ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989
Seria: ENERGETYKA z. 106 Nr kol. 998

Zygmunt KOLENDA
Instytut Metalurgii Metali Nieżelaznych
Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie

ZASTOSOWANIE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO W GOSPODARCE CIEPLNEJ

Streszczenie. W artykule dokonano przeglądu prac dotyczących zastosowania metody najmniejszych kwadratów, w ujęciu rachunku wyrównawczego, w technice cieplnej. Podano ogólne sformułowanie zagadnienia, opisano jedną z ogólniejszych metod obliczeniowych oraz pokazano obszary zastosowań.

1. WSTĘP

Zasada najmniejszych kwadratów, stanowiąca podstawę rachunku wyrównawczego, sformułowana została przez Gaussa i jest szeroko stosowana przy opracowywaniu matematycznym wyników pomiarów. Najbardziej ogólnym przypadkiem jest problem z warunkami dodatkowymi, kiedy wyniki pomiarów obarczone błędami i wielkości niemierzone (niewiadome) powiązane są równaniami i zależnościami nierównościowymi liniowymi i nieliniowymi.

Warunki te wynikają z praw fizyki, w szczególności z prawa zachowania ilości substancji i energii.

Zastosowanie zasady najmniejszych kwadratów w technice cieplnej podjął w literaturze zagadnienia J. Szargut w pracy dotyczącej uzgadniania bilansów pierwiastków chemicznych [25]. Od tego czasu metoda ta znalazła szerokie zastosowanie i stanowi ważną dziedzinę badań. Szkoła badawcza utworzona przez J. Szarguta może wykazać się liczącymi się osiągnięciami, skupiając pracowników naukowych z różnych ośrodków Polski. Jest to przy tym jedna z wielu szkół naukowych, jakie w swojej pracy naukowej utworzył J. Szargut.

Dotychczasowe zastosowania rachunku wyrównawczego w szeroko pojmowanej technice cieplnej można usystematyzować w następujących grupach tematycznych:

1° uzgadnianie bilansów substancji pierwiastków i energii w reakcjach chemicznych,

2° korygowanie wyników pomiarów stanowiących podstawę do optymalnego sterowania procesami cieplnymi,

3° uzgadnianie bilansów entalpii przy tworzeniu tablic termochemicznych (metoda wieloetapowego uzgadniania),
4° weryfikacja modeli matematycznych procesów transportu ciepła i masy,
5° rozwiązywanie zagadnień odwrotnych w teorii przewodzenia ciepła,
6° badanie własności radiacyjnych gazów,
7° wyznaczanie współczynników równań empirycznych,
8° wyznaczanie wewnętrznie zgodnych danych termodynamicznych z uwzględnieniem reakcji chemicznych.

W każdej z tych grup tematycznych opublikowano wiele liczących się publikacji w czasopismach krajowych i zagranicznych. Powstała również monografia opracowana pod kierunkiem J. Szarguta [30].

2. PODSTAWY TEORETYCZNE RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO

Wynik każdego pomiaru obarczony jest błędem, którego wielkość określa się zazwyczaj za pomocą błędu średniego pojedynczego pomiaru lub wartości średniej. Znane są powszechnie i szeroko stosowane elementarne metody szacowania wartości błędu tego rodzaju. Z najbardziej ogólnym problemem spotykamy się, gdy wyniki pomiarów oraz wielkości niemierzone związane są między sobą zależnościami funkcyjnymi, które winny być jednoznacznie spełnione. Problem zastosowania rachunku wyrównawczego pojawia się wówczas, gdy liczba tych zależności jest większa od liczby niewiadomych. Wskutek nieuniknionych błędów pomiarowych wielkości podlegających bezpośrednim pomiarom zależności te nie są spełnione. Układ tych zależności jest wówczas matematycznie sprzeczny. Sprzeczność tę można łatwo pokazać, eliminując niewiadome z układu zależności funkcyjnych (tworzących na ogół układ równań algebraicznych) i sprawdzając zgodność związków zawierających jedynie wielkości mierzone. Powstaje więc pytanie: w jaki sposób skorygować wyniki pomiarów, aby doprowadzić w sposób obiektywny do spełnienia tych zależności, wyznaczając równocześnie najbardziej prawdopodobne wartości wielkości mierzonych i niewiadomych? Jest to główny problem rachunku wyrównawczego. Niemniej ważne jest również dokonanie oceny dokładności skorygowanych wyników pomiarów i niewiadomych, co umożliwia kontrolę dotrzymania założonej dokładności pomiarów. Wynikiem takiego postępowania jest zawsze zmniejszenie niedokładności ocen wielkości mierzonych, co jest bezpośrednim rezultatem nadmiaru informacji występujących już w momencie formułowania problemu wyrównawczego.

Odpowiedź na postawione wyżej pytanie otrzymuje się przez sformułowanie dodatkowego kryterium, które umożliwić ma jednoznaczny wybór rozwiązania. W rachunku wyrównawczym przyjmuje się postać takiego kryterium w formie warunku:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\tilde{l}_i - l_i)^2}{\mu_i^2} \longrightarrow \text{minimum}, \tag{1}$$

gdzie:

$\tilde{l}_i$, l_i - wartość najbardziej prawdopodobna oraz wynik i-tego pomiaru,
n - liczba wyników pomiarowych,
μ_i - odchylenie standardowe wyniku pomiarowego.

Otrzymuje się więc klasyczny problem poszukiwania minimum warunkowego, gdyż minimum funkcji (1) poszukuje się w taki sposób, aby równocześnie spełnione były wszystkie zależności funkcyjne łączące wyniki pomiarów i wielkości niemierzone. Wybór postaci kryterium (1) jest w znacznej mierze arbitralny. Nie zaproponowano jednak lepszej formy takiego kryterium. Metoda obliczeniowa oparta na kształcie funkcji (1) nosi nazwę zasady najmniejszych kwadratów i w przypadku gdy wyniki pomiarów obarczone są błędami przypadkowymi, prowadzi do wartości najbardziej prawdopodobnych w sensie ogólnej teorii błędów, sformułowanej przez Gaussa.

3. METODY OBLICZENIOWE

Szczegółowe metody obliczeniowe stosowane w rachunku wyrównawczym w technice cieplnej omówione zostały w monografii [30]. Różnorodność tych metod wynika bezpośrednio z różnorodności problemów, jakie spotyka się w zagadnieniach cieplnych. Klasyczny rachunek wyrównawczy stosowany w obliczeniach geodezyjnych jest ograniczony do kilku metod obliczeniowych.

W celu zobrazowania stosowanych metod obliczeniowych omówiony zostanie problem wyrównywania jednoetapowego pomiarów bezpośrednich zawarunkowanych z niewiadomymi [30].

Oznaczmy przez $\mathbf{l}$ jednokolumnową macierz s niezależnych wyników pomiarów, zaś macierz diagonalna $\mathbf{M}$ stopnia s niech oznacza macierz kowariancji. Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do znalezienia poprawek $\mathbf{v}$ do wyników pomiarów zdefiniowanych jako:

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{l}} - \mathbf{l}$$

oraz n poprawek do przybliżonych wartości niewiadomych

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$$

takich, dla których przy warunku (1) spełnione są zależności funkcyjne:

$$f_m(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0 , \tag{2}$$

które po linearyzacji przyjmują postać:

$$Av + By = w \,, \tag{3}$$

przy czym

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f_1}{\partial l_s} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial l_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f_r}{\partial l_s} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{vmatrix} ,$$

gdzie macierz jednokolumnowa w oznacza niezgodność równań warunków (2) otrzymywaną po podstawieniu wartości wyników pomiarów i przybliżonych wartości niewiadomych do układu (2).

Wartości elementów macierzy A oraz B szacowane są w podobny sposób. Stosując znaną metodę Lagrange'a poszukiwania ekstremum warunkowego otrzymuje się dodatkowe dwa podukłady równań w postaci:

$$M^{-1}v - A^T k = 0 \tag{4}$$

$$B^T k = 0 \,. \tag{5}$$

Rozwiązanie pełnego układu równań (3), (4) i (5) daje:

- wartości poprawek do przybliżonych wartości niewiadomych

$$y = N^{-1}B^T F^{-1} w \,, \tag{6}$$

- wartości poprawek do wyników pomiarów

$$v = MA^T F^{-1}(w - By) \,, \tag{7}$$

gdzie:

$$F = AMA^T \,,$$

$$N = B^T F^{-1} B \,.$$

W przypadku nieliniowej postaci równań warunków (2) zachodzi konieczność stosowania procedury iteracyjnej.

Po przeprowadzeniu uzgodnienia algebraicznego, czyli wyznaczenia najbardziej prawdopodobnych wartości $\tilde{l}$ oraz $\tilde{x}$, przeprowadzić należy ocenę dokładności otrzymanych, poprawionych wyników pomiarów i niewiadomych. Ocenę tę uzyskuje się przez użycie prawa przenoszenia błędów przypadkowych. Szczegółowe obliczenia prowadzą do zależności macierzowej:

$$G = \begin{vmatrix} G_l, & G_{l,x} \\ G^T_{l,x}, & G_x \end{vmatrix},$$

gdzie:

$$G_l = M - MA^TF^{-1}(E - BN^{-1}B^TF^{-1})AM,$$

$$G_x = N^{-1}, \tag{8}$$

$$G_{l,x} = -MA^TF^{-1}BN^{-1}.$$

Elementy przekątnej głównej macierzy G są kwadratami odchyleń standardowych wyrównanych wyników pomiarów oraz niewiadomych. Z zależności (8) wynika bezpośrednio, że wartości odchyleń standardowych ocen wyników pomiarów ulegają zmniejszeniu. Wykorzystując prawo przenoszenia błędów przypadkowych, można wyprowadzić zależności dla obliczenia wartości błędów dowolnych funkcji wielkości mierzonych i niewiadomych [30].

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Omówiona poprzednio metoda uzgadniania zostanie dalej zilustrowana wybranymi przykładami zastosowań.

4.1. Uzgadnianie bilansów ilości substancji pierwiastków i energii w procesach chemicznych

Bilanse pierwiastków w procesach chemicznych bazują na prawie zachowania ilości substancji. Zastosowanie tego prawa do pierwiastków zasadniczych procesu prowadzi do układu równań algebraicznych w ilości równej liczbie tych pierwiastków. Układ równań bilansów uzupełniony jest równaniami na sumy udziałów gramowych i molowych wszystkich substratów i produktów procesu. Może być również niezbędne dodanie zależności wynikających z analizy składu mineralogicznego niektórych materiałów stałych [26].

Otrzymuje się w ten sposób układ równań warunków typu (2). Stosując opisaną w punkcie 3 metodę obliczeniową, wyznacza się wektory poprawek v oraz y i dalej najbardziej prawdopodobne wartości wyników pomiarowych i niewiadomych. Przykłady obliczeniowe uzgadniania bilansów substancji i energii znaleźć można w pracach [3, 6, 9, 26, 27, 29].

4.2. Optymalne sterowanie procesami cieplnymi

Problematykę zastosowania teorii uzgadniania bilansów substancji i energii dla celów sterowania optymalnego rozwinął K. Taramina pod kierunkiem J. Szarguta. Rozwiązany problem dotyczy optymalizacji procesów spalania z punktu widzenia określenia najbardziej właściwej wartości stosunku nadmiaru powietrza. Zagadnienie powyższe stanowiło tematykę rozprawy habilitacyjnej K. Taraminy i zostało ponadto omówione w pracy [29].

4.3. Obliczanie entalpii tworzenia

Tablice entalpii tworzenia sporządza się na podstawie pomiarów entalpii reakcji chemicznych. Niektóre z tych entalpii są wprost entalpiami tworzenia. Nie mierzone entalpie tworzenia oblicza się na podstawie równań reakcji chemicznych wykorzystując bilanse energii. Wykorzystanie rachunku wyrównawczego jest możliwe wówczas, gdy liczba nieznanych wartości entalpii tworzenia jest mniejsza od liczby równań stechiometrycznych, co zwykle ma miejsce. Zagadnienie wyznaczania najbardziej prawdopodobnych wartości entalpii tworzenia podjęła T. Styrylska [21], podając metodykę obliczeń opartą na wyrównywaniu entalpii reakcji jako bezpośrednich wyników pomiarów zawarunkowanych z niewiadomymi. Opracowała również teorię dwu- i wielostapowego uzgadniania, polegającą na dołączeniu do układu już uzgodnionego dodatkowych równań warunków (w miarę przybywania dodatkowych pomiarów) bez konieczności powtarzania obliczeń od początku [15, 16, 22, 23, 28]. Tematyka ta została sformułowana przez J. Szarguta.

4.4. Weryfikacja modeli matematycznych procesów transportu ciepła i masy

Klasyczne metody modelowania procesów transportu ciepła i masy bazują na schematach prowadzonych do jednoznacznego rozwiązania. Model matematyczny składa się wówczas z równań różniczkowych, całkowych lub różniczkowo-całkowych opisujących mechanizm zachodzących procesów oraz warunków jednoznaczności rozwiązania, zwanych warunkami brzegowo-początkowymi. Opis taki zawiera w sobie szereg uproszczeń. Zwykle bowiem układy równań mechanizmu procesów przyjmuje się w postaci liniowej (łatwość rozwiązania numerycznego), niektóre składowe zostają zaniedbane (przy rozwiązywaniu zagadnień promieniowania w wysokiej temperaturze zaniedbuje się mechanizm konwekcyjnego transportu ciepła) lub też zamiast zagadnień dwu- lub trójwymiarowych rozwiązuje się problemy jednowymiarowe. Takie podejście

jest źródłem błędów w rozwiązaniu numerycznym. Dodatkowe błędy wprowadza się przez użycie wartości określających własności termofizyczne substancji, które znane są z pewnym błędem pomiarowym.

Przy takim podejściu do modelowania matematycznego niemożliwe staje się określenie błędu rozwiązania. Błąd ten można jednak oszacować, jeżeli klasyczny sposób tworzenia modelu uzupełni się dodatkowymi informacjami. W przypadku procesów transportu ciepła i masy mogą to być znane rozwiązania lokalne (obarczone zazwyczaj błędem), czy też, obok niezbędnej dla jednoznacznego rozwiązania liczby warunków brzegowych, znane są inne ich rodzaje (np. obok warunków brzegowych pierwszego rodzaju możliwe jest oszacowanie wartości współczynnika wnikania ciepła). W takich przypadkach model matematyczny zawiera więcej równań aniżeli niewiadomych, co umożliwia zastosowanie metod rachunku wyrównawczego. Poprawność proponowanego modelu matematycznego można wówczas sprawdzić np. przez żądanie, by:

$$|\tilde{l}_i - l_i| < k\mu_i \qquad (i = 1,\dots,s)$$

gdzie k może być interpretowane jako stała Lipschitza, której wartość przyjmowana jest w sposób arbitralny, zazwyczaj $k = 1$. Zagadnienia powyższe zostały w ogólny sposób omówione w pracach [7, 8, 32], gdzie podano również przykład zastosowania w modelowaniu procesu radiacyjnego transportu ciepła. Zastosowania w rozwiązywaniu problemów brzegowych w teorii przewodzenia ciepła znaleźć można w publikacjach: [1, 2, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 24].

4.5. Rozwiązywanie zagadnień odwrotnych w teorii przewodzenia ciepła

Zagadnienia odwrotne rozwiązywania problemów brzegowo-początkowych można podzielić na trzy grupy:

- identyfikacja pola temperatury przy nieznanych warunkach brzegowych lecz znanym rozwiązaniu wewnątrz obszaru,
- określenie własności termofizycznych ciała,
- identyfikacja wydajności i rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła.

We wszystkich przypadkach można poszukiwać rozwiązania w sposób klasyczny, to znaczy przy minimalnej ilości informacji niezbędnych dla osiągnięcia jednoznacznego rozwiązania. Rozwiązania takie charakteryzują się jednak dużym błędem, którego wartość jest trudna do oszacowania. Wprowadzenie dodatkowych danych usztywnia problem, a poprzez zastosowanie rachunku wyrównawczego umożliwia przeprowadzenie oceny dokładności uzyskanego rozwiązania. Pierwszym z wymienionych uprzednio problemów odwrotnych z nadmiarem danych zajmowali się Kurpisz [12, 13, 14] i Skorek [20], uzyskując bardzo cenne wyniki.

Problemy określania własności termofizycznych były przedmiotem prac [1, 2, 24] i dotyczyły wyznaczania współczynnika przewodzenia ciepła ciał stałych.

Można stwierdzić, że zastosowanie rachunku wyrównawczego stanowi istotne wzbogacenie teoretyczne.

4.6. Badanie własności radiacyjnych gazów

Obszerne dane eksperymentalne określające emisyjność gazów pochodzą z różnych laboratoriów i w wielu przypadkach różnią się między sobą w istotny sposób. Podobnie jak w przypadku uzgadniania danych termodynamicznych możliwe jest i w tym zakresie zastosowanie rachunku wyrównawczego w celach weryfikacji publikowanych danych, jak również uzyskania zbioru wartości najbardziej prawdopodobnych. Tematyka ta była przedmiotem kilku publikacji [4, 24, 33] i jest kontynuowana.

4.7. Wyznaczanie współczynników równań empirycznych

W klasycznym podejściu do matematycznego opracowywania wyników pomiarów, np. metodą regresji, zakłada się, że wartości zmiennych niezależnych (zmienne kontrolowane) traktowane są jako bezbłędne. Przyjęcie takiego założenia jest jednak usprawiedliwione w niewielu szczegółowych przypadkach. Stąd też zastosowanie kryterium (1) z zastosowaniem metody wyrównywania pomiarów zawarunkowanych z niewiadomymi jest podejściem najbardziej ogólnym. Zagadnienie powyższe rozwijane jest w zespole J. Szarguta [31].

4.8. Wyznaczanie zgodnych danych termodynamicznych

Problem wyznaczania zgodnych danych termodynamicznych jest dalszym rozwinięciem prac T. Styrylskiej. Równania warunków są tutaj rozszerzone o zależności termodynamiczne łączące publikowane zbiory danych. Obszerną pracę teoretyczną na ten temat wykonał J. Norwisz [18], wykazując skuteczność metody na przykładzie układu PbO - $PbSO_4$.

5. PODSUMOWANIE

W artykule pokazano obszerne pole zastosowań rachunku wyrównawczego w technice cieplnej. Tematyka ta została postawiona przez J. Szarguta doprowadzając do utworzenia szkoły naukowej. Zdecydowana większość prezentowanych zagadnień stanowiła podstawę do uzyskania stopni naukowych doktora i doktora habilitowanego przez bezpośrednich uczniów Profesora, a obecnie już drugie pokolenie młodych pracowników naukowych rozwija tę tematykę. Twórcze zastosowania metod rachunku wyrównawczego staną się przedmiotem wielu jeszcze prac.

LITERATURA

[1] Dziedziniewicz K., Kolenda Z., Szmyd J.: (1987) Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów w teorii przewodzenia ciepła - rozszerzone prawo Fouriera, XIII Zjazd Termodynamików. Materiały konferencyjne, Kozubnik 1987, Vol. 1, ss. 146-51.

[2] Kenig T.: Zastosowanie metody bezpośredniego grzania próbki do określenia zależności temperaturowej współczynnika przewodzenia ciepła i jego anizotropii materiałów grafitowych. Praca doktorska, AGH, Kraków 1981.

[3] Kolenda Z. et al.: Chemical Elements Balances of the Flash Smelting Process with Supplementary Data, Pyrometallurgy '87. Imperial College, London 1987, Proc. Vol. 1, ss. 709-723.

[4] Kolenda Z., Szmyd J., Dziedziniewicz K.: Evaluation of Carbon Dioxide Standard Emissivity Using Least Squares Method, Archives of Metallurgy 1987, Vol. 23. No 4, ss. 587-602.

[5] Kolenda Z.: On the Solution of Boundary Value Problems with Supplementary Data, 8 th Intern. Conf. on Heat Transfer, San Francisco, Proc., Vol. 3, 1986, ss. 466-473.

[6] Kolenda Z., Szmyd J.: Material and Energy Balances of the Flash Smelting Process, Archives of Metallurgy, 1985, Vol. 30, ss. 3-20.

[7] Kolenda Z. et al.: Numerical Modelling of Heat Transfer Processes with Supplementary Data, Can J. Chem. Eng., October, 1983, ss. 627--634.

[8] Kolenda Z. et al.: Mathematical Modelling of Heat Transfer Processes with Constraints, 7 th Intern. Conf. on Heat Transfer, Munchen, 1982, ss. 511-515.

[9] Kolenda Z. et al.: Analiza energetyczny procesu odparowania cynku w kolumnie ołowiowej oparta na uzgodnionych bilansach substancji i energii, Arch. Hutnictwa, 1981, 26, No 1, ss. 125-135.

[10] Kolenda Z., Norwisz J., Pamuła W.: Numerical Determination of Temperature Distribution over an Aluminium Electrolyser Anode When Using Additional Data with Errors, Zeszyty Naukowe AGH, Metalurgia i Odlewnictwo, z. 3, Kraków 1980, s. 325.

[11] Kolenda Z., Allman J.S.: Coordination of Energy Balances in Heat Transfer, Bull. de l Acad. Pol. Sci., Vol. 22, 1974, ss. 33-37.

[12] Kurpisz K.: Wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych na podstawie obserwacji temperatury lub gęstości strumienia ciepła w wybranych punktach ciała. Rozprawa habilitacyjna, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, s. Energetyka, z. 84. Gliwice 1984.

[13] Kurpisz K.: Zastosowanie rachunku wyrównawczego do rozwiązywania odwrotnych zadań przewodzenia ciepła, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, s. Energetyka, z. 82, Gliwice 1983, ss. 77-89.

[14] Kurpisz K.: Wyznaczenie pola temperatury w ciałach stałych przy braku informacji o warunkach brzegowych lub o warunku początkowym, Archiwum Termodynamiki 1983, Vol. 4, ss. 301.

[15] Majcher G., Styrylska T.: Wieloetapowe wyrównywanie spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych, Matematyka Stosowana, XIII 1978, s. 67.

[16] Majcher G., Styrylska T.: Wieloetapowe wyrównywanie spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych z niewiadomymi, Matematyka Stosowana, 1981, XVII, ss. 5.

[17] Norwisz J.: Numeryczne wyznaczanie pola temperatury w ustalonych procesach przewodzenia ciepła w ciałach stałych przy nadmiarze danych obarczonych błędami na przykładzie elektrolizera aluminium. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków 1972.

[18] Norwisz J.: Wyznaczanie zgodnych wartości danych termodynamicznych zasadowych siarczanów ołowiu. Rozprawa habilitacyjna, Archiwum Hutnictwa, 1984, Vol. 29, No 4, ss. 545-582.

[19] Rycerz A.: Zastosowanie programowania nieliniowego do wyznaczania pola temperatury w procesach ustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków 1976.

[20] Skorek J.: Zastosowanie metod estymacji jawnej do rozwiązywania odwrotnych zagadnień nieustalonej wymiany ciepła. Mat. Symp. Wymiany Ciepła i Masy, PAN, Jabłonna 1976.

[21] Styrylska T.: Obliczanie entalpii tworzenia metodą wyrównywania entalpii reakcji chemicznych, Rozprawa habilitacyjna, Zeszyty Naukowe Pol. Krakowskiej, No 9, Kraków 1973.

[22] Styrylska T.: Application of the Multistage Least Squares Method to the Coordination of Energy and Material Balances, ZAMM, Z. angew. Math. Mech., 1986, Vol. 5, ss. 393-395.

[23] Styrylska T.: Dwuetapowe wyrównywanie spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych, Matematyka Stosowana, IV, 1973, ss. 29.

[24] Suzuki K., Szmyd J., Kolenda Z., Dziedziniewicz K.: An Approach to Practical Heat Transfer Problems with Uncertain Specification Utilizing Supplementary Experimental Data, 1st Thermal and Fluids Eng. Conf., Seul, 1988, ss. 443-448.

[25] Szargut J., Ryszka E.: Konieczność uzgadniania bilansów masowych, Prace Instytutu Metalurgii, Gliwice, 1952, No 5, ss. 385.

[26] Szargut J., Kolenda Z.: Theory of Coordination of Material and Energy Balances in Metallurgical Chemical Processes, Arch. Hutnictwa, 1968, Vol. 12, No 2, ss. 153.

[27] Szargut J., Kolenda Z.: Uzgadnianie bilansów substancji i energii w procesach chemicznych, Pomiary, Automatyka, Kontrola, XIII, 1967, No 2, ss. 64.

[28] Szargut J., Styrylska T.: The Application of a Least Squares Procedure to the Calculation of enthalpies of Formation, 7th Symp. of Thermophysical Properties, Gaithersburg, 1977.

[29] Szargut J., Kolenda Z., Taramina K.: Coordination of Material and Energy Balances as a Basis of Combustion Process Optimization, Energy Research, 1981, Vol. 5, ss. 253-261.

[30] Szargut J.: Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej, Ossolineum, Wrocław, Warszawa 1984.

[31] Szargut J., Kolenda Z., Majza E.: Zastosowanie rachunku wyrównawczego do wyznaczania współczynników równań empirycznych. Pomiary, Automatyka, Kontrola, XXIX, 1983, No 3, s. 80.

[32] Szmyd J.: Wyznaczanie rozkładów temperatury i strumieni ciepła w procesach wymiany energii przez promieniowanie przy nadmiarze danych obarczonych błędami. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków 1980.

[33] Szmyd J., Kolenda Z., Dziedziniewicz K.: Total Carbon Dioxide Emissivity using Generalized Least Squares Method, 25th National Heat Transfer Symp. of Japan, Proc., 1988, ss. 376-378.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНИТЕЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕПЛОТЕХНИКЕ

Р е з ю м е

В статье представлен обзор работ по применению метода наименьших квадратов для уравнительного исчисления в теплотехнике. Дана формулировка проблемы и описан один из общих расчетных методов. Пояснена область применения.

APPLICATION OF EQUALIZATION ACCOUNT IN THERMAL MANAGEMENT

S u m m a r y

The paper contains a review of results of investigations related to the least square method in a form of equalization account in thermal management. The general form of the problem is given as well as the most general account method and the possibilities of applications of the method being considered.