

Jan ADAMCZYK, Henryk KNAPCZYK  
Instytut Mechaniki i Podstaw  
Konstrukcji Maszyn

#### POZORNE WSPÓŁCZYNNIKI TARCIA W CZOPIE KULOWYM

**Streszczenie.** W opracowaniu omówiono hipotezy rozkładu nacisków jednostkowych na powierzchni roboczej czopa kulowego. W oparciu o przytoczone hipotezy obliczono momenty sił tarcia względem osi obrotu leżącej w płaszczyźnie koła dużego kuli i prostopadłej do kierunku działania siły obciążającej, a następnie odpowiadające tym momentom pozorne współczynniki tarcia.

Przedstawiono wykres zmian pozornego współczynnika tarcia w zależności od kąta opasania czopa panwią i współczynnika tarcia na powierzchni roboczej czopa.

#### WSTĘP

W praktyce inżynierskiej spotykane są czopy kulowe jako połączenie przegubowe (o 3 stopniach swobody) elementów współpracujących ze sobą. Czopy (przeguby) kulowe mają szerokie zastosowanie w budowie maszyn (rys. 1) np. w mechanizmach kierowniczych pojazdów samochodowych, jako łożyska wahliwe wałów i osi [1], podpory przegubowe masztów radiowych, telewizyjnych i szkieletów żurawi [4]. W celu obliczenia momentu tarcia w przegubie kulowym przy tarcia półsuchym należy przede wszystkim poznać prawo rozkładu nacisków jednostkowych na powierzchniach roboczych przegubu.

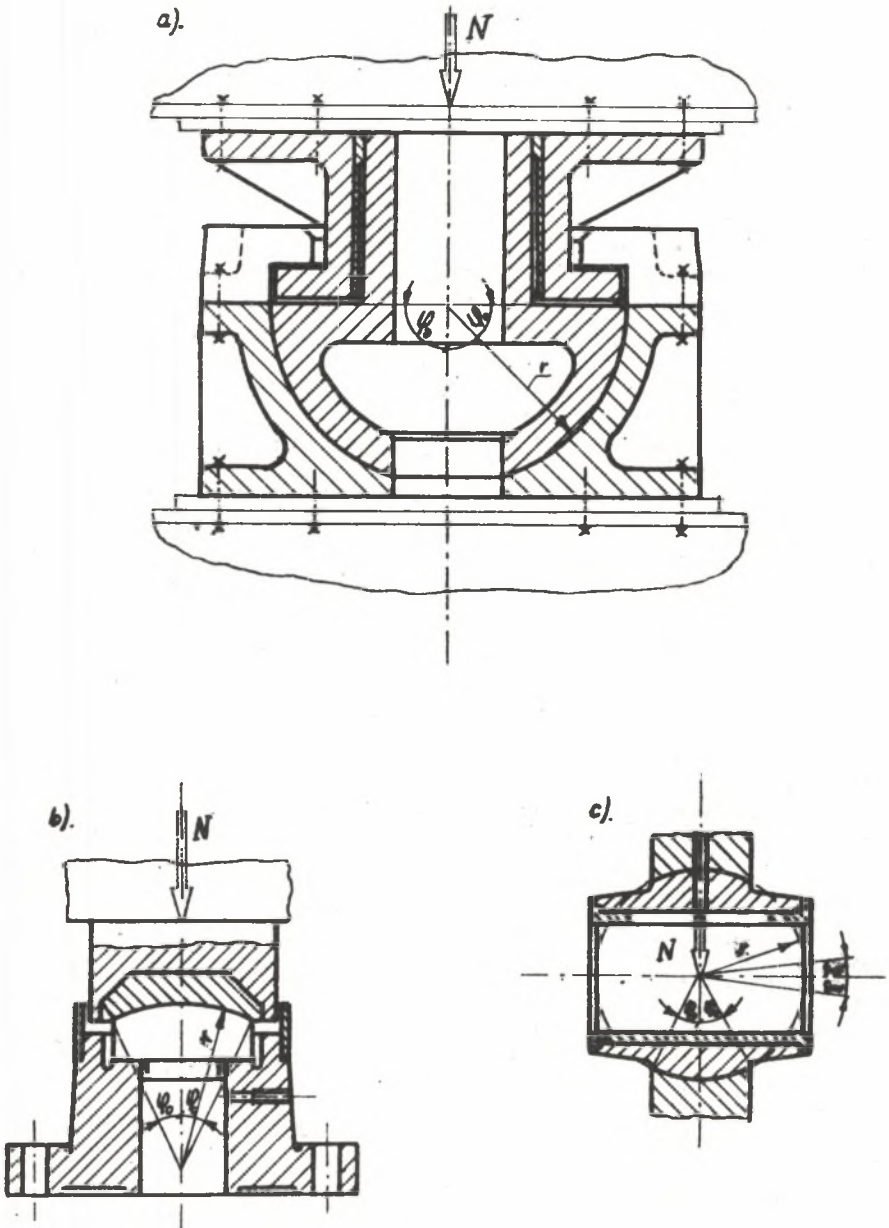
Przez oznaczony w tekście symbolem  $\mu'$  tzw. pozorny współczynnik tarcia autorzy rozumieją wielkość zależną od współczynnika tarcia ślizgowego  $\mu$  i kształtu powierzchni trących. Wartości pozornego współczynnika tarcia dla różnych hipotez rozkładu nacisków ujmują równania (13), (15) i (17).

#### HIPOTEZY ROZKŁADU NACISKÓW JEDNOSTKOWYCH NA POWIERZCHNI ROBOCZEJ CZOPA KULOWEGO PRZY TARCII PÓLSUCHYM

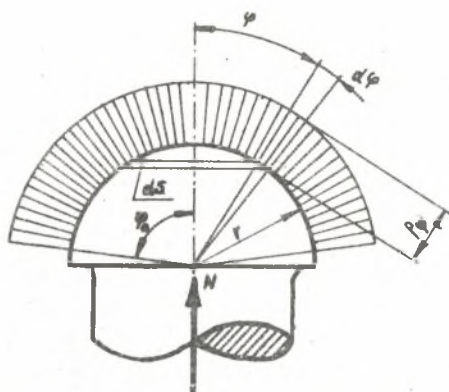
Najprostszą hipotezą jest hipoteza Weisbacha o stałych naciskach jednostkowych [1]:

$$p = p = \text{const}$$

(1)



Rys. 1. Przykłady zastosowania przegubów kulowych w budowie maszyn: a) łożysko stopowe żurawia Derricksa, b) łożysko stopowe żurawia słupowego, c) podpora wahliwa wału



Rys. 2. Rozkład nacisków jednostkowych na powierzchni roboczej czopa kulowego wg hipotezy o stałych naciskach jednostkowych

Pole powierzchni elementarnego pierścienia

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Równanie równowagi czopa (suma rzutów sił na kierunek działania obciążenia N):

$$N = \int_S p_{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot dS = 0, \quad (2)$$

stąd

$$N = \int_S p_{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot dS = \int_S p_{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \pi \cdot r^2 \int_0^{\varphi} p_{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi \cdot d\varphi.$$

Z założenia hipotezy:

$$p_{\varphi} = p = \text{const}$$

Ostatecznie

$$N = \pi \cdot r^2 \cdot p \cdot \sin^2 \varphi_0$$

$$p = \frac{N}{\pi \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi_0} \quad (3)$$

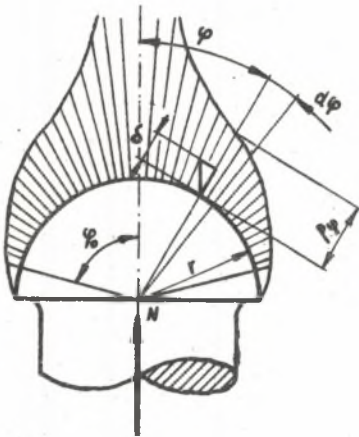
Nacisk jednostkowy w dowolnym punkcie powierzchni roboczej czopa kulowego jest równy sile obciążającej  $N$  podzielonej przez pole rzutu powierzchni roboczej na płaszczyznę prostopadłą do kierunku działania obciążenia  $N$ .

Bardziej złożona jest hipoteza Reye'a [1]. Założeniem tej hipotezy jest, że zużycie powierzchni roboczej czopa kulowego mierzone w kierunku prostopadłym do tej powierzchni jest stałe (rys. 3) dla wszystkich punktów powierzchni roboczej, czyli, że wszystkie punkty powierzchni roboczej w procesie zużycia przemieszczają się równomiernie zgodnie z kierunkiem działania obciążenia  $N$ , tj.

$$\frac{\sigma}{\cos \varphi} = c = \text{const}, \quad (4)$$

gdzie

$\sigma$  – zużycie w dowolnym punkcie powierzchni roboczej mierzone w kierunku normalnym do tej powierzchni.



Rys. 3. Rozkład nacisków jednostkowych na powierzchni roboczej czopa kulowego wg hipotezy o równomiernym zużyciu tej powierzchni

Zakłada się, że zużycie  $\sigma$  jest proporcjonalne do nacisku jednostkowego  $p \cos \varphi$  i prędkości liniowej  $v_p = \omega \cdot r \cdot \sin \varphi$ , czyli:

$$\sigma = c \cdot \cos \varphi = c_m \cdot p \cos \varphi \cdot v_p = c_m \cdot p \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\sigma = c_m \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \varphi,$$

gdzie

$c_m$  – współczynnik proporcjonalności zależny od rodzaju materiału powierzchni współpracujących, ich chropowatości i smarowania.

ze wzoru (5):

$$p = \frac{\sigma}{c_m \cdot \omega \cdot r} = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{r \cdot p_0}{\tan \varphi}, \quad (6)$$

gdzie

$p_0 = \frac{0}{0_m \cdot \omega \cdot r}$  - pewna stała, fizycznie równa naciskowi jednostkowemu w punkcie powierzchni roboczej określonym kątem  $\varphi = \pi/4$ .

Podstawiając wyrażenie (6) do równania równowagi (2) otrzymamy:

$$N = \pi \cdot r^2 \cdot p_0 \int_0^{\varphi_0} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \pi \cdot r^2 \cdot p_0 (\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0)$$

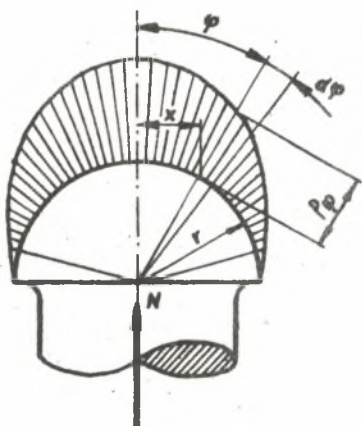
$$p_0 = \frac{N}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0} = \frac{p \cdot \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0}$$

$$p_{\varphi} = \frac{N}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{1}{\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} =$$

$$= \frac{p \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (7)$$

Przy dowolnej wartości obciążenia  $N$  nacisk jednostkowy w środkowej strefie powierzchni roboczej okazuje się bardzo duży, a przy  $\varphi = 0$   $p_{\varphi} = \infty$ !

Najogólniejszą hipotezą jest hipoteza o parabolicznym rozkładzie nacisków jednostkowych [1]. Wg tej hipotezy przyjęto, że naciski jednostkowe układają się wg paraboloidy obrotowej o równaniu:



$$p_{\varphi} = p_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right) \quad (8)$$

odniesionej do kierunku działania obciążenia  $N$  (rys. 4).

Ponieważ  $\frac{x^2 + y^2}{r^2} = \sin^2 \varphi$ , równanie (8)

można napisać w postaci

$$p_{\varphi} = p_0 (1 - \sin^2 \varphi) = p_0 \cdot \cos^2 \varphi, \quad (9)$$

przy czym  $p_0$  - maksymalny nacisk jednostkowy w punkcie powierzchni roboczej określonym kątem  $\varphi = 0$ .

Rys. 4. Rozkład nacisków jednostkowych na powierzchni roboczej czopa kulowego wg hipotezy o parabolicznym rozkładzie nacisków

Po podstawieniu zależności (9) do równania równowagi (2) i po scałkowaniu otrzymamy:

$$N = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p_0 \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cos^3 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2 \cdot p_0 (1 - \cos^4 \varphi_0);$$

$$p_0 = \frac{N}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{2}{1 - \cos^4 \varphi_0} = \frac{2p_1}{1 + \cos^2 \varphi_0};$$

$$p_\varphi = \frac{N}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{2 \cdot \cos^2 \varphi}{1 - \cos^4 \varphi_0} = \frac{2p_0 \cdot \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi_0}, \quad (10)$$

gdzie:  $p$  obliczone ze wzoru (3).

Hipoteza powyższa jest najbardziej ogólna i daje największą zgodność z rezultatami doświadczeń. Przy zwiększaniu promienia kuli i zmniejszaniu kąta  $\varphi_0$  czop kulowy staje się czopem o kształcie soczewkowym i naciski jednostkowe wyrównują się. Dla  $\varphi_0 = 0$  czop przekształca się w płaską podpórę i rozkład nacisków staje się równomierny  $p_\varphi = P = \text{const}$  zgodnie z hipotezą pierwszą.

#### MOMENT TARCIA W CZOPIE KULOWYM

Wytnijmy na powierzchni roboczej czopa kulowego elementarną powierzchnię (rys. 5).

$$dS = S_{\text{abod}} = \widehat{ab} \cdot \widehat{bc} = r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot r \cdot d\psi =$$

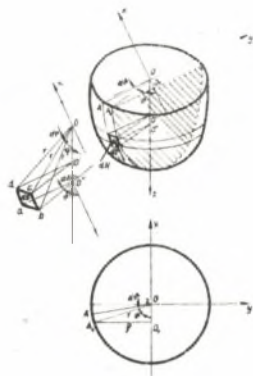
$$= r^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi$$

Siła tarcia na elementarnej powierzchni

$$dT = dN \cdot \mu$$

gdzie elementarny nacisk  $dN$  jest równy:

$$dN = p_\varphi \cdot dS = p_\varphi \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi,$$



Rys. 5. Szkice do obliczenia momentu tarcia w czopie kulowym względem osi  $x$

stąd

$$dT = p \cdot r^2 \cdot \mu \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi$$

Moment elementarny siły tarcia  $dT$  względem osi obrotu  $x$ :

$$dM_T = dM_x = Q \cdot dT = r \cdot \sin \psi \cdot r^2 \cdot \mu \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot d\varphi \cdot d\psi,$$

gdzie (rys. 5):  $Q = r \cdot \sin \psi$ .

Moment sił tarcia na powierzchni roboczej czopa kulowego względem osi obrotu  $x$ :

$$M_T = M_x = 2 \int_S dM_T = 2 \cdot r^3 \cdot \mu \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot d\varphi \int_0^{\psi_0} \sin \psi \cdot d\psi$$

$$M_T = 4 \cdot r^3 \cdot \mu \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot d\varphi \int_0^{\psi_0} \sin \psi \cdot d\psi \quad (11)$$

Przyjmując hipotezę Weisbaacha o stałych naciskach jednostkowych:

$$p = \frac{N}{\pi \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi_0} = \text{const},$$

moment tarcia w ozopie kulistym wyniesie:

$$\begin{aligned}
 M_T &= 4 \cdot r \cdot \mu \frac{N}{\pi \cdot \sin^2 \varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot d\varphi = \\
 &= 4 \cdot r \cdot \mu \frac{N}{\pi \cdot \sin^2 \varphi_0} (1 - \cos \varphi_0) \\
 M_T &= N \cdot r \frac{2 \cdot \mu}{\pi \cdot \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie

$$\mu'_1 = \frac{2 \cdot \mu}{\pi \cdot \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}} \quad (13)$$

równanie (12) przyjmie postać:

$$M_T = N \cdot r \cdot \mu'_1$$

dla

$$\varphi_0 = \pi/2 \quad \mu'_1 = \frac{4 \cdot \mu}{\pi} \approx 1,3 \cdot \mu$$

Przy przyjęciu rozkładu nacisków wg hipotezy Reye'a

$$p_{\varphi} = \frac{N}{\pi \cdot r^2} \frac{1}{\varphi_0 + 0,5 \sin 2 \varphi_0} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

moment tarcia wyniesie

$$\begin{aligned}
 M_T &= 4 \cdot r \cdot \mu \frac{N}{(\varphi_0 + 0,5 \sin 2 \varphi_0) \cdot \pi} \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi \cdot d\varphi \\
 M_T &= N \cdot r \frac{4 \cdot \mu \cdot \sin \varphi_0}{(\varphi_0 + 0,5 \sin 2 \varphi_0) \cdot \pi} \quad (14)
 \end{aligned}$$



Oznaczając jak wyżej

$$\mu'_2 = \frac{4 \cdot \mu \cdot \sin \varphi_0}{(\varphi_0 + 0,5 \sin 2\varphi_0) \cdot \pi} \quad (15)$$

równanie (14) przyjmie postać:

$$M_T = N \cdot r \cdot \mu'_2$$

dla

$$\varphi_0 = \pi/2 \quad \mu'_2 = \frac{8}{\pi^2} \mu \approx 0,81 \cdot \mu.$$

Przy przyjęciu hipotezy parabolicznego rozkładu nacisków:

$$p_{\varphi} = \frac{2N}{\pi r^2 (1 - \cos^4 \varphi_0)} \cos^2 \varphi$$

moment tarcia wyniesie

$$M_T = 4 \cdot r \cdot \mu \frac{N}{\pi (1 - \cos^4 \varphi_0)} \int_0^{\varphi_0} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$M_T = N \cdot r \cdot \frac{8 \cdot \mu \cdot (1 - \cos^3 \varphi_0)}{3 \cdot \pi (1 - \cos^4 \varphi_0)} \quad (16)$$

Przyjmując oznaczenie

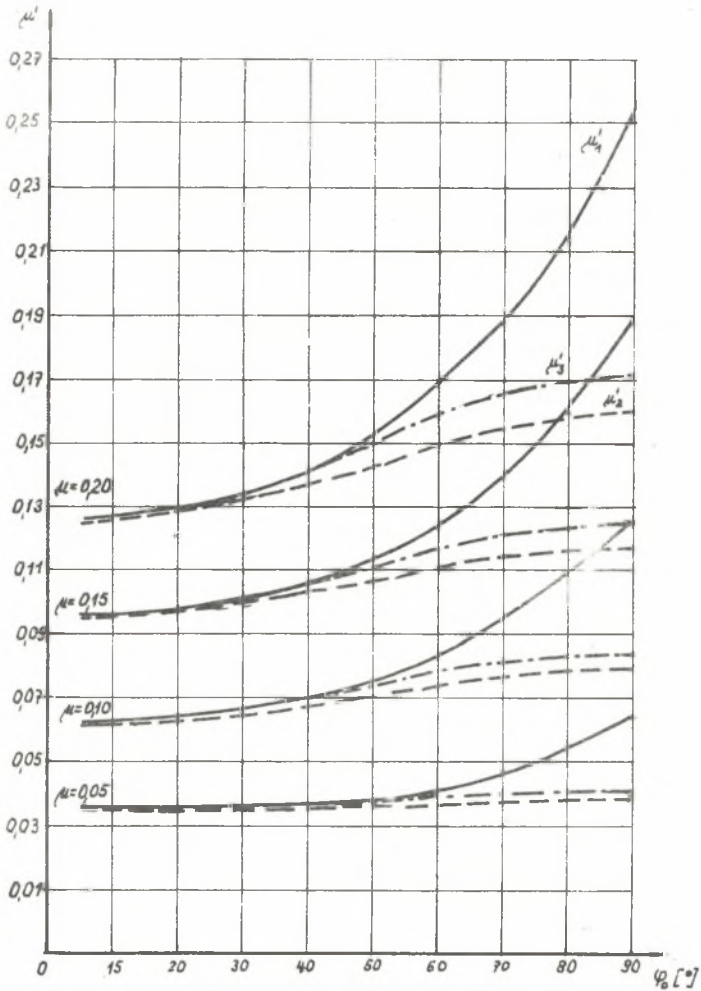
$$\mu'_3 = \frac{8 \cdot \mu (1 - \cos^3 \varphi_0)}{3 \cdot \pi (1 - \cos^4 \varphi_0)} \quad (17)$$

Równanie (15) przyjmie postać:

$$M_T = N \cdot r \cdot \mu'_3$$

dla

$$\varphi_0 = \pi/2 \quad \mu'_3 = \frac{8}{3} \cdot \mu = 0,85 \cdot \mu.$$



Rys. 6. Wykres zmian wartości pozornych współczynników tarcia w zależności od kąta opasanía ozopa·panwią i współczynnika tarcia na powierzchni bocznej czopa

Zmianę wartości pozornych współczynników tarcia w zależności od kąta opasania  $\psi_0$  ozopa panwią i współczynnika tarcia  $\mu$  na powierzchni roboczej ozopa przedstawiono na rysunku 6.

## WNIOSKI

1. W praktyce konstruktora istnieje konieczność stosowania ozopów kulowych, a w związku z tym znajomość momentów tarcia (pozornych współczynników tarcia) w tych ozopach.
2. Wartość pozornego współczynnika tarcia zależy od przyjętej hipotezy rozkładu nacisków jednostkowych, kąta opasania ozopa panwią i współczynnika tarcia na powierzchni roboczej ozopa; maksymalną wartość pozornego współczynnika tarcia otrzymano dla hipotezy Weisbacha, minimalną dla hipotezy Reye'a.
3. Wydaje się celowe przeprowadzenie badań potwierdzających słuszność powyższych rozważań teoretycznych.

## LITERATURA

1. V.A. DMITRIEV - Detali mašin, Izd. Sudostrojenie, Leningrad 1970.
2. W. TRYLIŃSKI - Fine mechanisms and precision instruments, Principles of design, WNT, Warszawa 1971.
3. Dubbel's Taschenbuch für den Maschinenbau Bd I. Springer Verlag - Berlin 1958.
4. A.S. PROSIN - Spezialnyje krany dlja montaža tieplowych elektrostancij Gosenergoizdat, Moskwa - Leningrad 1962.

## КАЖУЩИЕСЯ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕНИЯ В ШАРОВОЙ ЦАПФЕ

### Резюме

В разработке описываются гипотезы распределения удельных давлений на рабочей поверхности шаровой цапфы. Опираясь на приведенные гипотезы рассчитаны моменты сил трения по отношению к оси поворота находящейся в плоскости круга большого шара и перпендикулярной к направлению действия нагружающего усилия, а затем отвечающие этим моментам кажущиеся коэффициенты трения.

Приведен график изменений кажущегося коэффициента трения в зависимости от угла охвата цапфы вкладышем и коэффициента трения на рабочей поверхности цапфы.

## APPARENT COEFFICIENTS OF FRICTION IN A BALL PIVOT

## S u m m a r y

The paper deals with the hypothesis of the unit pressure distribution on the contact area of a ball pivot. Basing on the mentioned hypothesis the moments due to friction forces relative to the axis of rotation, which lies in the big circle of the ball and is perpendicular to the loading force have been calculated. Then the so-called apparent coefficients of friction corresponding to the upper moments were computed. The diagram of the variation of the apparent coefficients in a function of the contact angle and the friction coefficient on the friction surface have been shown.