Jahrgang VIII. 1902. Nr. 3.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Die vorliegende Nummer bringt den Bericht über den allgemeinen Verlauf der während der Pfingstwoche in Düsseldorf abgehaltenen elften Hauptversammlung des Vereins. Ueber die Vorträge und Verhandlungen auf dieser Versammlung werden in der bisher schon üblich gewesenen Weise Einzelberichte erscheinen, mit denen in der nächsten Nummer begonnen werden wird.

Wie aus dem Versammlungsbericht hervorgeht, hat unter Abänderung des § 9 der Vereinssatzungen die Zahl der Vorstandsmitglieder eine Erhöhung um ein Mitglied erfahren, so dass der Vorstand von jetzt ab sechs Mitglieder zählen wird.

Nachdem zugleich die satzungsgemäss ausscheidenden Mitglieder wiedergewählt worden sind, besteht der Vorstand für die Zeit bis zur nächsten Versammlung aus den Herren Hamdorff (Guben), Hansen (Giessen), Pietzker (Nordhausen), Presler (Hannover), Bastian Schmid (Bautzen), Schotten (Halle a. S.). Das Amt des Schatzmeisters wird auch weiterhin Herr **Presler** verwalten (s. d. Notiz am Kopfe des Blattes unter der Rubrik „Verein.")

Die Bestimmung des Ortes für die nächste Hauptversammlung ist dem Vereinsvorstand anheimgegeben worden, der die Entscheidung hierüber sobald als möglich durch das Vereinsorgan zur allgemeinen Kenntnis bringen wird. Zuschriften, die sich auf diese Versammlung beziehen, wolle man an Prof. Pietzker in Nordhausen richten.

Ein neues Mitgliederverzeichnis geht den Vereinsmitgliedern, die nicht an der Düsseldorfer Versammlung teilgenommen haben, gleichzeitig zu. Berichtigungen etwaiger Fehler darin werden an Prof. Presler in Hannover erbeten.

Der Vorstand.

Beschluss der Düsseldorfer Versammlung.*)

Unter Zustimmung zu dem wesentlichen Inhalt der Beschlüsse, die auf der 73. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Hamburg 1901 gefasst worden sind **), erklärt die XI. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften die Durchführung des biologischen Unterrichts durch alle Klassen wenigstens der realistischen höheren Schulen für notwendig, hält auch die Verwirklichung dieser Forderung ohne Beeinträchtigung der übrigen Zweige des exaktwissenschaftlichen Unterrichts für möglich.

*) S. den Versammlungsbericht S. 66.

**) S. Unt.-Bl. VII, 1901, S. 124/125.

Das absolute Masssystem.

Von H. Andriessen. (Köthen i. A.)

Für die Messungen der elektrischen und magnetischen Grössen verwendet man seit Gauss[1]) und Weber[2]) hauptsächlich zwei Masssysteme, das elektrostatische und das elektromagnetische Masssystem. Dieselben sind von den Grössen der Mechanik aus der Thatsache hergeleitet, dass sich zwei Ladungen oder zwei Magnetpole entgegengesetzter Art mit einer Kraft anziehen, welche ihrer Grösse selbst und dem umgekehrten Quadrate ihrer Entfernungen proportional ist. Aus diesen Beziehungen und den übrigen experimentell gefundenen Gleichungen der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus ergeben sich zwei verschiedene Reihen von Dimensionen der betreffenden Grössen. Wie bekannt hat jede Grösse in dem einen System eine andere Dimension als in dem anderen System. Da in allen anderen Gebieten der Physik jede Grösse nur eine Dimension hat, so kann man mit Recht die Frage aufwerfen, ob diese Verdoppelung der Dimensionen nicht durch eine minder zweckmässige Aufstellung der Ausgangsgleichungen veranlasst sei. Der Umstand, dass sich die Grössen der beiden Masssysteme um eine ganzzahlige Potenz einer und derselben Geschwindigkeit, nicht um andere Werte unterscheiden, stützt auch diese Vermutung. Ferner sind eine grosse Zahl von Symmetrieen in den Dimensionen der beiden Systeme zu bemerken. Zum Beispiel ist die Dimension einer elektromotorischen Kraft im elektrostatischen Masssystem gleich der Dimension einer Stromstärke im elektromagnetischen System und umgekehrt. Die Grössen der beiden Systeme zeigen ferner abweichend von allen anderen physikalischen Grössen gebrochene Exponenten in den Dimensionsformeln. Schliesslich kann man auch aus den Dimensionen nicht das Wesen der Grössen ablesen, wie es in anderen Gebieten der Physik meistens gelingt.

Es ist aus diesen Gründen nicht auffallend, dass eine Reihe von Physikern[3–9]) die beiden Masssysteme nicht für zweckmässig, ja nicht für richtig halten. Eine ganze Reihe von neuen Masssystemen sind infolgedessen aufgestellt worden, gegen welche sich die Physik mit Recht ablehnend verhalten hat. Sagt doch Helmholtz[10]), dass er eine „Vervielfältigung der Masssysteme ohne ganz dringende Gründe überhaupt nicht empfehlen würde“. Wenn ich trotzdem hier ein neues Masssystem zur Besprechung bringe, so veranlasst mich dazu der Umstand, dass sich das neue System ohne Willkür aus den gebräuchlichen Gleichungen entwickeln lässt, dass es ausserordentlich einfach ist, dass es die oben gerügten Mängel der bisher verwendeten Masssysteme nicht besitzt und insbesondere Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Grössen einerseits und Grössen der übrigen Gebiete der Physik enthüllt, die dasselbe vor allen anderen Systemen ausserordentlich bevorzugt erscheinen lassen.

Als Ausgangsgleichungen für die Bestimmung der elektrischen und magnetischen Masse dienten bisher die beiden Kraftgesetze

$$\text{I.}\quad F = \frac{m^2}{r^2}$$

$$\text{II.}\quad F = \frac{e^2}{r^2},$$

in welchen F Kräfte, m magnetische Polstärken, e Elektrizitätsmengen und r in Gleichung I den Abstand zweier Magnetpole, in II den Abstand zweier Elektrizitätsmengen bedeuten. Wie Faraday gezeigt hat, ist nun die Anziehungskraft zweier Elektrizitätsmengen abhängig von der Dielektrizitätskonstante K des Mediums ihrer Umgebung. Ebenso ist die Anziehung zweier Magnetpole abhängig von der Magnetisierungskonstante μ ihrer Umgebung. Da die Kräfte abnehmen mit der Zunahme von K und μ können die Gleichungen I und II vervollständigt werden zu

$$\text{III.}\quad F = \frac{m^2}{\mu r^2}$$

$$\text{IV.}\quad F = \frac{e^2}{K r^2}.$$

Die Dimensionen von K und μ sind nun bei der Herleitung der Grössen der beiden genannten Masssysteme bisher gleich 1 angenommen worden[11]). Man ist zweifellos zunächst, da kein weiterer Anhalt zur Bestimmung der Dimension von K und μ vorliegt, berechtigt, eine derselben beliebig zu wählen und zum Beispiel μ gleich 1 zu setzen. Dann ist aber, wie die Mehrzahl der oben bezeichneten Physiker vertreten, und wie auch aus dem Folgenden hervorgeht, die Dimension von K im elektromagnetischen Masssystem bestimmt. Denn bildet man das Produkt μ K, so ist K zur Reduktion auf elektromagnetisches Mass mit v^2, dem Quadrat der bekannten Geschwindigkeit, welche ihrem Werte

[1]) Comment. soc. scient. Gotting. 8, 1833.

[2]) Pogg. Ann. 55, 27, 1842.

[3]) Herwig, Absolute Masse, Leipzig, 1880, Seite 63.

[4]) C. Bohn, Ueber absolute Masse, Wied. Ann. 18, 1883, Seite 346.

[5]) S. P Thompson, Elementare Vorlesungen über Elektrizität, Tübingen, 1897, Seite 365.

[6]) Ostwald, Geschichte der Elektrochemie, Leipzig, 1896, Seite 654.

[7]) Lodge, Neueste Anschauungen über Elektrizität, Leipzig, 1896, Seite 291 und 520.

[8]) Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie, Leipzig, 1894, Seite 172.

[9]) J. J. Thomson, Elektrizität und Magnetismus, Braunschweig, 1894, Seite 172. 1897, Seite 366.

[10]) Wissenschaftliche Abhandlungen, II., 994.

[11]) Die Darstellung schliesst sich hier an Föppl an. Siehe die oben zitierte Stelle.

nach der Lichtgeschwindigkeit nahe kommt, zu multiplizieren. Denn die Kapazitäten zweier Kondensatoren gleicher Dimensionen verhalten sich umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstanten ihrer Zwischenschichten. Da nun das Verhältnis der Kapazität im elektromagnetischen Mass zur Kapazität im elektrostatischen Mass v^2 ist, so muss die gleiche Verhältniszahl bei den Dielektrizitätskonstanten $\frac{1}{v^2}$ sein. Aber auch in elektrostatischem Mass hat das Produkt denselben Wert und ist für das Vakuum gleich 1. Die Gleichung[12]) lautet daher:

$$\text{V.}\quad \mu K v^2 = 1.$$

Die beiden sogenannten Konstanten sind nun vollständig analoge Grössen, die eine für Magnetisierung, die andere für Elektrisierung, und wir sind gerade so berechtigt, ihnen gleiche Dimension zuzuweisen, wie es Gauss und Weber mit der Elektrizitätsmenge und der Polstärke gethan haben, die ja auch die analogen Grössen der beiden Gebiete sind. Dann würde sich nach der Gleichung V für beide der reziproke Wert einer Geschwindigkeit als Dimension ergeben. Ein zweiter Grund dafür, dass die Grössen K und μ gleiche Dimension haben sollten, liegt in Folgendem: Jede dieser beiden Grössen hat Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen. Wenn K sich ändert, wird nicht etwa der elektrische Zustand im Wellenvorgang geändert, sondern es ändert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ganzen Welle, indem ja der elektrische und der magnetische Teil der Welle nur Phasen derselben Welle sind und sich etwa verhalten wie die Zugspannung und Druckspannung an einer Stelle einer Stimmgabel. Es ist also bei Wellen μ K sozusagen eine einzige Eigenschaft des Mediums, welche gewiss nicht unzweckmässig in einer einzigen Dimension zum Ausdruck kommen würde. Die Dimension des Produktes müsste dann in Uebereinstimmung sein mit dem Quadrat der Dimension jedes Faktors. Schliesslich ist $\sqrt{K\mu}$ nach der Gleichung V das Reziproke der Lichtgeschwindigkeit und also nahezu gleich dem Reziproken der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen. Nach den Gleichungen für elektromagnetische Wellen[13])[14]) ist ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit diesem Faktor umgekehrt proportional. Das kann doch gewiss kein Zufall sein. Es ist vielmehr wahrscheinlich, dass die Dimension von K und μ dieselbe ist und dass aus der Gleichung V folgt:

$$\text{VI. Dim. } [\mu] = [K] = [\sqrt{\mu K}] = [L^{-1}\,T];$$

hierbei ist L das Centimeter, T die Sekunde.

Auch dem Zahlenwerte nach dürften sich μ und K einzeln von $\frac{1}{v}$ nicht mehr unterscheiden, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen von der Lichtgeschwindigkeit verschieden ist. Dieses kann man aus der Art des Einflusses der beiden Grössen auf die Wellen schliessen, welche eben besprochen ist. Ferner folgt dieses aus der bekannten Gleichung, welche die Beziehung eines Stromes zu seinem magnetischen Felde darstellt. Beim Strom müsste doch die Dielektrizitätskonstante, beim Feld die Magnetisierungskonstante als Faktor vorkommen. Da beide im Vakuum gleich sind und auch angenähert im Luftraum, so verschwinden sie aus der Gleichung. Immerhin ist zuzugeben, dass der Nachweis einer zahlenmässigen Uebereinstimmung von K und μ nach unabhängiger Methode wünschenswert ist.

Verwendet man die Werte der Gleichung VI zur Bestimmung der Dimensionen der Grössen der Elektrizitätslehre und der Lehre von dem Magnetismus, so ergiebt sich, dass nicht nur die Mengen gleiche Dimensionen erhalten, sondern dass auch alle anderen gleichartigen Grössen der beiden Gebiete gleiche Dimensionen bekommen. Ausserdem erhält die elektromotorische Kraft dieselbe Dimension, wie die Stromstärke, (es erklärt dieser Umstand die Symmetrie in den Dimensionen, welche Seite 1 erwähnt wurde.) die magnetomotorische Kraft dieselbe Dimension, wie die magnetische Stromstärke. Bestimmt man nämlich aus den Gleichungen III und IV unter Verwendung von VI die Dimensionen von m und e, so werden dieselben

$$[m] = [e] = \left[M^{\frac{1}{2}}\,L\,T^{-\frac{1}{2}}\right];$$

Hierbei bedeutet M das Gramm. Die Dimensionen der übrigen elektrischen und magnetischen Grössen ergeben sich aus diesen nach den bekannten Gleichungen. Aus der angeschlossenen[15]) sieht man in der That, dass alle elektrischen und magnetischen Grössen gleicher Art die gleiche Dimension erhalten haben, und dabei ist es ohne Einfluss, ob man von der Elektrizitätsmenge oder von der Polstärke ausgeht. Es verwirklicht dieses System das, was bei der Aufstellung der beiden alten Masssysteme beabsichtigt war, eine übereinstimmende Dimensionierung in beiden Gebieten, dem der Elektrizität und dem des Magnetismus zu erzielen. Denn man konnte nur diesen Gesichtspunkt im Auge haben, als man von den beiden Mengen

[12]) Föppl am angef. Orte, Seite 146.

[13]) Drude, Physik des Aethers, Stuttgart, 1894, Seite 412.

[14]) H. Helmholtz, Elektromagnetische Theorie des Lichtes, Hamburg und Leipzig, 1897, Seite 107.

[15]) Die Tabelle ist aus der von Föppl am angef. Orte mitgeteilten Tabelle abgeleitet. Dieselbe enthält ausser dem Namen und der Dimension noch das Symbol bei denjenigen Grössen, welche in dieser Arbeit verwendet sind.

Tabelle I.

Symbol	Name	Dimensionen
K	Dielektrizitätskonstante . . .	$L^{-1}T$
μ	Magnetisierungskonstante . .	
$^1/_v$	Reziprokes der Lichtgeschw.	
$\mathfrak{E}$	Elektrische Kraft	$M^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{3}{2}}$
	Magnetische Kraft	
$\mathfrak{D}$	Dielektrische Verschiebung .	$M^{\frac{1}{2}}L^{-1}T^{-\frac{1}{2}}$
	Magnetische Induktion . . .	
e	Wahre Elektrizitätsmenge .	$M^{\frac{1}{2}}LT^{-\frac{1}{2}}$
m	Wahre Magnetismusmenge (Polstärke)	
	Freie Elektrizitätsmenge . .	$M^{\frac{1}{2}}L^{2}T^{-\frac{3}{2}}$
	(Freie) Magnetismusmenge .	
E	Elektromotorische Kraft . .	$M^{\frac{1}{2}}LT^{-\frac{3}{2}}$
	Potential	
J	Elektrischer Strom	
	Magnetischer Strom	
	Magnetomotorische Kraft . .	
W	Widerstand	1
C	Kapazität	T
	Induktionskoeffizient . . .	

ausgehend die Dimensionen der anderen Grössen feststellte.

Auch die Gleichungen der Elektrizitätslehre und des Magnetismus führen zahlenmässig zu demselben Resultate, wenn man $K = \mu = \frac{1}{v}$ setzt. Eine Besprechung der einzelnen Grössen der Tabelle I soll erst an die folgende Tabelle angeschlossen werden.

Wenn auch dieses Masssystem schon wesentlich einfacher ist, als die gebräuchlichen Systeme, so glaube ich doch nicht, dass es das zweckmässigste ist, weil nicht bei allen Grössen eine Beziehung ihrer Bedeutung zu ihren Dimensionen ableitbar ist. Ferner macht sich dieses System noch durch die gebrochenen Exponenten seiner Grundeinheiten verdächtig. Die folgende Ueberlegung hat mir den Weg gezeigt, wie eine weitere Vereinfachung vorzunehmen sei. Wenn man eine Grundeinheit mehr wählt, als unbedingt erforderlich ist, so kann es leicht eintreten, dass vollständig gleichartige Grössen verschiedene Dimension erhalten, je nachdem sie die nicht unbedingt erforderliche Grundeinheit enthalten oder nicht. Die Länge und die Zeit werden allgemein für unentbehrliche Grundeinheiten gehalten, nicht aber die Masse, wie Herwig[16]), Bohn[17]) und andere bereits festgestellt haben. Die Masse (M) lässt sich noch auf die Länge und die Zeit zurückführen, wenn man das Massenanziehungsgesetz

$$\text{VII.}\quad F = \frac{M^2}{r^2}$$

zur Berechnung benutzt. Es entsteht da die Frage, ob man im Massenanziehungsgesetze auch eine Grösse einführen muss, welche den Grössen K und μ der Gleichungen III und IV entspricht. Nach der Ansicht der Astronomen lässt sich für die Massenwirkung eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht mit den Thatsachen in Einklang bringen. Heaviside[18]) hingegen hält eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für ausgeschlossen, da ja die von uns beobachteten Aenderungen der Entfernung der Weltkörper nicht gross genug sind, um einen Einfluss der gross angenommenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit zeigen zu können. Wie gross auch die Geschwindigkeit sein mag, so halte ich es schon aus Gründen der Analogie für einzig richtig, der Gravitationskonstante (f) die Dimension einer Geschwindigkeit zu geben. Ihr Einfluss auf den Lauf der Weltkörper zeigt sich ja schon darin, dass sie in der Umlaufszeit der Planeten eine Rolle spielt[19]). Ebenso wie ferner $\frac{1}{K}$ und $\frac{1}{\mu}$ die Anziehungskraft zweier elektrischen und magnetischen Massen bestimmen, bestimmt f die Anziehungskraft zweier Weltkörper. Ausserdem zeigt der Faktor $\frac{1}{r^2}$ im Massenanziehungsgesetze (Gleichung VII), dass es sich dort genau ebenso um Nahewirkungen handelt, die durch Kraftlinien zur Darstellung gebracht werden können, wie bei den elektrischen und magnetischen Kräften. Der Umstand, dass man noch keinen Stoff kennt, welcher eine andere Gravitationskonstante bedingen würde, als die bis jetzt bekannte Zahl f, kann deshalb nicht von Belang sein, weil die Massenanziehungen bisher überhaupt noch nicht der experimentellen Untersuchung hinreichend zugänglich sind. Der Grösse nach dürfte die Geschwindigkeit, welche im Massenanziehungsgesetze einzuführen ist, direkt mit der Gravitationskonstante übereinstimmen. Setzt man f in die Gleichung VII ein, so erhält das Gesetz die Form

$$\text{VIII.}\quad F = f\frac{M^2}{r^2};$$

Hierbei ist

$$\text{IX.}\quad [f] = [LT^{-1}];$$

Aus den Gleichungen IX und VIII lässt sich die Dimension von M ausgedrückt durch L und T bestimmen. Es ist

$$\left[M^2\right] = \left[\frac{(LMT^{-2})L^2}{LT^{-1}}\right]$$

und

$$[M] = [L^2T^{-1}].$$

Setzt man diesen Wert für M in die Dimensionen der Grössen der Tabelle I ein, so er-

[16]) Herwig a. a. O.

[17]) Bohn a. a. O.

[18]) Heaviside, Electromagnetic Theory, London, Volume I, Seite 466.

[19]) Viktor von Lang, Theoretische Physik, Braunschweig, 1891, Seite 146.

geben sich die Dimensionen des neuen Masssystemes, dessen Herleitung der Zweck dieser Arbeit ist, und welches wohl das „Centimeter-Sekundenmasssystem" genannt werden kann, da die Masse in demselben als Grundeinheit nicht mehr vorkommt. Es sind in die Tabelle II, welche die Grössen dieses Masssystemes enthält, die Dimensionen der Kraft, der Arbeit und einiger anderer physikalischer Grössen eingefügt, welche Analogie zu den entsprechenden elektrischen Grössen besitzen.

Tabelle II.

Symbol	Name	Dimension
F	Kraft	$L^3\,T^{-3}$
	Arbeit	$L^4\,T^{-3}$
K	Dielektrizität-konstante . .	
μ	Magnetisierungskonstante . .	
$^1/_v$	Reziprokes der Lichtgeschw.	$L^{-1}\,T$
$^1/_f$	Reziprokes der Gravitationskonstante	
$\mathfrak{E}$	Elektrische Kraft	
	Magnetische Kraft	$L\,T^{-2}$
g	Beschleunigung d. Schwerkraft	
$\mathfrak{D}$	Dielektrische Verschiebung .	
	Flächendichte der wahren Elektrizität	$L\,T^{-1}$
	Magnetische Induktion . . .	
M	Masse	
e	Wahre Elektrizitätsmenge .	
m	Wahre Magnetismusmenge .	$L^2\,T^{-1}$
	oder Polstärke (hypoth.) . .	
	Entropie	
	Freie Elektrizitätsmenge . .	$L^3\,T^{-2}$
	(Freie) Magnetismusmenge .	
	Temperaturdifferenz	
E	Elektromotorische Kraft . .	
	Potential (Elektrizität, Magnetismus und Schwerkraft)	$L^2\,T^{-2}$
J	Elektrischer Strom	
	Magnetischer Strom . . .	
W	Widerstand	1
C	Kapazität	T
	Induktionskoeffizient . . .	

Ein Blick auf die Tabelle II genügt, um die ausserordentliche Ueberlegenheit dieses Masssystems zu zeigen. Die Dimensionen sind einfach, besitzen keine gebrochenen Exponenten und es ist die Zahl der verschiedenen Dimensionen auf weniger als $^1/_3$ zusammengeschrumpft. Es sollen jetzt einige der Grössen und die Beziehungen, welche sie untereinander haben, besprochen werden.

Die Dimension der Masse ist nach dem vorliegenden cm-s-System $L^2\,T^{-1}$, eine Dimension, welche zunächst befremden mag. Immerhin deutet diese Dimensionsform auf die beiden wichtigsten Eigenschaften der Masse. Dieselbe erfüllt ja einen Raum und besitzt, vermuthlich infolge von Schwingungsvorgängen in ihren Teilchen, Trägheit. Die Abhängigkeit von der Zeit deutet auf Bewegungen oder Schwingungen, und ein cm^2, welcher sich bewegt, bestreicht in der Sekunde ein Volumen.

Wichtig ist der Umstand, dass die Dimensionen der Elektrizitätsmengen und der Entropie mit der der Masse übereinstimmen. Die Elektrizitätsmenge ist hiernach die Masse, welche durch die elektrischen Kräfte in Bewegung versetzt wird. Dieses wird bei der Besprechung des Ohmschen Gesetzes noch berührt werden. Es ist ferner schon seit langer Zeit vermutet worden, dass die Entropie in ihren Eigenschaften der Masse ähnelt. Man nennt dieselbe daher in der technischen Thermodynamik direkt „Wärmemasse" und „Wärmegewicht". Ausserdem haben die Arbeiten von Wiedeburg[20]), welcher die Entropie „Wärmeladung" nennt, die Analogie derselben mit der Elektricitätsmenge sehr wahrscheinlich gemacht. Die Annahmen jener Forscher finden demnach eine Bestätigung, indem die genannten drei Grössen im cm-s-System dieselbe Dimension besitzen.

Ausserdem ist die Dimension der Temperaturdifferenz in Uebereinstimmung mit der Dimension der Spannungsdifferenz.

Um jetzt auf die Besprechung des Ohmschen Gesetzes überzugehen, sind die Dimensionen der Spannung (E) und der Stromstärke (J) identisch gleich $L^2\,T^{-2}$. Die Spannung ist in Uebereinstimmung mit dem Potentialbegriff gleich der Arbeit pro Einheit der Elektricitätsmenge (e). Die Dimension von E ergiebt sich also aus der Gleichung

$$[E] = \left[\frac{\text{Arbeit}}{e}\right] = \left[\frac{L^4\,T^{-3}}{L^2\,T^{-1}}\right] =$$

$$[E] = [L^2\,T^{-2}].$$

Die Potentialdifferenz ist also hier, wie in dem alten Masssystem eine Arbeitsgrösse, wie es mit Recht für das Potential von Helmholtz[21]) verlangt wurde. Die Stromstärke ist gleich der Elektricitätsmenge ($L^2\,T^{-1}$) pro Sekunde:

$$[J] = [L^2\,T^{-2}].$$

Das Verhältnis der Spannung und der Stromstärke ist gleich dem Widerstand (W)

$$\frac{E}{J} = W,$$

einer Konstanten, deren Dimension nach diesem Masssystem gleich 1 ist.[22]) Es entspricht das Ohmsche Gesetz vollständig dem Gesetze der Mechanik, welches die Bewegungen von Flüssigkeiten verfolgen lässt. Dieses zu beweisen sei die potentielle Energie gleich M g h, wobei g die Beschleunigung und h die Fallhöhe bedeuten sollen. Wenn v hier einfach die Ge-

[20]) Ann. der Physik V, 1901. Seite 525. Vergleiche auch ältere Arbeiten desselben Autors.

[21]) Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Band II, 1005.

[22]) Viele Physiker setzen irrtümlich die Dimension einer Konstanten gleich Null.

schwindigkeit bedeutet, so ist die kinetische Energie gleich $M \frac{v^2}{2}$. Das Verhältnis derselben sei gleich c, dann ist

$$X. \quad \frac{M\,g\,h}{M \frac{v^2}{2}} = c,$$

gleich dem Verhältnis des Arbeitswertes M g h zur nutzbaren Arbeit $M \frac{v^2}{2}$. Der Faktor c ist ein Mass für die durch Reibung und Anderes bedingten Verluste. Genau so ist

$$\frac{e\,E}{e\,J} = W.$$

Es entspricht also e E dem Werte M g h der Gleichung X, so dass die Spannung (E) die potentielle Energie pro Einheit der Elektrizitätsmenge bedeutet. Die Stromstärke (J) ist ebenso die kinetische Energie pro Einheit der Elektrizitätsmenge und entspricht der Grösse $\frac{v^2}{2}$. Die Grösse E kann noch ersetzt werden durch $\mathfrak{E}$ [Elektrische Kraft] und den Weg, über welchen die letztere wirkt. Dann ist, wenn der Weg durch cm ausgedrückt wird,

$$[E] = [\mathfrak{E} \cdot cm] = [g \cdot h],$$

wie sich durch Vergleichung mit Gleichung X ergiebt. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{E}$ und g dieselbe Dimension haben müssen, wie es auch aus der Tabelle II zu ersehen ist. Die elektrische Kraft ($\mathfrak{E}$) ist also die Kraft pro Masseneinheit bei elektrischen Vorgängen, das ist die Beschleunigung. Die besondere Entwickelung der theoretischen Wärmelehre hat veranlasst, dass man dort beim Wärmeleitungsgesetz nicht von der Entropie (welche der Elektrizitätsmenge analog ist), sondern von der Wärmemenge selbst, welche ja eine Arbeit ist, ausgegangen ist. Wenn auch dadurch die Wärmeleitungsgleichung anders ausgefallen ist, als das Ohmsche Gesetz, so ist doch, wie allgemein bekannt, die Analogie zwischen Wärmestrom und Flüssigkeitsstrom nicht zu verkennen.

Die Kapazität (C) und der Induktionskoeffizient haben in dem cm-s-System die Dimension einer Zeit. Es passt dieses entschieden besser als die früheren Dimensionen einer Länge und der anderen Dimensionen derselben Grössen. Es lässt sich da die Ansicht herleiten, dass sie die Zeit angeben, welche zur Erzeugung des ganzen Kraftfeldes erforderlich ist. Indem der Kondensator als Beispiel gewählt werden soll, da man die Betrachtungen leicht auf magnetische Verhältnisse übertragen kann, sei d e die kleine Elektrizitätsmenge, welche die Zuleitungen des Kondensators beim Ladungsvorgang während der Zeit d t passiert. Der Momentanwert der Stromstärke sei mit i bezeichnet. Dann ist

$$d\,e = i\,d\,t$$

und $e = J \cdot t$, wobei J die mittlere Stromstärke bedeutet, welche dieselbe gesamte Elektrizitätsmenge in der gleichen Zeit t übertragen würde.

Andererseits wächst mit der Ansammlung der Elektrizität die Spannung, bis sie zur Zeit t den Wert Q hat, und es ist $e = E \cdot C$ der dann vollendete Endzustand. Da E proportional J ist, muss C proportional t sein. C kann also hier vorteilhaft als die Zeit gedeutet werden, die verstreicht, bis der Kondensator gefüllt ist. Ebenso könnte man das Fassungsvermögen für Flüssigkeit definieren als die Zeit, welche verstreichen muss, bis das Gefäss vom Einheitsstrom gefüllt wird. Es ergiebt sich hier eine wichtige Beziehung zwischen den Gleichungen $e = J \cdot t$ und $e = E \cdot C$, die ausserdem übereinstimmen mit Gleichungen, die bei Flüssigkeiten für analoge Verhältnisse gelten. Die Stromstärke J giebt hierbei auch den dem Leitungsstrom in den Zuleitungen entsprechenden Verschiebungsstrom im Kondensator, während E die dadurch erzielte Spannung anzeigt.

Diese Auffassungen bestätigen sich auch, wenn man die Dielektrizitätskonstante und die Magnetisierungskonstante nach ihren Dimensionen in der Tabelle II als die Zeit auffasst, welche zur Erzeugung von Kraftlinien von nur 1 cm Länge erforderlich ist. Denn die Dimension der Dielektrizitätskonstante ist

$$\left[\frac{\text{Kapazität}}{\text{Länge}}\right] = [L^{-1}\,T].$$

Es stimmt das vortrefflich damit, dass das Reziproke derselben der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektro-magnetischer Wellen gleich gesetzt werden konnte.

Die dielektrische Verschiebung ($\mathfrak{D}$) hat die Dimension T^{-1}, indem sie der Flächendichte der Elektrizität entspricht. Sie ist auch das Mass für die Kraftlinienzahl pro cm² Querschnitt einer Schicht des Dielektrikums.

Auch für die Maxwellsche Gleichung

$$\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}$$

ergiebt sich hier eine einfache Deutung. Sie ist der Gleichung

$$e = E \cdot C$$

vollständig analog. Die letzte Gleichung ist die allgemeine Form, während die erste dasselbe aussagt für die Volumeneinheit. Denken wir uns einen Kondensator mit zwei Platten von 1 cm² Fläche im Abstand von 1 cm, so stellt $4\pi\mathfrak{D}$[23]) die Zahl der Kraftlinien in dem eingeschlossenen cm³, K (Dielektrizitätskonstante oder Kapazität pro cm) die Kapazität

[23]) Der Faktor 4π verschwindet aus der Gleichung, wenn die von Heaviside angeregte Aenderung des Masssystems vorgenommen wird, auf welche unten noch verwiesen ist.

der Schicht und $\mathfrak{E}$ (Elektromotorische Kraft pro cm) die Spannung zwischen den Platten dar.

Wie in der Mechanik Masse mal Beschleunigung eine Kraft ergeben, so giebt auch hier Elektrizitätsmenge mal elektrische Kraft eine Kraft, weil die Dimensionen identisch sind.

Genau dieselben Deutungen lassen sich auch den Grössen der Lehre vom Magnetismus geben. Es sind damit alle wichtigen Gleichungen der Elektrizitätslehre und die Grössen derselben auf mechanische Analogien zurückgeführt.

Aus diesen Beziehungen folgt wohl zur Genüge, dass das cm-s-Masssystem weit zweckmässiger ist, als das elektrostatische und das elektromagnetische Masssystem. Es fragt sich nun, welche Anwendung soll man von demselben machen. Das einfachste wäre, wenn man dieses Masssystem nur benutzte für die Bestimmung der Dimensionen. Man muss dann bei Grössen, die aus der Elektrostatik hergeleitet sind, noch mit dem Verhältnisfaktor (Potenz der Lichtgeschwindigkeit) multiplizieren, der die Grössen in den beiden früheren Masssystemen unterschied, der dann aber nur ein Zahlenfaktor ist. Die Grössen K und μ sind dann immer in die Gleichungen aufzunehmen. Im Uebrigen gelten alle Gleichungen wie bisher.

Besser wäre es, wenn auch schwer durchführbar, wenn man für K und μ ihre Werte $\frac{1}{v}$ einsetzt und dadurch den Faktor v ganz beseitigt. Derselbe verschwindet dann, wie sich leicht zeigen lässt, vollständig und es werden dann auch zahlenmässig das elektromagnetische und das elektrostatische Masssystem identisch. Dieser Faktor v ist aber noch nicht genügend bekannt und müsste hierfür erst genauer bestimmt werden. Dadurch würde sich das Coulomb, das Ohm, Volt und so weiter wesentlich ändern. So grosse Umwälzungen vorzunehmen hat nur dann Zweck, wenn man sich sicher ist, dass man etwas Endgültiges zu schaffen in der Lage ist, dass alle Gesichtspunkte, die für eine Verbesserung vorgebracht sind oder vorgebracht werden können, berücksichtigt werden. Man müsste dann auch die Gravitationskonstante zur Bestimmung der Krafteinheit heranziehen, wie das aus den Gleichungen VIII und IX unschwer zu bewirken ist. Die Masseneinheit könnte beibehalten werden, während das Dyn und das Erg andere Werte erhalten würden. Schliesslich ist es nach meiner Ansicht auch zweckmässig, in den Nenner der drei Kraftgesetze den Faktor 4π einzuführen, wie es von Heaviside so vortrefflich begründet wird [24] [25]), sodass dieselben lauten:

$$F = \frac{e^2}{4\pi K r^2}$$

$$F = \frac{m^2}{4\pi \mu r^2}$$

$$F = f\frac{M^2}{4\pi r^2}.$$

Dann verschwindet π aus einer Reihe von Gleichungen, in welchen es störend ist, und die analogen Gleichungen der Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus erhalten die gleichen Zahlen als Faktoren. Ehe diese drei Aenderungen gemeinsam vorgenommen werden können, halte ich eine Aenderung des Masssystems für unzweckmässig. Ausserdem vertrete ich die Ansicht, dass andere als die hier verzeichneten Aenderungen nicht erforderlich werden können. Es beweist dieses schon ein Vergleich mit den Gesetzen der Mechanik und ein Vergleich der Gesetze der Elektrizität und des Magnetismus in der Fassung, die ihnen Heaviside (a. a. O.) giebt. Es sind ja auch dann die früher nicht ganz gewürdigten Eigenschaften des Zwischenmediums berücksichtigt.

Da das Gebiet der Physik bereits beginnt übermässig ausgedehnt zu werden, so ist entschieden eine Vereinfachung des Masssystems und der Gleichungen nur eine Frage der Zeit. Aus diesem Grunde halte ich es für zweckmässig, dass man sich schon jetzt auf eine solche, nach den Resultaten dieser Arbeit gewinnbringende Aenderung vorbereitet.

Als Resultate der Arbeit sind vornehmlich folgende zu nennen:

1. Es ist höchst wahrscheinlich, dass die Dimensionen der Dielektrizitätskonstante und der Magnetisierungskonstante gleich dem Reziproken einer Geschwindigkeit sind. Der Wert derselben für das Vakuum ist wahrscheinlich gleich dem Reziproken der Lichtgeschwindigkeit.

2. Es ist wahrscheinlich, dass die Gravitationskonstante die Dimension einer Geschwindigkeit hat.

3. Unter Verwendung dieser drei Dimensionen lässt sich ein Masssystem bestimmen, nach welchem das elektrostatische und das elektromagnetische Masssystem zu einem System verschmelzen, in dem alle analogen elektrischen und magnetischen Grössen dieselbe Dimension haben.

4. Die Dimensionen der Masse, Elektrizitätsmenge, Polstärke und der Entropie werden dann identisch.

5. Das Ohmsche Gesetz entspricht dann genau dem Gesetz, welches die Flüssigkeitsbewegung in Rohrleitungen regelt.

6. Die Gleichungen $e = J \cdot t$, $e = E \cdot C$ und $\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}$ sind dann nur verschiedene Ausdrücke eines und desselben physikalischen Vorganges, welcher bei den Flüssigkeitsbewegungen seine Analogie hat.

---

[24]) Heaviside, Elektromagnetik, Theorie, I. Seite 123 und II, 275. Die Zweckmässigkeit dieser Aenderung wurde demselben, wie er dort mitteilt, von einer grossen Zahl englischer Physiker bestätigt.

[25]) Wiedemann, Elektrizität, IV, Seite 1035.

Wissenschaftliche Strenge im mathematischen Unterricht.

Von Franz Weiss (Gross-Lichterfelde-Berlin).

(Schluss).

Wir wenden uns jetzt zu einer anderen Frage, zur Multiplikation mit negativen Zahlen. So einfach es ist, dem Schüler die Existenz der negativen Zahlen überhaupt klar zu machen und die Gesetze der Addition und Subtraktion dieser neuen Grössen zu beweisen, so schwierig ist die Multiplikation mit diesen in einleuchtender und dabei einwandsfreier Weise zu begründen. Das Gefühl für wissenschaftliche Strenge ist auf der Stufe, auf der zuerst Algebra gelehrt wird, bei dem Schüler noch nicht so sehr entwickelt, dass es ihm darauf ankommt, für alle Sätze einen verständlichen Beweis zu haben; er begnügt sich leicht damit, einen Satz auf Treu und Glauben hinzunehmen und ist froh, wenn er die Sätze, dass $+1$ mal $-1 = -1$ und $-1 \cdot -1 = +1$ ist, in der Rechnung zur Zufriedenheit des Lehrers anwendet. Aber wir sollen gerade in unserer Wissenschaft den Schüler lehren, das ihm Dargebotene mit kritischem Auge zu betrachten, und andererseits ist es dem wissenschaftlich feinfühligen Lehrer ein Bedürfnis, zu überzeugen und nicht zu überreden. In früheren Zeiten war das Gefühl für wissenschaftliche Strenge selbst bei hervorragenden Mathematikern zuweilen nur in geringem Masse entwickelt. So beweist z. B. Euler in seiner Algebra, nachdem er versucht hat, den Satz $(+1) \cdot (-1) = -1$ festzustellen, folgendermassen den Satz $(-1) \cdot (-1) = +1$. Er sagt, entweder sei $(-1) \cdot (-1)$ gleich -1 oder $= +1$, -1 könne es nicht sein, denn, wie gezeigt, sei $(+1) \cdot (-1) = 1$, also bleibe nur übrig $(-1) \cdot (-1) = +1$.

In den meisten Lehrbüchern wird der Schwierigkeit auf folgende Art abgeholfen. Man zeigt zunächst leicht, dass $(-a) \cdot (+b) = -ab$ ist. Nun sagt man, wir wollen die für positive Zahlen feststehenden Gesetze auch für negative gelten lassen, also auch die Vertauschung der Faktoren eines Produktes. Dann muss $(-a) \cdot (+b) = (+b)(-a)$ sein, also ist das letztere Produkt ebenfalls $= -ab$. Schon dieses Verfahren ist nicht zu billigen, denn es erweckt den Anschein, als sei die Annahme, dass die Vertauschung der Faktoren für negative Zahlen gilt, rein willkürlich hinzugenommen und als brauchte diese Annahme nicht notwendig gemacht zu werden. Dem ist bekanntlich nicht so, man gelangt durch die Definition der negativen Zahlen allein zu dem fraglichen Satze. Durch den Schein der Willkür aber, der dem genannten Verfahren anhaftet, nimmt der Schüler mit einem aus Misstrauen und Staunen zusammengesetzten Gefühle den Satz hin.

Man fährt nun fort und leitet aus dem festgestellten Gesetze den Satz ab: „Mit einer negativen Zahl multipliziert man, indem man mit dem absoluten Werte der Zahl multipliziert und das Produkt abzieht". Auf diese Weise folgt aus $(-a) \cdot (-b) - (-a) \cdot b = -(-ab) = +ab$.

In dieser Art zu schliessen, liegt wiederum eine petitio principii. Wenn festgestellt ist, dass die angeführte Regel für die Multiplikation einer positiven mit einer negativen Zahl gilt, so braucht sie deshalb noch nicht von der Multiplikation zweier negativen Zahlen zu gelten. Der Beweis ist also erschlichen. Falsche Beweise darf man aber dem Schüler meines Erachtens unter keinen Umständen geben, nicht streng dürfen sie unter Umständen sein.

In der häufig in den Lehrbüchern auftretenden Gleichung

$$(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d = (ac-bc) - (ad-bd) = ac - bc - ad + bd$$

findet sich das geschilderte Verfahren angewendet. Der Fall, dass $a - b < 0$ ist, wird dabei nicht besonders erwähnt, obgleich es doch darauf wesentlich ankommt. Vielleicht empfiehlt sich folgendes Beweisverfahren. Man geht von einer identischen Gleichung aus, etwa von

$$4 \cdot 5 = 20$$

Hierfür kann man schreiben

$$4(8 - 3) = 20 \text{ . oder } 4[8 + (-3)] = 20.$$

Wendete man hierauf die Regel von der Multiplikation mit einer Klammer an, so ergäbe sich

$$4 \cdot 8 + 4 \cdot (-3) = 20.$$

Soll dies gelten, so muss sein

$$4 \cdot (-3) = 20 - 32 = -12.$$

Verallgemeinert lauteten die Gleichungen

$$ab = ab$$
$$a[b + c + (-c)] = ab$$
$$ab + ac + a \cdot (-c) = ab$$
$$a \cdot (-c) = -ac.$$

Weiterhin ist, wie eben bewiesen

$$a \cdot (-b) = -ab$$

wofür

$$[a + c + (-c)] \cdot (-b) = -ab$$
$$a(-b) + c(-b) + (-c) \cdot (-b) = -ab$$
$$-ab - bc + (-c) \cdot (-b) = -ab.$$

Soll dies gelten, so muss sein

$$-(c) \cdot (-b) = +b \cdot c.$$

Vor diesem Beweise empfiehlt es sich, wiederum den Beweis in natürlichen Zahlen zu liefern.

Man sieht, dass diesem Verfahren das von Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzte zu Grunde liegt. Es ist für den Schüler etwas handlicher gemacht.

Wir wenden uns jetzt zu den Anfangsgründen der Trigonometrie.

Vor zwei Jahren ist in einer Programmabhandlung des Köllnischen Gymnasiums der Versuch gemacht worden, die Grundlagen des trigonometrischen Unterrichts zu reformieren. Der Verfasser, Herr Oberlehrer Dr. Haentzschel, ist der Meinung, dass man bisher im trigonometrischen Anfangsunterricht ganz verkehrt, weil durchaus unstreng, verfahren ist, und glaubt, diesem Fehler dadurch abhelfen zu sollen, dass er als Definition des Sinus die Gleichungen aufstellt

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

In der dritten Nummer des VI. Jahrganges der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften haben die Herren Dr. Schafheitlin und Professor Pietzker in treffender Weise dieses Verfahren beurteilt und vor allem darauf aufmerksam gemacht, dass diese Definition an sich noch keinen Schluss auf die Anwendbarkeit in der Geometrie zuliesse, dass vielmehr erst nachgewiesen werden müsste, dass, falls α als Winkel aufgefasst wird, $\sin \alpha$ das bekannte Verhältnis ist, ferner, dass obige Definition als Funktionalgleichung aufgefasst, dem Verständnis der Schüler unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellt.

Man kann einen Schritt weitergehen und behaupten, dass obige Gleichungen, als Funktionalgleichungen aufgefasst, in dieser Allgemeinheit den Sinus garnicht definieren. Zum Beweise schreiben wir die Gleichungen folgendermassen:

$$f(\alpha) = 2 f\left(\frac{\alpha}{2}\right) g\left(\frac{\alpha}{2}\right), \; f^2(\alpha) + g^2(\alpha) = 1$$

Durch ein sehr einfaches Verfahren gelangt man zu einer Klasse von Funktionen, die diesen Gleichungen genügen, und von denen der Sinus ein Spezialfall ist. Wählen wir z. B.

$$f(x) = \frac{e^{i\varphi(x)} - e^{-i\varphi(x)}}{2i}, \quad g(x) = \frac{e^{i\varphi(x)} + e^{-i\varphi(x)}}{2}$$

und setzen fest, dass für alle rationalen x $\varphi(x) = a\,x$, für alle irrationalen x $\varphi(x) = b\,x$ sein soll, so haben wir zwei Funktionen, die den obigen Gleichungen genügen. Denn für jedes rationale x z. B. ist

$$f(2x) = \frac{e^{2iax} - e^{-2iax}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{e^{iax} - i^{-iax}}{2i}$$

$$g(x) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

$$\frac{e^{2iax} - e^{-2iax}}{2i} = 2 . \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} . \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

Wählten wir für alle Werthe von x $\varphi(x) = a\,x$, so erhielten wir für f(x) sin(a x), also eine Funktion, deren Periode $\frac{2\pi}{a}$ ist. Nur unter der Bedingung $a = 1$ ergiebt sich sin(x). Diese Bedingung ist, wie sich leicht zeigen lässt, identisch mit $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = g(x)$. Bekanntlich ergiebt sich die entsprechende Gleichung $\frac{d \sin x}{d\,x} = \cos x$ aus dem Additionstheorem unter der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{x=0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$ ist. Diese Voraussetzung müsste also noch hinzukommen, damit man aus den Funktionalgleichungen, von denen wir ausgingen, den Sinus erhält.

Man sieht also, auch von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus ist die Haentzschelsche Definition nicht haltbar. Ja, ich möchte sogar noch weiter gehen. Die arithmetische Definition Haentzschels verkennt m. E. das Wesen der Trigonometrie. Wie in der Geometrie, so ist man auch in der Trigonometrie von der Anschauung ausgegangen, und man geht auch heute noch davon aus. Durch die arithmetische Verwertung der geometrischen Vorstellungen, durch die Beobachtung der stetigen Veränderung der als Sinus u. s. w. definierten Verhältnisse ist man gelangt und gelangt man noch heute in der Schule zu dem Begriffe der trigonometrischen Funktionen. Man hätte niemals aus der rein arithmetischen Definition dieser Funktionen heraus die Anwendung auf die Berechnung der Dreiecke machen können ohne die Anschauung; es hiesse sowohl die historische als auch die natürliche Entwickelung der Dinge geradezu auf den Kopf stellen, wollte man zunächst eine Theorie der einfach periodischen Funktionen entwickeln und dann die Trigonometrie beginnen, und dies könnte man doch auch nur durch die Ableitung aus der Figur.

Es ist also, scheint es, besser, dass es beim Alten bleibt.

Herr Schafheitlin hat auf die Berechtigung der Benutzung der analytischen Geometrie bei der Einführung der negativen Vorzeichen hingewiesen. Es scheint mir unberechtigt, hieran Anstoss zu nehmen. Den Schülern ist es aus der Algebra ja doch längst geläufig, die Reihe der reellen Zahlen als einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aufzufassen. Sie sehen an der Figur, dass die trigonometrischen Funktionen diese Zahlenwerthe durchlaufen, dass einem Werthe auf der einen Seite vom Mittelpunkte des Kreises aus ein anderer auf der entgegengesetzten Seite entspricht, genau so wie einer positiven Zahl eine negative entspricht, dass man die trigonometrischen Funktionen demnach genau so behandeln kann, wie die positiven und negativen Zahlen. Ich sage, die Schüler sehen das, und dies ist das Wesentliche. Ohne Anschauung keine Trigonometrie, selbst wenn die trigonometrischen Funktionen streng arithmetisch abgeleitet würden.

In seiner Entgegnung in Nr. 5 des VI. Jahrgangs der oben genannten Zeitschrift hat meines Erachtens Herr Haentzschel die ihm von den Herren Pietzker und Schafheitlin gemachten Einwände nicht entkräftet. Herr Schafheitlin hatte erklärt, es müsse gezeigt werden, „dass, wenn die Argumente als Winkel aufgefasst werden, die Funktionen alsdann die bekannte geometrische Bedeutung besitzen". Herr Haentzschel antwortet hierauf: „Herrn Dr. Schafheitlin ist es gewiss bekannt, dass so und nur so in der niederen Analysis verfahren wird. Man definiert seit Eulers Zeiten durch einen algebraischen Grenzprozess die Zahl e in Form einer Potenzreihe als $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, findet $e^x = \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und setzt $\sin x = \frac{e^{ia} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Aus der zu erweisenden Periodicität von e^{ix} folgt die von sinus und cosinus, es folgt der Satz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, es folgen die Additionstheoreme usw." Hiermit ist aber m. E. der Schafheitlinsche Einwurf nicht widerlegt. Nach Feststellung der genannten Sätze, ist noch nicht klargelegt, dass die Funktion $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ das Verhältnis des Lotes zum Radius darstellt, wenn x den zugehörigen Winkel bedeutet. Darauf kommt es aber gerade an. Uebrigens hat man meines Wissens nicht ohne weiteres $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ gesetzt, sondern auf Grund der Additionstheoreme gelangte man zur Gleichung $(\cos x + i \sin x)^n = \cos n\,x + i \sin n\,x$ und von hier aus zu den Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

und durch Vergleich dieser Reihen mit $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ zu den Ausdrücken von Sinus und Cosinus durch die Exponentialfunktion.

Um ganz klar zu sein, nehmen wir einmal an, die Trigonometrie wäre noch nicht erfunden, dagegen die Funktionen sinus und cosinus durch die Exponentialfunktion dargestellt. Was für einen Sprung im Denken würde es erfordern, auf die Idee zu kommen, x als Winkel anzusehen und sin x und cos x als die bekannten Verhältnisse. Es liegt hierin eine psychologische Unmöglichkeit. Aber nehmen wir auch an, dass man von der Geometrie ausgehend den sinus und cosinus definiert habe. Ich will garnicht als Verfechter des konservativen Prinzips auftreten. Aber sobald ich arithmetisch fortfahre, muss ich bei jedem Schritt Rechenschaft darüber ablegen, ob das arithmetische Ergebnis ein geometrisches Aequivalent hat.

Es scheint mir nach dem Gesagten, dass bei dem üblichen Verfahren der Einführung in die Trigonometrie sowohl die wissenschaftliche Strenge als auch der pädagogische Gesichtspunkt zu ihrem Rechte kommen.

Ich habe bei meinen Erörterungen nur einige wenige diskutierbare Punkte herausgegriffen. Sicherlich lässt sich die Zahl derselben erheblich vermehren, und es wäre nicht uninteressant, wenn solche Kapitel der Schulmathematik herausgezogen würden, in denen die wissenschaftliche Strenge der Pädagogik nachgeben muss. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln, Logarithmen würde hierfür Beispiele liefern.

Nachschrift zu dem vorstehenden Aufsatz

von Dr. G. Holzmüller (Hagen i. W.)

Im ersten Teile des vorstehenden Aufsatzes über „wissenschaftliche Strenge im mathematischen Unterricht" (Heft 2, S. 34) beanstandet Herr Weiss die in meinem „Methodischen Lehrbuche" gegebene Veranschaulichung des Satzes über die Winkelsumme des Dreiecks. Es handelt sich um den propädeutischen Teil des Lehrgangs; der bei keinem vernünftigen Pädagogen Anspruch auf wissenschaftliche Strenge macht, sondern nur auf Veranschaulichung. Man lese dazu meine Begleitworte. —

Meine Veranschaulichung mit Hilfe einer Geraden, die aus der Lage auf einer der Dreiecksseiten nacheinander um die Eckpunkte gedreht wird, bis sie in die ursprüngliche Lage — diese sei z. B. die horizontale — zum ersten Male zurückgelangt, lehnt sich an den sog. Thibautschen Beweis an. Nun ist ja bekannt, dass in der sog. „nichteuklidischen" Geometrie die Winkelsumme des Dreiecks gleich $(180 \pm \delta)$ Grad gesetzt wird, wobei δ für messbare Dreiecke verschwindend klein ist. Und hier liegt der schwache Punkt jedes der entsprechenden Beweise. Herr Weiss findet aber etwas ganz neues heraus, nämlich dass nach jener Beweis- bezw. Veranschaulichungsmethode die Winkelsumme „ebensogut 540° betragen könnte."

Es ist ja richtig, dass die horizontale Gerade die horizontale Lage durch Drehungen von $+180^0$, $+360^0$, $+540^0$ .... wieder erreicht. Aber nur das erste hat mit der Winkelsumme des Dreiecks zu thun. Bei den sonstigen Drehungen dieser Art wird diese Summe mehrfach gemessen.

Aber gerade darin liegt der Vorzug jener Veranschaulichung. Geht man nämlich von der Diagonale eines konvexen Vierecks aus, so wird bei demselben Verfahren die horizontale Lage zweimal wieder erreicht, was auf 360° führt. Geht man von der Diagonale des konvexen Fünfecks aus, so wird jene Lage dreimal wieder erreicht, was 540° giebt, usw.

Spielend lernt der Schüler den Satz über die Winkelsumme konvexer Polygone kennen. —

Gerade in solchen Veranschaulichungen muss sich der propädeutische Unterricht bewegen.

Uebrigens wird bei der obigen Methode sich sehr viel Gelegenheit bieten, klar zu legen, inwiefern die „Neigung" der obigen Geraden gegen die horizontale Lage unabhängig von der Wahl des Drehungspunktes ist. Auch lässt sich alles mit dem Transporteur mit einer für den Quartaner hinreichenden Genauigkeit prüfen.

Der Warnung, die Quartaner mit kritischen Bedenken hinsichtlich des 11. Axioms bekannt zu machen, bedarf es wohl an dieser Stelle nicht. Veronese sagt ganz richtig, die Schule bedürfe einer grösseren Anzahl von Axiomen als die Wissenschaft. Diese Axiome aber bedürfen der Veranschaulichung, sonst sind sie für den Schüler vage Behauptungen. —

Energetik im Unterricht*)

von

Prof. Dr. R. Heger (Dresden).

Die herrschende Stellung, die der Satz der Erhaltung der Arbeit in der Physik einnimmt, verpflichtet den mechanischen Unterricht, im Sinne der Energetik zu verfahren. Nachdem bereits die der Mechanik vorhergehenden Abschnitte (nach den Lehrplänen für die Gymnasien des Königreichs Sachsen sind dies Einleitung in die Physik, Magnetismus, Reibungselektrizität, Galvanismus und Wärme) Arbeitsbetrachtungen thunlichst in den Vordergrund gestellt haben, hat die Mechanik die energetischen Grundanschauungen nicht erst neu zu schaffen, sie hat nur das bereits Geläufige unter neuen Gesichtspunkten zu ordnen und zu vervollständigen. Dabei darf dem Schulunterrichte nicht abverlangt werden, rein energetisch zu verfahren, der Kraftbegriff kann aus dem Unterrichte nicht entfernt werden, so lange er in der Wissenschaft noch lebt. Aus diesen Gesichtspunkten würde sich der mechanische Unterricht folgendermassen aufbauen:

1. Abschnitt. Arbeit gegen die Schwere, Hub. Messung durch das Produkt $G \cdot h$, gleichgültig, auf welchem Wege die Emporhebung erfolgt; Beweis dieses Satzes durch Bewegung eines schweren Punktes entlang eines Weges ABCD, wobei AB und CD beliebige, zwischen den Grenzen einer wagerechten Schicht verlaufende Wege sind. Allmähliche Verminderung des Hubs beim freien Falle; als Ersatz des verlorenen Hubs tritt die Wucht (Geschwindigkeitsarbeit) auf. Bei dieser Gelegenheit, nicht in einer der Mechanik vorausgeschickten und dann garnicht naturwissenschaftlichen Phoronomie, treten zum ersten Male der Begriff der Geschwindigkeit, sowie die Formeln für die gleichförmige Bewegung auf. Nachdem für die ungleichförmige Bewegung die Geschwindigkeit v als der Grenzwert von $\delta s/\delta t$ erkannt worden ist, kann als rein mathematische Uebung v für Bewegungen berechnet werden, bei denen s eine Funktion 1. oder 2. oder 3. Grades der Zeit ist.

2. Abschnitt. Hubübertragung durch

*) Weitere Ausführung eines in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft „Isis" in Dresden gehaltenen Vortrags.

ideale Maschinen. An den beiden einfachsten Fällen, der festen Rolle und dem Rade an der Welle wird gezeigt, wie Hub von einem Gewichte auf ein anderes übertragen werden kann; wenn das sinkende Gewicht ebensoviel Hub verliert, als das steigende gewinnt, so kann die Wucht der beiden Gewichte weder zu- noch abnehmen. Von hieraus wird der Satz (der virtuellen Bewegungen) vollkommen verständlich:

Wenn die Gewichte G_1, G_2 . . . ideal und so miteinander verbunden sind, dass die senkrechte Bewegung von G_1 bestimmte verhältnismässige Bewegungen von G_2, G_3 . . . bedingt und wenn dabei die algebraische Summe der Hubänderungen aller Gewichte Null ist, so sind G_1, G_2, G_3, . . . im Gleichgewichte, d. i. es verharrt Ruhe, sowie gleichförmige Bewegung.

Hierauf folgt die Besprechung der einfachen Maschinen und ihrer Bedingungen, am besten etwa so, dass man in jedem Falle zunächst die *Arbeitsgleichung* hinschreibt:

1) $P_1 h_1 + P_2 h_2 + \,.\,. = Q_1 k_1 + Q_2 k_2 + \,.\,.$ wobei P_1 .. die sinkenden, Q_1 ... die steigenden Gewichte, h_1 ... k_1 ... ihre Höhenänderungen sind. Hierauf folgen 2) unter dem Titel „*Geometrischer Zusammenhang*“ die Gleichungen, durch die alle Höhenänderungen durch eine bestimmte, etwa h_1, ausgedrückt werden. Die Entfernung von h_1..., k_1... aus 1) und 2) führt auf die gesuchte Gleichgewichtsbedingung. An die feste Rolle, die lose Rolle, die Flaschenzüge, beliebig viele feste Rollen an einer gemeinsamen Achse, Verbindungen mehrerer Achsen durch Räder und Getriebe bezw. durch Treibriemen, schliesst man das Gleichgewicht von Kräften, die in einer starren, um einen ihrer Punkte (bezw. um eine zu ihr senkrechte Achse) drehbaren Ebene wirken. Die Kraftlinien ersetzt man durch ideale Fäden von derselben Richtung, und die Kräfte durch Gewichte, indem man die Fäden über Rollen leitet, deren Achsen ausserhalb der starren Ebene liegen. Man führt erst darauf hin, dass durch Verschiebung eines Angriffspunktes entlang seiner Kraftlinie das Gleichgewicht nicht gestört werden kann, verschiebt hierauf je den Angriffspunkt in den Fusspunkt des vom Drehpunkt O auf die betr. Kraftlinie gefällten Lotes und kann nun die starre Ebene durch Rollen an einer gemeinsamen Achse ersetzen, die die Kraftlinien berühren. Hieraus folgt sofort als Gleichgewichtsbedingung das *Verschwinden der Momentsumme.* Durch besondere Voraussetzungen über Zahl der Kräfte und Lage der Kraftlinien bez. Angriffspunkte geht man von dem klar erkannten allgemeinen Satze auf die einzelnen Formen des Hebels über.

Hieran kann man eine *Ableitung des Parallelogramms der Kräfte schliessen.* Sind drei Kräfte P, Q, R einer Ebene, die an einem Punkte A angreifen, im Gleichgewichte, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn man einen beliebigen Punkt der Ebene festhält; und umgekehrt, wenn für jeden Punkt der Ebene als Drehpunkt die Momentsumme Null ist, so sind die Kräfte an der freien Ebene, d. i. an dem freien Punkte A, im Gleichgewichte. Ist α_1 der Winkel der Kräfte P_2 und P_3 usw., und legt man den Drehpunkt erst auf die Kraftlinie von P_3, dann von P_1, so erhält man sofort

$$\frac{P_1}{\sin\alpha_1} = \frac{P_2}{\sin\alpha_2} = \frac{P_3}{\sin\alpha_3}.$$

Ist ein beliebiger Punkt O der Drehpunkt, $P_1 A O = \varphi$, S die Momentsumme, so hat man

S/OA $S = P_1 \cdot \sin\varphi - P_2 \sin(\alpha_3 - \varphi) + P_3 \sin(\alpha_2 + \varphi)$,

also, wenn $P_1/\sin\alpha_1 = P_2/\sin\alpha_2 = P_3/\sin\alpha_3 = \varkappa$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}\frac{S}{\varkappa \cdot OA} &= \sin\alpha_1 \sin\varphi - \sin\alpha_2 \sin(\alpha_3 - \varphi) + \sin\alpha_3 \sin(\alpha_2 + \varphi)\\ &= \sin\alpha_1 \sin\varphi + (\sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_3 \cos\alpha_2)\sin\varphi\\ &= \sin\alpha_1 \sin\varphi + \sin(\alpha_2 + \alpha_3)\sin\varphi.\end{aligned}$$

Da nun $\sin\alpha_1 = -\sin(\alpha_2 + \alpha_3)$, so folgt $S = 0$ für jede Lage des Drehpunkts; daher ist 1) die notwendige und ausreichende Gleichgewichtsbedingung.

In ähnlicher Weise kann hier das Gleichgewicht dreier parallelen Kräfte an einer freien Ebene, sowie das Kräftepaar angeschlossen werden.

3. *Abschnitt. Freier Fall und Wurf.* Im 1. Abschnitt war die Wucht als Funktion der Geschwindigkeit betrachtet, die Form dieser Funktion aber noch nicht bestimmt worden. Hierzu muss beim freien Falle der Zusammenhang zwischen dem durchlaufenen Wege und der Geschwindigkeit aufgedeckt werden. Dies erfolgt hier im genauen Anschlusse an *Galileis* Gedankengang. Die Thatsache, dass die Geschwindigkeit des freien Falles beständig zunimmt, brachte Galilei zunächst auf den Gedanken, die Geschwindigkeit wachse im Verhältnisse des Weges (vires crescunt eundo). Theoretische, scharfsinnige Betrachtungen, die für den Anfänger nicht leicht verständlich sind, liessen erkennen, dass die Vermutung nicht richtig sein konnte. Hierauf wandte sich Galilei zu der nächst einfachen Annahme, die Geschwindigkeit wachse im Verhältnisse der Zeit, also gemäss $v = gt$. Die geometrische Darstellung dieses Zusammenhangs führt zur Darstellung des Wegs als Fläche des rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten t und gt, also zu $s = \frac{1}{2} gt^2$ Hinweis auf die experimentelle Prüfung dieser Formel durch Galilei. *Wucht* $= \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot v^2$.

Senkrechter Wurf abwärts und aufwärts, wozu es keiner neuen Hypothese bedarf. Aus einer Geschwindigkeitsformel

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

folgt die Wegformel

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots$$

wobei s_1 der zu v_1 gehörige Weg ist, zu den Geschwindigkeitsformeln $v = c \pm gt$ gehören also die Wegformeln $s = ct \pm \frac{1}{2} gt^2$

Wagerechter Wurf. Den Mathematikern war bereits vor Galilei die Betrachtung eines Punktes geläufig, der entlang einer Geraden eine bestimmte Bewegung ausführt, während die Gerade in bestimmter Weise verschoben wird. Diese rein mathematische Vorstellung erhob Galilei zur physikalischen Hypothese; die Bestätigung ist weniger durch unmittelbar darauf gerichtete Versuche (Wurf auf geneigter Ebene), als durch die Uebereinstimmung des auf der Hypothese ruhenden Lehrgebäudes der theoretischen Astronomie erfolgt. Der Unterricht an dieser Stelle findet die stärkste Stütze der Hypothese im Nachweise des Satzes der Erhaltung der Arbeit.

4. *Abschnitt. Andere Bewegungen unter dem Einflusse der Schwere.* Alle hier zu betrachtenden Fälle werden durch die Arbeitsgleichung erledigt; ist $s_\varkappa$ der Weg eines dabei beteiligten Gewichts und $v_\varkappa$ seine Geschwindigkeit, so führt die Arbeits-

gleichung, in Verbindung mit den Gleichungen des geometrischen Zusammenhangs, zu der Formel $v^2_x = 2g_x h_x$, woran die gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g_x erkannt wird. Zunächst wird man den Fall auf der schiefen Ebene betrachten, dann die Bewegung eines idealen Wagens, der auf einer wagerechten oder schiefen Ebene sich bewegt und von einem in deren Richtung ziehenden Gewichte angetrieben wird. Hierauf folgen Bewegungen von Gewichten, die durch einfache Maschinen (feste Rolle, Flaschenzüge, feste Rollen an gemeinsamer Achse usw.) mit einander verbunden sind. Im Anschlusse hieran wären der Begriff der *beschleunigenden Kraft* und die Formel $P = mp$ zu entwickeln und auf die *Dimensionsformeln* einzugehen.

5. *Abschnitt. Elastische Schwingungen eines schweren Punktes.* Als einziges Beispiel einer nicht gleichförmig beschleunigten Bewegung ist bereits an dieser Stelle die elastische Schwingung anzufügen. Für die zurückführende elastische Kraft wird die Formel $P = kx$ zuerst als nächstliegende, einfachste Hypothese eingeführt, deren Bestätigung durch passende Versuche erfolgen kann. Hierauf wird die *elastische Arbeit* als Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden, dessen Katheten die Streckung und die elastische Kraft am Ende der Streckung sind und hieraus die Formel für die Geschwindigkeit, und dann weiter die übrigen Formeln für die elastische Schwingung abgeleitet. In bekannter Weise schliesst sich hieran das mathematische Pendel.

6. *Abschnitt. Gleichförmige Bewegung eines schweren Punktes im Kreise.* Bei Bewegungen, die unter dem Einflusse der Schwere in der räumlich beschränkten Umgebung vor sich gehen, sind die *Arbeitsgleichen* (Niveauflächen) wagerechten Ebenen, und der Hub eines bestimmten Gewichts wächst verhältnissmässig mit seiner lotrechten Erhebung. Bei kosmischen Bewegungen unter dem Einflusse der Erde (Umlauf des Mondes, oder von Meteoriten in der Nähe der Erde) müssen, wenn die Erde als schwerer Punkt, bez. als allseits gleichmässig geschichtete Kugel angesehen wird, mit der Erde mittengleiche Kugeln an Stelle der wagerechten Arbeitsgleichung treten, die Hubänderung wird durch die Halbmesser der Arbeitsgleichen bestimmt, ohne dabei endlichen Aenderungen des Halbmessers verhältnisgleich zu sein.

Bei Bewegungen entlang einer Arbeitsgleichen, die *nur* unter dem Einflusse der Schwere erfolgen, ändert sich der Hub nicht, sie können also nur *gleichförmig* sein und umgekehrt, *eine gleichförmige Bewegung* eines einzelnen schweren Punkts kann nur auf einer Arbeitsgleichen vor sich gehen; ferner wenn ein schwerer Punkt in einem Kreise gleichförmig schwingt, so muss er unter dem Einflusse einer Kraft stehen, deren Kraftlinien nach dem Mittelpunkte des Kreises gehen, und die Kraft muss an allen Stellen des Kreises dieselbe sein. Die letzte Bemerkung wird aus der Vertauschbarkeit der Kreispunkte erkannt. Durch Projektion auf einen Durchmesser wird die gleichförmige Schwingung im Kreise mit der elastischen Schwingung im Zusammenhang gebracht und hieraus die Formel für die Zentripetalbeschleunigung c^2/r abgeleitet.

7. *Abschnitt. Hub eines starren Körpers.* Die Hubänderung eines Körpers ist die algebraische Summe der Hubänderungen seiner Teile. Die Frage, ob man die Hubänderung eines starren Vereins schwerer Punkte durch die Hubänderung des mit dem Vereine starr verbundenen Gesamtgewichts ersetzen kann, wird zunächst für zwei starr verbundene Gewichte $G_1 G_2$ beantwortet. Aus Gründen der Symmetrie kann der Schwerpunkt S_2 nur auf $G_1 G_2$ liegen; sind y_1, y_2, η_2 die Höhen (Ordinaten) von G_1, G_2 und S_2, so folgt das Weitere aus $(G_1 + G_2)\,\eta_2 = G_1 y_1 + G_2 y_2$.

Kommt noch ein drittes Gewicht G_3 hinzu, so liegt der Gesamtschwerpunkt S_3 auf $S_2 G_3$ so, dass

$$(G_1 + G_2 + G_3)\,\eta_3 = (G_1 + G_2)\,\eta_2 + G_3 y_3:$$
$$= G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3, \text{ usw.}$$

An die Erkenntnis des Vorhandenseins eines Schwerpunkts schliesst man die Erörterung seiner physikalischen Eigenschaften, die Konstruktion des Schwerpunkts einfacher homogener Linien, Flächen und Körper, die physikalische Bestimmung des Schwerpunkts aus Aufhängeversuchen usw.

8. *Abschnitt. Wucht eines starren Körpers bei der Drehung um eine Achse.* Die Berechnung der Wucht eines um eine Achse sich drehenden starren Punktvereins führt auf das *Trägheitsmoment.* Als Beispiel wird die Bewegung eines homogenen unendlich dünnen Kreisrings genügen, der durch ein sinkendes Gewicht angetrieben wird.

9. *Abschnitt. Stoss bildsamer und elastischer Kugeln.* Hierbei kann die Erörterung der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung behufs der Ableitung der Beständigkeit der Summe $G_1 v_1 + G_2 v_2$ nicht wohl vermieden werden. Der Stoss weicher Kugeln, sowie der elastischer bis zur Herstellung gleicher Geschwindigkeit, bringt daher keine Anwendung des Arbeitssatzes, schliesst aber mit dem Nachweise, dass Wucht verloren gegangen, und mit dem Hinweise, dass bei bildsamen Körpern es bei diesem Verluste bewendet, während bei elastischen die verlorene Wucht sich in Lagenarbeit der elastischen Kräfte verwandelt hat, die nun, unter Weitergeltung des Satzes $G_1 v_1 + G_2 v_2 = G_1 c_1 + G_2 c_2$ sich wieder vollständig in Wucht der stossenden Kugeln zurückverwandelt. Aus dieser Bemerkung folgen die Endgeschwindigkeiten.

10. *Abschnitt. Mechanik der flüssigen Körper.* Ein ideal flüssiger Körper lässt jede Formänderung ohne Arbeitsverbrauch zu. Die Uebertragung der Arbeit durch eine Flüssigkeit, die ein überall geschlossenes Gefäss erfüllt, erfolgt durch zwei ideale Kolben, ebene Teile der Wandung, die senkrecht zur Wandung sich in kurzen Ansatzröhren verschieben. Wird der eine F_1 durch ein sinkendes Gewicht G_1 bewegt, während der andere F_2 ein Gewicht G_2 hebt, so folgt $G_1 / F_1 = G_2 / F_2$. In ähnlicher Weise werden bei einer *idealen schweren* Flüssigkeit der Bodendruck, der Wanddruck und der Druck an irgend einer Stelle im Innern rein energetisch abgeleitet. Hierbei, wie auch bei der so einfachen energetischen Ableitung des Niedertriebs, des Auftriebs und der Ausflussformel Torricellis wird die Bemerkung gemacht, dass, wenn Verschiebungen der Teile einer Flüssigkeit eintreten, für die Arbeitsgleichung die Stellen nicht in Betracht kommen, wo zu Anfang und Ende des betrachteten Vorgangs dasselbe Gewicht Flüssigkeit in derselben Bewegung vorhanden ist, die Arbeitsänderung vielmehr so berechnet werden kann, dass nur die Stellen beachtet werden, wo Flüssigkeit verschwindet, bez. neu auftritt. Dieser Grundsatz lässt sich durch passende Beispiele (Arbeit von Maurern, die auf den Sprossen einer Leiter stehen und einander Ziegel zureichen) gut er-

läutern. Am Schlusse dieses Abschnitts ist dem Wasser als Arbeitsquelle etwas mehr Raum zu gönnen, als dies bisher in der Schulmechanik zu geschehen pflegte. Ponceletsche Räder, mittel- oder oberschlächtige Räder werden an der Hand technisch guter Wandtafeln erläutert, und schliesslich Arbeitsübertragung durch die Turbine unter den einfachsten Voraussetzungen behandelt. Ist bei einer Turbine mit senkrechter Achse und sehr schmalem Leit- und Laufkranze a der senkrechte, b der wagerechte Anteil der Geschwindigkeit des Wassers beim Verlassen des Leitkranzes, u die Umlaufsgeschwindigkeit des Laufkranzes, c der wagerechte Anteil der Geschwindigkeit beim Eintritte, d derselbe Anteil beim Verlassen des Laufrades, in beiden Fällen bezüglich des Laufrades, f der Querschnitt des Lauf- und des Leitkranzes, Q das in einer Sekunde durchströmende Wassergewicht, h die verfügbare Druckhöhe des Wassers, α der Austrittswinkel der Leitschaufeln, β der Eintrittswinkel, γ der Austrittswinkel der Laufschaufeln gegen die Achse der Turbine, endlich L die in der Sekunde von der Turbine aufgenommene Arbeit in m · kgr, so gelten die Gleichungen, wenn das Wasser stossfrei in die Turbine und senkrecht heraustritt:

$$1)\ Q = fa, \quad 2)\ L = Q\left(h - \frac{a^2}{2g}\right),$$
$$3)\ c + u = b, \quad 4)\ a^2 + b^2 + (d^2 - c^2) = 2gh,$$
$$5)\ d + u = 0.$$

Bei Reaktionsrädern tritt im Laufkranze keine Wuchtvermehrung ein, es ist $-d = c = u$, $a^2 + b^2 = 2gh$. Hat man über α frei verfügt, so folgt $a^2 = 2gh\cos^2\alpha$, $b^2 = 2gh\sin^2\alpha$, $u = b/2 = c$, $\tan\beta = b/2a = \tan\alpha/2 = -\tan\gamma$, d. i. $\gamma = -\beta$. Soll das Rad diesen Formeln entsprechen, so muss die Wassermenge Q zur Verwendung kommen, und die hieraus sich ergebende Arbeit L bei der Umfangsgeschwindigkeit u der Achse abgenommen werden; ausserdem kann das Rad nicht als Reaktionsrad mit stossfreiem Eintritte und senkrechtem Austritte arbeiten.

11. Abschnitt. Mechanik der Gase. Während bisher sich der Unterricht auf die Erörterung des Mariotte-Gaylussacschen Gesetzes und die Druckabnahme der Luft mit der Höhe beschränkte, verlangen bei energetischer Behandlung die Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie bezüglich der Gase und Dämpfe gebührende Berücksichtigung. Hierbei stehen die beiden Erfahrungssätze an der Spitze: 1. Die spezifische Wärme eines Gases hängt nicht von seiner Dichte ab (Joule 1848); 2. Beim Zusammenpressen eines Gases ist keine Spannungsarbeit zu leisten, die ganze dabei geleistete Arbeit setzt sich in Wärme um. An die Definition der spezifischen Wärme der Luft als spezifische Wärme bei raumgleicher Erwärmung schliessen sich an die spezifischen Wärmen bei druckgleicher Erwärmung, sowie die bei gleichem Verhältnisse von Raum und Druck. Ist nämlich $\varkappa$ das Verhältnis der Wärmeeinheit zur Arbeitseinheit, bestimmt x den Inhalt eines Luftcylinders von veränderlicher Höhe, A die von x_1 bis x_2 geleistete Arbeit, W die zugeführte Wärme, c die spezifische Wärme bei raumgleicher Erwärmung, so ist

$$W = c\,(t_2 - t_1) + \varkappa A,$$
$$A = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2)(x_2 - x_1),$$
$$= \tfrac{1}{2}(d_1 x_2 - d_1 x_1 + d_2 x_2 - d_2 x_1).$$

Wegen der Verhältnisgleichheit von Druck und Raum ist $d_1 x_2 = d_2 x_1$, und nach Mariotte-Gaylussac $d_2 x_2 - d_1 x_1 = b\,(T_2 - T_1) = b\,(t_2 - t_1)$, also

$$W = \left(c + \frac{\varkappa b}{2}\right)(t_2 - t_1).$$

An diese drei stufengleichen Erwärmungen (d. i. Erwärmungen, bei denen zu jedem Grad Temperaturerhöhung dieselbe Wärmemenge zugeführt werden muss), kann sich der Hinweis auf unendlich viele mögliche stufengleiche schliessen. Weiteres, auch über elementare Behandlung der Dämpfe, findet man in meiner „Erhaltung der Arbeit", Hannover 1896.

Es lohnt der Mühe, zu erwägen, welche Abschnitte der bisher üblichen schulmässigen Behandlung der Physik zu kürzen sind, um Raum für die Anfänge der energetischen Behandlung der Gase und Dämpfe zu gewinnen.

Ueber Geometrographie.

Von R. Güntsche in Berlin.

Herr Pietzker hat das Verdienst, auf die Geometrographie des Herrn E. Lemoine in dieser Zeitschrift (VII, 1901, No. 5, S. 102) zuerst aufmerksam gemacht zu haben. Er hat dabei an den Definitionen des Herrn Lemoine einige Veränderungen (in der Definition von C_2 und, in der zweiten Konstruktion der Tangente, durch die Einführung von R_3) vorgenommen, die nicht allgemeine Billigung erfahren werden; in einem später erschienenen Artikel (Unt.-Bl. VIII, 1902, No. 2, S. 35—38) hat Herr S. Leisen ein Verfahren aufgestellt, das noch mehr von dem Lemoineschen abweicht; es wird deshalb den Lesern erwünscht sein, die ursprünglichen Definitionen, die Herr Lemoine selbst gegeben hat, kennen zu lernen; ich übersetze hierzu möglichst wortgetreu die betreffenden Stellen aus dem kürzlich erschienenen Buche: E. Lemoine, Géométrographie ou Art des Constructions Géométriques, Collection Scientia Phys.-Math. No. 18, Paris, C. Naud, Février 1902, 2 frcs., das ich kurz als „Scientia" zitieren werde; ich hätte ebenso gut eine der früheren Veröffentlichungen, von denen Herr Pietzker einige anführt, z. B. den Artikel im Arch. d. Math. u. Phys. (3) **1** 1901, zu Grunde legen können.

„(S. 16/17) Anlegen des Randes eines Lineals an einen bestimmten Punkt heisst die Operation R_1, oder kurz Op: (R_1); mithin ist theoretisch („spéculativement") das Anlegen des Randes eines Lineals an zwei Punkte Op: $(2 R_1)$. Ziehen einer Linie längs des Randes eines Lineals ist Op: (R_2). Einsetzen einer Spitze des Zirkels in einem bestimmten Punkte ist Op: (C_1); mithin ist theoretisch das Aufnehmen des Abstandes zweier bestimmten Punkte in den Zirkel Op: $(2 C_1)$. Einsetzen einer Spitze des Zirkels in einem unbestimmten Punkte einer gezeichneten Linie ist Op: (C_2). Beschreiben des Kreises ist Op: (C_3). Es wird vorausgesetzt, dass jede im Verlauf einer Konstruktion gezeichnete Gerade oder Kreislinie vollständig gezeichnet ist. Der kanonischen Geometrie der Griechen, die nur die Lösungen mittelst der Geraden und des Kreises zulässt, steht die kanonische Geometrographie, die nur das Lineal und den Zirkel als Konstruktionsgeräte zulässt, gegenüber. Für sie lässt sich jede Konstruktion, so verwickelt sie auch sein mag, ausdrücken durch das Symbol: $(l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$. Wir nennen die Zahl $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ den Einfachheitskoeffizienten oder kurz die Einfachheit (S, Simplicité) der Konstruktion und die Zahl $l_1 + m_1 + m_2$ den Genauigkeitskoeffizienten oder die Genauigkeit (E, Exactitude); l_2 giebt die Anzahl der gezeichneten Geraden, m_3 die der Kreise an.“

Noch einiges im Auszug. (S. 15) Die Geometrographie ist ihrem Wesen nach theoretisch. (S. 19) Wir kommen überein, die Einfachheit einer Konstruktion durch ihren Einfachheitskoeffizienten zu definieren; (S. 15 und 18) diejenige Konstruktion, deren es auch mehrere geben kann, die den kleinsten Einfachheitskoeffizienten und zugleich Allgemeingültigkeit besitzt, heisst geometrographische Konstruktion, bis man eine einfachere gefunden hat, die dann diese Bezeichnung erhält. (S. 16) Falls nicht das Gegenteil ausdrücklich festgesetzt ist, wird eine Konstruktion nur mit einem Zirkel ausgeführt, und wenn ein Kreis gezeichnet ist, gilt sein Mittelpunkt als festgelegt. An den nicht der Lage nach gegebenen Raumgebilden selbst dürfen nur Hülfskonstruktionen vorgenommen werden. Im übrigen, z. B. inbezug auf den Unterschied zwischen theoretischer und praktischer Einfachheit und Genauigkeit, den Gebrauch des Winkelinstruments und anderer Geräte usw. muss ich ausdrücklich auf Scientia und die in dem Artikel im Archiv der Math. u. Phys. a. a. O. verzeichnete umfangreiche Litteratur verweisen.

Im folgenden soll ein kurzer Abriss der Geschichte, sowie im Anschluss an die beiden in dieser Zeitschrift erschienenen Artikel eine Einführung in den Geist der Geometrographie gegeben werden; eine Kritik des Verfahrens des Herrn Leisen knüpft sich an. Alles Wesentliche ist den Lemoineschen Publikationen entlehnt.

Im Jahre 1888 hat Herr Lemoine dem Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences in Oran allgemeine Prinzipien über die Einfachheit in der Mathematik vorgelegt. Aus der Anwendung dieser Prinzipien auf die Geometrie hat sich die Geometrographie entwickelt, deren Grundgedanken oben in Kürze ausgesprochen sind. Unter Mitwirkung von Männern wie Herr G. Tarry und Herr E. Bernès hat Herr E. Lemoine in jahrelanger Arbeit die verschiedenen Konstruktionen der geometrischen Probleme inbezug auf die Einfachheit ihrer Ausführung an dem von ihm geschaffenen Massstab gemessen und die geometrographische Konstruktion festgesetzt. Diese Untersuchungen hatten das überraschende Ergebnis, dass, mit Ausnahme einiger ganz elementarer, bei sämtlichen geometrischen Aufgaben der gebräuchlichen, seit über zwei Jahrtausenden gelehrten Konstruktion neue, einfachere an die Seite gestellt werden können. In diesen wird entweder das ursprüngliche Lösungsprinzip beibehalten, freilich häufig so, dass es nur bei genauerer Prüfung wiederzuerkennen ist, oder es treten wenig bekannte oder neu entdeckte Lösungen zu Tage. Hier nur einige Beispiele: die Sectio aurea (innere und äussere Teilung) hat nach der klassischen Vorschrift die Einfachheit 29 und bei ökonomischem Vorgehen 24; man kennt jetzt vier geometrographische Konstruktionen von der Zahl 13. Für das Problem der vier gemeinsamen Tangenten zweier Kreise führt die eine überall gelehrte Konstruktion auf die Einfachheit 92, geometrographisch behandelt auf 55; durch das Zusammenwirken der genannten hervorragenden Geometer, zu denen sich später Herr Oberst Moreau gesellt, ist von Jahr zu Jahr und Schritt für Schritt die Einfachheit reduziert worden, bis es Herrn Oberst Moreau und Herrn G. Tarry gelungen ist, je eine in Scientia enthaltene Konstruktion von der Einfachheit 35 aufzustellen, von denen die letztere noch während des Druckes von Herrn Oberst Moreau auf 34 zurückgeführt wurde. Dabei sind zugleich neue merkwürdige Eigenschaften der betreffenden Figur entdeckt worden, ohne welche diese einfachen Lösungen gar nicht möglich gewesen wären. So lapidar die Grundzüge, so fein sind die Einzeluntersuchungen in dieser neuen Disziplin. Es ist äusserst interessant, nach den Publikationen das allmähliche Fortschreiten in der Erkenntnis dieser Figur zu verfolgen. Auch auf die Neuere Geometrie hat sich die Geometrographie erstreckt; in Scientia findet man in geometrographischer Behandlung eine Reihe von Problemen aus der Theorie der Polaren und Radikalachsen, das des Apollonius (für das die Lösung von Bobillier und Gergonne die Einfachheit 356 besitzt, während die in Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, 1900 angegebene Konstruktion von Herrn Fouché die Einfachheit 247 hat und die in Scientia mitgeteilte geometrographische Konstruktion von Herrn L. Gérard, zugleich eine neue Lösung, von der Einfachheit 154 ist, die Herr Oberst Moreau nach einer brieflichen Mitteilung noch um 2 Einheiten vermindert hat), ferner Untersuchungen über das anharmonische Verhältnis, die Involution, die Aehnlichkeits- und Doppelpunkte usw.

Es ist lebhaft zu bedauern, dass diese wissenschaftlich wie pädagogisch bedeutsamen Untersuchungen in Deutschland noch so wenig beachtet worden sind; aus Ländern deutscher Zunge macht Herr Lemoine meines Wissens nur Herrn Chr. Beyel in Zürich als Förderer der Geometrographie namhaft. Jedenfalls ist es unumgänglich nötig, dass man sich mit dieser Litteratur vertraut macht, wenn man, wie Herr Leisen, die wohldurchdachten Lemoineschen Prinzipien durch andere ersetzen will. Das Verfahren des Herrn Leisen stimmt übrigens, soweit es brauchbar ist, mit demjenigen überein, das schon von Herrn E. Bernès (Scientia S. 18) in Vorschlag gebracht, aber von Herrn Lemoine nicht angenommen worden ist. Ich kann mich mit dem Bernèsschen Verfahren auch nicht befreunden und ziehe das Lemoinesche vor. Der Unterschied ist übrigens praktisch bedeutungslos. Das Verfahren des Herrn Leisen besitzt aber noch empfindliche Mängel, die seine Brauchbarkeit, so wie es vorliegt, nicht zulassen. Bei der Definition von z_0', z_1', z_2' und z_3' (S. 37 b) gilt als Mittelpunkt eines Kreises ein unbestimmter Punkt einer gezeichneten Linie; weiter heisst es, dass die Einstellung der Zirkelspitze auf die Linie zuletzt vorzunehmen ist. Ich bin der Meinung, es ist in der Euklidischen Geometrie nicht üblich, dass man die Reissfeder erst in einem Punkte einsetzt, und dann die trockene Zirkelspitze in einem anderen; zum mindesten darf der Gang der Konstruktion dadurch nicht beeinflusst werden. Wenn Herr Leisen damit einverstanden ist (es kann ja auch ein Versehen vorliegen), so wären die Definitionen von z_0', z_1' und z_2' anders zu fassen; z_3' würde ganz wegfallen, ich wüsste wenigstens nicht, wo es vorkommen sollte, dass die trockene Zirkelspitze in einem unbestimmten Punkte einer gezeichneten Linie eingesetzt würde und ausserdem für den einen Kreis drei vorhergehende oder nachfolgende Neueinstellungen des Zirkels erforderlich wären. Wie ferner die Koeffizienten von z_0', z_1', z_2' und z_3' in den Einfachheits- und den Genauigkeitskoeffizienten eingehen, spricht Herr Leisen nicht unzweideutig aus; bei der von ihm getroffenen Wahl der Indices erscheint mir eine annehmbare Art der Feststellung dieser Zahlen unübersichtlich; man müsste für die ersten drei Operationen besser die Bezeichnungen z_1', z_2', z_3' wählen. Erwünscht wäre eine Aeusserung des Herrn Leisen darüber gewesen, ob er selbständig zu seinem Verfahren gekommen ist*) (wer den Artikel nicht ganz aufmerksam liest, kommt zu der Meinung, dass es zehn Jahre alt ist), oder ob er dazu durch die Notiz des Herrn Pietzker angeregt wurde; von der Originallitteratur ist er nicht beeinflusst. Nach dem Obigen kann ich der Ansicht des Herrn Leisen, dass sein Verfahren einfacher und schärfer sei als das Lemoinesche, nicht beipflichten. Sobald nun an Herrn Leisens Verfahren die notwendigen Verbesserungen vorgenommen sind, besteht absolut kein wesentlicher Unterschied mehr zwischen dem Lemoineschen Verfahren und demjenigen des Herrn Leisen; man vergleiche z. B. die Ergebnisse (Einfachheit, Genauigkeit, Zahl der Linien) bei den beiden Tangentenkonstruktionen, wie sie hier gleich folgen werden, mit denen, die Herr Leisen S. 38 a giebt; die Uebereinstimmung ist vollkommen. Um einer drohenden Verwirrung vorzubeugen, möchte ich dem Wunsche Nachdruck verleihen, **dass man von dem klaren, wohldurchdachten und wohlerprobten Lemoineschen Verfahren nicht abgehe**, so lange nicht der überzeugende Nachweis vorliegt, dass ein anderes vorzuziehen ist. Die Lemoineschen Prinzipien werden im folgenden durchweg zugrunde gelegt werden.

Von welch feiner Natur die geometrographischen Einzeluntersuchungen sind, davon kann man sich an der Hand der beiden von Herrn Pietzker als Beispiel gewählten Konstruktionen einer Tangente eine Vorstellung verschaffen. Für die erste Konstruktion (VII, 5, S. 102 a) hat Herr Bodenstedt (VIII, 2, S. 38 b) das Symbol durch Weglassung des entbehrlichen Postens $2\,C_1$ auf die richtige Form gebracht; es lautet Op : $(6\,R_1 + 3\,R_2 + 4\,C_1 + 3\,C_3)$; S (Einfachheit): 16; E (Genauigkeit): 10; 3 Gerade, 3 Kreise. Noch hübscher ist das zweite Beispiel: in der Notiz (VII, 5, p. 102) würde Herr Pietzker zu dem Symbol Op: $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 7\,C_1 + 3\,C_3)$; S: 18; E: 12; 3 Gerade, 3 Kreise kommen, nach der von ihm selbst (VIII, 2, S. 38 b) vorgenommenen Vereinfachung dagegen zu dem Symbol Op : $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 6\,C_1 + 3\,C_3)$; S: 17; E : 11; 3 Gerade, 3 Kreise. Aber die Vereinfachung lässt sich, was auch Herrn Leisen entgeht, ohne Aenderung des Lösungsprinzips noch weiter treiben; wenn man, statt den Kreisradius um sich selbst zu verlängern, mit dem vorher gezeichneten Durchmesser des gegebenen Kreises als Radius den konzentrischen Kreis beschreibt, so hat man statt $(2\,C_1 + C_3) + (2\,C_1 + C_3) = (4\,C_1 + 2\,C_3)$ nur die Operationen $(3\,C_1 + C_3)$ auszuführen, spart also noch zwei Einheiten; das Symbol ist dann: Op: $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 5\,C_1 + 2\,C_3)$; S : 15; E : 10; 3 Gerade, 2 Kreise. Im Gegensatz zu den hier veröffentlichten Ausführungen ist also, da ein Kreis weniger zu beschreiben ist, die zweite Konstruktion der ersten als einfacher vorzuziehen.

Will man dagegen beide Tangenten zugleich haben, so kommt im ersten Falle $(2\,R_1 + R_2)$ hinzu, und man erhält Op: $(8\,R_1 + 4\,R_2 + 4\,C_1 + 3\,C_3)$; S : 19; E : 12; 4 Gerade, 3 Kreise; im zweiten Falle sind aber $(2\,R_1 + R_2) + (2\,R_1 + R_2)$ hinzuzufügen: Op : $(9\,R_1 + 5\,R_2 + 5\,C_1 + 2\,C_3)$; S : 21; E : 14; 5 Gerade, 2 Kreise. In diesem Falle ist also die erste Konstruktion einfacher, weil ihre Genauigkeit um zwei Einheiten geringer ist. Man erkennt hieraus, dass es in der Geometrographie genau auf den Wortlaut der Aufgabe ankommt.

Es wird nun von Interesse sein, zu erfahren, wie sich die von Herrn Lemoine gefundene geometrographische Lösung dieser letzteren Aufgabe darstellt. Es existieren deren zwei; ich zitiere nur die eine. Auf sie kommt man, wenn man sich in der zweiten Konstruktion das gleichschenklige Dreieck OAE mit der Basis OE auf den anfangs gezogenen Durchmesser aufgesetzt denkt; die Höhe zur Grundlinie giebt die Länge der Tangente an. Sie lautet (Scientia p. 33) in der Uebersetzung: „Man ziehe einen beliebigen Durchmesser, dessen Endpunkte M und M' sein mögen $(R_1 + R_2)$, beschreibe die Kreise M (OA) $(3\,C_1 + C_3)$ und M' (OA) $(C_1 + C_3)$, die sich in C schneiden, und den Kreis A (CO) $(3\,C_1 + C_3)$, der auf dem gegebenen Kreise die Berührungspunkte B und B' festlegt; man ziehe alsdann AB und AB' $(4\,R_1 + 2\,R_2)$; dies sind die Tangenten von A an den gegebenen Kreis; . . . Op : $(5\,R_1 + 3\,R_2 + 7\,C_1 + 3\,C_3)$; S : 18; E : 12; 3 Gerade, 3 Kreise." Jetzt ist also wieder bei der zweiten die Einfachheit um eine Einheit geringer, als bei der ersten klassischen Konstruktion. Dies wechselreiche Spiel in dem Werte der verschiedenen Lösungen, das mitunter ganz überraschend wirkt, wenn eine bisher vernachlässigte Lösung mit einem Male in anderer Form auftritt und sich ihr Recht erzwingt, ist eine der reizvollsten Erscheinungen in der Geometrographie.

Bei der zuletzt behandelten Aufgabe ist zwar die eine geometrographische Konstruktion von einer der bisher bekannten verschieden, aber sie stimmt mit ihr wenigstens im Prinzip der Lösung überein, auch ist die Reduktion der Einfachheit nur gering. Es kommt aber, wie gesagt, häufig vor, dass die geometrographische Konstruktion ein bisher nicht oder wenig bekanntes Lösungsprinzip verwendet, und dass die Herabminderung der Einfachheit beträchtlich ist. Als Beispiel will ich den Fall anführen, dass A auf dem Kreise selbst liegt. Die übliche Konstruktion: „man ziehe den Radius nach A $(2\,R_1 + R_2)$ und errichte auf ihm in A die Senkrechte $(2\,R_1 + R_2 + 3\,C_1 + 3\,C_3)$" erscheint ausserordentlich einfach und der Reduktion kaum fähig; das Symbol ist Op : $(4\,R_1 + 2\,R_2 + 3\,C_1 + 3\,C_3)$; S : 12; E : 7; 2 Gerade, 3 Kreise; unter Anwendung einer weniger gebrauchten, aber einfacheren Konstruktion der Senkrechten, die zu errichten ist, spart man noch eine Einheit. Die geometrographische Konstruktion ist dagegen (Scientia S. 32): „B sei irgend ein Punkt des Kreises; man ziehe den Kreis B (BA) $(C_1 + C_2 + C_3)$, der den gegebenen Kreis in A' schneidet; man ziehe A (AA') $(2\,C_1 + C_3)$, der B (BA) in C trifft. Man ziehe CA $(2\,R_1 + R_2)$; diese ist die gesuchte Tangente; . . . Op : $(2\,R_1 + R_2 + 3\,C_1 + C_2 + 2\,C_3)$; S : 9 : E : 6; 1 Gerade, 2 Kreise."

Hieraus ist zugleich die bedeutungsvolle Thatsache ersichtlich, dass Einfachheit der Darstellung (und auch des Beweises) und Einfachheit der Ausführung einer Konstruktion durchaus nicht übereinzustimmen brauchen; es hiesse daher zu weit gehen, wollte man, wie Herr

---

*) Dies ist nach den Mitteilungen, mit denen Herr L. die Einsendung seines Artikels begleitete, in der That der Fall. Anm. d. Red.

Leisen zu beabsichtigen scheint, die gebräuchlichen geometrischen Lösungen durch die einfacher zu zeichnenden ohne weiteres ersetzen; das beabsichtigt auch Herr Lemoine nicht (Arch. d. Math. u. Phys (3), **1**, p. 331). Diese verschiedene Art der Einfachheit ist eben der Grund, dass, wie oben gesagt, den üblichen klassischen Konstruktionen einfachere gegenübergestellt werden können, die bisher verborgen waren; die Geometrie bietet eine Oekonomie im Aussprechen, die Geometrographie eine Oekonomie im Ausführen einer Konstruktion; an der ersteren, altersgrauen, die bis jetzt allein betrieben worden ist, wird sich kaum noch viel ändern; die letztere war vor 15 Jahren ein vollkommen unberührtes Gebiet; während schon Steiner (Ges. W. I, 509. 510) auf die Notwendigkeit hingewiesen hatte, die geometrischen Konstruktionen auf ihre Einfachheit zu untersuchen, war es Herrn Lemoine vorbehalten, der Schöpfer dieser neuen Wissenschaft zu sein, weil er ein objektives Mass für die Einfachheit der Ausführung entdeckt hatte. Die Entwickelung dieser jungen Disziplin ist durchaus noch nicht abgeschlossen, sie wird im Gegenteil tagtäglich weiter gefördert, und es würde mich freuen, wenn diese Zeilen zu grösserer Beteiligung in Deutschland Anregung gäben.*)

Zum Schluss möchte ich noch auf die weittragende Bedeutung hinweisen, welche die Geometrographie für den Unterricht besitzt. Ich würde, um eine Mehrbelastung zu verhüten, die Einführung in dieses Gebiet zunächst versuchsweise für Vertretungsstunden empfehlen; ich bin überzeugt, dass diese sich hierdurch genussreich und fruchtbringend gestalten können. Mag es die Thatsache sein, die einen tiefen Eindruck auf die Schüler macht, dass auf dem elementaren Gebiete, das ihnen zugänglich ist, zu ihren Lebzeiten neues und grosses geschaffen worden ist und von heute auf morgen noch gefördert wird, ja, dass sie selbst das Werkzeug besitzen, an der Entwickelung der Wissenschaft mitzuarbeiten, oder mag es der im Geiste der Zeit liegende Wettbewerb sein, der in dieser Lehre, ihrem Wesen eigen, in der edelsten Form auftritt, die Geometrographie wirkt nach meiner Erfahrung überaus anregend auf die jungen Gemüter; selbst schwache Schüler und solche, die der Mathematik keinen Geschmack abgewinnen, können sich der Anziehungskraft dieser Wissenschaft nicht entziehen.

Bericht über die elfte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften

zu Düsseldorf in der Pfingstwoche 1902.

Im Auftrage des Vorstandes.

Dem im vergangenen Jahre in Giessen gefassten Beschlusse gemäss wurde unter Annahme der von Seiten der Stadt Düsseldorf erfolgten Einladung, die elfte Hauptversammlung des Vereins in der schönen Kunst- und Garten-Stadt am Rhein abgehalten, die durch die wenige Tage vorher erfolgte Eröffnung der rheinisch-westfälischen Industrie- und Gewerbe-Ausstellung, verbunden mit einer gleichzeitigen deutsch-nationalen Kunstausstellung eine grosse und begreifliche Anziehungskraft ausübte. Mit unermüdlichem Eifer hatte der Ortsausschuss unter Leitung des Direktors der städtischen Oberrealschule, Herrn Prof. Viehoff, und unter besonderer thätiger Mitwirkung des Herrn Oberlehrers Dr. Berghoff sich der Vorbereitungen für die Versammlung angenommen. Für die Unterbringung der Versammlungsteilnehmer, die bei dem starken Fremdenzufluss ihre Schwierigkeiten hatte, war in dankenswerter Weise Herr Oberlehrer Dr. Schlabach besorgt gewesen. So war alles wohl vorbereitet, als am 20. Mai, abends, über 50 Gäste sich zur Begrüssung im „Europäischen Hofe“ zusammenfanden, die Präsenzliste des folgenden Tages stellte eine Teilnehmerzahl von 125 fest; da in den beiden folgenden Tagen noch eine Reihe weiterer Besucher dazu kamen, wird man die Zahl der Teilnehmer im ganzen auf 140 bis 150 beziffern dürfen.

Die Versammlung bot drei allgemeine Sitzungen, die wissenschaftlichen Vorträgen und Diskussionen gewidmet waren, sowie eine den Schluss bildende Geschäftssitzung, ferner noch Fachsitzungen in drei parallel tagenden Abteilungen. Alle Verhandlungen fanden in der Aula und einigen Klassenzimmern des Gebäudes der städtischen Oberrealschule statt.

Die erste allgemeine Sitzung am Donnerstag, dem 22. Mai, begann früh 9 Uhr mit den Begrüssungsreden der die Versammlung besuchenden Ehrengäste.

Es waren dies Herr Provinzial-Schulrat Dr. Meyer aus Coblenz, den das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium der Rheinprovinz entsandt hatte, Herr Regierungs- und Schulrat Dr. Quehl als Vertreter der Königlichen Regierung zu Düsseldorf und Herr Provinzial-Schulrat Dr. Kaiser aus Cassel, der im Auftrage des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums der Provinz Hessen-Nassau der Versammlung beiwohnte. Anwesend war ferner, wenn auch nicht in direktem Auftrage der Behörde, der Geheime Regierungs- und Provinzial-Schulrat Herr Dr. Vogel aus Berlin, der — wie auch die Herren Meyer und Kaiser — sich lebhaft an der Diskussion beteiligte, die Vertretung der Stadt hatte im Auftrage des zu seinem Bedauern durch anderweite Obliegenheiten verhinderten Herrn Oberbürgermeisters Herr Direktor Viehoff übernommen.

In dieser Eigenschaft, zugleich auch als Vorsitzender des Ortsausschusses bewillkommnete an erster Stelle Herr Direktor Viehoff die Versammlung. Er betonte den zeitgemässen Charakter, den die Ziele des Vereins tragen, er wies darauf hin, dass die gewaltigen Erfolge der Technik, die in der Düsseldorfer Ausstellung so mächtig zu Tage treten, die Früchte der wissenschaftlichen Forschung seien, deren Methoden und Ergebnisse für die Jugendbildung zu verwerten die spezielle Aufgabe des exaktwissenschaftlichen Unterrichts sei. Er erinnerte an das lebhafte Interesse, das der Kaiser an der exakten Wissenschaft und ihrer Anwendung in der Technik nimmt, ein Interesse, das er durch die Erweiterung der Rechte der technischen Hochschulen und die Anerkennung der Gleichwertigkeit für die realistische mit der humanistischen Schulbildung zum Ausdruck gebracht habe. Für die Vertreter der realen Bildungsfächer verdoppele sich dadurch die Pflicht einer ernsten Pflege der im Vereinsprogramm aufgestellten Ziele, es sei zu hoffen, dass diesem Zweck auch die gegenwärtige Versammlung, der er guten Verlauf wünsche, dienen möge, der ernsten Arbeit möge dann auch Erholung in der gastlichen und festesfrohen Stadt folgen.

Es folgte Herr Provinzial-Schulrat Dr. Meyer, der in eingehender Weise die Stellung der Unterrichtsverwaltung zu den Aufgaben des mathematisch-natur-

*) Vgl. den zweiten Artikel des Verf., der in der nächsten No. der Unt.-Bl. erscheinen wird: „Zur Geometrographie“, sowie den Artikel: „Beitrag zur Geometrographie“ im nächsten Heft des Arch. (3) **3** 1902.

wissenschaftlichen Unterrichts darlegte. Gerade die mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächer ständen im Vordergrunde der lebhaften Entwickelung unseres Schulwesens, die in der That eine fortdauernde Entwickelung, keine mit den bisherigen Tendenzen brechende „Reform“ sei, wie dies irrtümlich manchmal angenommen werde. Wenn dabei nicht zu leugnen sei, dass nach seiner (des Redners) persönlichen Ansicht die biologischen Fächer in ein zu kurzes Bett gespannt seien, so liege dem Verein es ob, den Weg zu finden, auf dem eine Verlängerung dieses Bettes ohne Schädigung anderer berechtigter Ziele ermöglicht werde, er wünsche, dass der Verein diese Aufgabe wie seine sonstigen Aufgaben in einer dem ganzen höheren Schulwesen nützenden Weise lösen möge.

Im Namen der Königlichen Regierung zu Düsseldorf brachte Herr Regierungs- und Schulrat Quehl der Versammlung einen Willkommengruss. Die Verhältnisse des der Aufsicht der Königlichen Regierungen unterstellten Elementar-Unterrichts seien zwar von denen des höheren Unterrichts verschieden, aber die Ergebnisse der Entwickelung des höheren Schulwesens wirkten doch auf das Elementar-Schulwesen zurück, in dem gemeinsamen Ziel der Erziehung zu tüchtigen Bürgern des Staates komme das höhere mit dem niederen Schulwesen zusammen.

Den Dank für diese Begrüssungen sprach der Vereinsvorsitzende Prof. Pietzker (Nordhausen) aus. Unter Anknüpfung an die in den Begrüssungsansprachen entwickelten Gedanken betonte er, dass das Ziel, dem die Thätigkeit des Vereins diene, wenn wir uns ihm auch schon sehr genähert hätten, noch nicht erreicht sei. Es gelte noch immer, den mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächern die volle Anerkennung als unerlässliche Faktoren der allgemeinen Bildung zu erringen, das beste und wirksamste Mittel hierfür sei die Verbesserung und Vertiefung des Unterrichts, welche ihrerseits dahin führen werde, diesem Unterricht auch die äusserlichen Vorbedingungen für eine gedeihliche Wirksamkeit zu schaffen und durch beides nicht nur bei den Behörden, deren wohlwollendes Entgegenkommen man nur dankbar anerkennen könne, sondern auch in weiteren Kreisen die Ueberzeugung immer mehr zu stärken, dass die intellektuelle, ethische und ästhetische Geistesbildung ohne die Mithilfe der exakten Wissenschaften notwendig unvollkommen sei. Er begrüsste ferner den im Auftrage des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums zu Cassel erschienenen Herrn Provinzial-Schulrat Dr. Kaiser als langjährigen Freund und Gönner der Vereinsbestrebungen, sowie den Prof. Dr. Bail aus Danzig, einen Mitbegründer des Vereins, dessen erstem Vorstand er angehört hatte, dachte dann der dem Vereine im vergangenen Jahre durch den Tod entrissenen Mitglieder, deren Zahl glücklicherweise nur gering sei, nämlich der Herren W. Schur (Göttingen), Schiewek (Breslau), Völlmer (Halle a. S.), Bock (Wilmersdorf), Budde (Duisburg), zu deren Ehren sich die Anwesenden von ihren Plätzen erhoben und erteilte nach einigen geschäftlichen Mitteilungen, die im Namen des Ortsausschusses Herr Dr. Berghoff machte, das Wort dem Herrn

Oberlehrer Dr. Thomae aus Elberfeld zu seinem Vortrag über „die Naturwissenschaften als Grundlage der allgemeinen Bildung“. Diesem mit reichem Beifall aufgenommenen Vortrag folgte eine Diskussion über die Stellung der biologischen Unterrichtsfächer im Lehrplan der höheren Schulen, eingeleitet durch ein kurzes Referat, das Herr Dr. Bastian Schmid aus Bautzen übernommen hatte. Diese Diskussion, an der sich insbesondere Herr Geh. Rat Vogel aus Berlin in längeren Ausführungen beteiligte, wurde später abgebrochen, um am Sonnabend fortgesetzt zu werden, sie wird Gegenstand eines ausführlichen Sonderberichts sein.

Nach einer kurzen Frühstückspause folgten dann Fachsitzungen einer kombinierten physikalisch-chemischen Abteilung unter Vorsitz von Dr. Schlabach (Düsseldorf) und einer kombinierten mathematisch-geographischen Abteilung, der Prof. Dr. Hansen (Giessen) vorsass. In der ersteren wurden Demonstrationsvorträge von Berghoff (Düsseldorf) über „die Verwendung des Projektionsapparates im physikalischen Unterricht“ und Rischbieth (Hamburg) über „die Gasbürette im chemischen Unterricht“ gehalten, in der letzteren sprach Bochow (Magdeburg) „zur Behandlung der regelmässigen Vielecke im Unterricht“ und Pahde (Krefeld) trug „kurze Bemerkungen zu dem neuen Lehrplan der Erdkunde mit besonderer Berücksichtigung der „Methodischen Bemerkungen“ vor, an diese Vorträge schlossen sich kurze Diskussionen.

Um $4^1/_2$ Uhr nahm ein vom Ortsausschuss gemieteter Rheindampfer die Versammlungsteilnehmer auf, um nach einer Rundfahrt längs der neuen Hafenanlage und des Rheinkais an der Ausstellung zu landen, in der die Einzelnen bis spät am Abend blieben, um deren mächtige Eindrücke auf sich wirken zu lassen.

Der zweite Versammlungstag (Freitag, 23. Mai) brachte in einer allgemeinen, vom Direktor Viehoff (Düsseldorf) geleiteten Sitzung zunächst den Vortrag von Schotten (Halle a. S.) „über eine geplante Enzyklopädie der Elementar-Mathematik“, an den sich eine rege — den Gegenstand eines Sonderberichts bildende — Diskussion anschloss. Zu einer Beschlussfassung kam es nicht. Dann folgte ein längerer Vortrag von Leisen (Dülken) über „unnütze Erschwerungen der Arbeit des Lehrers und der Schüler im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“, dessen letzter Teil bei der vorgerückten Zeit vom Redner nur auszugsweise gegeben werden konnte.

Auch an diesem Tage folgten dann Fachsitzungen der Abteilungen für Physik, Mathematik und Naturkunde, die von Berghoff (Düsseldorf), Schotten (Halle a. S.) und Pietzker (Nordhausen) geleitet wurden. Die erstere brachte Demonstrationsvorträge von Grimsehl (Hamburg) über „Neue Apparate und Versuchsanordnungen aus der Elektrizitätslehre, von Wanner (Hannover) „über ein neues optisches Pyrometer“ und von Looser (Essen a. R.) „Versuche aus der Wärmelehre“. Die Sitzung der zweiten wurde durch eine von Rühlmann (Halle a. S.) eingeleitete Diskussion über die Einzelabgrenzung des Pensums in der darstellenden Geometrie ausgefüllt, in der dritten hielt Krebs (Barr i. E.) über „das Zeichnen und seine Beziehungen zum naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht“ einen längeren Vortrag, dem sich eine kurze Diskussion anschloss.

Nach einer zweistündigen, wohl von allen Teilnehmern zum erneuten Besuch der Ausstellung benutzten Pause folgte dann in den Räumen der städtischen Tonhalle das Festmahl, das durch eine Reihe von vielfach sehr launigen Trinksprüchen gewürzt wurde. Der erste galt dem erhabenen Herrscher des Reiches und des preussischen Staates, weitere den Ehrengästen, zu denen der Redner auch den Geh. Rat Vogel zählen zu dürfen glaubte, dem Verein, der Stadt Düsseldorf, dem Vorstand, dem Ortsausschuss, insbesondere den Herren Viehoff und Berghoff, den Damen, dem die Hochschule im Vereinsvorstand repräsentierenden Prof. Hansen, dem Vereinsorgan usw. Reichen Beifall erntete insbesondere auch ein Trinkspruch auf die Jugend, deren Erziehung und Geistesbildung ja doch der letzte Zweck aller vom Verein gepflegten Bestrebungen sei, ein besonderes Zeugnis für den Ernst, mit dem die Mitglieder des Vereins ihre Berufsaufgabe erfassen.

An dieses Festmahl schloss sich dann noch ein gemütliches Zusammensein in den dem Verein freundlichst geöffneten Räumen des Malkastens an.

Der dritte Verhandlungstag (Sonnabend, 24 Mai) brachte in der dritten allgemeinen Sitzung, die Direktor Hamdorff (Guben) leitete, zunächst einen sehr beifällig aufgenommenen Vortrag von Freybe (Weilburg a. L.) „Der Unterricht in der Wetterkunde", zu dem nur der Direktor des Aachener meteorologischen Instituts, Dr. Polis, das Wort ergriff, um in längerer Ausführung einige den Vortrag ergänzende Mitteilungen zu machen. Dann wurde die am Donnerstag abgebrochene Diskussion über die Stellung der biologischen Lehrfächer im Unterricht fortgesetzt, die mit der fast einstimmigen Annahme des an anderer Stelle (S. 49) zum Abdruck gebrachten Beschlusses ihr Ende fand.

Unmittelbar daran schloss sich die von dem Vorsitzenden des Vereins geleitete Geschäftssitzung, in der zunächst die Entlastung des Kassenführers von den beiden Tags zuvor bestellten Kassenrevisoren Rühlmann (Halle a. S.) und Schäperclaus (Hagen i. W.) beantragt und von der Versammlung ausgesprochen wurde. Es folgte der eingehende Kassenbericht des Vereins-Schatzmeisters Presler (Hannover), dem folgendes zu entnehmen ist:

Die Zahl der Mitglieder, über die ein soeben neu aufgestelltes Verzeichnis bei der Versammlung selbst den Teilnehmern überreicht wurde, beträgt augenblicklich 1028.

1) Der Kassenbestand am 1. Januar 1901 betrug	232,75 M.
2) Dazu kamen an Zinsen	8,22 „
3) „ „ an 988 Mitgliederbeiträgen	2964,00 „
Summa:	3204,97 M.
Die Ausgaben des Jahres 1901 betragen .	2890,45 „
so blieb am 1. Januar 1902 ein Kassenbestand von	314,52 M.
zu dem als Rest von einer einmaligen Beitragsszahlung eines Mitgliedes noch . . (nach Abzug von 2 Jahresbeiträgen) hinzutreten. (Ueber diesen Pauschalbeitrag ist ein besonderes Sparkassenbuch angelegt worden).	39,00 M.
Der gesamte Kassenbestand betrug also .	353,52 M.

Die Ausgaben setzen sich wie folgt zusammen:

1) Vertragsmässige Zahlung an den Verleger des Vereinsorgans 988 · 1,75 =	1729,00 M.
2) Kosten der Giessener Versammlung . .	543,19 „
3) Drucksachen	215,50 „
4) Porto und Schreibhilfe	225,76 M.
5) Vergütung an den Kassenführer . . .	100,00 „
6) Kranz zur Trauerfeier für Schwalbe .	20,00 „
7) Kosten der Vertretung des Vereins bei dieser Trauerfeier durch ein Vorstandsmitglied	57.00 „
Summa, wie oben	2890,45 M.

Mit der Ergänzungswahl für die beiden satzungsgemäss ausscheidenden Vorstandsmitglieder Hansen und Pietzker, die beide wiedergewählt wurden und diese Wiederwahl annahmen, wurde die Neuschaffung einer sechsten Stelle des Vorstandes verbunden, die auf Antrag des Vereinsvorstandes widerspruchslos erfolgte; besetzt wurde die neue Stelle durch Dr. Bastian Schmid (Bautzen), der die Wahl gleichfalls annahm.

Die Wahl des Versammlungsortes für die Hauptversammlung des nächsten Jahres wurde dem Vorstand überlassen, der einige darauf bezügliche aus der Mitte der Versammlung hervorgehende Anregungen zur Kenntnis nahm.

Von Einrichtung einer besonderen Vertretung des Vereins auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung, auf der eine besondere Unterrichts-Abteilung nicht gebildet werden soll, wurde Abstand genommen, doch erklärte der Vorsitzende, dass etwaige kurze Berichte über Vorträge, die sich auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht beziehen, als Beiträge für das Vereinsorgan willkommen sein würden.

Er brachte ferner zur allgemeinen Kenntnis, dass seitens des Professors an der Universität Kiel Dr. Stäckel eine statistische Aufnahme aller Lebensstellungen angeregt sei, die sich für Studierende der Mathematik in Deutschland vorfinden, der Vorstand sei sehr bereit, bei dieser Feststellung mitzuwirken, könne dies aber nur, wenn ihm seitens einzelner Herren, die in den verschiedenen Berufszweigen (öffentlichen und Privat-Schulen aller Art, Versicherungs-Anstalten, technischen Werken etc.) thätig seien, Material zur Verfügung gestellt werde; er forderte demgemäss Herren aus diesen Zweigen, die zur Mitarbeit geneigt seien, auf, dem Vorstande von ihrer etwaigen Bereitwilligkeit Kenntnis zu geben.

Der Umstand, dass bei der diesjährigen Versammlung vielfach die für die einzelnen Vorträge angesetzte Zeit überschritten worden war, führte noch zu einer längeren Debatte, diese Debatte endete mit dem Beschluss, es solle in Zukunft mit den einzelnen Vortragenden die genaue Vortragszeit vorher vereinbart, dann aber auch an dieser Vereinbarung festgehalten werden, während für die Sprechzeit der Teilnehmer an den Debatten von der jedesmal beteiligten Stelle eine angemessene Festsetzung getroffen und innegehalten werden soll. Demnächst schloss der Vorsitzende diese Versammlung, deren Teilnehmer zum grössten Teil den Nachmittag noch zum Besuch der Ausstellung verwandten (für den geplanten Ausflug nach der Müngstener Brücke meldete sich nur eine kleine Zahl). In seinem Schlusswort stellte er unter allseitiger Zustimmung fest, dass die Versammlung, auch abgesehen von den gewaltigen Eindrücken, die jeder Teilnehmer von der Ausstellung mit hinwegnehme, an sich reiche Anregungen aller Art geboten habe und inhaltreiche Erinnerungen bei jedem zurücklasse. Warmer Dank dafür gebühre der einladenden Stadt Düsseldorf, der unermüdlichen und erfolgreichen Thätigkeit des Ortsausschusses und allen den Herren die durch ihre Vorträge und ihre Beteiligung an den Debatten zu dem so befriedigenden Ergebnis mitgewirkt hätten. Mit dem Ausdruck dieses Dankes, dem auf Aufforderung des Herrn Wetekamp (Breslau) die Anwesenden noch einen Dank für den Vereinsvorstand hinzufügten, fand die in vieler Hinsicht bedeutsame Versammlung ihren Abschluss.

Vereine und Versammlungen.

73. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Hamburg 1901.

Versammlungsbericht (Fortsetzung).

VI. Physikalische Abteilungsvorträge. (Schluss).*)

In der vierten Sitzung am 25. September 1901 behandelte L. Grunmach (Berlin) „die experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung flüssiger Luft."

Redner ging aus von seinen früheren Bestimmungen der Oberflächenspannung kondensierter Gase mittels der Kapillarwellenmethode, wie sie von ihm in den Berichten der Berliner Akademie XXXVIII, 1900, in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, I. Jahrg., No. 1, und in den Ann. d. Phys. 3, S. 660 u. f. 1900 niedergelegt sind und hat seine Untersuchungen auf flüssige Luft ausgedehnt, die in Dewarschen Gefässen erschütterungsfrei aufgestellt war. Der mit der Zeit variable Sauerstoffgehalt wurde bei jeder Beobachtungsreihe gasanalytisch nach einer W. Hempelschen Absorptionsmethode bestimmt. Der Vortragende betont, dass sicher messbare Kapillarwellen nur entstehen, wenn die Stimmgabelspitzen nicht tief, sondern nur eben in die Flüssigkeit eintauchen. Die Schwingungszahl der benutzten Stimmgabel ist von der Physik. techn. Reichsanstalt bestimmt. Der Abstand der Stimmgabelspitzen ist mit Mikrometermikroskop und Horizontalkomparator ausgewertet. Die Temperatur der flüssigen Luft ist mit einem Petroleum-Aether-Thermometer der Phys. techn. Reichsanstalt zu im Mittel $-190{,}3^0$ C gemessen. Aus acht Beobachtungsreihen ergab sich, dass die spec. Kohäsion der flüssigen Luft (Sauerstoffgehalt 49,9% bis 76,7%) unabhängig vom Sauerstoffgehalt den Mittelwert 23,2 besitzt, und die Oberflächenspannung der flüssigen Luft mit wachsendem Sauerstoffgehalt zunimmt.

2. Darauf trug derselbe Redner vor „über die Volumenänderungen des Quecksilbers beim Schmelzen und die thermische Ausdehnung des starren Quecksilbers.

Die Beobachtungen des Redners wurden so ausgeführt, dass ein Thermometerrohr mit willkürlicher, kalibrierter Skala zunächst in schmelzendem Eise bis zum Nullstrich mit Alkohol gefüllt und dann mit einem Normalthermometer der Reichsanstalt in einem Kältebade im Temperaturintervall von 0^0 bis -78^0 verglichen wurde. Dann wurde dasselbe Rohr wieder in schmelzendem Eise durch einen geschickten Kunstgriff bis zum Nullpunkt, und zwar zur Hälfte mit Alkohol, zur anderen Hälfte mit Quecksilber gefüllt, und von Neuem mit dem Normalthermometer im selben Temperaturintervall verglichen. Die Resultate wurden graphisch dargestellt. Unter der begründeten Annahme, dass bei denselben Temperaturänderungen an derselben Stelle des Temperaturintervalls die halbe Menge Alkohol die halbe Ausdehnung der ganzen Menge Alkohol erfährt, liessen sich aus den beiden Beobachtungsreihen die Aenderungen erschliessen, welche das Quecksilber für sich allein erfährt. Das Ergebnis war, dass die Ausdehnung des starren Quecksilbers (abgerundet) $^2/_3$ der Ausdehnung des flüssigen Quecksilbers beträgt (α des Hg. flüssig $= 0{,}000\,181$, des festen Quecksilbers $0{,}000\,123$) und dass das Volumen von 1 cbcm starren Hg. sich beim Schmelzen auf 1,050982 Ccm ausdehnt.

3. Sodann behandelte R. Wachsmuth (Rostock) „die innere Wärmeleitung in Flüssigkeiten" und gab eine neue Methode zur schnellen Messung und Berechnung derselben bei gleichzeitiger Bestimmung des elektrischen Leitvermögens an. Der Apparat besteht aus zwei übereinander angebrachten Kupferplatten, von denen die eine durch einen Wasserstrom konstanter Temperatur, die andere durch einen untergelegten Eisklotz auf konstanter Temperatur gehalten wird. Zwischen beiden Platten befindet sich die Flüssigkeitsschicht. Ihre Temperatur wird an beiden Grenzen durch Thermoelemente gemessen. Sind konstante Zustände eingetreten, so fliesst in der Zeiteinheit durch die Querschnitteinheit ein Wärmestrom proportional der Temperaturdifferenz, umgekehrt proportional der Schichtdicke und sonst nur abhängig vom Leitvermögen der Flüssigkeit. Das aufgefangene Schmelzwasser des Eisblocks giebt ein direktes Mass für den Wärmestrom. Die elektrische Leitfähigkeit der Flüssigkeit kann gleichzeitig gemessen werden.

4. spricht P. Bachmetjew (Sofia) über die Ueberkaltung der Flüssigkeiten, die der Verfasser an Insekten- und Pflanzensäften, sowohl in lebenden Organismen, wie auch in Glasgefässen untersucht hat. Des Weiteren sind untersucht: Destilliertes und gewöhnliches Wasser, Benzol, Benzol + Xylol, und p — Nitrotoluol. Die Ergebnisse der Untersuchung sind zum grossen Teil in der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie LXVI (4) LXVII (4), in den Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg X, No. 7, Journ. der russ. phys.-chem. Ges. zu St. Petersburg, Arch. des Sciences Biologiques VIII, No. 3 und in „Experimentelle entomologische Studien I. Temperaturverhältnisse bei Insekten. Leipzig 1901, veröffentlicht.

5. Sodann überreicht Dwelshauvers-Dery (Lüttich) der Versammlung die folgenden Bemerkungen:

Ueber kritische Daten.

Nach Van der Waals' Theorie sind die Erscheinungen in der Nähe des kritischen Punktes einfach und bestehen in der Wahrnehmung eines kritischen Druckes, einer kritischen Dichte, die oberhalb der kritischen Temperatur in der ganzen Masse konstant bleibt, während unterhalb zwei Dichten entsprechen respektiv dem Gas und der Flüssigkeit.

Schon seit Jahren schien es, als ob diese Theorie nicht allen Beobachtungsresultaten genüge, jedoch bedurfte es zahlreicher Experimente, um die Richtigkeit eines allgemein angenommenen Gesetzes anzuzweifeln.

Im physikalischen Institut der Universität Lüttich wurden von Prof. De Heen und von mir mehrere

*) Der Referent bittet, einige störende Fehler im Beginn des Referats (diese Zeitschrift No. 2) zu verbessern, die sich dadurch eingeschlichen haben, dass dem Referenten kein Korrekturbogen vor dem endgültigen Druck vorgelegen hat.

1) S. 41, Spalte rechts, Zeile 16 v. oben ist zu lesen „Chatelier" statt „Chatelin".

2) S. 43, Sp. r., Zeile 14 v. unten, ferner S. 44, Sp. links, Zeile 6, Zeile 10, Zeile 11, Zeile 24 v. o. ist überall zu lesen „Walter" statt „Wind".

3) S. 44, Sp. l., Zeile 15 v. o. ist zu lesen „mit" statt „nur".

4) S. 44, Sp. l., Zeile 19 v. u. ist zu lesen „dissociiert" statt „dissoniert".

5) S. 44, Sp. l., Zeile 6 v. u. ist der als Fussnote gedruckte Satz in den Text aufzunehmen.

6) S. 44, Sp. r., Zeile 24 v. o. ist zu lesen „Solarisation" statt „Polarisation".

7) S. 44, Sp. r., Zeile 31 v. o. ist zu lesen „Ducos de Hauron" statt „Ducos du Hauron".

Versuche*) angestellt, die uns bald überzeugten, dass die Thatsachen bedeutend komplizierter sind, als das Van der Waalssche Gesetz.

Die Homogeneität einer über die kritische Temperatur erwärmten Flüssigkeit ist mehr als fraglich. Nimmt man z. B. eine Nattererscher Röhre und erwärmt sie bis 35° C — also über die k. T. des Kohlensauerstoffes — lässt man sie dann erkalten, so merkt man an der Stelle, wo der Meniscus verschwunden ist, eine dünne nebelige Schicht, während ober- und unterhalb kein Nebel gebildet wird. Ist aber die Röhre längere Zeit über die k. T. erwärmt worden, so ist die nebelige Schicht viel dicker. Dasselbe Resultat erzielt man, wenn man die Temperatur bis 40° C oder höher steigen lässt. Um aber den Nebel in der ganzen Röhre wahrzunehmen, muss man entweder die Temperatur sehr lange Zeit über die k. T. behalten, oder die Röhre schütteln.

Diese Thatsachen zeigen, dass die Homogeneität kaum an der k. T. selbst zu erlangen ist, wenn man sie nicht willkürlich herbeiführt und dass oberhalb der k. T. zwei Substanzen koexistieren können: die eine oberhalb des verschwundenen Meniscus, die zweite unterhalb. An der Stelle des Meniscus selbst ist eine Mischungsschicht, die beim Erkalten den Nebel bildet.

Die Thatsache, dass sich die Mischungsschicht nur „langsam" nach oben und unten ausdehnt, zeigt, dass die Dichten der zwei Substanzen ziemlich verschieden sind. In anderen Versuchen stellte Prof. de Heen fest, dass die untere Substanz, die beim Erkalten gleich in Flüssigkeit übergeht und daher liquidogenisch genannt wird, die doppelte Dichte hat von der oberen Substanz, die wir aus ähnlichen Gründen gasogenisch nennen.

Nach diesen Versuchen — siehe Zeitschr. für kompr. und flüssige Gase 1898, 7-8-9 — ist ersichtlich, dass Druck und Temperatur nicht genügen, um die Dichte der Substanz in der Nähe der k. T. zu bestimmen und dass der frühere Aggregationszustand der betrachteten Materie hier bestimmend ist.

Also kann von einer kritischen Dichte keine Rede mehr sein; ober- wie unterhalb der k. T. genügen die Ergebnisse der Theorie nicht, um die Eigenschaften der Materie festzustellen. Der Begriff des kritischen Punktes sollte ersetzt werden durch den einer kritischen Periode, die sich z. B. für Kohlensauerstoff auf mehr als 30° C erstreckt. In dieser Periode hätte man zwei Grenzdichten zu betrachten, wovon die grössere der liquidogenischen, die kleinere der gasogenischen Substanz entspricht. Die jetzige Theorie ergiebt Resultate, die zwischen diesen Grenzdichten einen Mittelwert bilden.

6. M. Möller (Braunschweig) bespricht „Drehschwingung und Zentralschwingung in Beziehung zu Magnetismus und Elektrizität". Redner unterscheidet die Rotation um den Schwerpunkt (Drehung eines Rades um die Achse) von der Drehschwingung, wie sie z. B. irgend ein Punkt einer Pleuelstange betreibt. Bei der Rotation um den Schwerpunkt heben die Fliehkräfte sich auf und veranlassen keine Fernwirkung, bei der Drehschwingung wirkt die Fliehkraft der ganzen Masse in einer Richtung und mithin in die Ferne. Wo Massen fest aufeinander lagern, kann sich Drehschwingung ohne Stoss- und Reibungsverlust von Masse auf Masse übertragen, auch dort Drehschwingung erzeugend. Man nimmt mit Recht an, dass die Fernwirkung magnetischer Kräfte auf einem Spannungszustand des Zwischenmittels beruht, welches in Drehbewegung seinen Grund hat. Dieselbe kann nach dem Gesagten nicht Rotation, sondern nur Drehschwingung sein. Die Ausführungen über die Drehschwingung wurden durch eine Reihe von Versuchen an einem Gestell mit aufgehängten Pendeln unterstützt. Sodann wendet sich Redner zu den Zentralschwingungen, zeigt, dass die Beziehungen zwischen dem statischen und dynamischen Druck der Strömung von Flüssigkeiten in einem konischen Rohr sich auf Radialschwingungen von Luft und Aether in Kugelwellen übertragen lassen und betont, dass das Studium radialer Wellen — wie sie dem Hydrauliker in ihren Wirkungen bekannt sind, — auf den Aether anzuwenden ist, für den man bisher transversal zum Strahl schwingende Elemente bevorzugt hat. An der Hand von Tafeln und Modellen wird schliesslich die Druckverteilung gezeigt, welche in der Umgebung eines Stromkreises eintreten muss, wenn von ihm Drehschwingung ausgeht, wie diese einen Spannungszustand im stofflichen Mittel der Umgebung bewirkt, der schliesslich zu Erscheinnngen der Anziehung und Abstossung führt.

7. Den Schluss der Sitzung bildete ein Vortrag des Arztes M. Münden in Hamburg über „Die bakteriologisch-biologische Grundlage physikalischer, chemischer und mineralogischer Formgestaltungen", in welchem Redner an der Hand zahlreicher Demonstrationsobjekte folgende Behauptungen zu beweisen versuchte: „Was wir bisher Metall und Mineral nannten, erscheint in denjenigen Formen, welche wir in der Bakteriologie mit Kocken, Stäbchen und Fäden nebst ihren Fortpflanzungsformen bezeichnen. Diese bakteriformen Körper, sowie gewisse stereotype Umwandlungsgestalten wachsen in der Weise der organischen Welt, sei es in wässeriger Umgebung, sei es an freier Luft, zu den amorphen oder krystallisierten Formen, welche wir alle kennen, aus. Das Fällen und Krystallisieren aus einer Lösung ist ein progressiver Wachstumsvorgang eines Keims, welcher selbst bakteriforme Gestaltung hat, die Auflösung in einer Lösung ist ein regressiver Wachstumsvorgang des Krystalles oder der amorphen Form zu kleinsten Keimen. Aber auch an der Luft, ohne jede Spur einer Lösung, gehen bei der einen Substanz in längerer, bei der anderen in kürzerer Zeit Wachstumsvorgänge vor sich, welche zu Krystallbildungen und amorphen Formen führen, ohne dass wir einen sichtbaren Nährboden hätten. Das Flüssigwerden fester Stoffe beruht auf dem mächtigen Wachstum der hyalinen Hülle der bakteriformen Körper, die Bildung von Schollen und Körnern auf der überwiegenden Entwickelung des Innenkörpers derselben. Einzelne Stoffe bilden Kolonien wie anerkannte Bakterien, andere entwickeln sich unter Differenzierung ihres Innern zu algenartigen Formen und wieder andere erscheinen von vornherein in der Gestalt der Zoogloea. Monate und Jahre hindurch unter verkittetem Deckglas beobachtet, bleibt kein Metall und Mineral in trockenem Zustande unverändert; sie zeigen alle Wachstumsvorgänge verschiedenster Art.

Den Referenten frappierte die ausserordentlich grosse Uebereinstimmung in der äusseren Erscheinung der demonstrierten anorganischen Präparate mit Bakterienformen;

*) De Heen. Bull. Acad. Roy. Belgique, 1892, 9. — 10: ibid. 1896, 2; ibid. 1896, 1; ibid. 1897, 2.

Dwelshauvers-Dery, ibid. 1895, 2; ibid. 1895, 11; ibid. 1896, 2; ibid. 1896, 3.

Siehe auch: De Heen, die angeblichen Anomalien in der Nähe des kritischen Punktes, Zeitschr. für kompr. und flüssige Gase. 1898, 7-8-9 und De Heen et Dwelshauvers-Dery. Dates critiques. 1901, la Meuse, Liège.

dass sich an den selbstverständlich lebhaftesten Widerspruch herausfordernden Vortrag, der eine vollständige Umwälzung der gewohnten Naturanschauung postuliert, keine offizielle Diskussion anschloss, lag wohl an der vorgeschrittenen Zeit.

In der 5. Sitzung am Nachmittag des 26. September sprach 1) H. Geitel (Wolfenbüttel) „über die durch atmosphärische Luft induzierte Radioaktivität". Die atmosphärische Luft hat ein kleines Leitvermögen; sie verhält sich so, als ob sie von schwachen Röntgenstrahlen durchsetzt werde. Radioaktive Luft überträgt durch blossen Kontakt radioaktive Eigenschaften vorübergehend auf andere Substanzen, und zwar besonders merklich, wenn man dieselben während der Aktivierung auf negativem Potential hält. Geitel und Elster haben gefunden, dass die natürliche Luft allein ausgespannte Metalldrähte radioaktiv macht, welche negativ geladen, derselben einige Stunden ausgesetzt werden. Solche Drähte, in die Nähe eines geladenen Elektroskops gebracht, beschleunigen die Entladung desselben durch die Luft. Der Träger der Radioaktivität lässt sich von den Drähten abwischen, so auf kleinen Raum konzentrieren und zeigt dann sich photographisch wirksam durch Aluminium hindurch. Die Luft in lange verschlossenen Kellerräumen zeigt stärkere radioaktivierende Wirkung als die freie Luft.

2. trug Fr. Ahlborn (Hamburg) vor über den Mechanismus des Widerstandes in flüssigen Medien. Aus den Bewegungen des flüssigen Mediums, in dem sich ein Körper (eine Scheibe) bewegt, kann man auf die Kräfte schliessen, die diese Bewegungen hervorrufen. Diese Bewegungen werden an der Oberfläche durch aufgestreuten Bärlappsamen, im Innern der Flüssigkeit durch Sägespäne von Eichenholz, die sehr langsam untersinken, sichtbar gemacht. Die Bewegungen werden photochronographisch fixiert durch eine Camera, die auf Schienen über den Behälter gleitet und unter sich, in der photographischen Achse, eine Scheibe durchs Wasser führt. Bei einer anderen Anordnung gleitet die Camera seitlich neben dem Behälter, während die Scheibe im Wasser gleichzeitig fortschreitet. Die suspendierten Teilchen zeichnen sich auf der photographischen Platte als Strömungslinien ab. Divergente Strömungslinien bedeuten eine Stauung der dazwischen liegenden Wasserfäden und eine Zunahme des Flüssigkeitsdruckes an der betreffenden Stelle, konvergente Strömungslinien das Gegenteil. Untersucht wurden auf solche Weise sowohl senkrecht wie schief gegen die Bewegungsrichtung stehende Platten, sowohl an der Oberfläche, wie im Innern der Flüssigkeit. Ausser den Strömungskurven wurden auch die Staukurven der Flüssigkeit vor und hinter der bewegten Platte aufgenommen. Die Form derselben entspricht den aus den Strömungskurven ablesbaren Druckverhältnissen. Der Widerstand vor bezw. hinter einer bewegten Platte lässt sich graphisch durch ein Flächen-Modell darstellen, welches auf die Platte aufgesetzt wird, und dessen Ordinatenerhebung über jeden Punkt der Fläche die Grösse des an diesem Punkte herrschenden Drucks anzeigt.

3. Sodann trug H. Haga (Groningen) vor „über den Klinkerfuesschen Versuch".

4. Es folgte ein Vortrag von J. Elster (Wolfenbüttel) „über luftelektrische Messungen auf Capri und Spitzbergen". Die elektrische Leitfähigkeit der Luft über Capri ist durchschnittlich fünf mal so gross als über dem kontinentalen Europa. Aehnlich ist es in Spitzbergen. Das beobachtete geringe Potentialgefälle von 85 Volt/Meter der atmosphärischen Elektrizität in Spitzbergen hängt wohl mit der hohen Leitfähigkeit der Luft in Spitzbergen zusammen. Besonderes Interesse werden Versuche über durch Luft induzierte Radioaktivität, wie sie von Geitel angestellt sind, in Luft von so hoher Leitfähigkeit, wie auf Capri und Spitzbergen, gewähren.

5. An diesen Vortrag schloss sich ein solcher von J. Precht (Heidelberg) über die „Eigenschaften der Becquerelstrahlen". Die Arbeit wird gedruckt in den Annalen erscheinen.

6. Den Schluss bildete ein Vortrag von B. Walter (Hamburg) „über einen photographischen Apparat zur genauen Analyse des Blitzes". Die ersten Blitzaufnahmen, bei denen absichtlich durch eine schaukelnde Bewegung der Camera in den Händen des Beobachters die zeitlich aufeinander folgenden Erscheinungen eines Blitzschlages örtlich nebeneinander fixiert wurden, verdankt man Weber in Kiel. Der Vortragende hat an seinem Apparat die Camera auf die Achse eines langsam drehenden Uhrwerks gesetzt; die Verbindung ist aber nur durch sanfte Reibung bewirkt, sodass man mit der Hand die Camera zurückdrehen kann bei bewegtem Uhrwerk, sobald das Objektiv die Himmelsrichtung verlässt, in welcher man die nächsten Blitzentladungen erwartet. Die bekannte Umdrehungszeit des Uhrwerks (35 sec.) gestattet, wenn ein Blitz aus mehreren Entladungen bestanden hat, die sich auf der Platte als parallele Linienzüge abzeichnen, aus den Konstanten des Apparats und dem Abstand dieser Linien von einander und von der Plattenmitte, die Zeit, die zwischen den Einzelentladungen des beobachteten Schlages verflossen ist, und mithin auch die Dauer der ganzen Entladung zu bestimmen. Die benutzten Platten haben nur die Grösse 9×12 cm, und werden in Magazinkassetten zu 12 Platten eingeführt, um einen raschen Plattenwechsel zu ermöglichen. Für Beobachtungszwecke hat der Vortragende auf dem Dache seiner Wohnung einen kleinen Ausbau anbringen lassen, mit Fenstern nach allen vier Himmelsrichtungen, damit die nächtlichen Gewitterbeobachtungen unter Schutz vor Regen und Wind ausgeführt werden können. — Es folgt die Vorführung einer Reihe von Blitzphotographien, die mit dem Apparat gewonnen sind. Die erste zeigt eine Entladung von drei Schlägen, die in Intervallen von 0.042 sec. und 0·11 sec. aufeinander gefolgt sind. Nur der erste Schlag zeigt Verästelungen. Das stimmt zu der Auffassung des Vortragenden, dass, wie der Funke des Induktionsapparates, ein Blitz in der Regel nicht mit einem Schlage, sondern so entsteht, dass die positive Elektrizität der Wolke in der Form mehrerer stossweise auf einanderfolgender und von Stoss zu Stoss immer länger werdender Büschelentladungen allmählich immer weiter zur Erde hin vordringt, wobei die folgende Entladung sich stets des ihr von der vorhergehenden bereits gebahnten Weges bedient, um dann soweit darüber hinauszuschiessen, als sie es nach Massgabe der ihr von der Wolke aus nachgelieferten elektrischen Energie vermag. — Eine andere Aufnahme zeigt einen Schlag, der aus sechs Einzelentladungen besteht, die in sehr ungleichen Intervallen von 131, 68, 75, 119 und 103 Tausendstel-Sekunden aufeinander gefolgt sind und von denen die zweite und sechste durch Intensität hervorragen, derart, dass diese beiden auf der Platte auch jede ein Bild der nächtlichen Landschaft hervorgerufen haben. Die

Zusammengehörigkeit dieser beiden verschoben einander überlagerten Landschaftsbilder zu diesen beiden Entladungen erkennt man daran, dass die Verschiebungsgrösse entsprechender Punkte des Landschaftsbildes gegeneinander gleich dem Abstand des Bildes der zweiten und sechsten Entladung ist. Es ergiebt sich aus den ungleichen Zeitintervallen, dass wenigstens in diesem Falle der Blitz keine regelmässige Oscillation der elektrischen Ladung zwischen Wolke und Erde ist. — An die weiteren zahlreichen Vorführungen von Blitzphotogrammen schliesst sich eine, zu keiner Entscheidung führende lebhafte Diskussion, ob bei Blitzschlägen von der Wolke zur Erde die Wolke stets die Anode des Entladungsvorganges ist.

Dr. F. Bohnert (Hamburg).

* * *

74. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte

zu Karlsbad, vom 21. bis 27. September 1902.

Die Versammlung wird 28 Abteilungen aufweisen, von denen 11 auf die naturwissenschaftliche Hauptgruppe entfallen.

Eine Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht wird nicht gebildet werden.

Am 22. und am 26. September werden allgemeine Sitzungen stattfinden, am 24. September eine Gesamtsitzung beider Hauptgruppen, in der Themata, die sich auf den Versammlungsort beziehen, behandelt werden sollen. Am 25. September wird jede der beiden Hauptgruppen eine gemeinsame Sitzung abhalten, in der Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe wird der „Kreislauf des Stickstoffs" zur Verhandlung kommen, wofür zwei Referenten gewonnen sind.

Geschäftsführer der Versammlung sind die Herren Spitalsdirektor Dr. August Herrmann und Stadtgeolog Ing. Josef Knett.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkurse in Jena vom 4. bis 16. August 1902. Wie alljährlich, finden auch in diesem Jahre an der Universität Jena Ferienkurse für Damen und Herren statt; Anmeldungen dazu nimmt das Sekretariat (Frau Dr. Schnetger, Jena, Gartenstrasse 2, vom 2. August ab Grietgasse 17 a) entgegen.

Die Kurse umfassen ausser den Naturwissenschaften die Gebiete der Sprachen, der Kunst, der Geschichte, Theologie und Philosophie und der Pädagogik. Das Programm der naturwissenschaftlichen Kurse ist das Nachstehende:

1. Botanik: Prof. Dr. Detmer (Ueber Bau und Leben der Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der für den botanischen Schulunterricht wichtigen Zweckmässigkeitseinrichtungen der Gewächse.)
2. Anleitung zu botanisch-mikroskopischen Arbeiten und pflanzen-physiologischen Experimenten: Prof. Dr. Detmer (Versuche über Assimilation, Pflanzenatmung und Turgorerscheinungen, Pilzkulturen, Experimente mit dem Klinostaten, Untersuchungen über Reizvorgänge und Wachstum etc.)
3. Die Tierwelt des Meeres mit Demonstrationen: Prof. Dr. Ziegler.
4. Praktischer Kursus der Zoologie: Prof. Dr. Ziegler.
5. Physiologie des Gehirns mit Demonstrationen: Privatdozent Dr. Noll.
6. Anleitung zu Untersuchungen mit Spektral- und Polarisations-Apparaten: Dr. Gänge.

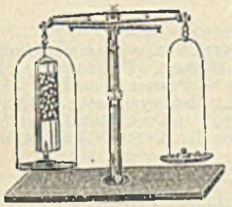
Im Verlage von **Otto Salle** in **Berlin** erschien soeben:

Hilfsbuch
für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten.

Von **Oskar Lesser,**
Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.

Das Buch umfasst die Elemente der Planimetrie, soweit dieselben nach den Lehrplänen Behandlung finden sollen. Es ist ein Uebungsbuch und ein Lehrbuch zugleich. Im Vordergrunde stehen die Aufgaben: möglichstes Hinausschieben der strengen Beweisführung. Gewinnung der Sätze aus reichlich gegebenen Aufgaben auf der unteren und mittleren Stufe, sowie Einführung neuerer Gesichtspunkte sollen den Unterricht erleichtern und fördern.

Preis 2 Mark.



Zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin liefert sämtliche Apparate genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19.

Verlagsanträge

werden gern entgegengenommen und sorgfältig behandelt von der Verlagsbuchhandlung
Otto Salle in Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der Unterricht in der analytischen Geometrie

Für Lehrer und zum Selbstunterricht.

Von **Dr. Wilh. Krumme,**
weil. Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig.

Mit 53 Figuren im Text.

Preis 6 Mk. 50 Pf.

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.

Soeben sind erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Krass, Dr. M., und Dr. H. Landois, Lehrbuch für den Unterricht in der Naturbeschreibung. Für Gymnasien, Realgymnasien und andere höhere Lehranstalten bearbeitet. 3 Teile. gr. 8⁰.

1. Teil: **Lehrbuch für den Unterricht in der Zoologie.** Mit 228 eingedruckten Abbildungen. Sechste, nach den neuen Lehrplänen verbesserte Auflage. (XVI u. 352 S.) *M.* 3.40; geb. in Halbleder *M.* 3.80.

Früher sind erschienen:

2. Teil: **Lehrbuch für den Unterricht in der Botanik.** Mit 313 eingedruckten Abbildungen. Fünfte, nach den neuen Lehrplänen verbesserte Auflage. (XIV u. 320 S.) *M.* 3 20; geb. *M.* 3.60.

3. Teil: **Lehrbuch für den Unterricht in der Mineralogie.** Mit 114 eingedruckten Abbildungen und 3 Tafeln Krystallformennetze. Zweite, verbesserte Auflage. (XII u. 132 S.) *M.* 1.60; geb. 1.95.

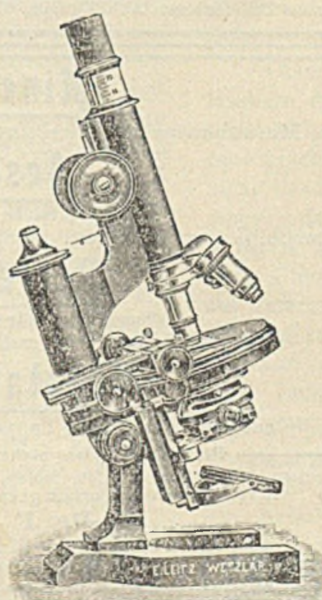
Lorscheid, Dr. J., Lehrbuch der anorganischen Chemie mit einem kurzen Grundriss der Mineralogie. Mit 221 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spektraltafel in Farbendruck. Fünfzehnte Auflage von Dr. F. Lehmann. gr. 8⁰. (VIII u. 344 S. u. 4 Tabellen.) *M.* 3.60; in Halbleder *M.* 4.10.

Richter, E., Wiederholungsbuch zum Unterrichte in der Chemie und Mineralogie. Für den Gebrauch in Lehrerseminaren bearbeitet. Dritte, nach den Lehrplänen vom 1. Juli 1901 umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 85 Abbildungen. gr. 8⁰. (X u. 180 S.) *M.* 2; geb in Halbleder *M.* 2.40.

In der Herderschen Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau sind soeben erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Lebensbilder aus der Geschichte der Sternkunde.	**Kurze Biographien berühmter Physiker.**
Für die reifere Jugend bearbeitet von Dr. phil. B. Krembs.	Zusammengestellt von Oberlehrer C. Musmacher.
Mit 3 Figuren. 12⁰. (XIV u. 178 S.) Mk. 1.40; geb. in Leinwand Mk. 2.—.	12⁰. (VIII u. 280 S.) Mk. 1.80; geb. in Leinwand Mk. 2.40.

Diese beiden Bändchen bieten in gedrängter Kürze die wichtigsten Daten berühmter Astronomen und Physiker und besprechen deren hauptsächlichste Erfindungen und aufgestellte Theorien. Sie eignen sich namentlich für Schüler an Mittelschulen und höheren Bildungsanstalten, sind aber auch für jeden Gebildeten von Interesse.



E. Leitz,
Optische Werkstätte
Wetzlar
Filialen: Berlin NW., Luisenstr. 45
New-York 411 W. 59 Str.
Chicago 659 W.

Mikroskope
Mikrotome
Lupen-Mikroskope
Mikrophotographische Apparate.
Photographische Objektive
Projektions-Apparate.

Ueber 60 000 Leitz-Mikroskope im Gebrauch.

Deutsche, englische und französische Kataloge kostenfrei.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.