ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: Mechanika z. 47 Nr kol. 339

Andrzej MIĄDOWICZ, Janusz SZOPA
Instytut Konstrukcji i Technologii
Urządzeń Automatyki i Elektroniki

WYPROWADZENIE RÓWNAŃ DLA PEWNEGO TYPU UKŁADÓW O ZMIENNEJ MASIE

Streszczenie. W niniejszej pracy pokazano szczegółowo tok transformowania równania ruchu Mieszczerskiego (opisującego ruch punktu materialnego o zmiennej masie) do współrzędnych uogólnionych. Wzorowano się na wyprowadzeniu równań Lagrange'a - uwypuklając powstanie nowych reakcji wynikających z faktu zmieniania się masy układu. Dla ilustracji rozwiązano przykład, przy czym przy jego doborze kierowano się możliwością uzyskania analitycznego rozwiązania otrzymanych równań.

W wielu otaczających nas zjawiskach mamy do czynienia z zagadnieniem zmiany masy punktów i ciał w czasie ich ruchu. Problemem tym zaczęto się zajmować dopiero pod koniec wieku XIX ([1], [2] itp.). W trakcie badań wyodrębniły się dwa zagadnienia:

1. masa jako funkcja czasu;
2. masa jako funkcja prędkości.

Odnośnie pierwszego aspektu można wyróżnić dwa ujęcia: Mieszczarskiego ([3]) i Nowosiełowa ([4]).

Rozpatrujemy ruch n punktów materialnych o zmiennej masie wychodząc od równania Mieszczerskiego. Dla k-tego punktu ma ono postać:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{P}_k - \frac{dm_k}{dt}(\bar{u}_k - \bar{v}_k) \tag{1}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n;$$

gdzie

m_k jest masą k-tego punktu, którego prędkość wynosi $\bar{v}_k$, a intensywność zmiany masy i prędkość dołączającej się masy wynoszą odpowiednio: $\frac{dm_k}{dk}$ oraz $\bar{u}_k$; $\bar{P}_k$, natomiast oznacza wypadkową sił czynnych i reakcji działających na k-ty punkt.

Zakładamy, że masa k-tego punktu zależy jawnie od czasu i od konfiguracji układu:

$$m_k = m_k(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n, t),$$

gdzie

$\bar{r}_k$ jest wektorem wodzącym k-tego punktu.

Poza tym układ skrępowany jest więzami typu geometrycznego:

$$F_m(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0 \tag{2}$$

$$m = 1, 2, \ldots, l;$$

oraz różniczkowymi, liniowymi względem prędkości;

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_{pk}^{(2)} \bar{v}_k + B_p^{(2)} = 0 \tag{3}$$

$$p = 1, 2, \ldots, l_r;$$

gdzie

$\bar{A}_{pk}^{(2)}$ i $B_p^{(2)}$ są danymi funkcjami współrzędnych i czasu.

Po zróżniczkowaniu równań (2) otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_{mk}^{(1)} \bar{v}_k + B_m^{(1)} = 0, \tag{4}$$

gdzie

$$\bar{A}_{mk}^{(1)} = \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \bar{i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_k} \bar{j} + \frac{\partial F_m}{\partial z_k} \bar{k}$$

oraz

$$B_m^{(1)} = \frac{\partial F_m}{\partial t}$$

Równania (4) wraz z równaniami (3) dają wszystkie zależności na prędkości możliwe.

Zakładając istnienie więzów idealnych, tzn. takich, dla których praca reakcji na przesunięciach wirtualnych jest równa zeru, co wyraża związek:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0;$$

gdzie

$\bar{R}_k$ reakcja wywołana istnieniem więzów (2) i (3) działająca na k-ty punkt;

$\bar{r}_k$ przesunięcie wirtualne k-tego punktu;

możemy wzory na reakcje więzów przedstawić następująco:

$$\bar{R}_k = \sum_{m=1}^{l} \lambda_m^{(1)} \bar{A}_{mk}^{(1)} + \sum_{r=1}^{l_r} \lambda_r^{(2)} \bar{A}_{rk}^{(2)} \tag{5}$$

Tak więc równania Lagrange'a pierwszego rodzaju w naszym przypadku mają postać:

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{P}_k + \sum_{m=1}^{l} \lambda_m^{(1)} \bar{A}_{mk}^{(1)} + \sum_{r=1}^{l_r} \lambda_r^{(2)} \bar{A}_{rk}^{(2)} - \frac{dm_k}{dt} (\bar{u}_k - \bar{v}_k). \tag{6}$$

Dochodzą do tego związki powstałe ze zróżniczkowania równań prędkości możliwych, tzn. równania możliwych przyspieszeń.

W dalszej części naszych rozważań wprowadzimy współrzędne uogólnione $q_1, q_2, \ldots, q_r$ charakteryzujące jednoznacznie konfigurację układu, dzięki czemu:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k (q_1, q_2, \ldots, q_r, t) \tag{7}$$

Jeśli układ mechaniczny posiada tylko więzy holonomiczne, to można tak dobrać współrzędne uogólnione, że równania więzów staną się tożsamościami - wtedy wszystkie mnożniki Lagrange'a występujące w równaniach (6) zerują się.

Będą jednakże występowały pewne reakcje spowodowane faktem zmiany masy punktów układu.

W celu uzyskania transformacji równań ruchu Mieszczerskiego do współrzędnych uogólnionych, mnożymy równanie (6) przez $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ i sumujemy względem k; otrzymamy wtedy:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \bar{P}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{l} \lambda_m^{(1)} \bar{A}_{mk}^{(1)} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{l_r} \lambda_r^{(2)} \bar{A}_{rk}^{(2)} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} (\bar{u}_k - \bar{v}_k) \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \tag{8}$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} (m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} (\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}) \tag{9}$$

oraz

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} (\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j})$$

(patrz [5]), a więc (9) przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} (m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \Big[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k) \Big] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_j} (\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial m_k}{\partial q_j} \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial m_k}{\partial q_j} \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k \tag{10}$$

gdzie

$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k$ energia kinetyczna układu.

Zmiana masy układu powoduje więc powstanie pewnych dodatkowych reakcji postaci:

$$R_j^{(m)} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial m_k}{\partial q_j} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k}{dt} \bar{u}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(2 \dot{m}_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \dot{m}_k \bar{u}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \dot{\bar{r}}_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial m_k}{\partial q_j}\right) \tag{11}$$

Wprowadzając siły uogólnione:

$$Q_j \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} \bar{P}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \tag{12}$$

i dobierając tak współrzędne uogólnione, aby prędkości i przesunięcia możliwe były wzajemnie niezależne, otrzymamy następującą postać dla równań ruchu Mieszczerskiego:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j + R_j^{(m)} \tag{13}$$

Jeśli pewne siły Q_j mają charakter potencjalny, czyli, że istnieje funkcja V taka, że

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{14}$$

wtedy wprowadzając nową funkcję L = E − V, mamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' + r_j^{(m)} \tag{15}$$

gdzie

Q_j' – siły zewnętrzne nie uwzględnione w związku (14).

Rozpatrzmy teraz przykład układu mechanicznego o zmiennej masie, dla którego

$$E = \frac{1}{2}\, m(t)\, \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}\, c(t)\, x^2$$

Zakładamy dalej że $c(t) = -2\,\ddot{m}(t)$ oraz $\bar{u}_k = 0$.

Mamy wtedy:

$$L = \frac{1}{2}\left(m\,\dot{x}^2 - c\,x^2\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\,\dot{x}\right) = \dot{m}\,\dot{x} + m\,\ddot{x}, \quad -\frac{\partial L}{\partial x} = c\,x$$

Równanie ruchu (15) będzie miało postać:

$$\dot{m}\,\dot{x} + m\,\ddot{x} + c\,x = 2\,\dot{m}\,\dot{x},$$

czyli

$$m\,\ddot{x} - \dot{m}\,\dot{x} - 2\,\ddot{m}\,x = 0.$$

Całką ogólną tego równania jest

$$\dot{x} = 2\,\frac{\dot{m}}{m}\,x + \frac{A}{m},$$

gdzie A – dowolna stała.

Rozwiązanie ogólne ma postać ([6]):

$$x(t) = \left[\frac{m(t)}{m(t_0)}\right]^2 \left[x(t_0) + \frac{A}{m^2(t_0)}\int_{t_0}^{t} m(t)\,dt\right].$$

Biorąc pod uwagę warunki początkowe

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{m}(t_0) = \dot{m}_0, \quad m(t_0) = m_0,$$

mamy

$$x(t) = \left[\frac{m(t)}{m_0}\right]^2 \left[x_0 + \frac{\dot{x}_0 m_0 - 2\dot{m}_0 x_0}{m_0^2} \int_{t_0}^{t} m(t)\, dt\right].$$

LITERATURA

1. A. RAYLEIGH - Theory of Sound., T. I. 1877.
2. E. ROUTH - Dynamic of a system of rigid bodies, The advanced part., 1884.
3. I. MIESZCZERSKI - Raboty po miechanikie tieł pieriemiennoj masy, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1952.
4. W.S. NOWOSIEŁOW - Analiticzeskaja miechanika sistiem s pieriemiennymi masami, Izdatielstwo Leningradskowo Uniwiersitieta, Leningrad 1969.
5. B. SKALMIERSKI - Dynamika układów mechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1969.
6. E. KAMKE - Sprawocznik po obyknowiennym diffierencjalnym urawnieniam, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1965.
7. R. GUTOWSKI - Mechanika analityczna, PWN, Warszawa 1971.
8. W. BOGUSZ, J. ADAMCZYK - Mechanika układów o zmiennej masie, Maszynopis, Kraków 1970 (praca niepublikowana).

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ТИПА СИСТЕМЫ
С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Р е з ю м е

В работе расмотрено тщательно ход трансформирования уравнений Мещерского в обобщенные координаты. Сделано ето аналогично как при выводе уравнений Лагранжа - подчеркивая возникновение новых реакции в последстви изменения массы движущихся точек. Решено пример и подано аналитический результат.

DERIVATION OF EQUATIONS FOR SOME TYPE SYSTEM WITH VARIABLE MASS

S u m m a r y

In this paper we have made the transformation the Mieszczerski's equations into the universal system of coordinates. We have followed the Lagrange's equations' the example-set off the new reactions which followed from the fact of change the mass of the disposition. For the illustration we have taken one example and have obtained analytical solution.