genetisch aufgebauten Wissenschaft. Wenigstens ist dies das ideale Ziel, dem unsere Deduktion von weitem zustrebt. Jede Kritik aber wird willkommen sein, die es erleichtert, auf dem Wege zu diesem „unendlich fernen“ Ziel einen noch so kleinen Schritt vorwärts zu thun.

*) Dagegen finde ich den Grundgedanken der obigen Deduktion fast vollständig wieder in Pietzker's „Gestaltung des Raumes“ (Brschwg., O. Salle, 1891), S. 64 ff., obgleich die These dort anders lautet und die Fassung des Beweises von einer gewissen Dunkelheit nicht freizusprechen ist, die ihm bei manchen Lesern den Eingang erschwert haben mag. Ich hoffe, dass, wer von der Richtigkeit obiger Deduktion sich überzeugt, das Verdienst jener um zehn Jahre älteren Abhandlung nicht verkennen werde.

Näherungsweise Auflösung von numerischen höheren Gleichungen.

Von Prof. Dr. Richard Heger (Dresden).

Die Aufgabensammlungen zeigen, dass der näherungsweisen Auflösung höherer Gleichungen in den Schulen nur wenig Beachtung geschenkt wird. Sehr mit Unrecht; denn wenn man die zur Lösung gebrachten Gleichungen auf die vier ersten Grade der algebraischen, auf die binomischen höheren und auf die Gleichungen einschränkt, die sich auf diese zurückführen lassen, so werden der Bethätigung des Anfängers viel zu enge Grenzen gezogen, — während man ihm doch ohne erhebliche Belastung Mittel gewähren kann, numerische Gleichungen ohne jede Beschränkung mit geringem Aufwand von Zeit und Mühe so genau aufzulösen, als es die Benutzung der Logarithmen gestattet. Wenn man dieses Ziel in zweckmässiger Weise erreichen will, muss man davon absehen, die annäherungsweise Auflösung mit der äussersten wissenschaftlichen Strenge zu begründen.

Keinem praktischen Lehrer aber wird es einfallen, der Unterweisung im Rechnen mit Logarithmen eine vollständige Theorie des Logarithmus vorauszuschicken; auch wird sich kein Lehrer einen Vorwurf daraus machen, mit den Winkelfunktionen rechnen zu lassen, ohne vorher gezeigt zu haben, wie ihre Berechnung erfolgt, oder die goniometrischen Formeln über den ersten Quadranten hinaus zu benutzen, ohne eine ganz vollständige, einwandsfreie, den Winkel nicht beschränkende Begründung der Goniometrie gegeben zu haben. Wenn man selbst im Hochschulunterrichte heutzutage aus gutem Grunde davon wieder abgekommen ist, den Eintritt in die Differentialrechnung durch scharfsinnige, weit ausgesponnene Untersuchungen über Stetigkeit, über differenzierbare und nicht differenzierbare Funktionen und dergleichen abstrakte und schwierige Dinge für den Anfänger beschwerlich zu machen, — warum wollen da wir auf einer niederen Stufe des mathematischen Unterrichts unsern Schülern höchst brauchbare, auf ein überaus reiches Gebiet von Aufgaben anwendbare Mittel und Wege nur deswegen vorenthalten, weil wir ihnen nicht über alle dabei auftauchenden Fragen genügende Auskunft erteilen können?

Langjährige Erfahrung hat mir gezeigt, wie gern die Primaner auf eine praktisch zurechtgemachte Näherungsrechnung eingehen, und wie gerade mathematisch weniger gut begabte Schüler sich mit Eifer eines Mittels bemächtigen, das die Grenzen ihres Könnens nach einer besonders wichtigen Seite hin auf einmal so bedeutend hinausrückt.

Im Anhange zu meinen fünfstelligen Logarithmen *) habe ich in Kürze auseinandergesetzt, wie der Gegenstand in der Schule zweckmässig zu behandeln sein dürfte; vielleicht ist es dem Leserkreis der „Unterrichtsblätter“ nicht unwillkommen, hier etwas Ausführlicherem darüber zu begegnen.

Das Näherungsverfahren zur Berechnung realer

*) Heger, fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln, B. G. Teubner 1900.

Wurzeln beruht auf folgendem Satze: Wenn eine Funktion f (x) zwischen den Werten a und b der Veränderlichen beständig wächst oder beständig abnimmt, und wenn dabei f (a) und f(b) ungleiche Vorzeichen haben, so liegt zwischen a und b eine und nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = o$.

1. Allgemeines Einschaltungsverfahren. Man schaltet zwischen a und b einen mittleren Wert c ein, durch Beachtung des Zeichenwechsels drückt man damit den Spielraum der gesuchten Wurzel auf die Hälfte herab. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man Aufschluss über den Rang der höchsten bedeutenden Ziffer; durch höchstens vier weitere Einschaltungen erfährt man diese Ziffer selbst, und durch höchstens je vier fernere Einschaltungen der Reihe nach die übrigen Ziffern. Bei der Einübung dieses umständlichen Verfahrens wird man sich mit der Berechnung der höchsten drei Ziffern begnügen, und betreffs grösserer Genauigkeit auf spätere Mitteilungen verweisen.

Beispiel. Bis auf fünf Stellen durchgerechnet.

$$f(x) = x^5 - 20x^4 - 350x^3 - 900000 = 0.$$

x	0	20	40	30
f (x)	-9.10^5	-37.10^5	$+279.10^5$	$-22{,}5.10^5$

Aus f (20) und f (40) folgt eine Wurzel zwischen 20 und 40; aus f (30) folgt, dass sie zwischen 30 und 40 liegt. Da f (30) der Null viel näher liegt als f (40), so wird auch der Anfänger nun eine Zahl einschalten, die dicht bei 30 liegt, etwa 31. Die weitere Rechnung, die ich, wie in den folgenden Beispielen, vollständig mitteile, um zu zeigen, wie gross (oder bez. wie gering) der Aufwand an Raum und Mühe ist, würde nun folgendes ergeben: dabei werden die beständigen Logarithmen von 350 und 20 an die Ränder eines Papierstreifens geschrieben, und dieser Streifen an die betreffenden Logarithmen von x^3 und x^4 angelegt, wodurch Raum und Zeit erspart werden kann.

x =	31	32	31,8	31,9	31,92	31,923
log x	1.49136	1 50515	1.50243	1.50379	1.50406	1.50410
log x^3	4.47408	4.51545	4.50729	4.51137	4.51218	4.51230
log x^4	5.96544	6.02060	6.00972	6.01516	6.01624	6.01640
log x^5	7.45680	7.52575	7.51215	7.51895	7.52030	7.52050
log 350 x^3	7.01815	7 05952	7.05136	7.05544	7.05625	7.05637
log 20 x^4	7.26844	7.32360	7.31272	7.31816	7.31924	7.31940
350 x^3	10427.10^3	11469.10^3	11255.10^3	$11361\ 10^8$	11383.10^3	11386.10^3
20 x^4	18544.10^3	21076.10^3	20545.10^3	20805.10^3	20857.10^3	20864.10^3
Summe	28971.10^3	32536.10^3	31800.10^3	32166.10^3	32240.10^3	32250.10^3
$9.10^5 + ..$	29871.10^3	33436.10^3	32700.10^3	33066.10^3	33140.10^3	33150.10^3
x^5	28629.10^3	33555.10^3	32520.10^3	33033.10^3	33136.10^3	33152.10^3
f (x)	-1242.10^3	$+119.10^3$	-180.10^3	-33.10^3	-4.10^3	$+2.10^3$

Auf fünf Stellen genau: $x = 31{,}922$

2. Geradlinige Einschaltung (E. nach der Sehne). Unter der gemachten Voraussetzung kann man das Bild der Funktion f (x) zwischen den Grundstrecken (Abscissen) a und b mit einem gewissen Grade der Annäherung durch seine Sehne ersetzen. Ist c die Grundstrecke des Schnittpunktes der Sehne mit der Grundlinie (Abscissenachse), so berechnet man f (c), beachtet, an welcher Stelle der Folge f (a), f (c), f (b) der Zeichenwechsel stattgefunden hat, und ersetzt das Funktionsbild zwischen den betreffenden Grundstrecken wieder durch die Sehne usf., bis die letzte Genauigkeit erreicht ist. Hierbei wird man auf die Anwendung dieser Schaltweise bei den Logarithmentafeln hinweisen, sowie darauf, dass jede praktisch gut brauchbare Tafel über den Verlauf einer Funktion immer so ausführlich berechnet sein sollte, dass man die in der Tafel nicht enthaltenen Funktionswerte nach der Sehne einschalten kann.

Beispiel. $x^4 - 523{,}7x^3 + 1640{,}5x^2 + 560000 = 0.$ Die x der grössten und kleinsten Werte von f (x) bestimmen sich aus

$$4x^3 - 1571{,}1x^2 + 3281{,}0x = 0$$

zu $x_1 = 0,\ x_2 = +2{,}1,\ x_3 = +390{,}7.$

Aus $f(x_1) = 560000$, $f(x_2) = 562404$. $f(10) = 210350$ erkennt man, dass f (x) von x_1 bis x_2 schwach wächst, von da bis x_3 abnimmt, und dann fortgesetzt bis ins Unendliche wächst. Handelt es sich um die zwischen x_2 und x_3 liegende reale Wurzel, so wird man nicht sofort die zwischen x_2 und x_3 enthaltenen Bogen durch die Sehne ersetzen, sondern den Spielraum der Wurzel erst durch freihändige Einschaltungen verkleinern.

Aus beistehender Rechnung ersieht man zunächst, dass die Wurzel zwischen 10 und 12 liegt.

x =	10	12	11	11,46	11,487
log x		1.07918	1.04193	1.05918	1.06021
log x^2		2.15836	2.08386	2.11836	2.12042
log x^3		3.23754	3.12579	3.17754	3.18063
log 1640.5 x^2		5.37334	5.29884	5.33334	5.33540
log 523,7 x^3		5.95662	5.84487	5.89662	5.89971
log x^4		4.31672	4.16772	4.23672	4 24084
x^4	10000	20736	14713	17247	17412
1640,5 x^2	164050	236230	198995	215450	216470
560000 + Su.	734050	816966	773708	792697	793882
523,7 x^3	523700	904940	699630	788160	793800
f (x)	210350	−87974	+74078	+4537	+ 82

Durch Einschaltung von 11 verkleinert sich der Spielraum auf eine Einheit. Hat die Spur der Sehne 11/12 die Grundstrecke $11 + \delta$, so folgt:

$$\delta = \frac{741}{1621} = 0{,}46$$

Aus f (11,46) und f (12) folgt weiter, wenn $11{,}46 + \delta_1$ die Grundstrecke der Spur der Sehne 11,46/12 ist:

$$\delta_1 = \frac{0{,}54.454}{9251} = \frac{245}{9251} = 0{,}027.$$

Aus f (11,487) und f (12) folgt für die Grundstrecke $11{,}487 + \delta_2$ der Spur der Sehne 11,487/12:

$$\delta_2 = \frac{0{,}513.82}{88056} = \frac{42}{88056} = 0{,}00048.$$

Daher ist die gesuchte Wurzel auf 5 Stellen:

$$x = 11{,}487.$$

3. Unbeträchtliche Glieder. Wenn in der Gleichung

$$f(x) + g(x) = a$$

in der Nähe einer Wurzel die Funktion g (x) unbeträchtlich klein gegen f (x) ist, so kann man eine erste, grobe Annäherung durch Vernachlässigung von g (x) also aus der Gleichung berechnen

$$f(x_1) = a.$$

Ein besserer Wert x_2 ergiebt sich, wenn man x_1 in g (x) einführt, also nach der Gleichung rechnet

$$f(x_2) = a - g(x_1).$$

Wenn man nun diesen verbesserten Wert für x_1 setzt, so bekommt man eine noch bessere Näherung u. s. f.

Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte genügend übereinstimmen.

Hierzu kann man mit grösster Leichtigkeit Beispiele geben, die rasch zum Ziele führen. Erfahrungsgemäss wird dieser Weg (bez. der folgende) von den Schülern besonders gern begangen.

Beispiel. $x^2 - 3 \log(x - 4) = 137.$ Eine Wurzel liegt bei 12; für diese kann 3 log (x — 4) für unbeträchtlich klein gelten. Daher rechnet man

$$x^2_1 = 137, \; x^2_2 = 137 + 3 \log(x_1 - 4).$$

x_1		11.704	11.818	11.819
$\log(x_1 - 4)$		0.88672	0.89310	0.89315
$3\log(x_1 - 4)$		2.66016	2.67930	2.67945
x_2^2	137.00	139.66	139.68	139.68
$\log x_2^2$	2.13672	2.14508	2.14514	
$\log x_2$	1.06836	1.07254	1.07257	

Also ist x = 11,819.

Beispiel. Etwas abweichend hiervon kann folgende Gleichung behandelt werden:

$$x^5 + 934{,}72\, x^3 = 37590.$$

Man berechnet die erste Näherung aus

$$934{,}72\, x_1^3 = 37590,$$

und hierauf

$$x_2^3 = \frac{37590}{934{,}72 + x_1^2} \quad \text{u. s. f.}$$

$\log x_1^2$		1.06286	1.06604	1.06602
x_1^2		11.557	11.643	11.642
Nenner		946.28	946.36	946.36
log Zähler	4.57507	4.57507	4,57507	4.57507
log Nenner	2.97078	2.97602	2.97605	
$\log x_2^3$	1.60429	1.59905	1.59902	
$\log x_2$	0.53143	1.53302	1.53301	

Daher ist x = 3.4120.

Beispiel. $x - 2 \log x = 4.$

Eine Wurzel x' liegt in der Nähe von 4, und für diese kann 2 log x für unbeträchtlich gelten; eine andere Wurzel x'' liegt bei 0,01, und dafür ist x unbeträchtlich.

Die Berechnung von x' erfolgt nach

$$x_1 = 4_1 \; x_2 = 4 + 2 \log x_1 \text{ u. s. f.}$$

x_1	4.0000	5.2041	5.4327	5.4700	5.4760	5.4769	5.4771
$\log x_1$	0.60206	0.71635	0.73502	0.73799	0.73846	0.73853	0.73855
$2 \log x_1$	1.20412	1.43270	1.47004	1.47598	1.47692	1.47706	1.47710

Daher ist x' = 5,4771.

Die andere Wurzel ergiebt sich aus

$$\log x_1 = -2, \; \log x_2 = -2 + \frac{1}{2} x_1,$$

$\log x_1$	8.00000	8.00500	8.00506
x_1	0.01000	0.010116	0.010117
$^1/_2\, x_1$	0.00500	0.005058	0.005058

folglich ist x'' = 0,010117.

4. Unbeträchtliche Faktoren oder Divisoren. Wenn eine Gleichung die Form hat

$$f(x) \cdot g(x) = a$$

und g (x) in der Nähe einer Wurzel von der Einheit nicht erheblich verschieden ist, so kann man die erste grobe Näherung finden, indem man g (x) durch 1 ersetzt, also aus

$$f(x_1) = a.$$

Die weiteren Näherungen ergeben sich aus

$$f(x_2) = a \,/\, g(x_1) \text{ u. s. f.}$$

Beispiel. Das Kapital c wächst durch jährlichen Zinseszins zu p Prozent in n ganzen Jahren und dem Jahrbruchteile t an auf

$$k = \cdot c \cdot 1{,}0p^n \left(1 + \frac{p\,t}{100}\right).$$

Zur Berechnung von p hat man

$$1{,}0p^n \left(1 + \frac{p\,t}{100}\right) = \frac{k}{c}.$$

Der zweite Faktor links kann als unbeträchtlich gelten, daher die erste Näherung für p berechnet werden aus

$$1{,}0p_1{}^n = \frac{k}{c}.$$

Für die weiteren Annäherungen hat man

$$1{,}0p_2{}^n = \frac{k}{c} : \left(1 + \frac{p_1\, t}{100}\right), \text{ u. s. f.}$$

Ist log k/c = 0.47712, n = 20, t = 0,51, so folgt

$\log p_1$		0.75182	0.74013	0.74044
$\log t\, p_1/100$		8.45939	8.44770	8.44801
$\log(1 + \cdot\cdot)$		0.01233	0.01201	0.01201
$\log 1{,}0p_2{}^n$	0.47712	0.46479	0.46511	0.46511
$\log 1{,}0p_3$	0.023856	0.023240	0.232555	
$1{,}0p_2$	1.05647	1.05497	1.05501	

p = 5,501.

Beispiel. Dieser Weg führt unter Umständen auch dann noch rasch zum Ziele, wenn die Voraussetzungen für seine Gangbarkeit nur sehr unvollständig erfüllt zu sein scheinen.

Die Gleichung

$$5000\, x^4 + 3000\, x^3 = 1$$

kann nach den Formeln gelöst werden:

$$5000\, x_1^3 = 1, \; 5000\, x_2^3 = 1 : (x_1 + 0{,}6),$$

obgleich $x_1 + 0{,}6$ von der Einheit recht erheblich abweicht. Die Zahlenrechnung ergiebt nämlich

x_1		0.05848	0 067219	0.066924	0.066934
$x_1 + 0{,}6$		0.65848	0.66722	0.66692	0.66693
$\log(x_1 + 0{,}6)$		9.81855	9.82427	9.82407	9.82408
$\log x_2^3$	6.30103	6.48248	6.47676	6.47696	6.47695
$\log x_2$	8.76701	8.82749	8.82559	8.82565	8.82565

x = 0.066934.

5. Hat man mit dem Einschaltungsverfahren (1) oder mit der Einschaltung nach der Sehne (2) die gesuchte Wurzel bis auf drei Stellen genau berechnet, so kann man zur Berechnung der noch nötigen Verbesserung oft mit Vorteil die Wege 3 oder 4 einschlagen. Ist f (x) = a aufzulösen, x_1 die gefundene grobe Näherung, $x_1(1 + \delta)$ die gesuchte Wurzel, so hat man den ächten Bruch δ aus der Gleichung zu bestimmen:

$$f\,[x_1 (1 + \delta)] = a.$$

In vielen Fällen kann auch der Schüler $f(x_1 + \delta)$

so entwickeln, dass eine Gleichung von der Form hervorgeht

$$g(\delta) + h(\delta) = b,$$

wobei $h(\delta)$ unbeträchtlich klein gegen $g(\delta)$ ist usw. Ist $f(x)$ algebraisch und ganz, so weist man in der Regel $g(\delta)$ das Glied niedrigster Ordnung zu, während in $h(\delta)$ alle Glieder höherer Ordnung vereinigt werden.

Nur dann, wenn der Koëffizient der niedrigsten Potenz von δ klein ist gegen die Koëffizienten der nächst höheren, wird man das Verfahren den Umständen entsprechend abändern.

Beispiel. Zu welchem Mittenwinkel gehört im Kreise mit dem Halbmesser 1 der Abschnitt 0,7436? Der gesuchte Winkel ergiebt sich aus der Gleichung

$$\text{arc}\,\varphi - \sin\varphi = 1{,}4872.$$

Ist φ_1 eine bis auf 1^0 genaue Annäherung, und $\varphi_1 + \delta$ der richtige Wert, so hat man

$$\text{arc}(\varphi_1 + \delta) - \sin(\varphi_1 + \delta) = 1{,}4872$$

$$\text{arc}\,\varphi_1 + \text{arc}\,\delta - \cos\varphi_1 \sin\delta - \sin\varphi_1 \cos\delta = 1{,}4872.$$

Da δ nur klein ist, so kann man für die erste Näherung für δ setzen $\sin\delta = \text{arc}\,\delta$, $\cos\delta = 1$, und daher δ_1 aus der Formel berechnen

$$\text{arc}\,\delta_1 = \frac{1{,}4872 - \text{arc}\,\varphi_1 + \sin\varphi_1}{1 - \cos\varphi_1}$$

Setzt man $\varphi_2 = \varphi_1 + \delta_1$, so ersetzt man φ_1 in der Formel für δ_1 durch φ_2 usw.

Aus der Hilfstafel 22, Seite 79 meiner fünfstelligen Logarithmen findet man als erste Näherung $\varphi_1 = 129^0$; hieraus ergiebt sich weiter, wenn $1{,}4872 - \text{arc}\,\varphi_1 + \sin\varphi_1$ mit u_1 bezeichnet wird,

φ_1	$129^0\ 0',0$	$129^0\ 27',2$	$129^0\ 27',1$
$\text{arc}\,\varphi_1$		2.25938	2.25935
$\sin\varphi_1$		0.77214	0.77216
$\text{arc}\,\varphi_1 - \sin\varphi_1$		1.48724	1.48719
u_1	+0,01288	−0.00004	+0.00001
$1 - \cos\varphi_1$	1,6293	1.635	
$\text{arc}\,\delta_1$	+0,00791	−0.00002	
δ_1	$0^0\ 27',2$	$0^0\ 27',1$	

$$\varphi = 129^0\ 27',1$$

Beispiel. $x - x^2 + x^3 - x^4 = 0.3228$. Aus meinen Logarithmen, S. 77 entnimmt man als erste Näherung $x_1 = 0{,}65$; für die Verbesserung δ ergiebt sich:

$$(1 - 2x_1 + 3x_1^2 - 4x_1^3)\,\delta - 2(1 - 3x_1 + 6x_1^2)\,\delta^2$$
$$+ 6(1 - 4x_1)\,\delta^3 - 24\,\delta^4 = 0.3228 - 0{,}3236 = -0{,}0008.$$

Setzt man für x_1 den obigen Wert ein und beseitigt den Faktor von δ, so entsteht

$$\delta + 24{,}22\,\delta^2 - 73{,}4\,\delta^3 + 183\,\delta^4 = 0.00612$$

Hieraus für δ zunächst die grobe Näherung $\delta_1 = 0{,}00612$, die weiteren Annäherungen ergeben sich aus

$$\delta_2 = 0.00612 - 24{,}22\,\delta_1^2 + 73{,}4\,\delta_1^3 - 183\,\delta_1^4.$$

Bei der Kleinheit von δ_1 kommen die letzten beiden Glieder nicht in Betracht; aus den beiden andern folgen unter Benutzung einer Quadrattafel (meine Log. S. 68) für δ_2 der Reihe nach die Werte

0,00612; 0,00522; 0,00546; 0,00540; 0,00541.

Daher ist

$$x = 0{,}65 + 0{,}00541 = 0{,}65541.$$

In meinen Logarithmen habe ich mehrere Hülfstafeln zur Auflösung höherer Gleichungen, die mit geometrischen, mechanischen und astronomischen Aufgaben im Zusammenhange stehen, mitgeteilt; wo man sie benutzen kann, bleibt für den Schüler nur übrig, die Verbesserung δ geschickt zu berechnen. Aber auch in allen andern Fällen, wo der Schüler erst durch Einschaltungen an die gesuchte Wurzel herankommen muss, kommt er schnell genug zum Ziele.

Zum Schlusse darf ich noch bemerken, dass ich den Gegenstand hier absichtlich schlicht und einfach und ohne historische Ausblicke dargestellt habe; weniger, als hier mitgeteilt ist, möchte nicht den Schülern der Prima dargeboten werden, — aber mehr dürfte zur Erreichung des gesteckten Zieles auch nicht nötig sein.

Dynamische Betrachtungen über mechanische Fundamentalbegriffe.

Von Th. Schwartze (Berlin-Friedenau).

Dynamik, Kinetik, Energetik beanspruchen zur Zeit, das Fundamentalprinzip zur Ableitung der Naturveränderungen aus ihren letzten Ursachen erkannt zu haben. Jedoch könnte es wohl als unwesentlich betrachtet werden, ob man dieses Fundamentalprinzip Kraft, Bewegung oder Energie benennt, sobald man den unanfechtbaren Begriff mit dem Worte verbindet. Uebrigens ist darauf hinzuweisen, dass schon Galilei zur treffenden Bezeichnung des von ihm aufgestellten Kraftbegriffes die Worte forza, efficacia, momente (movimentum), impeto, energia und noch andere in Anwendung brachte. Er, sowie Descartes, Huyghens und Newton, abgesehen von Neueren, sahen die Kraft als das konstante Produkt zweier im umgekehrten Verhältnis gegen einander veränderlicher Faktoren an; anders ist auch die konstante Kraft nicht zu denken. Die Grenzzustände der Kraft, wo der eine Faktor im Minimum, der andere im Maximum ist, sind Ruhe und Geschwindigkeit; beide Zustände sind Negierung der Kraftentfaltung, also statische Zustände, in denen die Kraft latent ist. In der Ruhe wird die Kraft durch eine positive Gegenkraft gehemmt, in der Geschwindigkeit ist die Kraft in ihren Elementen hintereinander geschaltet. Nur die Summe dieser Elemente, aber nicht das Endelement ist der Kraftgrösse äquivalent; nicht die phoronomische Extensität, sondern die dynamische Intensität der Kraftstrecke repräsentieren die Kraft. Also kann der in der Zeiteinheit gemessene Weg der bewegten Substanz nicht proportional der Kraft gesetzt werden. Der geläufige Satz: „Die Geschwindigkeit ist proportional der Kraft" kann demnach nicht ohne weiteres als richtig angesehen werden. Auch ist ja im Widerspruch damit schon von Galilei die Kraft als proportional der Beschleunigung definiert worden, die doch prinzipiell von der Geschwindigkeit verschieden ist, obschon im phoronomischen Sinne sie durch den Zuwachs der Geschwindigkeit für die Zeiteinheit gemessen wird. Nach der von Lagrange aufgestellten Definition ist die Beschleunigung die nochmals durch die Zeit dividierte Geschwindigkeit, sodass sie als die Geschwindigkeitseinheit anzusehen ist, die mit dem Wertigkeitsfaktor der Zeit multipliziert, die Geschwindigkeit für den betreffenden Zeitverlauf ergiebt. Hiernach besteht die Proportion $1^2 : v = v : v^2$, wodurch die Kraft als die zweite Potenz der als Beschleunigungsmass geltenden Geschwindigkeit bestimmt wird. Als Wertigkeitsfaktor kann dann noch dem Kraftsymbol v^2 das Massensymbol m beigefügt werden. Bedenkt man nun, dass im absoluten Masssystem die physikalische Masseneinheit der die Kraft tragenden Substanz durch den Geschwindigkeitszuwachs g, also durch eine Kraftstrecke gemessen wird, welche unter der Bezeichnung Beschleunigung einer raumzeitlichen Grösse entspricht, so wird man für eine beliebige Zeiteinheit statt g auch die von o bis zur Geschwindigkeit v verwirklichte Bewegungsgrösse als Mass der Masseneinheit gelten lassen können, so dass $v = m$ und somit $v^2 = m\,v$ zu setzen ist.

Nach Galileis Anschauung kann man die im dynamischen Vorgange der Kraftentfaltung sich verwirklichende Kraftgrösse auf einen Stoss zurückführen, der in eine beliebige Anzahl von elementaren Stössen aufgelöst gedacht werden kann, die sich in der bewegten Substanz zu einer Kraftmasse anhäufen. Nach dem von Huyghens aufgestellten allgemeinen dynamischen Prinzip, wonach keine Kraft aus Null entstehen und keine in Null vergehen kann, müsste man die arithmetische Progression der elementaren Kraftimpulse mit der Einheit beginnen lassen, da aber diese Einheit für die Anschauung im unendlich kleinen verschwindet, so kann man rechnerisch immerhin die Wirkung vom Nullpunkte ausgehend sich denken. Ja — der Kraftimpuls ist durch das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endwirkung darzustellen, so dass man die Progression und ihre Summe durch die folgende Formel darzustellen hat:

$$\frac{0+1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \cdots + \frac{2n-3}{2} + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Da die zu Grunde liegende Einheit als eine elementare, im Verhältnis zum Zeitverlauf sich entwickelnde Kraftstrecke anzusehen ist, so kann für n auch das Symbol v der Geschwindigkeit gesetzt werden, wodurch man den für den Wertigkeitsfaktor $m = 1$ geltenden Ausdruck der lebendigen Kraft erhält. Denkt man sich den dynamischen Vorgang als Stoss zwischen zwei elastischen Kugeln, von denen die eine mit der Geschwindigkeit v gegen die ruhende anläuft, so kann man dies inbezug auf $m = 1$ durch die folgende Formel zum Ausdruck bringen:

$$\frac{0+1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \cdots + \frac{2n-3}{2} + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$$
$$\frac{2n-1}{2} + \frac{2n-3}{2} + \frac{2n-5}{2} + \cdots + \frac{2+1}{2} + \frac{1+0}{2} = \frac{n^2}{2}$$
$$n + n + n + \cdots + n + n = n^2$$

wodurch die Summe von Wirkung und Gegenwirkung gegeben ist.

Die erste Reihe kann auch die Form erhalten:

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \cdots + \frac{2n-4}{2} + \frac{2n-2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Würde das letzte Glied analog zur Bildungsweise der vorhergehenden Glieder gleich $\frac{2n}{2}$ gesetzt, so würde man die Summa $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ erhalten, welche der in der Kraftstrecke aufgewendeten Kraft plus der dabei hervortretenden, die gebundene Kraft in sich tragenden Geschwindigkeit der bewegten Masseneinheit zum Vorschein kommen. Es stellt sich dabei heraus, dass die verwirklichte relative Endgeschwindigkeit nur die Hälfte der internen Endgeschwindigkeit des dynamischen Vorganges ist, welche letztere als relative Maximalgeschwindigkeit mit vx bezeichnet wird, während wir die verwirklichte Geschwindigkeit $\frac{v_x}{2} = v$ setzen. Die mittlere Geschwindigkeit des dynamischen Vorganges ist dann $v_m = \frac{v}{2}$. Man könnte diese drei im dynamischen Vorgange der Kraftentfaltung zu unterscheidenden Geschwindigkeiten als die kritischen Geschwindigkeiten bezeichnen. Bei dem bekannten Experiment mit der Fallmaschine wird also durch das Abheben des Antriebgewichtes die Hälfte der internen Endgeschwindigkeit mit beseitigt. Bezüglich der Schwingung, welche durch

$$\frac{0+1}{2} + \frac{1+2}{2} + \cdots + \frac{2n-1}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2n-1}{2} + \cdots + \frac{2+1}{2} + \frac{1+0}{2}$$

darstellbar ist, hat man diese interne Maximalgeschwindigkeit als Uebergangsgeschwindigkeit zwischen der positiven und negativen Kraftwirkung vorauszusetzen. Die drei kritischen Geschwindigkeiten ergeben die drei Kraftgrössen $v_m^2 = \frac{v^2}{4} = \frac{v_x^2}{16}$. Nach dem von Lagrange aufgestellten Prinzip der kleinsten und grössten lebendigen Kraft könnte man $\frac{v^2}{4}$ gleich der kleinsten und $\frac{v^2}{2} = \frac{v_x^2}{8}$ gleich der grössten lebendigen Kraft setzen.

Da nun $v_x^2 = 4\,v^2$ ist, so kann man auch zur Ableitung einer Formel für das Parallelogrammgesetz unter Hinzunahme einer auf einen Winkel $\frac{\beta}{2}$ bezogenen trigonometrischen Hilfsfunktion setzen

$$4\,v^2 = 4\,v^2 \cos^2\frac{\beta}{2} + 4\,v^2 \sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Indem wir die beiden Glieder auf der rechten Seite als Ausdrücke für Wirkung und Gegenwirkung ansehen, erhalten wir

$$2\,V_1^2 = 4\,v^2\cos^2\frac{\beta}{2} = 2\,v^2(1 + \cos\alpha) \text{ und}$$
$$2\,V_2^2 = 4\,v^2\sin^2\frac{\beta}{2} = 2\,v^2(1 + \cos\alpha).$$

Hierbei ist der Winkel β als dem Grenzwert 90^0 unendlich nahe liegend anzunehmen. Mit Rücksicht auf diese Annahme gelten die in der Form der Gleichungen des Parallelogrammgesetzes auftretenden symbolischen Formeln

$$2\,v^2 = v^2 + v^2 + 2\,v \cdot v\cos\beta$$
$$2\,v^2 = v^2 + v^2 - 2\,v \cdot v\cos\beta.$$

Betrachtet man nun den Winkel β als Symbol einer Phasendifferenz der Elementarkräfte und nehmen wir an, dass die obere Formel für deren Kombination, die untere für deren Kompensation gilt, so kann man durch die einer Phasenverschiebung entsprechenden Aenderung des Zusammensetzungswinkels eine Verschiedenheit zwischen den Elementarkräften herbeiführen. In dieser Hinsicht setzen wir

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 \text{ und } v^2\cos\beta = v_1\,v_2\cos\alpha,$$

wobei $\cos\alpha > \cos\beta$ ist, indem bei konstanter Kraftsumme $v^2 > v_1\,v_2$ ausfällt. In Bezug darauf ist $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = K > 1$ zu setzen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man

$$v_1^2 = v^2(1 + \sqrt{1 - K^2}),\quad v_2^2 = v^2(1 - \sqrt{1 - K^2}),$$

so dass wir nun die dynamischen Gleichungen des Parallelogrammgesetzes in der allgemein gültigen Form

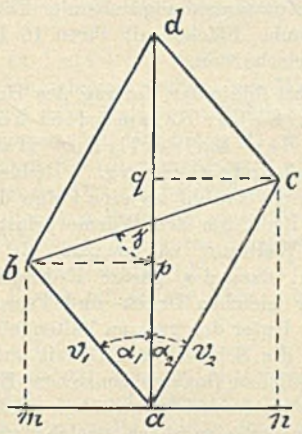
$$R_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\,v_1\,v_2\cos\alpha \cdots (1)$$
$$R_2^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1\,v_2\cos\alpha \cdots (2)$$

erhalten, wo R_1^2 als die Kombinationsresultante und R_2^2 als die Kompensationsresultante auftritt; diese Bezeichnungen beziehen sich indessen auf die Werte des Winkels α zwischen 0 und 90^0, während sie für α zwischen 90^0 bis 180^0 sich umkehren.

Setzt man nun $R_1^2 = m\,v_1^2$ und $R_2^2 = m\,v_2^2$, so ergiebt sich leicht, dass $m = 2$ ist, so dass beide Gleichungen sich zu einer verschmelzen, die als die Gleichung der lebendigen Kräfte zu bezeichnen ist und die Form hat

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cos \alpha \cdots (3).$$

Bevor wir aber auf die Betrachtung dieser Gleichung eingehen, ist noch eine Betrachtung des Kräfteparallelogramms inbezug auf die bei der Zusammensetzung der Kräfte verloren gehenden Wirkungen oder sogenannten verlorenen Geschwindigkeiten, d. h. der Geschwindigkeiten, welche dabei gebunden werden, am Platze.



Zerlegt man die in Fig. 1 im Parallelogramm a b d c vereinigten beiden, als Wirkung und Gegenwirkung betrachteten Kräfte $a\,b = v_1$ und $a\,c = v_2$ inbezug auf die Teilwinkel α_1 und α_2 des Zusammensetzungswinkels α in der Richtung der Kombinationsresultante $a\,d = R_1$ in die Komponenten $a\,p = v_1 \cos \alpha_1$ und $a\,q = v_2 \cos \alpha_2$, sowie senkrecht und also in freier Wirkung, dazu in die Komponenten $v_1 \sin \alpha_1$ und $v_2 \sin \alpha_2$, so ist

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2 = \frac{v_1 v_2 \sin \alpha}{R_1} = \frac{R_2 \sin \gamma}{2}$$

wo γ den Winkel zwischen der Kombinations- und Kompensationsresultante bezeichnet. Es folgt daraus

$$\sin \gamma = \frac{2 v_1 v_2 \sin \alpha}{R_1 \cdot R_2} \cdots (4).$$

Ferner hat man

$$v_1^2 \cos^2 \alpha_1 + v_2^2 \cos^2 \alpha_2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha$$

oder $v_1^2 \sin^2 \alpha_1 + v_2^2 \sin^2 \alpha_2 + 2 v_1 v_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0$ woraus folgt

$$v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

Die verlorenen Geschwindigkeiten, welche gewissermassen die Richtung der Kombinationsresultante analog von Centripetal- und Centrifugalkraft bestimmen, heben sich also gegenseitig auf. Im Parallelogramm der Kräfte kommt also das d'Alembertsche Prinzip zum Ausdruck, welches in der ursprünglichen Fassung *) lautet: „Um die wirklichen Bewegungen eines Systems von Körpern zu finden, die mit einander im Zusammenhange stehen, zerlege man die jedem Körper mitgeteilten Bewegungen $a, b, c \cdots$ in je zwei andere $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \cdots$ Diese sollen so beschaffen sein, dass, wenn man dem Körper die Bewegungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \cdots$ allein mitteilte, das System im Gleichgewicht sein würde. Es werden dann die Bewegungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \cdots$ zugleich diejenigen sein, welche der Körper wirklich annimmt".

*) D'Alembert, Traité de dynamique 1743 p. 51.

Demnach wird durch das Kräfteparallelogramm das Maupertuis'sche Prinzip der kleinsten Wirkung, oder besser gesagt, das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges in Verbindung mit dem Prinzip der Maximalwirkung zum Ausdruck gebracht. *) Auch das Lagrangesche Prinzip der kleinsten und grössten lebendigen Kraft könnte dabei in Betracht kommen. In allen drei Prinzipien soll ein einziges Prinzip zum Ausdruck gebracht werden, welches schon d'Alembert bei der Aufstellung seines auf die Verschmelzung von Statik und Dynamik hinzielenden Satzes im Auge hatte. Hertz hat in seinen Prinzipien der Mechanik das Trägheitsgesetz mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung vereinigt und somit das freie abstrakte Beharrungsgesetz mit Rücksicht auf den genetischen Zusammenhang der Naturkräfte beschränkt; sein Prinzip lautet: „Jedes freie System beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung in einer geradesten (d. h. kürzesten) Bahn". Diese Bahn wird im Kräfteparallelogramm durch die Kombinationsresultante dargestellt.

Die oben aufgestellte Gleichung (3) nimmt für $\cos \alpha = 1$ die Form an

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cdots (5),$$

daraus folgt

$$v_1 = v_2 (\sqrt{2} + 1) \text{ oder } v_2 = v_1 (\sqrt{2} - 1),$$

daher ist

$$v_2^2 (\sqrt{2} + 1) = v_1^2 (\sqrt{2} - 1) \cdots (6).$$

Es ist noch darauf hinzuweisen, dass dem numerischen Werte nach $\sqrt{2} + 1 = \cos \frac{45^0}{2}$ und $\sqrt{2} - 1 = \tang \frac{45^0}{2}$ ist und dass der Winkel $\frac{45^0}{2} = 22^0\,30'$ dem Winkel der Ekliptik nahezu gleich ist.

Setzt man in der Formel (6) für v_2 den Wert der grössten Fallgeschwindigkeit ein, der sich nach der Formel $v = \sqrt{2 g \cdot r}$ für den mittleren Erdhalbmesser $r = 6\,378\,000$ Mtr. und $g = 9{,}81$ Sek.-Mtr. mit 11 200 Sek.-Mtr. berechnet, so erhält man für $11\,200^2 = 125 \times 10^6$

$$125 \times 10^6 (\sqrt{2} + 1) = 725 \times 10^6 (\sqrt{2} - 1) = 300 \cdot 10^6 \text{ Sek.-Mtr.}$$

Dieser Wert entspricht der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der elektro-magnetischen Kraftwellen, so dass man auch der Schwerkraft die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beimessen könnte. Der andere Wert 725×10^6 ergiebt mit $\sqrt{2}$ multipliziert in runder Zahl 1000×10^6. Nun ist die grösste Geschwindigkeit, mit welcher die Erde die Sonne umkreist, in runder Zahl mit 32 000 Sek.-Mtr. anzunehmen; es ist aber $31\,000^2$ rund $= 1000 \cdot 10^6$ Sek.-Mtr. Demnach könnte die Zahl 725×10^6 als der Wert des Trägheitswiderstandes der Masseneinheit des Erdballs angesehen werden, welcher als Geschwindigkeit im negativen Sinne zum Ausdruck kommt. Die Hälfte des Wertes von 1000×10^6 als Ausdruck der in Geschwindigkeit umgesetzten lebendigen Kraft der Masseneinheit des Erdballs entspricht nahezu der von Wilhelm Weber berechneten Schwingungsgeschwindigkeit eines freien Gasmoleküls.

Aus den aufgestellten Formeln ergiebt sich die allgemeine Gleichung

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha \cdot \sin \gamma,$$

die in einer besonderen Abhandlung zu besprechen ist.

*) H. v. Helmholtz hat dem in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen III. Bd. S. 203—248 eine grosse Bedeutung für die physikalische Mechanik zugeschrieben.

Vereine und Versammlungen.

Hauptversammlung zu Giessen, Pfingsten 1901.

In dem Berichte von der Diskussion über die Gestaltung des Unterrichts in der darstellenden Geometrie (Unt.-Bl. VII, 4, S. 70—76) sind die Aeusserungen von Herrn Krebs (Barr i. E.) nur unvollständig wiedergegeben, sie werden auf Wunsch des Herrn Krebs hiermit durch die folgende Notiz ergänzt: Krebs verlangt, wenn schon der Zeichenunterricht an einzelnen Anstalten in den Dienst des mathematischen gestellt würde, dass jedenfalls auch Skizzen, wie sie der Vortrag über darstellende Geometrie bot, in sauberer und überhaupt mustergiltiger Form vorgezeichnet werden und dass auf ihre korrekte Wiedergabe durch die Schüler gehalten werde. So würde wenigstens einigermassen die eigentliche zeichnerische, ästhetische Ausbildung ersetzt werden können.

* * *

46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner

zu Strassburg (Els.) 1.—4. Oktober 1901.

Bericht über die Verhandlungen der mathematischen Sektion.

Die Sitzungen fanden meist unter dem Vorsitz des Herrn Simon, teilweise auch unter dem des Herrn Ballauf statt.

In der ersten Sitzung wurde der von Neuberg (Lüttich) angekündigte Vortrag Zur modernen Dreiecksgeometrie, da der Verfasser selbst am Besuch der Versammlung verhindert war, durch Herrn Simon verlesen.

Nach einleitenden Bemerkungen über die Dreiecksgeometrie als Vermittlerin zwischen der elementaren und der höheren Geometrie, in welcher alle Methoden der letzteren, Projektivität, Verwandtschaft höherer Ordnung, Dualitätsprinzip etc. hervortreten, ging dieser Vortrag auf die Grundaufgabe ein. Er zeigte den Ursprung der Möbius'schen Barycentrischen Koordinaten, bezw. der homogenen Dreieckskoordinaten aus der einfachen Aufgabe, von einem Punkt M aus ein Dreieck nach vorgeschriebenen Verhältnissen zu teilen. Indem der betreffende Punkt auch aussen zugelassen wird, entspringt ein System von 4 konjugierten Punkten und es werden sofort die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits, sowie die Sätze von Menelaos und Ceva aufgedeckt. Die Harmonikale des Punktes M erweist sich dual als Lösung der Aufgabe, eine Gerade zu konstruieren, deren Abstände von den 3 Ecken vorgeschriebene Verhältnisse haben; die einfachste quadratische Verwandtschaft, die Steinersche, wird sichtbar. Indem dann die Aufgabe, auf die verwandte Aufgabe einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den Dreiecksseiten vorgeschriebene Verhältnisse haben, ausgedehnt wird, treten die Apollonischen Kreise auf, die Lehre vom Kreisbüschel und der Radikalen gliedert sich auf einfachste Weise an, der Gausssche Satz, der Kiehlsche Satz werden gewonnen. Es wurden dann als spezieller Fall die eigentlichen Apollonischen Kreise des Vierecks hervorgehoben und die Eigenschaften der Schnittpunkte und ihrer isogonalen Zwillingspunkte rasch skizziert.

(Eine Verallgemeinerung der Dreieckskoordinaten im Anschluss an diesen Vortrag gab in der zweiten Sitzung Herr Wellstein (Strassburg)).

Demnächst ergriff Herr Reye (Strassburg) das Wort zu einem Vortrag über Konfigurationen, der mit der Erläuterung des Begriffes der Konfiguration begann.

Eine Konfiguration n_k, Zeichen C., ist im Raum ein System von n Punkten und n Ebenen, sodass auf jeder Ebene des Systems k Punkte der C. und auf jedem Punkte k Ebenen liegen, planimetrisch ist ein C.: n_k ein System von n Geraden und n Punkten, sodass auf jeder Geraden k Punkte und auf jedem Punkte k Gerade liegen. Redner behandelt 9_3 in der Ebene, 10_4 im Raume und zeigt eine Anzahl Modelle mit der Konfiguration im Zusammenhang stehender Flächen, darunter die Kummersche Fläche mit ihren 16 Doppelpunkten und 16 Kegelschnitten.

Demnächst folgte der Vortrag des Herrn Gerland (Strassburg): Ueber Seismicität und die Einrichtung der Kaiserlichen Hauptstation für Erdbebenforschung. Redner erklärt die Seismicität nicht sowohl als eine Folge der Zusammenziehung der Erde, um den Wärmeverlust durch Strahlung in den Weltraum zu ersetzen, als vielmehr eine Folge davon, dass das gasige Erdinnere keineswegs überall unter gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen steht. Unter den grossen Faltengebirgen (Anden, Alpen) zeigt die Schwere ein Defizit und gerade hier sind die wirklichen (makroseismischen) Erdbeben nicht selten. Man unterscheidet zwischen makroseismischen Beben und mikroseismischen, welche von besonderen Apparaten registriert werden; es sind teils die Fortpflanzungswellen makroseismischer Beben, teils werden sie durch Bestrahlung, lokale Einflüsse, wie Brandung, Sturm etc. hervorgerufen. Er beschreibt die Apparate und Einrichtungen des Instituts, wobei er sehr viele Abbildungen und Photogramme von Erdbebenwellen vorführt und führt darauf die Sektion in das Institut selbst und erklärt bereitwilligst und eingehend die Apparate und Einrichtungen an Ort und Stelle.

In der zweiten Sitzung ergriff zunächst Herr Schwering (Köln) das Wort, um die nachstehend angegebenen, mittels elementarer Methoden zu lösenden Aufgaben aus dem Gebiete der Ausgleichungsrechnung und der Methode der kleinsten Quadrate der Versammlung vorzulegen.

1) Die drei Punkte D, E, J, teilen die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks gleichmässig im Verhältnis m : n. Man berechne das durch die Linie AD, BE, CJ begrenzte Dreieck.

2) Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seiten a, b, c gemessen, es findet sich $a^2 + b^2 + c^2$, welche Verbesserungen sind nach der Methode der kleinsten Quadrate einzuführen, (die Lösung der elementar, ohne Vernachlässigung kleiner Grössen), sodass also:

$$x^2 t y^2 = 2^2; (x - a)^2 + (y - b)^2 + (2 - c)^2$$

im Minimum ist.

3) In einem Dreieck ABC ist AB durch D genau gehälftet. Es ist fehlerhaft gemessen AB = c, BC = a, CA = b, DA = t. Wie ist (entsprechend der Aufgabe 2) auszugleichen?

4) Von einem Tetraeder kennt man die Kanten a, b, c, f, g, h durch fehlerhafte Messung, ferner kennt man das Volumen $\triangle$ genau, etwa durch Wägung und spezifisches Gewicht. Wie ist auszugleichen?

5) Wie 4) aber $\triangle = 0$.

Diese Aufgaben gaben Herrn Wellstein (Strassburg) Anlass, in der dritten Sitzung die nachstehend wiedergegebene, fast nur auf Anschauung beruhende Lösung der von Herrn Schwering vorgelegten Aufgabe 2 mitzuteilen.

Die vorgelegte Aufgabe verlangt, die durch (ungenaue) Messung ermittelten Längen a, b und c der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu korrigieren unter der Voraussetzung, dass der rechte Winkel als genau betrachtet werden darf.

Sind nun x, y, z die verbesserten Seitenlängen, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

und die Methode der kleinsten Quadrate verlangt, dass die Summe

$$(2) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

die wir mit r^2 bezeichnen wollen, ein Minimum wird. Deutet man nun x, y, z als rechtwinklige Punktkoordinaten im Raume, so stellt Gleichung (1) einen Rotationskegel K mit dem Koordinatenanfang O als Spitze dar. Dieser Kegel ist der Ort einer Geraden, welche durch O geht und mit der + z Richtung einen Winkel von 45° einschliesst. Wären a, b, c genau gemessen, so würde auch der Punkt P $(x = a), (y = b), (z = c)$ auf K liegen. So aber wird P sich nur in der Nähe von K befinden. Der Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

entspricht eine Kugel um den Mittelpunkt P, deren Radius r so klein sein soll, dass die Kugel mit dem Kegel K noch eben reelle Punkte oder einen reellen Punkt gemein hat. Diese Eigenschaft kommt aber offenbar nur der Kugel um P zu, welche K berührt. Die Koordinaten x, y, z des Berührungspunktes lösen daher die Aufgabe. Dieser Punkt liegt mit P und der z-Axe in einer Ebene und kann durch eine planimetrische Konstruktion in dieser Ebene leicht gefunden werden, aus der dann die Werte von x, y, z unmittelbar zu entnehmen sind.

Den Hauptinhalt der Sitzung bildete der — an anderer Stelle wörtlich zum Abdruck gebrachte — Vortrag des Herrn Natorp (Marburg a. L.), über die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik, an den sich eine lebhafte Diskussion anschloss. In dieser bemerkte zunächst Herr Kewitsch, dass die Umkehrbarkeit der Relation 01 vorausgesetzt werden müsse, Herr Wellstein teilt seine bereits von Hilbert im mathematischen Colloquium mitgeteilten sich teilweise mit dem Vortragenden berührenden Konstruktionen der Grundlagen der Mathematik mit; Herr Simon bemerkt, dass 1) die Zahl 2 deutlich vorausgesetzt werden müsse, 2) die Umkehrbarkeit, 3) dass die Reihen von Reihen etc. nur zu den Cantorschen Transfiniten Zahlen führen, aber nicht zu einer qualitativ verschiedenen Ebene bezw. komplexen Zahl, 4) dass neue Axiome für die Irrationalität nötig seien. Herr Lipps bemerkt, dass er sich dazu des unendlichen Dezimalbruchs bediene.

In der dritten Sitzung hielt, nachdem Herr Wellstein die bereits oben erwähnte Lösung der einen Schweringschen Aufgabe mitgeteilt hatte, zunächst Herr Treutlein (Karlsruhe) den im Programm der Versammlung angekündigten Vortrag über das Thema: „Der mathematische Unterricht am Reformgymnasium“. Der Vortragende kennzeichnet kurz die Grundgedanken im Aufbau des Reformgymnasiums, erwähnt dann die dagegen erhobenen Einwände und geht ausführlicher ein auf den von mathematischer Seite, von Prof. Simon in der Vorrede zu dessen Buch „Euclid“ erfolgten Angriff: durch den Betrieb des mathematischen Unterrichts auf dem Reformgymnasium werde bei den Schülern Ekel erzeugt, es werde ihnen der ohnehin schwer verdauliche Stoff in zu reicher Fülle zugeführt, die Zahl der Wochenstunden für Mathematik sei zu klein oder zu gross. Der Vortragende widerlegt aufgrund von Schulbeobachtungen diese Einwände und erweist sie zumteil als ungerechtfertigte Verallgemeinerungen; er giebt dann die Umrisse des Lehrplanes, wie er nach seiner Meinung für den mathematischen Unterricht höherer Schulen, insbesondere des deutschen Gymnasiums, gelten sollte.

Dann folgte Herr Schwering (Köln) mit dem gleichfalls bereits im Versammlungsprogramm angekündigten Vortrag über das Thema: Zum mathematischen Unterricht am Gymnasium. Von einer Berichterstattung über diesen Vortrag, dessen Wortlaut in der Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht veröffentlicht werden wird, muss hier abgesehen werden.

In der Diskussion, die über beide Vorträge zugleich eröffnet wird, bemerkt zunächst Herr Simon, dass das Frankfurter Reformgymnasium mit seinen 3 Stunden in der Mathematik in Prima einen solchen Mangel an Verständnis für das Fach bekunde, dass mit solchen Leuten über Schulmathematik so wenig zu diskutieren sei, wie mit Blinden über Farben und weist auf die vernichtende Kritik des Prof. Vogt in Breslau hin. Treutlein erwidert, dass ja auch in Preussen bereits im Leibniz-Reformgymnasium dieser allerdings unverzeihliche Fehler des Frankfurter Plans beseitigt sei. (Ein Schreiben des Herrn Vogt an den Vorsitzenden weist dies als eine Verwechslung mit dem Reform-Realgymnasium nach). Herr Schwering betont, dass der Mathematiker vor allem Mathematik zu lehren habe und erinnert an die berühmten Exnerschen Instruktionen zum Oesterreichischen Unterrichtsplane, Herr Recht möchte auch der Praxis ihr Recht geben, ausserdem beteiligten sich an der Debatte die Herren Wildermann, Bloch, Hahn, die sich in ähnlichem Sinne aussprachen.

Die Zahl der Anwesenden betrug in der Regel zwischen 30 und 40, nur bei dem Vortrag des Herrn Natorp ging sie über diese Zahl hinaus.

* * *

73. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Hamburg 1901.

Versammlungsbericht (Fortsetzung).

V. Botanische Abteilungs-Vorträge.

Die Verhandlungen erforderten im ganzen fünf Sitzungen, die von den Herren Schwendener (Berlin), Zacharias (Hamburg), de Vries (Amsterdam), Kny (Berlin) und Molisch (Prag) geleitet wurden.

Der erste Vortrag von Herrn Engler (Berlin)

Ueber die Fortschritte auf dem Gebiete der Pflanzengeographie

wurde, da der Redner am Erscheinen verhindert war, von Herrn Marsson (Berlin) im Auszuge verlesen.

In diesem Sammelreferat bespricht Engler namentlich die pflanzengeographischen Forschungen der beiden letzten Jahre. Er geht näher auf die Bedeutung des Windes für die Entstehung der Vegetationsformationen, auf die Verbreitung der Samen durch den Wind und auf die mono- und polytopische Entstehung der Arten ein. Er wendet sich dann zu den neueren ökologischen Arbeiten und zu den Fortschritten in der Erforschung der Pflanzengeographie Afrikas. Der Vortrag wird ausführlich in dem Generalversammlungsheft der deutschen Botanischen Gesellschaft erscheinen, und ebenso das zweite wegen Behinderung des Vortragenden Dr. E. Gilg (Berlin) nicht erstattete Referat: „Ueber den gegenwärtigen Stand und die Fortschritte auf dem Gebiete der Systematik der Blütenpflanzen.

Hierauf spricht Herr H. Hallier (Hamburg) über seinen

Entwurf zum Stammbaum der Blütenpflanzen.

Nach ihm sind nicht die Amentifloren und Casuarineen als die ältesten, den Gymnospermen sich anschliessenden Typen der Dicotylen anzusehen, sondern die Polycarpicae. Die beiden erst genannten Gruppen reihen sich mit den Urticalen und den Hamamelidaceen den Trochodendraceen und Magnoliaceen an und die Monocotyledonen durch Vermittelung der Helobien den Ranunculaceen und Ceratophyllaceen. Die Sympetalen werden als gesonderte Gruppe aufgelöst und an verschiedene Gruppen der Choripetalen angereiht, so z. B. die Ebenalen an die Malvalen und Dipterocarpaceen, die Ericalen und Primulalen an die Ochnaceen, die Plumbagineen an Centrospermen, die Campanulaten an die Passifloralen, die Tubifloren, Contorten und Rubialen an die Saxifragaceen.

Herr Reinke (Kiel) berichtet von seinen Untersuchungen

Ueber kernlose Zellen

die Dr. Hinze im botanischen Institut der Universität Kiel unter seiner und Prof. Benecke's Leitung angestellt hat. Wegen der Grösse ihrer Zellen (45 mm) erwies sich Beggiatoa mirabilis Cohn als sehr geeignetes Objekt zur Prüfung dieser z. Z. lebhaft ventilierten Frage. Es liess sich weder an lebenden noch an fixierten Objekten die Spur eines Kernes feststellen oder eine besondere Differenzierung des Plasmas nachweisen. Wohl aber gelang es, Klümpchen eines Kohlenhydrats aufzufinden, die mit dem Namen Amylin belegt wurden, da sie ein von Glykogen und Stärke verschiedenes Verhalten zeigten. Neben den Amylinkörnerchen konnten ferner mit Haematoxylin weitere körnige Gebilde fixiert werden, die dem Vortragenden den roten Körnern Bütschli's nahe zu stehen scheinen und die Chromatinklümpchen benannt wurden. Die Zellen der Beggiatoa mirabilis sind nach diesen Beobachtungen kernlos, das Chromatin ist im Plasma gleichmässig vertheilt.

Prof. Noll (Bonn) demonstriert dann eine monströse Blütentraube vom Spätburgunder, die von Oberförster Melsheimer in Linz a. Rh. übersandt war. Der betreffende Stock war vor 14 Jahren aus Stecklingen erzogen, die von einer Rebe genommen waren, an der dieselben Erscheinungen vom Einsender schon 1875 beobachtet waren.

Herr Jost (Strassburg) giebt dann eine Zusammenstellung der heutigen Erscheinungen

Ueber die Reizperception in der Pflanze.

Referent beschränkt sich auf die Vorgänge bei den durch die Schwerkraft ausgelösten Reizerscheinungen, da diese bisher sehr eingehend untersucht worden sind, er bespricht die von Noll, Czapek, Nemec und Haberlandt mitgetheilten Beobachtungen und giebt eine Kritik der von diesen Forschern ausgesprochenen Anschauungen über die Frage, in welcher Weise sich die Einwirkung der Schwerkraft innerhalb der Wurzelspitze und des Stempels geltend macht. Czapeks Druckhypothese, nach der die Zellen der sensiblen Zone in normaler Lage auf einander einen Druck in vertikaler Richtung ausüben und auf diesen Druck abgestimmt sind, durch jede Ablenkung aber eine Verschiebung dieses Drucks erfahren und diese Umstimmung empfinden, hält er durch die Nollschen Versuche und Einwände wiederlegt. Von letzteren hebt er besonders die Versuche mit künstlichem Radialdruck mittelst kleiner Gewichtchen hervor. Gegen die Nemec-Haberlandtsche Hypothese, nach der spezifisch schwerere Stärkekörner, ähnlich wie die Stertocysten (Otocysten) niederer Tiere, durch ein passives Fallen in den Zellen der Wurzelhaube und in denen der sogenannten Stärkescheide im Stempel der geotropischen Krümmungen einleiten sollen, erhebt er Einwände auf Grund eigener Versuche mit intermittierender Reizung und schwachen Centrifugalkräften. Die Nollsche Anschauung, dass nach Analogie der Stertocysten überhaupt kleinere Körper von anderem spezifischen Gewicht als der Zellsaft im sensiblen Hyaloplasma zur Geoperception führen, stellt Referent als möglich hin, betont jedoch, dass auch erst sekundäre Wirkungen, welche durch diese direkten Schwerkraftwirkungen hervorgerufen würden, die Perception herbeiführen können.

Herr Noll (Bonn) demonstriert darauf

Neue Versuche über das Winden

an zwei kleinen Apparaten, die er zur Erläuterung des rechts und links Windens auf Grund von empirisch angenommenen, besonders verteilten und angeordneten sog. Reizsphären konstruiert hat. Diese Reizsphären sind auf einer runden, durchsichtigen Glasscheibe entsprechend angebracht und ermöglichen es, nicht nur die bekannten Erscheinungen windender Pflanzen zu veranschaulichen, sondern auch das Verhalten windender Objekte unter besonderen Bedingungen im Voraus richtig abzuleiten.

Sodann berichtet Herr Nemec (Prag) über

Die Beziehungen zwischen den reizleitenden Strukturen und den stertischen Organen bei den Pflanzen.

In den Wurzelhauben von Allium konnte der Vortragende feststellen, dass die Fähigkeit zu geotropischer Reaktion resp. Perception abhängig war von dem Vorhandensein von Stärkekörnern. Diese wirken wie spezifisch schwere Körper und lösen eine eigenartige, polarisierte Veränderung des Plasmas aus, das besondere sensible Zonen besitzt. Er konnte ferner besondere Strukturen beobachten, in denen er gewisse reizleitende Einrichtungen gefunden zu haben glaubt. Eine Reihe von Präparaten wurden als Belege für die geschilderten Beobachtungen vorgelegt.

Herr Zacharias (Hamburg) sprach nun über

Kinoplasma.

Der Vortragende konnte in den Pollenmutterzellen von Larix, den Wurzelhaaren Hydrocharis, den Staubfadenhaaren von Tradescaulia, den Wurzelhaaren von Chara und vor allem in einem ganz besonders geeigneten Objekt der Endospermanlage von Iris einen sehr eiweissreichen Bestandteil des Protoplasmas nachweisen, der mit dem Euchylema (Reinke-Rodewald) übereinstimmen dürfte. Er sprach ferner die Ansicht aus, dass die Annahme von einer aktiven Thätigkeit der Spindelfasern bei der Kernteilung einer gesicherten Grundlage noch entbehre.

Herr Kolkwitz (Berlin) kam dann in seinen Vortrage

Giebt es Leitorganismen für verschiedene Verschmutzungsgrade des Wassers?

zu dem Schlusse, dass zuverlässige Leitorganismen nicht genannt werden könnten, dagegen aber gewisse Leitformationen meist vorhanden waren und dass für einen Kenner aus dem Entwickelungszustand derselben sehr wohl Schlüsse hinsichtlich des Beginnes, der Vollendung und der Zu- und Abnahme einer Verunreinigung möglich sein.

Herr O. Warburg (Berlin) gab ein ausführliches Referat über

Entwickelung und Zukunft der angewandten Botanik unter spezieller Berücksichtigung produktionswirtschaftlicher und kommerzieller Fragen.

Der Vortragende gab zunächst eine eingehende historische Uebersicht über die Entwickelung der Kenntnisse von Nutz- und Heilpflanzen. Er bespricht die Leistungen der verschiedenen Völker des Altertums auf diesem Gebiete und hebt unter diesen besonders die Aegypter hervor. Das Mittelalter zeigte auch in diesen Wissenszweigen einen Stillstand, wenn nicht einen Rückschritt, und erst die neuere Zeit brachte wieder in Anknüpfung an das Altertum eine erfolgreiche Weiterentwickelung. Der Redner berührt dann noch den Gartenbau, die Land- und Forstwirtschaft, schildert die Bestrebungen der Holländer und Engländer und die Bewirtschaftung ihrer weiten Kolonialgebiete und giebt ein anschauliches Bild von dem, was bisher für die deutschen Gebiete, durch Anlegung von botanischen Gärten oder Versuchsplantagen, durch Forschungs- und Instruktionsreisen, sowie durch das Studium der wichtigeren Kultur- und Heilpflanzen teils geschehen, teils geplant ist. Der Vortragende fasst seine Darstellung dahin zusammen, dass die angewandte Botanik sich nicht als gesonderte Disziplin ausgestalten möge, sondern in engem Anschlusse und im Zusammenhange mit der wissenschaftlichen Botanik der Universitäten ihre vielseitigen Wege gehen möge, dass gut dotierte botanische Institute in den Tropen zu gründen seien und dass die bisher bekannten Nutz- und Heilpflanzen, eingehend wissenschaftlich studiert und die Pflanzenwelt nach neuen nutzbringenden Gliedern auf das eifrigste und sorgfältigste durchforscht werde.

Sodann giebt Herr Wittmack (Berlin) in seiner

Mitteilung über bittere Mandeln und Pfirsichkerne etc.

eine kurze Anleitung, um die im Handel häufig als Verfälschung von bitteren Mandeln vorkommenden sog. Pfirsichkerne (Prunus nana), sowie Pfirsich- und Pflaumenkerne zu erkennen und zu unterscheiden. Neben den anatomischen Merkmalen macht der Vortragende, der diese Untersuchungen gemeinsam mit Dr. Buchwald ausgeführt hat, noch auf den rein bitteren Geschmack der Mandeln aufmerksam, wogegen die Pflaumenkerne etc. stets einen widerlichen Nachgeschmack zeigen.

Herr Correns (Tübingen) referiert über

Die Ergebnisse der neuesten Bastardforschung für die Vererbungstheorie.

Der Vortragende giebt eine kurze historische Uebersicht über die Bastardforschung. Man kann drei Epochen unterscheiden. In der ersten (bis 1830) ist es die Sexualität, in der zweiten (1830—1875) die Species-Frage und seitdem die Vererbung, für die das Studium der Bastarde vornehmlich herangezogen wird. Die Arbeiten des Abtes Gregor Mendel aus den 60. Jahren sind für die heutige Forschung grundlegend, jedoch sind die in derselben aufgestellten Regeln nicht immer mit den beobachteten Thatsachen in Uebereinstimmung. Dies hat aber auch schon Mendel teilweise konstatiert. Die Praevalenzregel ist so zu fassen: „Von den beiden, ein Merkmalpaar bildenden Merkmalen der Eltern, entfaltet der Bastard mitunter nur das eine Merkmal, mitunter aber auch Zwischenstufen zwischen den beiden Merkmalen". „Das zur Entwickelung kommende Merkmal heisst das dominierende, das andere das recessive". Dominiert ein Merkmal, so nennt C. das Merkmalpaar heterodynam, im anderen Falle homodynam. Die Spaltungsregel Mendels trifft ebenfalls nicht immer zu und bedarf der Ergänzung. Nach Mendel findet bei der Keimzellbildung eine Spaltung statt, die eine Hälfte erhielt das eine Merkmal des Paares, die zweite das andere. Dies aber nur ein Fall den Correns schizogon nennt, während auch nicht spaltende Merkmalspaare — homocogon — vorhanden sind.

Verbindet man diese Eigenschaften der Merkmalpaare, so erhält man vier Typen, 1. Heterodynam schizogon, 2. Heterodynam homocogon, 3. homodynam schizogon, 4. homodynam homocogon. Für drei dieser Typen giebt es genauer studierte Bastarde. Der erste (Pisumtypus) ist für Erbsenrassen die Regel, der dritte (Zeatypus) für Maisbastarde und der vierte (Hieracientypus) für die Rassen des Habichtskrautes. Es giebt ferner keine scharfen Grenzen zwischen diesen Typen, sondern es sind Uebergänge vorhanden. Nach Correns lässt sich aus der Bastardierung ein Schluss auf das Entstehen oder Schwinden eines Merkmals nicht ziehen. Redner wendet sich ferner noch kurz zu den neueren Zellkernforschungen, den Xenien und den Pfropfhybriden und demonstriert zum Schluss noch eine Reihe seiner selbstgezüchteten Maisrassen.

Herr H. Klebahn (Hamburg) folgt nun mit einem ausführlichen Referat

Ueber den gegenwärtigen Stand der Kenntnis des Wirtswechsels und der Spezialisierung bei den Rostpilzen. Demonstrationen zur Gattung Melampsora.

Nach einer historischen Einleitung geht der Vortragende zu der heute von ihm und anderen Forschern in weitem Umfange festgestellten sog. Spezialisierung der Rostpilze über. Formen, die man bisher als zu einer Art gehörig auffasste, da sie sich morphologisch kaum oder nicht unterscheiden liessen, mussten in eine Reihe von sog. Gewohnheitsrassen zerlegt werden. Es ist nämlich experimentell erwiesen worden, dass diese scheinbar einheitlichen Arten in eine ganze Reihe von Formen zerlegt werden können, die verschiedene Zwischenwirte befallen und für dieselben konstant sind. So liessen sich Peridermium Pini in ca. 15, Caeoma laricis in 6, C. Allii in 3, C. confluens in 3, Melampsora tremulae in 5, Puccinia sessilis in 5—7 Formen resp. Arten zerlegen. Der Redner geht dann noch kurz auf die ev. Bedeutung dieser Erscheinung für unsere Anschauungen von der Entstehung der Arten ein.

Herr Kny (Berlin) macht sodann Mitteilung über

Die Assimilation von freiem Stickstoff durch Schimmelpilze.

Untersuchungen, die im pflanzenphysiologischen Institut zu Berlin unter seiner Leitung von Kobaro Saida ausgeführt sind. Rhoma Bebae, Aspergillus niger und Mucos stolonifer assimilieren freien Stickstoff bei Vorhandensein und Fehlen von Stickstoffverbindungen in den Nährlösungen. Eudococcus purpurasceus nur bei Vorhandensein, Acrostalagmus cinnabaricus, Molinia variabilis und Fusi sporium moschatum aber überhaupt nicht.

Herr Czapek (Prag) berichtet über seine Untersuchungen

Ueber Stickstoffnahrung und Eiweissbildung bei Schimmelpilzen.

Danach sind Aminosäuren neben fertigem Eiweiss die besten Nährstoffe für Aspergillus niger. Der Eiweissaufbau wird durch dieselben lebhaft gefördert. Amine und Diamine vermag der Pilz ebenfalls in Aminosäuren umzuwandeln. Je leichter die Nährsubstanz dies zulässt, desto wirksamer ist dieselbe.

Sodann teilt Herr Nathanson (Leipzig) seine Untersuchungen

Zur Lehre vom Stoffaustausch

mit. Unreine Algen (Codium) zeigen demnach eine verschiedene Permeabilität der Plasmahaut für anorganische Salze (Chloride, Nitrate) und zwar zum Zwecke der Turgorregulierung. Die Pflanzen sind imstande, Chloride in chloridfreien Lösungen festzuhalten und umgekehrt Nitrate aus stark verdünnten Lösungen aufzuspeichern.

Zum Schlusse legt noch Herr Magnus (Berlin)

Eine neue unterirdisch lebende Urophlyctis

vor, die er nach dem Sammler U. Rübsameni nennt. Der Pilz ist am Rhein bei St. Goar auf Rumex scutatus gefunden worden und ruft knollenförmige Wurzelanschwellungen hervor. Die neue Art steht zwischen U. leprioides und major. Redner geht dann noch näher auf die Stellung der Gattung Urophlyctis zu Cladochytrium und Physoderma ein. Voigt (Hamburg).

(Schluss folgt.)

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Berlin vom 1. bis 12. Oktober 1901. In diesem Kursus, der im übrigen in Gemässheit des bereits mitgeteilten Programms*) verlief, waren nur auswärtige Teilnehmer einberufen. Der Schwerpunkt lag auf den praktischen Uebungen, über deren Einzelheiten Nachstehendes zu berichten ist.

1. In den praktischen Uebungen in der mechanischen Werkstatt wurden einige der wichtigsten Arbeiten des praktischen Mechanikers gelehrt, soweit sie für den Lehrer der Physik von Wert sind, nämlich Weich- und Hartlöten verschiedener Gegenstände aus Messing, Zink, Weissblech u. s. f., — ferner Glasbearbeitung, insbesondere Sprengen, Bohren, Schleifen, Einschmelzen von Platindraht, Stanniolkleben, Kitten, Leimen, Sägen und Bohren verschiedener Stoffe, letzteres auch mittels der Drehbank.

Einfache Reparaturen, dabei verschiedene Arbeiten, z. B. Behandlung von Blattgold, Kokonfäden u. dergl.

2. Die Uebungen in elektrischen und magnetischen Messungen bezweckten eine Einführung der Teilnehmer in die Technik der Fundamentalmessungen des Schwach- und Starkstromes mit Anwendung der modernen Messapparate und unter Berücksichtigung der gebräuchlichsten Messmethoden der Praxis. Gleichzeitig sollen sie einen Einblick gewinnen in das Gesamtgebiet der modernen Anwendung der Elektrizität. Die Uebungen umfassten demgemäss

a) (Gleichstrom). Fundamentalmessungen (von Widerständen, Spannungen, Stromstärken, indirekte Widerstandsmessung). Aichungen (von Voltmetern, Ampèremetern). Anwendungen (Messungen an Akkumulatoren und an Glüh- und Bogenlampen, Elektrizitätszähler, Elektromotor- und Generator-Messungen).

b) (Wechselstrom). Aichungen einiger Wechselstrom-Messapparate; Strom-, Spannungs- und Arbeitsbestimmungen an Wechselstrom-Maschinen, Messungen von Transformatoren, Spannungskurven von Wechselstrom-Maschinen.

c) Magnetische und Kondensator-Messungen (Hysteresis-Kurve. Feldstärke, Kapazitätsmessung der Kondensatoren).

3. Die Uebungen im Projizieren und in der objektiven Darstellung physikalischer Erscheinungen erstreckten sich auf folgendes:

Demonstration und Besprechung von Projektionsapparaten für elektrisches Licht und andere Lichtquellen.

Uebungen im Gebrauch der Projektionsapparate, Projizieren von diapositiven und von mikroskopischen Präparaten.

Uebungen in der objektiven Darstellung physikalischer Erscheinungen aus dem Gebiet der Mechanik, Optik, Wärme- und Elektrizitätslehre.

Uebungen in der Aufstellung und im Gebrauch des Spiegelgalvanometers.

4. Die Uebungen in der Anfertigung zoologischer Präparate betrafen die wichtigsten Methoden zur Herstellung, Aufstellung und Konservierung zoologischer Präparate und zwar mit besonderer Rücksicht auf die zur Ergänzung und Instandhaltung einer zoologischen Schulsammlung erforderlichen Fertigkeiten. Demgemäss gestalteten sie sich wie folgt:

Skelettieren und Aufstellen einzelner Teile von Skeletten.

Herstellung entomologischer (Trocken-) Präparate aus den Gebieten der Anatomie und Biologie, Aufstellung der Präparate.

Anfertigung von Spiritus-Präparaten, für welche das Material aus der Königlichen Biologischen Anstalt auf Helgoland bezogen wurde.

Im Anschluss hieran die wichtigsten Methoden der Konservierung.

5. Die Uebungen aus dem Gebiet der Mikroskopie und Physiologie der Pflanzen dienten dazu, die Teilnehmer vertraut zu machen mit dem Gebrauch der neueren, vervollkommneten Mikroskope, den wichtigsten Methoden der Anfertigung und Konservierung mikroskopischer Präparate, der Aus-

*) S. Unt.-Bl. VII, 5, S. 103. In dem Programm ist nachträglich ein Druckfehler zu berichtigen: statt Dr. Martelli muss es heissen: Dr. Martens.

führung einfacher, für den Unterricht geeigneter physiologischer Experimente, der Herstellung von Reinkulturen; die mikroskopischen Uebungen erstreckten sich sowohl auf die einzelligen lebenden Organismen, wie auf die Anatomie der höheren Gewächse und zwar unter steter Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen Bau und Leistung. Bei den physiologischen Experimenten wurde hauptsächlich die Ernährung der Pflanzen berücksichtigt. Bezüglich der Fortpflanzung war insbesondere der Generationswechsel der Moose und Farnkräuter Gegenstand der Beobachtung.

Lehrmittel-Besprechungen.

Martin Schilling (Halle a. S.), Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. Diese, bei Gelegenheit der Giessener Versammlung ausgestellten Modelle*) zerfallen in drei Gruppen.

Die erste Gruppe bot die durch die nachstehenden 4 Figuren illustrierten, von Professor Dr. Guido Hauck an der Technischen Hochschule Berlin angegebenen Modelle, die bestimmt sind, dem Schüler ein reicheres und vielseitigeres Material zu bieten, als die einfachen geometrischen Körper. Zu diesem Zweck erschien es notwendig, unter Beibehaltung von regelmässigen Formen im ganzen von der Forderung durchgängiger Konvexität der Flächenwinkel Abstand zu nehmen.

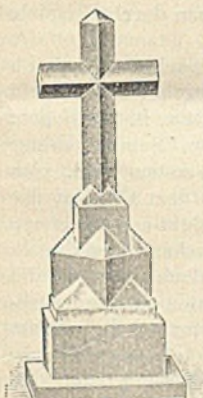


Fig. 1.

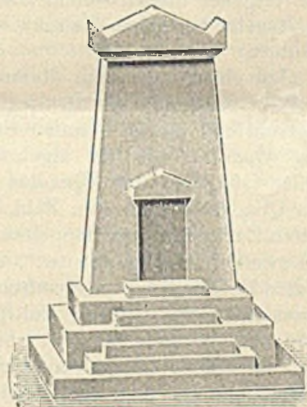


Fig. 2.

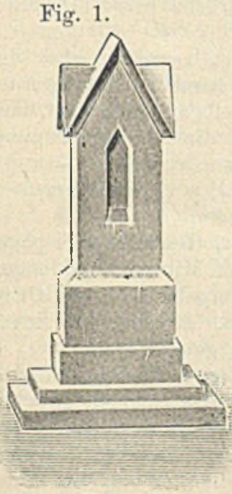


Fig. 3.

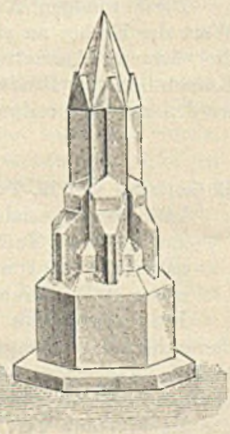


Fig. 4.

*) S. Unt.-Bl. VII, 3, S. 54.

Die zweite durch die folgenden 4 Figuren erläuterte Gruppe enthielt eine Reihe von Modellen, die Professor Dr. Fr. Schilling an der Universität Göttingen angegeben hat. Eine besondere Erläuterung bedürfen diese Figuren kaum, doch sei u. a. erwähnt, dass zu der Projektionstafel (Fig. 5) noch 2 Hilfstafeln, ferner im ganzen 8 Stahlstäbe gehören, die zur Hälfte an dem einen Ende in Messingknöpfe auslaufen, um Punkte zu markieren, während die Darstellung von Geraden durch Stäbe, die in Spitzen auslaufen, bewirkt wird.

Zur Erläuterung der mittels des Modells 8 zu bewirkenden Kegelschnitt-Konstruktion sei nur kurz darauf hingewiesen, dass durch die aus der Zeichnung deutlich ersichtliche Vorrichtung die Punktreihen KG_1 und KG_2 perspektivisch aufeinander bezogen und von G_2 und G_1 aus so projiziert werden, dass entsprechende Strahlen beider projektiven Strahlbüschel sich gerade in einem Punkte des entsprechenden Kegelschnitts (hier einer Ellipse) schneiden.

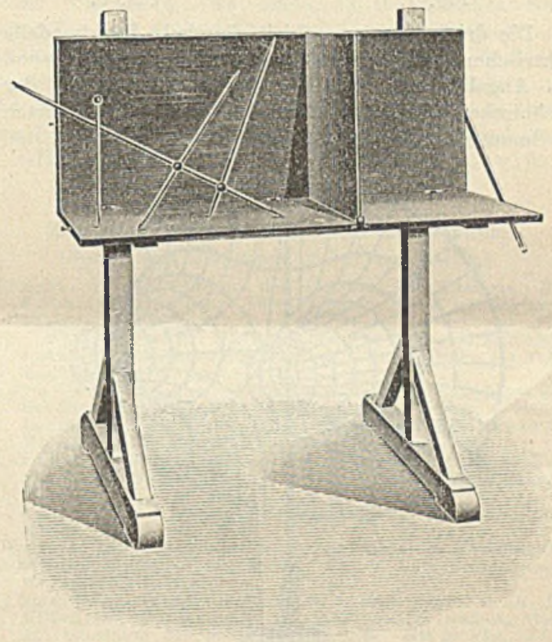


Fig. 5.

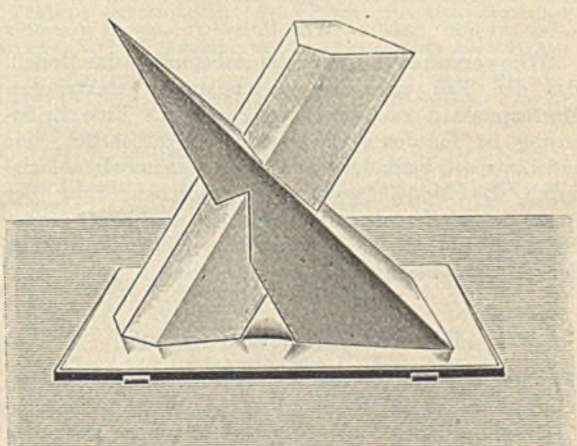


Fig. 6.

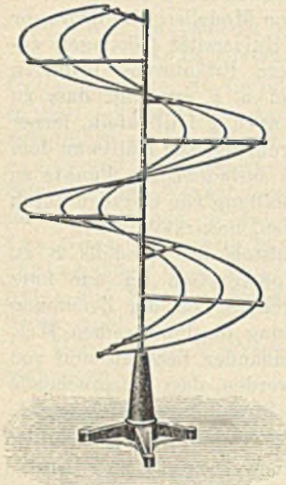


Fig. 7.

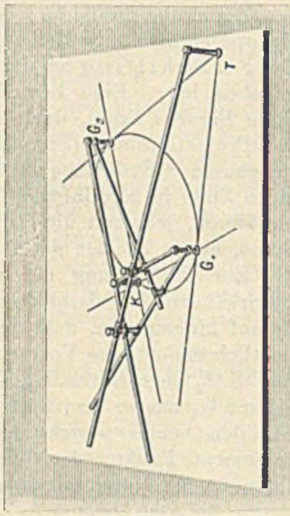


Fig. 8.

Die dritte Gruppe enthielt räumliche Drahtmodelle elektrischer Aequipotential- und Kraft-Linien auf Grund von Angaben des Prof. Dr. O. Lehmann von der Technischen Hochschule Karlsruhe ausgeführt nach Zeichnungen von Dr. H. Scholl.

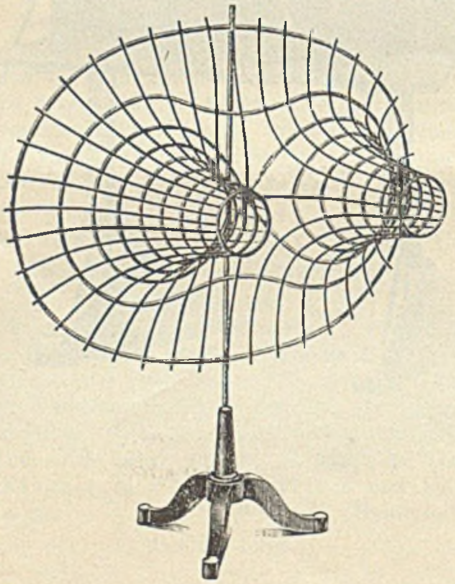


Fig. 9.

Die vorstehende Figur zeigt insbesondere das Modell, das den Fall von zwei gleichnamigen elektrischen Massenpunkten zur Anschauung bringt. Eine Erläuterung ist für den Sachverständigen entbehrlich, nur auf Eines sei besonders hingewiesen, nämlich auf die durch das Modell gewährte Veranschaulichung der Analogie zwischen den Aequipotential- und Kraft-Linien des elektrischen Feldes und den Niveau- und Fall-Linien der Topographie. Sch.

Bücher-Besprechungen.

Servus, H., Dr., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium zu Berlin und Privat-Dozent an der technischen Hochschule zu Charlottenburg, Regeln der Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Teil I: VI und 130 S. Preis 1,40 Mk.; Teil II: 235 S. Preis 2 Mk. Berlin, Otto Salle, 1897.

Der Verfasser hat den gesamten Unterrichtsstoff nach den preussischen Lehrplänen in 2 Teilen angeordnet, von denen der 1. Teil in 3 Abschnitten die Pensen für U III, O III und U II bringt, während der andere, bis zum Abiturientenexamen eines Gymnasiums, Realgymnasiums und einer Ober-Realschule ausreichend, in 2 Abschnitten die Pensen für O II und I enthält. Der Titel „Regeln der Arithmetik und Algebra" ist indessen nicht ganz zutreffend und wird bei den Nichtkennern des Buches einen falschen Begriff vom Inhalt desselben hervorrufen. Referent würde dieses vielmehr „Lehrbuch oder Leitfaden der Arithmetik und Algebra" genannt haben, denn als ein Schulbuch im besten Sinne, aus langjähriger Lehrthätigkeit hervorgegangen, bringt es in einer für die Schüler ausreichenden Weise thatsächlich einen vollständigen Lehrgang der Arithmetik und Algebra, in dem die Regeln alsdann, gewissermassen als Niederschlag, in klarer übersichtlicher Weise durch fetten Druck hervorgehoben sind. Der Verfasser hat hiermit die Absicht verfolgt, einmal den Lehrer des zeitraubenden Diktierens zu überheben und so eine Vereinfachung des Unterrichtsbetriebes herbeizuführen, zum anderen aber dem Schüler eine Art Kanon von Regeln zu bieten, die ihm durch direktes Auswendiglernen in Fleisch und Blut übergehen und so als steter Wegweiser und Ratgeber dienen sollen. Zu letzterem Zwecke sind alle Regeln, besonders die schwierigeren durch Beispiele erläutert.

Jedoch will es dem Referenten scheinen, als ob die Zahl der durch den Druck hervorgehobenen Regeln eingeschränkt werden könnte. So fällt z. B. die Regel: „Das Quadrat aus der algebraischen Summe dreier Zahlen ist gleich dem Quadrat der ersten Zahl, plus dem Quadrat der zweiten Zahl, plus dem Quadrat der dritten Zahl, plus dem doppelten Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, plus usw.", abgesehen davon, dass sie dem Referenten zu mechanisch ist, doch wohl unter die allgemeine Regel von der Multiplikation zweier Aggregate. Andererseits ist nicht recht einzusehen, warum u. a. die Regel: „2 gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man ihre Zähler subtrahiert und den Nenner unverändert lässt", fett gedruckt, d. h. zum Auswendiglernen besonders bezeichnet ist, die entsprechende: „Gleichnamige Brüche werden addiert usw." aber nicht.

Diese wenigen Ausstellungen vermögen aber den Wert des Buches an sich nicht herabzumindern. Auch die äussere Ausstattung desselben, Schönheit und Korrektheit des Druckes, sowie die Güte des Papieres werden zur Verbreitung desselben beitragen. —

Knake (Nordhausen).

* * *

E. Gerland und K. Traumüller, Geschichte der physikalischen Experimentierkunst. Mit 425 Abbildungen, zum grössten Teil in Wiedergabe nach den Originalwerken XVI und 442 S. Leipzig, W. Engelmann 1899. Preis Mk. 14, geb. Mk. 17.

Ein vorzügliches Buch, dessen Verdienstlichkeit dadurch nicht verringert wird, dass es nicht ganz das bietet, was man nach dem Titel erwarten sollte, nämlich eine Darstellung der stufenweisen Entwickelung, die die Methode des Experimentierens von den ersten Anfängen an bis zum heutigen Stande erfahren hat. Was es bietet, ist etwas anderes, wenn auch damit verwandtes:

im Gegensatz zu den vorhandenen Darstellungen der Entwickelung unserer physikalischen Kenntnisse, die die Geschichte der wachsenden Einsicht in das Wesen der physikalischen Vorgänge zum Gegenstand haben, finden wir hier eine eingehende Darstellung der technischen Mittel, durch deren Benutzung die einzelnen Forscher zu ihren Ergebnissen gelangt sind.

Auch in dieser Gestalt ist das Buch eine bedeutsame, in Wahrheit eine Lücke ausfüllende Erscheinung, ein neues und eigenartiges Hilfsmittel eines nicht blos an der Oberfläche haftenden Unterrichts.

Wie die Verfasser im Vorwort selbst betonen, steht die Beschreibung der von den einzelnen Bahnbrechern der physikalischen Forschung angegebenen oder benutzten Apparate im Mittelpunkt der Darstellung, die Wiedergabe der Originalabbildungen ist dabei besonders erfreulich und dankenswert. Was die Einteilung des Stoffes betrifft, so gliedert sich das Buch in drei Hauptabschnitte, Geschichte der Experimentierkunst im Altertum, im Mittelalter und in der neueren Zeit; der letzte, bis in die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts hineinreichende Abschnitt, hat naturgemäss bei weitem die grösste Ausdehnung. Die Gliederung der einzelnen Hauptabschnitte lehnt sich zumteil an die sachliche Entwickelung unserer physikalischen Kenntnisse an, vielfach aber auch an die Namen der einzelnen Träger der physikalischen Forschung, wie dies ja auch in der Natur des Gegenstandes liegt. Zum besonderen Vorzuge gereicht der Darstellung noch die namentlich in den Einleitungen zu den einzelnen Abschnitten hervortretende Betonung des Zusammenhanges zwischen der fortschreitenden physikalischen Erkenntnis und der gesamten Kulturentwickelung, dadurch erhöht sich der Wert des Buches als eines Hilfsmittels für einen Betrieb des physikalischen Unterrichts, der nicht blos die Aneignung nützlicher Kenntnisse, sondern eine innerliche Geistesbildung bezweckt. So sei das Buch, dessen Brauchbarkeit durch ein sehr vollständiges Sachregister am Schluss und ein Verzeichnis der in ihm enthaltenen Abbildungen, unter Angabe der diese Abbildungen enthaltenden Originalwerke wesentlich erhöht wird, der verdienten Beachtung von seiten der Physiklehrer und aller Freunde einer gründlichen physikalischen Bildung angelegentlichst empfohlen. P.

* * *

W. Ostwald, Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie, elementar dargestellt. Mit 2 Figuren im Text. Dritte vermehrte Auflage. Leipzig 1901, Verlag von Wilhelm Engelmann (Preis geb. Mk. 7.—).

Obwohl die analytische Chemie bei allen wissenschaftlichen und technischen Arbeiten immer die ausgedehnteste Anwendung gefunden hat, und obwohl ihre Unentbehrlichkeit von keiner Seite bestritten wurde, so hat diese Disziplin dennoch neben den übrigen Gliedern der chemischen Wissenschaft stets mehr den Rang einer dienenden Magd, als den eines vollberechtigten Familienmitgliedes eingenommen. Auf allen anderen Gebieten hat immer die theoretische Deutung der Vorgänge im Vordergrund des Interesses gestanden und ist massgebend gewesen auch für die Ausdrucks- und Schreibweise; in der analytischen Chemie dagegen begnügt man sich selbst heute noch vielfach mit theoretischen Wendungen und Gewändern, welche von den übrigen Disziplinen schon vor etwa 50 Jahren als unmodern oder veraltet bei Seite gelegt sind. Wenn beispielsweise die Bestandteile des Kaliumsulfats in den Ergebnissen einer Analyse als K_2O und SO_3 angeführt werden, so liegt darin doch keineswegs die wissenschaftliche Auffassungsweise der heutigen Zeit, sondern diejenige des eletrochemischen Dualismus, der vor 80 Jahren zeitgemäss war. Deshalb ist es von grösster Bedeutung, dass Ostwald als einer der gewiegtesten und erfolgreichsten Forscher auf theoretischem Gebiete es unternommen hat, eine wissenschaftliche Begründung und Darstellung der analytischen Chemie auf moderner Grundlage zu geben und dadurch ein ganz neues Licht auf täglich geübte und altbekannte Erscheinungen zu werfen. Namentlich durch die heutige Theorie der Lösungen ist die Deutung der meisten analytischen Reaktionen eine ganz andere geworden, und gerade hierin liegt ein enormer Fortschritt für die gesamte analytische Chemie.

Der grosse Beifall, welchen die beiden ersten Auflagen des jetzt wiederum erscheinenden Werkes gefunden haben, macht es wahrscheinlich, dass nach und nach der Unterricht in den analytischen Laboratorien im Sinne von Ostwalds modernen theoretischen Auffassungen eine völlige Umgestaltung und Neubelebung erfahren wird. — Gegenüber den früheren Auflagen weist die jetzt vorliegende zahlreiche Ergänzungen und Verbesserungen auf, namentlich ist ein längerer Paragraph über elektrochemische Analyse neu eingeschaltet.

Braunschweig. Wilhelm Levin.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Bendt, F., Katechismus der algebraischen Analysis. Mit 6 Abb. (Webers illustr. Katechismen No. 229). Leipzig 1901, Weber. Mk. 2.50 geb.

—,— Katechismus der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Mit 39 Abb. (Webers illustr. Katechismen No. 157). Ebenda. Mk. 3.— geb.

Bernhard, M., Darstellende Geometrie mit Einschluss der Schattenkonstruktionen. Als Leitfaden f. d. Unt. a. techn. Lehranst., O.-R.-S. und R.-G., sowie zum Selbststudium. Mit 229 Fig. Stuttgart 1901, Enderlen. Mk. 1.60.

Berthold, K., Darstellungen aus der Natur, durchgesehen von Ludw. Borgas. 4. Aufl. Mit 127 Abb. Köln, Bachem. Mk. 3.50.

Brauer, E. A., Springende Logarithmen. Karlsruhe 1901, Braun. Mk. —.90.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. Band von 1668–1758. Mit 147 Fig. 2. Aufl. Leipzig 1901, Teubner. Mk. 12.40.

Crüger, J., Lehrbuch der Physik. 9. Aufl. Bearb. v. Dr. R. Hildebrand. Mit 493 Abb. u. 1 Spektraltafel. Anhang hierzu: Elemente der mathem. Erdkunde. Mit 29 Fig. Einführung in die Chemie und Mineralogie. Mit 30 Fig. Von F. Pietzker. Leipzig 1901, Amelang.

Hadamard, J., La Série de Taylor et son prolongement analytique (Scientia No. 12). Paris 1901, Naud.

Hanncke, R., Erdkundliche Aufsätze für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Neue Folge: Die nicht deutschen Staaten Europas. Glogau 1901, Flemming. Mk. 1.80 geb.

Hentschel, O., Ausführung einiger konformen Abbildungen der Parabel auf den Kreis und unendlich lange Parallelstreifen. Mit 9 Figurentafeln. Leipzig 1900, Fock. Mk. 1.20.

Hermes, J., Geschwindigkeitslehre in der Schule. Jahresbericht des Königl. Realgymnasiums zu Osnabrück 1901 (No. 351).

Heussi, J., Leitfaden der Physik. 15. Aufl. Mit 172 Holzschn. Bearbeitet von H. Weinert. Mit Anhang: Grundbegriffe der Chemie von H. Weinert. Berlin 1901, Salle. Mk. 1.80.

Hummel, A., Leitfaden der Naturgeschichte. Unter steter Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen Körperbau und Lebensweise neu bearbeitet von R. Werner. Erstes Heft. Lehre vom Menschen. Tierkunde. Mit 125 Abb. 23/24. Aufl. Leipzig, Hirt & Sohn. Mk. —.60.

Kirchhoff, A., Erdkunde für Schulen. II. Teil. 8. Aufl. Mit 36 Fig. u. 1 Tafel. Halle 1901, Buchh. d. Waisenhauses. Mk. 2.75 geb.

Kitt, M., Grundlinien der Politschen Arithmetik. I. Teil: Zinseszins und Rentenrechnung. II. Teil: Tabellen. Wien 1901, Graeser & Co.

Kleiber, J., Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien. Mit Fig. München 1901, Oldenbourg. Mk. 3.— geb.

Koehne, E., Pflanzenkunde. Mit 178 Abbild. u. 1 Karte. Bielefeld, Velhagen & Klasing. Mk. 2.80 geb.

Kolbe, M., Der Einfluss der Naturwissenschaften auf die Kulturentwickelung, insbesondere auf die höheren Schulen.

Jubiläumsfestschrift des Königlichen Realgymnasiums zu Bromberg 1901.

Kraepelin, R., Naturstudien im Hause. Ein Buch für die Jugend. Mit Zeichn. 2. Auflage Leipzig 1901, Teubner. Mk. 3.20 geb.

Krebs, W., Atmosphärische Pracht- und Kraftentfaltung. Zwei Essays (I. Die Regenbogen und ihre Theorie; II. Luftwogen und Luftschiffahrt). Mit 8 Abb. Sammlung gemeinverständlicher wissenschaft. Vorträge, Heft 200. Hamburg, Verlagsanstalt und Druckerei.

—„— Beiträge zur Frage der unterrichtlichen Verwertung von Schulausflügen. Jahresbericht der Realschule zu Barr i. E. (No. 570).

Kreibig, C., Die fünf Sinne des Menschen. Mit 30 Abb. (aus Natur und Geisteswelt Bd. 27). Leipzig 1901, Teubner. Mk. 2.— geb.

Krohs, G., Die algebraisch lösbaren irreduziblen Gleichungen fünften Grades. Teil I: Jahresbericht des Luisenstädt. Gymnasiums zu Berlin 1901 (No. 63).

Lorey, W., Ueber das geometrische Mittel, insbesondere über eine dadurch bewirkte Annäherung kubischer Irrationalitäten. Inaugural-Dissertation. Halle 1901.

Marc, L., Sammlung der Aufgaben aus der höheren Mathematik, techn. Mechanik und darstellenden Geometrie, welche bei der Vorprüfung für das Bauingenieur-, Architektur- und Maschinen-Ingenieurfach an der Techn. Hochschule zu München in den Jahren 1886 bis 1901 gestellt worden sind. München 1901, Ackermann.

Mathem.-naturwiss. Mitteilungen, im Auftrage des mathem.-naturw. Vereins in Württemberg, herausgegeben von Schmidt, Haas, Wölfling. Zweite Serie, 3. Band, 2. und 3. Heft (April und Juni 1901). Stuttgart 1901, Metzler.

Meyer, Fr., Differential- und Integralrechnung. 1. Band: Differentialrechnung. Mit 13 Fig. (Sammlung Schubert X) Leipzig 1901, Göschen. Mk. 9.— geb.

Mocniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von Prof. J. Spielmann. 1. Abt. (für die 1. und 2. Klasse) mit 114 Fig. 26. Auflage. 2. Abt. (für die 3. u. 4. Klasse) mit 91 Fig. 21. Aufl. Prag 1901, Tempsky. à Mk. 1.50 geb.

—„— Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearb. von J. Spielmann. Mit 223 Fig. 23. Aufl. Ebenda. Mk. 3.80 geb.

Most, R., Der mathematische Unterrichtsstoff und das mathematische Bildungsgebiet in den oberen Klassen des Realgymnasiums und der Oberrealschule. Coblenz 1901, Scheid. Mk. 4.—.

Müller, F., Mathematisches Vokabularium. Französisch-Deutsch und Deutsch-Französisch. 2. Hälfte. Leipzig 1901, Teubner. Mk. 11.

Nees, Th., Anregung zur Ausführung neuer vielversprechender Experimental- und theoret. Untersuchungen vermittelst neuer konstruierter Apparate und neuer Methoden. Hamburg, Hirsch.

Neunzehnter Jahresbericht über das Herzogl. Anhaltische Landesseminar in Cöthen. Ostern 1901 (Geometrische Darstellung algebraischer Formeln von M. Mittag. — Lernstoff a. d. mineral. Stunde d. Seminar-Unterklasse, von Pforte).

Nolls Naturgeschichte des Menschen, 4. Auflage besorgt von H. Reichenbach. Mit 14 Holzschnitten und einer Tafel in Farbendruck. Breslau 1901, Hirt. Mk. 1.50.

Pahde, Erdkunde für höhere Lehranstalten. III. Teil. Mittelstufe, 2. Stück. Mit 8 Vollbildern und 6 Abbild. Glogau 1901, Flemming. Mk. 2.40 geb.

Poske, F., Gedächtnisrede auf Bernhard Schwalbe, Nebst einem Bildnis Schwalbes und einem Verzeichnis seiner Veröffentlichungen. Berlin 1901, Springer.

Richter, M., Das geometrische Zeichnen in der Realschule. Eine methodische Studie. Jahresbericht der I. Realschule zu Leipzig, 1901 (No. 618).

Richter's Atlas für höhere Schulen. Neubearb. von Prof. Dr. Richter und Oberl. Schulteis. 45 Karten mit 40 Nebenkarten. 23. Aufl. Glogau 1901, Flemming. Mk. 5.— geb.

Russner, J., Elementare Experimental-Physik für höhere Lehranstalten. III. Teil, Akustik und Optik. Mit 279 Abb. und 1 Spektraltafel; IV. Teil, Wärme-Reibungselektrizität. Mit 221 Abb. V. Teil, Magnetismus und Galvanismus. Mit 291 Abb. Hannover 1901, Gebr. Jänecke. Preis des Bandes Mk. 3.20 geb.

Sachs, J., Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie. 2. Teil. Mit 446 Erklär. u. 135 Fig. Stuttgart 1901, Maier. Mk. 6.—.

v. Schaewen, P., Die Binomialkoëffizienten in Verbindung mit figurierten Zahlen u. arithm. Reihen höherer Ordnung. Glogau 1901, Flemming. Mk. 1.20.

Schafheitlin, P., Einige Sätze der elementaren Raumlehre. Mit 1 Tafel. Jahresbericht des Sophien-Realgymnasiums zu Berlin 1901 (No. 105).

Schlabach, G., Ueber den elektrischen Leitungswiderstand loser Kontakte. Jahresbericht der städt. Realschule zu Düsseldorf 1901 (No. 534).

Schmehl, Chr., Die Algebra und algebraische Analysis mit Einschluss einer elementaren Theorie der Determinanten. Mit 31 Fig. Giessen 1901. Roth. Mk. 2.50.

Schmidt, J., Chemisches Praktikum. 1. Teil. Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie. Breslau 1901, Hirt. Mk. 1,60.

Schmidt, W. B. u. Landsberg, B., Hilfs- und Uebungsbuch für den botanischen und zoologischen Unterricht. II. Teil: Zoologie. 1. u. 2. Kursus. Leipzig 1901, Teubner. 1. Kursus Mk. 2.20, 2. Kursus Mk. 1.80.

Schönemann, Ueber die Ermittelung von Entfernungen und Höhen durch perspektivische Beziehungen. Soest 1901. Nassesche Buchdruckerei.

Schuster, A., Lustige Rechenkunst. Mit 40 Abb. Stuttgart, Union Deutsche Verlagsgesellschaft.

Siebert, G., Lehrbuch der Chemie und Mineralogie in 3 Teilen. 1. Teil: Einleitung in die Chemie und Mineralogie. Mit 100 Abb. Mk. 1.25 geb. 2. Teil: Anorganische Chemie. Mit 91 Abb. und 1 Tafel. Mk. 1.75 geb. 3. Teil: Organische Chemie. Mit 32 Abb. Mk. 1.25 geb. Braunschweig 1901, Vieweg & Sohn.

Sperber, J., Leitfaden für den Unterricht in der anorganischen Chemie. 2 Teil. Zürich 1901, Speidel. Mk. 2.40.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Mit Holzschnitten. Ausg. A. 25. Aufl. Potsdam 1901, Stein. Mk. 3.— geb.

—„— Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Mit Holzschn. 5. Aufl. Ebenda. Mk. 1.80 geb.

—„— Lehrbuch der Stereometrie. Mit Holzschn. 3. Auflage. Ebenda. Mk. 2.— geb.

Sprockhoff, A., Naturkunde für höhere Mädchenschulen. I. Teil. 3. Aufl. Naturgeschichte für das 4. u. 5. Schuljahr. 2. Teil: für das 6. und 7. Schuljahr. Mit vielen Abb. Hannover 1901, Meyer. Teil I Mk. 1.50 geb. Teil II Mk. 1.80 geb.

Anzeigen.

Die Gestaltung des Raumes.

Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Von **Prof. F. Pietzker.**

Mit 10 Figuren im Text. — Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der Unterricht in der

analytischen Geometrie

Für Lehrer und zum Selbstunterricht.

Von

Dr. Wilh. Krumme,

weil. Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig.

Mit 53 Figuren im Text.

Preis 6 Mk. 50 Pf.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30.

Grundsätze und Schemata für den

Rechen-Unterricht

an höheren Schulen.

Mit einem Anhange:

Die periodischen Dezimalbrüche

nebst Tabellen für dieselben.

Von

Dr. Karl Bochow

Oberlehrer a. d. Realschule zu Magdeburg.

Preis 1.20 Mk.

Die Formeln

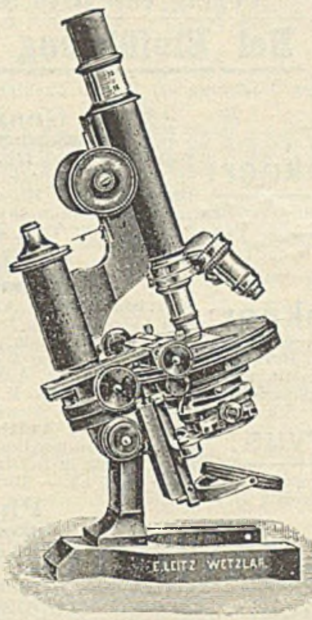
für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen abgeleitet an Figuren.

Von

Dr. Karl Bochow

Oberlehrer in Magdeburg.

Preis 1 Mk.



E. Leitz,

Optische Werkstätte

Wetzlar

Filialen: Berlin NW., Luisenstr. 45

New-York 411 W. 59 Str.

Chicago 659 W.

Mikroskope

Mikrotome

Lupen-Mikroskope

Mikrophotographische Apparate.

Photographische Objektive

Projektions-Apparate.

Ueber 60000 Leitz-Mikroskope im Gebrauch.

Deutsche, englische und französische Kataloge kostenfrei.

Ein Werk für Jedermann!

2. verbesserte Auflage.

Mit Karten u. Abbildungen

Die Erde

und die

Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Eine physische Erdbeschreibung nach

E. Reclus

von

Dr. Otto Ule.

Preis 10 Mk., geb. 12 Mk.

Verlag Otto Salle, Berlin W. 30.

Für jeden Hauswirt:

Der Bauherr

und

Hauswirt.

Ein praktischer Ratgeber für Jedermann in Bau- und Hausangelegenheiten.

Von

S. Müller, Architekt

Mit 8 Separatbildern u. 265 Textabbildungen.

Preis geheftet 5 M., gebunden 6 M. 60 Pf.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Für

Schüler-Bibliotheken

und

*** Prämien. ***

Die Erde

und die Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Nach E. Reclus von Dr. **Otto Ule.**

Zweite umgearbeit. Auflage von Dr. Willi Ule, Privatdocent an der Universität Halle.

Mit 15 Buntdruckkarten, 5 Vollbildern und 157 Textabbildungen.

Preis geh. 10 Mk., eleg. geb. 12 Mk.

Das Buch der **physikal. Erscheinungen.**

Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Neue Ausgabe. Mit 11 Buntdruckbildern, 9 gr. Abbildungen und 448 Holzschnitten. gr. 8°.

Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30 Maassenstrasse 19.

Die physikalischen Kräfte

im Dienste der Gewerbe, Kunst und Wissenschaft. Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Zweite ergänzte Auflage. Mit 416 Holzschnitten, 15 Separatbildern und Buntdruckkarten. gr. 8°.

Preis 13 Mk.; geb. 15 Mk.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.