

Józef WOJNAROWSKI, Zbigniew KACPRZAK

Institut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn

ANALIZA DYNAMICZNA MECHANIZMU PODNOSZENIA
Z UWZGLĘDNIENIEM LUZU W SPRZĘGŁE PRZYBĘBNOWYM

Streszczenie. W pracy przeanalizowano drgania mechanizmu podnoszenia maszyny dźwigowej z uwzględnieniem luzu kątownego sprzęgła. Układ zespołu maszyny sprowadzono do układu półokreślonego¹⁾ o trzech stopniach swobody. W oparciu o metodę linearyzacji harmonicznej przeprowadzono analizę drgań swobodnych oraz drgań wymuszonych, ze szczególnym uwzględnieniem charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej.

1. Wstęp

Analiza zespołu maszyny w oparciu o liniowe modele prowadzi często do niedokładnej oceny własności dynamicznych układu, jeśli w jego łańcuchu kinematycznym istnieją człony o nieliniowych charakterystykach.

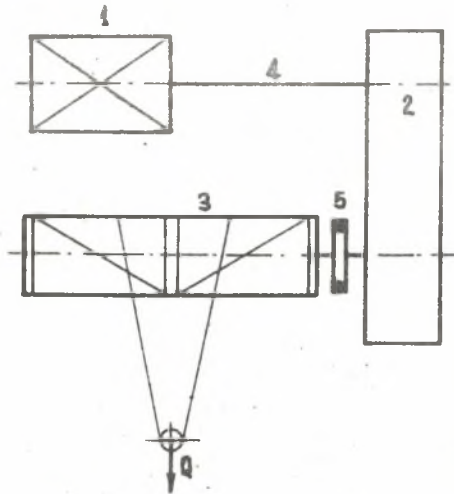
Jednym z ważnych problemów powstających przy analizie dynamicznej maszyny, jest ocena wpływu nieliniowości, wynikającej z istnienia luzu w jakimś członie rozpatrywanego układu, na charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową.

Rozpatrzmy układ podnoszenia [1] maszyny dźwigowej. Układ ten (rys. 1) zawiera: silnik asynchroniczny (1), przekładnię zębatą (2), bęben [3], wał szybkoobrotowy (4) i sprzęgło przybębnowe (5).

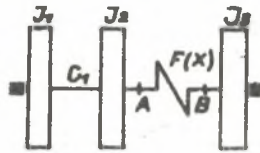
Układ ten, poprzez redukcję sił zewnętrznych, momentów bezwładności oraz sztywności wałów [2, 3] możemy zamodelować w postaci układu półokreślonego o trzech stopniach swobody z nieliniowym członem AB (rys. 2).

Człon AB, który reprezentuje sprzęgło przybębnowe z luzem obwodowym, posiada charakterystykę nieliniową $F(y)$. Jeżeli układ ten tworzy łańcuch kinematyczny z dostatecznie sprężystymi wałkami, to przy ruchu ustalonym maszyny powstaną w nim drgania wskutek uderzeń części napędzającej o napędzaną. W dalszym ciągu będziemy analizować dynamiczny model układu z nieliniowym członem sprężystym.

¹⁾ Układ, który posiada zerową pierwszą częstość drgań własnych i pod wpływem sił zewnętrznych jest jego ruch jako ciała sztywnego, nazywamy układem półokreślonym.



Rys. 1. Schemat układu podnoszenia maszyny dźwigowej



Rys. 2. Układ podnoszenia zredukowany na wał silnika z nieliniowym ośrodkiem sprężystym

2. Nieliniowa sprężysta charakterystyka sprzęgła

Dla przeprowadzenia analizy dynamicznej układu ustalimy charakterystykę sprężystą sprzęgła przybębnowego (rys. 3a). Przyjmując, że sprzęgło jest połączeniem sprężystym z luzem kątowym Δ (rys. 3b), możemy jego charakterystykę napisać w postaci:

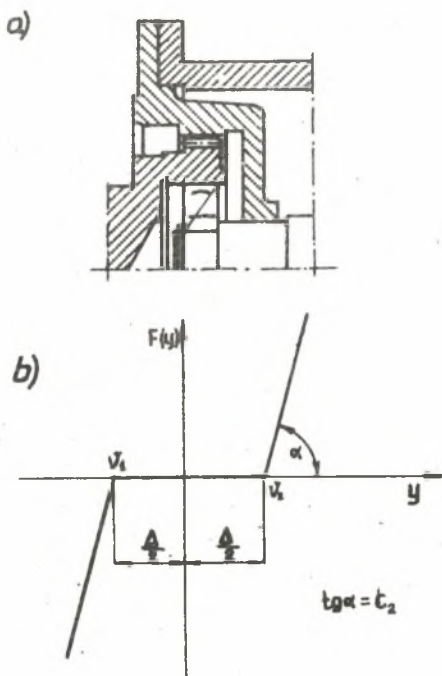
$$F(y) = \begin{cases} c_2 (y - v_2) & \text{przy } y > v_2 \\ 0 & \text{przy } v_1 \leq y \leq v_2 \\ c_2 (y - v_1) & \text{przy } y < v_1 \end{cases}$$

oraz

$$v_2 - v_1 = \Delta,$$

gdzie:

- c_2 - sztywność sprzęgła zredukowana na wał przekładni²⁾,
- Δ - luz obwodowy sprzęgła.



Rys. 3. Sprzęgło zębate i jego charakterystyka sprężysta

Dla dalszej analizy charakterystykę opisujemy analitycznie [4] przy pomocy funkcji jednostkowej $1(x - a)$. Otrzymujemy:

$$F(y) = c_2 (y - v_1) - c_2 (y - v_1) 1(y - v_1) + \tag{1}$$

$$+ c_2 (y - v_2) 1(y - v_2).$$

W rozpatrywanym przypadku drgania swobodne nakładają się na ruch jednostajnie obrotowy, przy którym analizowany układ przekazuje stałą składową M_n momentu silnika zredukowanego na wał przekładni. Następuje więc prze-

²⁾ Rozumiemy również pod tym terminem sztywność wału łączącego sprzęgło z przekładnią.

sunięciu punktu ustalonego o wielkość momentu zewnętrznego M_n (rys. 4) i charakterystyka sprężysta przyjmuje postać:

$$F(x) = F(y) - M_n. \quad (2)$$

Oznacza to, że w ruchu jednostajnie obrotowym składowa M_n likwiduje luz i układ zachowuje się jak liniowy dla $x > b_2$.

Wykorzystując funkcję jednostkową uzyskujemy:

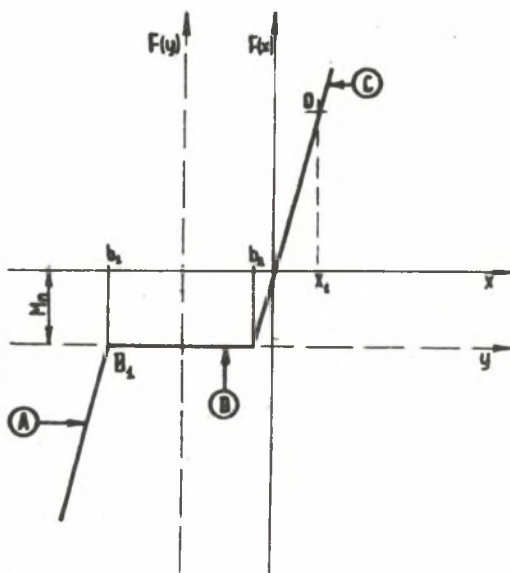
$$F(x) = -M_n + o_2(x - b_1) - o_2(x - b_1) \cdot 1(x - b_1) + \\ + o_2(x - b_2) \cdot 1(x - b_2), \quad (3)$$

gdzie

$$b_2 - b_1 = \Delta, \quad (4)$$

$$b_2 = -\frac{M_n}{o_2}, \quad (5)$$

x - przemieszczenie kątowe.



Rys. 4. Sprężysta charakterystyka nieliniowego członu

Dla analizowanego układu przyjęto następujące wartości liczbowe

$$\Delta = 0,0087 \text{ rd}, \quad M_0 = 142 \cdot 10 \text{ kGm}.$$

3. Drżania układu

Dla przeanalizowania drgań wymuszonych zespołu maszyny w obszarze rezonansu, celowym jest zbadanie drgań swobodnych tego układu. W przypadku liniowych układów mechanicznych można w procesie badania zastosować metodę teorii liniowych równań różniczkowych.

Badanie drgań układów nieliniowych jest bardziej złożone. W szeregu jednak napędów maszyn, stopień wpływu nieliniowości jest nieznaczny i przez to jest możliwa analiza z liniowym przybliżeniem. Dla wielu połączeń sprzęgłowych można wskazać warunki, w których w zupełności wystarcza ograniczyć się do liniowej charakterystyki [5]. Dlatego w dalszym ciągu zlinearyzujemy najpierw nieliniową charakterystykę sprzęgła $F(x)$ w oparciu o metodę linearyzacji harmonicznej.

3.1. Metoda linearyzacji harmonicznej

Zgodnie z tą metodą uwzględnia się tylko podstawową harmoniczną niesinusoidalnego przebiegu i dobiera się jej parametry w taki sposób, by spełnione było pierwotne równanie różniczkowe (6). Rozważmy w dalszym ciągu równanie

$$\ddot{x} + f[x(t), \dot{x}(t)] = \phi(t), \quad (6)$$

gdzie:

$$f[x(t), \dot{x}(t)] \text{ jest funkcją nieliniową.} \quad (7)$$

W metodzie tej funkcję nieliniową w równaniu (6) zastępujemy taką funkcją liniową (9), by otrzymać to samo rozwiązanie co przy funkcji nieliniowej, ale w postaci:

$$x = a_0 + a \sin \omega t. \quad (8)$$

Funkcję liniową

$$f_L[x(t), \dot{x}(t)] = f_0 + q(x - a_0) + r\dot{x}, \quad (9)$$

gdzie

f_0, q, r - współczynniki tej funkcji, przyrównujemy do rozwiniętej w szereg Fouriera funkcji nieliniowej $f[x(t), \dot{x}(t)]$.

Otrzymujemy wtedy współczynniki linearyzacji funkcji (7)

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_0(a_0, a), \\ q &= \frac{\beta_1(a_0, a)}{a}, \\ r &= \frac{\alpha_1(a_0, a)}{a}, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie $\alpha_0, \beta_1, \alpha_1$ - współczynniki szeregu Fouriera rozwinięcia funkcji nieliniowej (wz. 7),

a_0, a - współczynniki przewidywanego rozwinięcia (wz. 8).

Z teorii szeregów Fouriera wiadomo, że dla funkcji nieliniowej rozważanego typu (rów. 3) współczynniki linearyzacji obliczamy ze wzorów:

$$f_0(a_0, a) = \alpha_0(a_0, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(a_0 + a \sin^2 \psi)] d\psi \quad (11)$$

$$q(a_0, a) = \frac{\beta_1(a_0, a)}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} [f(a_0 + a \sin^2 \psi)] \sin^2 \psi d\psi, \quad (12)$$

gdzie $\psi = \omega t$.

Po linearyzacji harmonicznej rozpatrywana nieliniowa funkcja przyjmie postać:

$$f(x) \approx f_0(a_0, a) + q(a_0, a) [x - a_0], \quad (13)$$

gdzie: x jest różnicą przemieszczenia kąowego pomiędzy końcami A i B elementu nieliniowego (rys. 2).

Zauważmy, że w równaniu (13) współczynnik $f_0(a_0, a)$ reprezentuje nam siłę uogólnioną, a współczynnik $q(a_0, a)$ sztywność elementu. Ponieważ funkcja ta jest liniowa, można zastosować tu zasadę superpozycji obliczając osobno f_0 i q .

Dla uzyskania f_0 można posłużyć się metodą macierzy fundamentalnych lub metodą sprzężystości dynamicznej [6].

Znajdujemy, że dla układu, w którym chociaż jeden koniec jest swobodny siła uogólniona (współczynnik f_0) musi być równa zero:

$$f_0(a_0, a) = 0. \quad (14)$$

Potwierdza to też następujące rozumowanie:

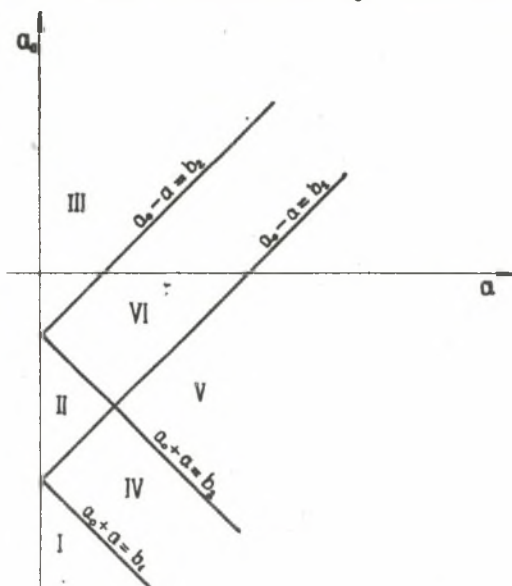
Wiadomo, że dla układu, który pozostaje w równowadze, siły uogólnione po każdej stronie rozważanego przekroju muszą być sobie równe. Dlatego przy prędkości kątowej $\omega = 0$, gdy nie występują siły dynamiczne, we wszystkich przekrojach układu powinna występować siła uogólniona o wielkości $f_0(a_0, a)$. Jeżeli jednak układ jest półokreślony, to siła uogólniona w tym przekroju jest równa zero. Tak więc wszystkie siły uogólnione w układzie przy $\omega = 0$ wynoszą zero, co potwierdza wzór (14).

W naszym przypadku funkcja nieliniowa ma charakter nieciągły i linearyzując przeprowadzamy dla poszczególnych odcinków charakterystyki oddzielnie.

Oznaczmy odpowiednio odcinki charakterystyki $F(x)$ przez A, B, C (rys. 4). Ponieważ rozwiązanie równania (6) posiada postać $x = a_0 + a \sin(\omega t)$, to wielkości współczynników a_0, a oraz ich znak determinują odcinek charakterystyki, na którym odbywają się drgania. Dla identyfikacji narysujemy na półpłaszczyźnie cztery proste

$$a_0 + a = b_1, \quad a_0 + a = b_2, \quad a_0 - a = b_1, \quad a_0 - a = b_2,$$

które naniesiemy w układzie współrzędnych $a_0 = f(a)$ (rys. 5).



Rys. 5. Półpłaszczyzna $a > 0$

Te proste ograniczają sześć płaszczyzn, a mianowicie:

- I. $a_0 + a < b_1$
drżania na odcinku A,
- II. $a_0 + a < b_2$,
drżania na odcinku B,
- III. $a_0 - a > b_2$
drżania na odcinku C,
- IV. $a_0 - a < b_2$, $a_0 + a > b_1$, $a_0 - a < b_1$,
drżania na odcinku A, B,
- V. $a_0 + a > b_2$, $a_0 - a < b_1$,
drżania na odcinku A, B, C,
- VI. $a_0 + a > b_2$, $a_0 - a > b_1$, $a_0 - a < b_2$,
drżania na odcinku B, C.

W ten sposób na półpłaszczyźnie $a > 0$ uzyskujemy takie obszary, w których analityczne wyrażenia $f(a_0, a)$ przyjmują oddzielną postać.

Przeprowadzając linearyzację wg wzorów (11) oraz (14) uzyskujemy zależność funkcyjną $f(a_0, a)$. Dla zadanej charakterystyki zależność tę pokazano na rys. 6.

Korzystając z równania (12) oraz wykresu (6) budujemy graficzną zależność zlinearyzowanej sprężystości q w funkcji amplitudy drgań (rys. 7).

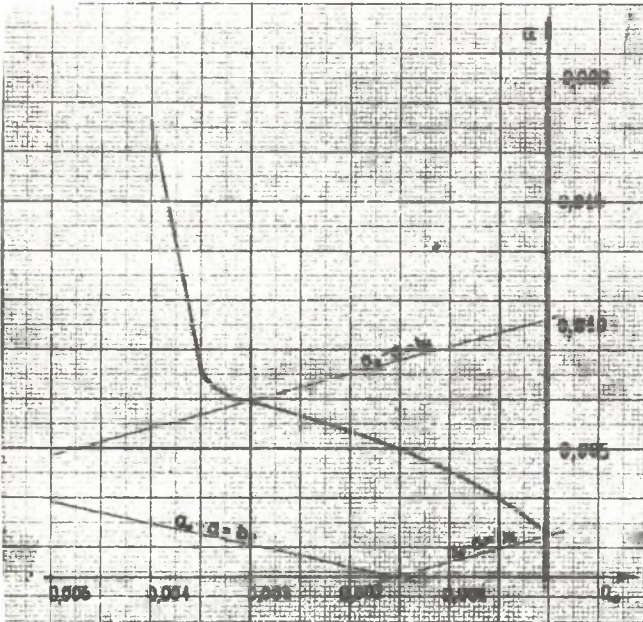
3.2. Drżania swobodne układu

Wykorzystując zlinearyzowaną charakterystykę sprężystą $F(x)$ rozważany układ (rys. 8) możemy opisać liniowym układem równań różniczkowych. Mamy

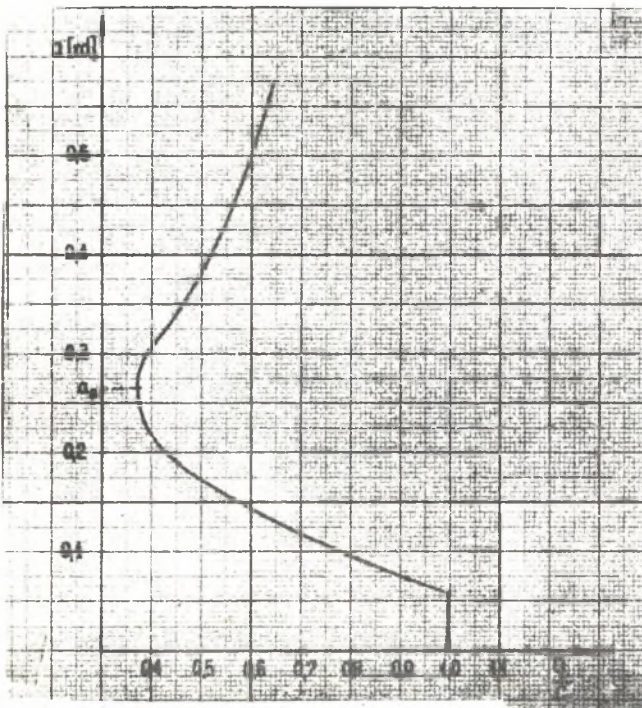
$$\begin{cases} I_1 \ddot{v}_1 + c_1 [v_1 - v_2] = 0, \\ I_2 \ddot{v}_2 + c_1 [v_2 - v_1] + q(a_0, a) [v_2 - v_3] = 0, \\ I_3 \ddot{v}_3 + q(a_0, a) [v_3 - v_2] = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu równań (15) otrzymujemy

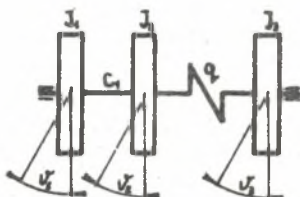
$$\begin{aligned} I_1 I_2 I_3 \lambda^6 - [I_1 q (I_2 + I_3) + I_3 c_1 (I_1 + I_2)] \lambda^4 + \\ + (I_1 + I_2 + I_3) c_1 q \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$



Rys. 6. Zależność funkcyjna $a(a_0)$



Rys. 7. Zależność współczynnika linearyzacji od amplitudy drgań



Rys. 8. Zredukowany układ podnoszenia

Obniżając rząd równania i dzieląc przez σ_2 uzyskujemy:

$$I_1 I_2 I_3 \frac{1}{\sigma_2} \lambda^4 - \left[I_1 \frac{q}{\sigma_2} (I_1 + I_2) + \right. \\ \left. + I_3 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (I_1 + I_2) \right] \lambda^2 + (I_1 + I_2 + I_3) \sigma_1 \frac{q}{\sigma_2} = 0. \quad (16)$$

Krzywą szkieletową układu znajdujemy rozwiązując równanie (16) przez wstawianie kolejnych wartości sprężystości q . Ponieważ wartościom q odpowiadają określone wielkości amplitud (rys. 7), możemy zbudować wykres amplitudy w funkcji częstotliwości λ . Dla rozważanego układu podnoszenia maszyny dźwigowej po przeprowadzeniu redukcji na wał silnika mamy:

$$I_1 = 25,6 \text{ kGms}^2$$

$$I_3 = 19,1 \text{ kGms}^2$$

$$I_2 = 15,0 \text{ kGms}^2$$

$$\sigma_1 = 74 \cdot 10^4 \text{ kGcm/rd}$$

$$\sigma_2 = 7,1 \cdot 10^4 \text{ kGcm/rd.}$$

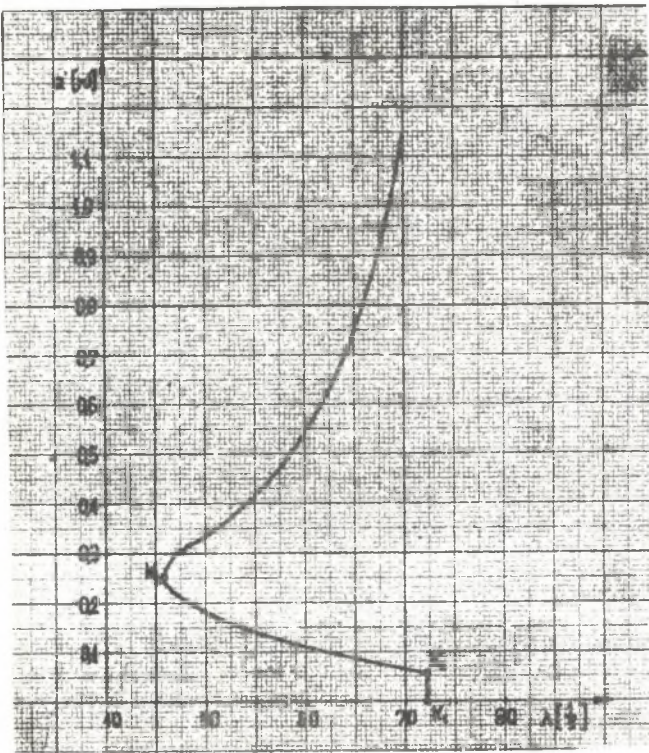
Podstawiając te wielkości do równania (16) oraz rozwiązując go ze względu na λ otrzymujemy

$$\lambda^2_{2,3} = (4,25 \frac{q}{\sigma_2} + 39) \cdot 10^3 + \\ \pm \sqrt{(4,25 \frac{q}{\sigma_2} + 39)^2 \cdot 10^6 - 430 \frac{q}{\sigma_2} 10^6}. \quad (17)$$

W oparciu o równanie (17) wyznaczamy krzywą szkieletową dla rozważanego układu (rys. 9). Wielkość λ_3 odrzucono z uwagi na fakt, że leży powyżej prędkości obrotowych silników asynchronicznych, stosowanych w układach podnoszenia. Krzywą szkieletową o takim przebiegu uzyskamy dla każdego

układu posiadającego luzy. Interesujący jest jej przebieg, który można wytłumaczyć w następujący sposób.

Wiemy, że punktem ustalonym układu jest punkt O (rys. 4). Jeżeli w układzie pojawiają się drgania, których połowa amplitudy nie przekroczy wielkości $|b_2 - x_1|$, to układ zachowuje się jak liniowy, czemu odpowiada odcinek K_1K_2 na rysunku 9. Z chwilą wzrostu amplitudy drgań obejmują one już swoim zasięgiem luz na elemencie nieliniowym i aż do punktu B_1 następuje zmniejszenie sztywności układu, czemu odpowiada odcinek K_2K_3 krzywej szkieletowej. Przy dalszym wzroście amplitudy następuje powolne zwiększenie sztywności, czemu odpowiada odcinek leżący powyżej punktu K_3 na krzywej szkieletowej.



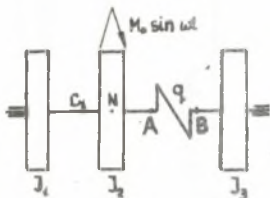
Rys. 9. Krzywa szkieletowa układu

3.3. Drgania wymuszone układu

Dla wyznaczenia wykresu rezonansowego rozważmy drgania układu wymuszone momentem harmonicznym [1, str. 102].

Wtedy równania (15) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\psi}_1 + c_1 \cdot [\psi_1 - \psi_2] &= 0, \\ I_2 \cdot \ddot{\psi}_2 + c_1 \cdot [\psi_2 - \psi_1] + q(a_0, a) [\psi_2 - \psi_3] &= M_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (18) \\ I_3 \cdot \ddot{\psi}_3 + q(a_0, a) \cdot [\psi_3 - \psi_2] &= 0. \end{aligned}$$



Posługując się metodą macierzy fundamentalnych obliczamy amplitudę przemieszczeń w punkcie N układu (rys. 10) od amplitudy momentu wymuszającego. Uzyskujemy:

$$\frac{M_0}{a_N} = D_N^+ - D_N^-, \quad (19)$$

Rys. 10. Układ z nieliniowym członem sprężystym wymuszony momentem o amplitudzie M_0

gdzie

a_N – amplituda przemieszczeń w punkcie N,

D_N^+ – sprężystość dynamiczna (stosunek amplitudy momentu do amplitudy przemieszczeń w danym punkcie) na prawo do punktu N,

D_N^- – sprężystość dynamiczna na lewo od punktu N,

$M_0 = 77 \text{ kGom}$ – przyjęta amplituda momentu wymuszającego.

Wielkości D_N^+ , D_N^- oraz amplitudę w punkcie B układu wyliczamy metodą sprężystości dynamicznej [6]. Zauważmy, że:

$$|a| = a_B - a_A = a_B - a_N, \quad (20)$$

gdzie

a – różnica przemieszczeń kątowych pomiędzy końcami elementu nieliniowego.

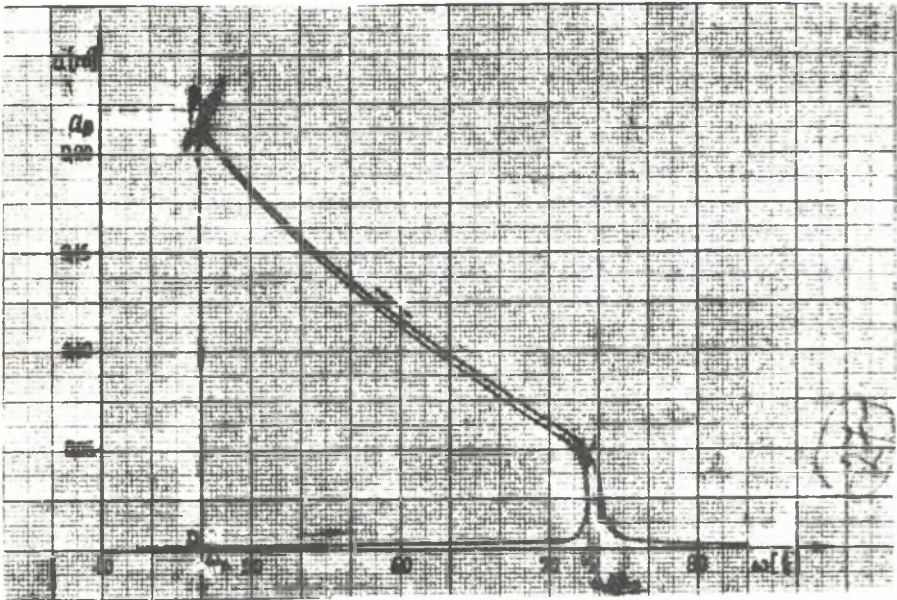
Po wstawieniu do równania (20) wyrażień na amplitudy w przekrojach B i N otrzymujemy:

$$|a| = M_0 I_3 (q - I_3 \omega^2)^{-1} \left(I_2 + \frac{I_3 q}{q - I_3 \omega^2} + \frac{I_1 c_1}{c_1 - I_1 \omega^2} \right)^{-1} \quad (21)$$

Równanie (21) zawiera niewiadomą a w postaci uwikłanej – jest ona bowiem funkcją współczynnika linearyzacji $q(a_0, a)$. Rozwiązujemy je wykreślnie nanosząc na wykres (7) dla zadanych prędkości " ω " wartości " a " będące funk-

o ją współczynnika linearyzacji $q(a_0, a)$. Punkty przecięcia krzywych określonych równaniem (21) z krzywą przedstawioną na rysunku 7, określają nam wartości amplitud przy zadanych prędkościach kątowych ω . Interesujące są tylko amplitudy nie większe od wielkości a_G (rys. 7), bowiem większe nie wystąpią ze względu na zjawisko "przeskoku", które zaistnieje w układzie z charakterystyką odcinkowo liniową [7].

Otrzymane tą drogą wartości pozwalają na wykreślenie charakterystyki amplitudalno-częstotliwościowej układu, którą z uwzględnieniem przeskoków pokazano na rys. 11. Z rysunku tego wynika, że istnieje przedział zmiany częstości ω , w którym układ może drgać jedną z dwóch możliwych amplitud. W zależności od wzrostu czy spadku częstości momentu wymuszającego układ może drgać z mniejszą lub z większą amplitudą.



Rys. 11. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

4. Wnioski

Człon z luzem, który przenosi moment nominalny M_n , ma charakterystykę sprężystą $F(x)$ o kształcie przedstawionym na rys. 4 i drgania układu z takim członem opisujemy nieliniowymi równaniami ruchu. W takich przypadkach przy badaniu drgań można wykorzystać metodę harmonicznej linearyzacji nieliniowych charakterystyk sprężystych.

Charakter krzywej szkieletowej (rys. 7) dla układu posiadającego luz znamionuje typ charakterystyki miękkiej do wartości amplitudy a_G i typ charakterystyki twardej (powyżej wartości tej amplitudy). Praktyczne znaczenie ma tylko zakres krzywej szkieletowej poniżej amplitudy a_G , z uwagi na zjawisko "przeskoku". Jeśli wziąć pod uwagę, że każdy luz w układzie prowadzi do charakterystyki amplitudalno-częstotliwościowej, jak na rys. (11), to w pewnych przypadkach analiza drgań układu przy pominięciu wpływu luzów wskazuje na znacznie większe amplitudy, niż by to wynikało z rozwiązań przeprowadzonych przy założeniu liniowości. Analizowany przypadek pracy układu podnoszenia z luzem kątowym w sprzęgle może zachodzić w różnym przedziale częstości momentu wymuszającego, a przez to mogą powstać w układzie drgania z mniejszą lub z większą amplitudą. Gdy układ pracuje powyżej częstości ω_n , a następnie poniżej tej częstości ale powyżej częstości ω_B , to amplituda drgań bardzo znacznie przekracza wielkości wyliczone przy założeniu w oślonie z luzem charakterystyki liniowej. Ponadto dla każdego układu rzeczywistego pracującego powyżej ω_n będzie występowało niekorzystne zjawisko gwałtownego skoku amplitudy. W przypadku narastania częstości amplituda drgań jest mała i punkt, w którym nastąpi skokowy wzrost amplitudy drgań odpowiada na rys. (11) częstości ω_A .

Analizowane zagadnienie nabiera szczególnej wagi przy rozważaniu drgań układu z małymi sztywnościami oślonów na skręcanie lub przy znacznych wartościach amplitudy momentu wymuszającego. Cały bowiem szereg zjawisk, które mogą wystąpić w procesie drgań można jedynie opisać przy uwzględnieniu nieliniowości charakterystyki oślonów wynikającej z istnienia luzu.

LITERATURA

1. A. PIĄTKIEWICZ, R. SOBÓLSKI - Dźwignie, WNT, Warszawa 1969.
2. I.R. CURRERI, I.N. Mac DUFF - Drgania w technice, PWN, Warszawa 1960.
3. I. KOŻESZNIK - Dynamika Maszyn, NT, Warszawa 1963.
4. E. TARNAWSKI - Matematyka, PWN, Warszawa 1963.
5. W.L. WIEJC - Dynamika maszynowych agregatów, Maszynostrojenie, Leningrad 1969.
6. I.I. WULFSON, M.Z. KOŁOWSKIJ - Nieliniowe zadania dynamiki maszyn, Izdat. Maszynostrojenie, Leningrad 1968.
7. J.A. MITROPOLSKI - Problemy asymptotycznej teorii niestacjonarnych kolebanij, Izd. Nauka, Moskwa, 1964, 205.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОДЪЕМНОГО МЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ ЛЮФТА
В ПРИБАРАБАННОЙ МУФТЕ СЦЕПЛЕНИЯ

Резюме

В работе анализируются колебания подъемного механизма подъемной машины с учетом кругового люфта муфты сцепления. Система узла машины сводится к полупределенной системе с тремя степенями свободы. Опираясь на метод линеаризации гармонической был произведен анализ свободных колебаний и вынужденных колебаний с особым учетом амплитудно-частотной характеристики.

THE DYNAMICAL ANALYSIS OF A HOISTING MECHANISM WITH REGARD
TO A CIRCUMFERENTIAL BACKLASH IN A GEAR-TYPE COUPLING

Summary

The paper analyses the vibrations of a hoisting mechanism with regard to the circumferential backlash of the drum gear-type coupling.

The assembly of the machine has been reduced to a half-determinate system with three degrees of freedom. The analysis of forced vibrations has been realized by means of the method harmonical linearization special attention to the characteristics of the amplitude paying frequency.