Jahrgang VIII. 1902. Nr. 5.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Die in der Pfingstwoche n. J. abzuhaltende zwölfte Hauptversammlung des Vereins wird in Breslau stattfinden, Herr Professor W. Zopf daselbst, Oberlehrer am Realgymnasium z. Heil. Geist, hat den Vorsitz im Ortsausschuss übernommen. An diesen oder an den Hauptvorstand, z. H. von Prof. Pietzker in Nordhausen, bitten wir alle auf die genannte Versammlung Bezug habenden Zuschriften zu richten.

Der Vereins-Vorstand.

Ueber den Plan einer Encyklopädie für die Elementar-Mathematik.

Diskussion auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf.*)

Die Diskussion begann mit einem einleitenden Vortrag des Direktors Schotten (Halle a. S.), dessen Wortlaut in der von dem Referenten herausgegebenen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 33. Jahrgang, 4. Heft, S. 217—229, veröffentlicht worden ist. Dieser Vortrag, dessen hauptsächlichster Inhalt im Folgenden auszugsweise wiedergegeben wird, knüpfte an den im 3. Hefte der obengenannten Zeitschrift S. 153—163 veröffentlichten Aufsatz von G. Holzmüller (Hagen i. W.) „Vorschlag zu einem gemeinsamen Arbeitsplan“ an; der Vortragende gab ein kritisches Referat des Holzmüllerschen Artikels, mit dessen Grundgedanken er sich einverstanden erklärte, während er zugleich seinen eigenen im einzelnen mehrfach von den Holzmüllerschen Anschauungen abweichenden Ansichten Ausdruck gab.

Zunächst stellte der Vortragende fest, dass es sich in dem betreffenden Artikel um einen Vorschlag handle, nicht um ein fertiges Programm: die Düsseldorfer Versammlung solle eben Gelegenheit geben, zu diesem Vorschlag Stellung zu nehmen. Dieser ging dahin, in gemeinsamer Arbeit eine Encyklopädie der Elementar-Mathematik zu schaffen, und regte an, dass der Verein als solcher die Sache in die Hand nehme. Zugleich hatte der Verfasser auseinandergesetzt, nach welchen leitenden Gesichtspunkten seiner Ansicht nach ein derartiges Werk zu bearbeiten sei. Für die Aufgabe selbst,

*) S. Unt.-Bl. VIII, 3, S. 65.

eine derartige Encyklopädie herauszugeben, trat der Vortragende mit warmer Anerkennung für die dankenswerte Anregung und mit Energie ein: im einzelnen freilich konnte er sich mit einer ganzen Reihe der gemachten Vorschläge nicht einverstanden erklären.

Der Vortragende hatte, um eine für ein solch allgemeines Werk von so weittragender Bedeutung, wie das eine Encyklopädie der Elementar-Mathematik sein wird, notwendige objektive Grundlage zu schaffen, Gutachten eingeholt, deren ihm zur Beurteilung der einschlägigen Fragen 23 eingesendet waren. Damit war ein reiches Material geschaffen, um die Ausführbarkeit des geplanten Werkes diskutieren zu können. Einig waren sämtliche Gutachter mit dem Vortragenden darin, dass Holzmüllers Vorschlag freudig und dankbar zu begrüssen sei: fast ebenso einig aber war man in der Auffassung, dass die Ausführung des Werkes wesentlich abweichen müsse von der vorgeschlagenen. Im besonderen sind es die Fragen, ob systematische, ob methodische Darstellung und über die Grenzen der Elementar-Mathematik, die zur Erörterung gelangen. Was zunächst die letztere Frage angeht, so äussert sich Holzmüller dazu in einem Artikel mit folgenden Worten: „Meiner Ansicht nach gehört in das Gebiet der Elementar-Mathematik alles, was ohne Hilfe der höheren Analysis, also ohne Differential- und Integralrechnung behandelt werden kann.“ Gerade hierin aber weicht der Vortragende vollständig von Holzmüllers Ansicht ab: und die Mehrzahl der Gutachten stehen auf dem gleichen Standpunkt. Auch in der anderen Frage, ob systematische oder methodische Darstellung zu wählen sei, wird Holzmüllers Ansicht, dass die methodische Darstellung allein berechtigt sei, nicht geteilt.

Ausser diesen beiden Hauptfragen berührt der Vortragende noch folgende:

1. In welchem Verhältnis soll die geplante Encyklopädie zu ähnlichen Werken stehen? (Baltzers Elemente; Sammlung Schubert; H. Webers Elementar-Mathematik; Webers Katechismen).
2. Welchen Titel soll das Werk haben? (Encyklopädie der Elementar-Mathematik; E. d. Schul-Mathematik; propädeutische Encyklopädie; Elemente).

Handelte es sich hierbei um innere theoretische Fragen, so behandelte der zweite Teil des Vortrages innere praktische Fragen: zunächst, wie ist der Plan zu verwirklichen, wobei die Schwierigkeit geeignete Mitarbeiter zu finden, die einheitliche Gestaltung u. a. betont wurde; schliesslich: wie soll sich der Verein zu dem geplanten Werke stellen?

An den einleitenden Vortrag schloss sich eine lebhafte Diskussion, in der die Herren Holzmüller, Pietzker (Nordhausen), Direktor Böttcher (Leipzig), Direktor Bode (Frankfurt a. M.), Provinzial-Schulrat Kaiser (Cassel), Prof. Felix Klein (Göttingen) und der Referent Schotten das Wort ergriffen. Insbesondere erwiderte dem Referenten zunächst:

Holzmüller (Hagen i. W.): M. H. Ich bin nur auf eine Stunde von Hagen herübergekommen, um zu erfahren, wie es einem zu Mute ist, der totgeschlagen werden soll. Wollte ich den Advocatus Diaboli spielen, so brauchte ich nur den Brief zu verlesen, den Herr Dr. Schotten an mich schrieb, als er meinen Vorschlag erhalten hatte. Mit Begeisterung sprach er von der herrlichen Aufgabe, die ich der Zeitschrift gestellt hätte. — Und heute hören Sie sein ganz entgegengesetztes Urteil! — Das erste Mal sprach der unbefangene Herr Dr. Schotten, das zweite Mal der befangene. Gegen meinen Rat und gegen meine Bitte haben Verlag und Redakteur den Vorschlag gewissen Hochschulprofessoren zugesandt, unter denen sich grundsätzliche Gegner einer Ausdehnung der Elementarmathematik befinden. Was ich von Befürchtungen ausgesprochen hatte, ist reichlich eingetroffen. Herr Schotten hüllte sich in Schweigen. Deshalb schrieb ich dem Verlage, es wäre das beste, meinen Antrag zurückzuziehen. Darauf habe ich noch keine Antwort erhalten. Ich ziehe also jetzt den Antrag ausdrücklich zurück.

Nun habe ich keinen Anlass mehr, Sie dafür zu begeistern. Gestatten Sie mir nur noch eine Bemerkung.

Ich habe auf der Universität vergeblich nach einem Vortrage über Elementarmathematik gesucht. Nur Hochschulmathematik wurde unterrichtet, obwohl wir Zuhörer fast sämtlich zur Schule übergingen. Das war nicht in der Ordnung.

Ich griff nach Elementarbüchern, die sich systematische nannten. Ich fand aber kein System der Elementarmathematik vor. In den Vorreden wurde gesprochen von der ununterbrochenen Kette von Schlüssen, die geboten werden sollte. Das System der mathematischen Wahrheiten ist aber doch keine Kette, sondern ein ganzes Netz von Ketten mit zahlreichen Knotenpunkten, einem weitverzweigten Eisenbahnnetz vergleichbar.

Ein solches System habe ich noch nirgends bearbeitet vorgefunden.

Denken Sie an die vielfachen Wege, die zum Satze des Pythagoras hinführen. Ebenso viele führen von ihm weg. Wer will dabei von einer blossen Kette von Schlüssen sprechen.

Auch Baltzer leugnet die Existenz einer Systematik der Elementarmathematik. Von den Eulerschen Polyedern, sagte er, hätten wir nur schwache Anfänge oder Versuche einer Systematik. Bin ich also der Einzige, der das

Vorhandensein eines Systems der Elementarmathematik leugnet? Schaffen Sie erst ein solches!

Ferner war ich von jeher ein Gegner der übertriebenen Arithmetisierung der Mathematik. Mit Prof. Schell sage ich: „Geometrica geometrice!"

Wer nur analytisch verfahren will, ertötet das räumliche Anschauungsvermögen. Und gerade dieses sollte die Schule ausbilden.

Vielfach dünkt sich der Analytiker als höher stehend und vornehmer dem blossen Geometer gegenüber. Ueber Steiner wurde mir von einem verehrten und hoch dastehenden Professor arithmetischer Richtung in einer Vorlesung gesagt, „Steiner habe einige Gewandtheit im Lösen geometrischer Aufgaben gehabt!" Und wie gewaltig steht Steiner da!!

Steiner selbst hat gegen die Selbstüberhebung der Arithmetiker ankämpfen müssen. Lesen Sie doch die Vorrede zu seiner „systematischen Entwickelung der Abhängigkeit . ." Dort spricht er scharf darüber und tadelt es, dass der Arithmetiker sich über den Geometer, der doch sein Wegweiser sei, überhebt. In den Vorlesungen aber äusserte er sich weit drastischer. Er verspottete die Koordinaten als Zaunpfähle, bei ihm aber hiesse es, die Augen aufsperren usw. Ging Steiner auch zu weit, jedenfalls hatte er gerechte Gründe für sein Auftreten.

Verlag und Redakteur haben dafür gesorgt, dass mein Antrag schon vor dem heutigen Vortrage vernichtet wurde. Ich könnte vieles für ihn sagen, will Sie aber damit verschonen und erkläre nochmals: „Ich ziehe meinen Antrag zurück." —

Schotten verwahrte sich gegen die Meinung des Vorredners, dass er diesen habe persönlich angreifen wollen. Dem Grundgedanken des Holzmüllerschen Vortrags stehe er, wie auch aus seinem Referat hervorgehe, noch jetzt durchaus sympathisch gegenüber, in den Einzelheiten sei er allerdings bei längerer Beschäftigung mit dem Thema vielfach zu einer von seiner früheren Ansicht abweichenden Meinung gekommen, das sei ganz natürlich und richte sich ebenfalls nicht gegen den Urheber des Grundgedankens. Dessen Ansichten glaube er im wesentlichen richtig wiedergegeben zu haben; dass er an die Einzelheiten des Referats über Herrn Holzmüllers Vorschlag zugleich seine kritischen Bemerkungen geknüpft habe, sei ihm als durch die Natur der Sache geboten erschienen. Ebenso habe er geglaubt, nur durchaus sachgemäss zu handeln, wenn er die Holzmüllerschen Vorschläge einer Reihe von Fachgenossen, teils Hochschuldozenten, teils Lehrern an Gymnasien und Realanstalten unterbreitet habe, die allgemein als besonders urteilsfähig gelten, diese hätten übrigens durchaus sachlich und ohne irgend wie eine Gegnerschaft gegen Holzmüller zu verraten, ihre Meinung ausgesprochen und motiviert. Wenn Herr Holzmüller jetzt den von ihm ausgegangenen Vorschlag, durch den er sich ein unzweifelhaftes Verdienst erworben habe, zurückziehe, so bedauere er dieses, noch bedauerlicher sei es ihm, wenn der so glückliche Gedanke infolgedessen nicht zur Verwirklichung kommen sollte; um diese unerwünschte Wirkung zu verhindern, nehme er den Antrag Holzmüller seinerseits auf und halte an ihm fest.

Pietzker (Nordhausen): Mir scheint, dass man bei der Erörterung des von Herrn Holzmüller angeregten Planes, dem auch ich durchaus sympathisch gegenüberstehe, sich hüten muss, zweierlei zu vermischen, nämlich Schulmathematik und Elementarmathematik. Ich bin ganz mit Herrn Holzmüller darin einverstanden, dass das zwei sich nicht deckende Begriffe sind. Aber die Rolle, die bei der Erörterung der Sache die Frage spielt, ob die Infinitesimal-Analysis Gegenstand des Schulunterrichts sein darf oder sein soll*), zeigt mir deutlich, wie gross die Gefahr ist, jene beiden Begriffe mit einander zu vermischen. Ich bin der Ansicht, dass eventuell auch der Gymnasialunterricht (damit meine ich den Unterricht an den höheren Vollanstalten überhaupt) auch in den höheren Unterricht hinübergreifen darf und dass dem Lehrer eine gewisse Freiheit nach dieser Richtung hin gewahrt bleiben muss — es kann sich mancher Lehrer manches erlauben, woran ein anderer sich besser nicht wagen sollte und es kann auch derselbe Lehrer dem einen Schülerjahrgang Dinge zumuten, an die er bei einem anderen Jahrgang gar nicht denken wird. Also ich möchte in dieser Hinsicht eine gewisse Freiheit walten lassen und auch aus diesem Grunde davor warnen, dass das Werk, dessen Schaffung angeregt zu haben Herrn Holzmüllers entschiedenes Verdienst ist, den Charakter eines Normallehrbuchs erhält, in dem das Mass des vom Lehrer im Unterricht zu behandelnden Stoffes bestimmt wird.

*) Der Redner nahm dabei Anlass, einer an ihn ergangenen Anregung folgend, auf das Programm des Realgymnasiums zu Coblenz 1901 hinzuweisen, in dem sich eine Abhandlung des inzwischen verstorbenen Direktors Dr. R. Most „Der mathematische Unterrichtsstoff und das mathematische Bildungsgebiet in den oberen Klassen des Realgymnasiums und der Oberrealschule" findet. Dieser Aufsatz bringt eine eingehende, aus der Praxis des Verfassers hervorgegangene Darstellung der Behandlung von Differential- und Integralrechnung im Unterricht der höheren Schulen, wird infolgedessen für viele Fachgenossen von hohem Interesse sein. Es sind noch etwa 100 Exemplare davon vorhanden, die gegen Einsendung von 30 Pf. Porto und 10 Pfg. Verpackungskosten für das Exemplar sonst kostenfrei vom Kastellan Weidemann an der genannten Anstalt zu beziehen sind.

Es soll m. E. vielmehr ein Nachschlagebuch, eine Art von Lexikon sein, in dem der Lehrer eine möglichst vollständige Uebersicht des gesamten unter den Begriff der Elementarmathematik fallenden Materials findet, damit er dann daraus nach seinem freien Ermessen das auswählen kann, was ihm innerhalb der durch die Unterrichtspläne gezogenen Grenzen für seinen Unterricht verwendbar erscheint. Eine solche Uebersicht muss natürlich vor allem der Forderung genügen, den Lehrer sich leicht darin zurecht finden zu lassen, daraus folgere ich, dass sie nur eine systematische, den Stoff nach den ihm selbst liegenden Gesichtspunkten gruppierende Anordnung, nicht eine methodische, den Bedürfnissen des dem einzelnen Lehrer zusagenden Unterrichtsganges angepasste Anordnung aufweisen darf. Ich bin in dieser Hinsicht ganz in Uebereinstimmung mit Herrn Holzmüller, mit dem zusammen ich nun auch die Frage aufwerfe, was denn eigentlich unter Elementarmathematik zu verstehen sei. Das ist nun ja die eigentliche Schwierigkeit bei dem ganzen Plane, denn die Beantwortung dieser Frage ist eine nichts weniger als einfache Sache. Ich kann auch Herrn Holzmüller nicht zustimmen, wenn dieser für elementar alles erklärt, was der Zuhilfenahme der Infinitesimal-Analysis nicht bedürfe, denn bei solcher Stoffbegrenzung würde z. B. die höhere konstruktive Geometrie und die Zahlentheorie unter den Begriff der Elementar-Mathematik fallen, wohin doch höchstens einige ganz einfache Kapitel aus jenen Gebieten gehören. Ebensowenig kann ich mich mit der Definition befreunden, die die Mathematik des Alterthums mit dem Begriffe der Elementar-Mathematik identifizieren will. Das wäre im Wesentlichen eine Einteilung in höhere und Elementar-Mathematik nach dem Stoff, da stehe ich indessen ebenfalls der Auffassung des Herrn Holzmüller nahe, der diese Einteilung mehr nach der Art der Behandlung des Stoffes getroffen wissen möchte — natürlich ohne zu verkennen, dass die Natur des Stoffes dabei doch mitspricht.

Als ich mich, auf die auch mir zugegangene Aufforderung des Herrn Referenten längere Zeit hindurch mit dieser Frage beschäftigte, fand ich einen gewissen Fingerzeig für die Entscheidung, zu der ich schliesslich kam, in dem Titel der grossen Encyklopädie, der die geplante Encyklopädie der Elementar-Mathematik ja doch als eine Ergänzung zur Seite treten soll. Diese grosse Encyklopädie, die bedeutsame Schöpfung der deutschen Mathematiker-Vereinigung trägt bekanntlich den Titel: „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“. Wenn nun neben dieser Encyklopädie noch eine sie ergänzende Encyklopädie der Elementar-Mathematik für nötig erachtet wird, so scheint mir klar, dass die Elementar-Mathematik alle die Zweige der Mathematik umfasst, die in dem Gebiet der eigentlichen mathematischen Wissenschaft nicht unterzubringen sind. Und wenn ich nun in dieser Richtung weitere Folgerungen ziehend frage, was ist denn das charakteristische Merkmal der eigentlichen Wissenschaft, dieses Wort natürlich nach seinem strengsten und höchsten Begriffe aufgefasst, so finde ich dieses Merkmal in der strengen, alle Einzelheiten aus einem Grundprinzip ableitenden Systematik, und umgekehrt erscheint mir der Verzicht auf diese Systematik als das Kennzeichen des Elementaren. Hieraus erklärt es sich auch, wie man hat dazu kommen können, die Mathematik der Alten als gleichbedeutend mit der Elementar-Mathematik anzusehen, denn allerdings trägt diese vorzugsweise den elementaren, bis zur völligen wissenschaftlichen Systematik noch nicht durchgedrungenen Charakter und sie trägt ihn ganz naturgemäss, weil die Gewinnung des wissenschaftlichen Systems erst die Frucht einer langjährigen Entwickelung sein konnte. Ebenso hängt mit diesem Charakter der Elementar-Mathematik, wie ich ihn eben skizzierte, der Umstand zusammen, dass der im Gymnasial-Unterricht zu behandelnde Stoff immer grösstenteils dem Gebiete der Elementar-Mathematik entnommen sein wird; denn das im strengen Sinne wissenschaftliche System stellt an das Verständnis höhere Anforderungen, es hat nur für den Wert und Bedeutung, der sich zu einer gewissen Herrschaft darüber durcharbeitet, das ist natürlich nicht jedermanns Sache.

Wenn ich nun das Fehlen dieser wissenschaftlichen Systematik für das Kennzeichen der Elementar-Mathematik halte, so stelle ich mich dadurch nicht in Widerspruch mit der äusserlichen Systematik, die ich für die Einrichtung der geplanten Encyklopädie verlangte. Diese äusserliche Systematik wird es z. B. vielleicht mit sich bringen, dass alle die elementaren Grenzübergangsmethoden, durch welche man gewisse Probleme, wie z. B. die Kreisberechnung u. dergl. bewältigt, in einem Abschnitte vereinigt werden, ohne dass man indessen alle solche Methoden als Ausfluss eines allgemeinen, ihnen zu Grunde liegenden Prinzips, wie es die Grundlage der Infinitesimal-Analysis bildet, hinstellt. Das scheint mir ein sehr bezeichnendes Beispiel für den Unterschied der beiden Behandlungsarten, der elementaren und der wissenschaftlichen zu sein.

Natürlich giebt es auch bei dieser Stoffabgrenzung noch viele Schwierigkeiten zu überwinden, das würde dann Aufgabe der Herren sein, die sich an die Verwirklichung des angeregten Planes machen. Da möchte ich in meiner Eigenschaft als gegenwärtiger Vereinsvorsitzender auch noch über die Art, in der diese Verwirklichung des Planes auf die Unterstützung des Vereines rechnen darf, mir eine Bemerkung erlauben. Allerdings kann ich dabei nur meine persönliche Meinung äussern, denn der Vereins-Vorstand hat noch keinen Anlass gehabt, zu dieser Frage Stellung zu nehmen. Meine persönliche Ansicht aber geht dahin, dass der Verein als solcher nicht die Instanz sein kann, die diese Verwirklichung in die Hand nimmt. Der Verein ist ja nicht nur ein Verein von Mathematikern, er bezweckt vielmehr die Förderung des gesamten exakt-wissenschaftlichen Unterrichts. Demgemäss wird er sich darauf beschränken müssen, eine Art Vermittlerrolle zu übernehmen, indem er den Herren, die sich die Verfolgung der von Herrn Holzmüller angeregten Ideen zur Aufgabe setzen, seine Unterstützung leiht, die ja mannigfacher Art sein kann. Aber die Hauptarbeit wird Sache eines von den Freunden des Planes zu wählenden freien Ausschusses sein müssen.

Böttcher (Leipzig) begrüsst die Holzmüllersche Grundidee mit dankbarer Freude. Die Frage nach dem Namen des Werks*) ist nicht das dringlichste. Mehr schon kommt darauf an, bis wie weit die Grenzen des Unternehmens auszudehnen seien. Den Infinitesimalgedanken auszuschliessen, der schon in der Archimedischen Exhaustion klar hervortritt, ist schlechthin unmöglich. Dagegen dürfte die eigentliche Differentialrechnung mit ihrer charakteristischen Bezeichnung im allgemeinen nicht hereingehören. Hier liegt, sachlich wie historisch betrachtet, die natürliche Grenze der Elementar-Mathematik; denn in der Mathematik (z. B. schon beim Untersetzen dekadischer Zahlen) macht die Anordnung und die Bezeichnung, im Gegensatze zu anderen Gebieten, ein gutes Stück der Sache selber aus. Sinnreiche Elementarisierungen von Aufgaben, die ihrem Wesen nach infinitesimal sind, werden willkommen sein gleich einem schmackhaften Dessert. Das wichtigste aber ist die Frage, welchen Hauptinhalt das geplante Werk bekommen soll.

Hier ist's nun nicht genug, mit den Lehrsätzen und je einem oder einigen Beweisen, sondern man braucht eine klare Uebersicht über sämmtliche Methoden, und vielleicht auch eine gesichtete Sammlung des Aufgaben-Stoffs. Was den letztern betrifft, so ist es ein starkes Bedürfnis für den Lehrer, in der Mitte zwischen dem dürftigen „Rohstoff" der Aufgaben einerseits, und dem Schwall der fix und fertigen Einzelexempel andererseits, gewissermassen die „Halbprodukte" knapp gesammelt zu besitzen, woraus er sich dann seine eigenen Aufgaben rasch selber bilden kann. Doch darf auch dieses Vorhaben einstweilen noch vertagt werden.

Das Nötigste, was der Lehrer in der Praxis braucht wie das liebe tägliche Brot, ist die genannte Methoden-Uebersicht. Z. B. giebts für sin $(\alpha+\beta)$ über ein Dutzend verschiedene Herleitungen, aber entfernt nicht ebensoviele verschiedene Grundgedanken. Oder wie mannigfach kann man die Kegelschnitte definieren! Hier gilt es nun die Grundgedanken reinlich herauszuschälen, sie bis in ihre Konsequenzen durchzuverfolgen, und die Uebergänge von einem zum andern aufzuweisen. Denn die mathematischen Gedankengänge gleichen durchaus nicht einer einzigen Strasse, etwa der Sibirischen Eisenbahn, sondern dem dichten Eisenbahnnetze hier in unserem rheinisch-westfälischen Kohlenbecken; auch die bedeutsamen Knotenpunkte fehlen nicht. Dem muss das willkommene Lehrerlehrbuch Rechnung tragen: es soll ein nie versagendes Reisehandbuch sein. Von den Reisebeschreibungen giebt es drei Arten: Die des bahnbrechenden Forschungsreisenden spricht natürlich nur von seiner einzigen Route. Wird das Land bekannter, und kommen die Touristen, so giebt es zweitens einen Bädeker, der etliche bequeme Wege weist. Will aber endlich ein Wanderer ernsthaft und allseitig vertraut werden mit einem Gebiete, etwa einem Gebirgsland, so braucht er einen gedruckten Führer, der ihm jedes Thal, jeden Kamm und jeden bekannten Jochübergang, ganz kurz über den Kamm charakterisiert aufzählt, im übrigen aber ihm alle Freiheit der Wahl lässt. Solch ein unschätzbarer πολύτροπος möge unser Lehrerlehrbuch werden!

Bode (Frankfurt a. M.) führt aus, die Befürchtung, dass die Debatte über diesen Gegenstand sich in das Ungemessene ausdehnen würde, scheine sich zu bewahrheiten. Es wäre daher wohl in erster Linie die Frage zu entscheiden, ob überhaupt die Herausgabe einer solchen Encyklopädie — der Name sei für ihn vorläufig ohne Bedeutung — ein Bedürfnis ist. Er glaube, dass dies in der That der Fall sei. Die mathematische Literatur sei in den letzten Jahren allseitig so bereichert, dass der Einzelne nicht mehr imstande ist, die neu erschienenen Schulbücher gründlich zu prüfen, bzw. alle schätzenswerten methodischen Anregungen zu verfolgen. Das geplante Werk müsse daher u. a. einen vollständigen literarischen Nachweis über die Leistungen auf den einzelnen Gebieten der elementaren Mathematik geben, damit der Lehrer nach Bedürfnis das ihm gut scheinende auswählen könne. Auf keinen Fall sei ein jedermann nach Methode und Inhalt verpflichtendes Lehrbuch zu erstreben. Der Individualität des Lehrers müsse beim Unterricht stets Rechnung getragen werden.

*) Ich würde einfach sagen: „Vergleichende Elementar-Mathematik" (Böttcher).

Die Aufnahme der Elemente der Differentialrechnung bzw. Integralrechnung scheine ihm notwendig. Dagegen stehe er der Frage, ob zur Zeit die Einführung dieses Lehrgegenstandes für die Schule zu fordern sei, ablehnend gegenüber. Es käme hierbei doch nur das Realgymnasium und vor allem die Oberrealschule inbetracht. Diesen Schulen müsse man aber jetzt unbedingt einige Jahre Ruhe lassen. Die Verleihung der Berechtigung zum akademischen Studium habe diesen Anstalten auch die ernste Pflicht auferlegt, den Unterricht in jeder Hinsicht zu vertiefen. Besonders die Oberrealschule habe zu zeigen, dass ihre Abiturienten denen der Gymnasien in der Auffassung und Bearbeitung von Problemen aus den ethischen Fächern nicht nachstehen. Eine intensive Arbeit des Lehrers und Schülers sei erforderlich, da diesen Schulen noch nicht ein durch langjährige Erfahrung erprobter und bewährter Unterrichtsplan zu Gebote stehe. Mit Rücksicht auf die Anforderungen in den übrigen Fächern dürfe daher der Mathematiker nicht mehr darbieten, als die Lehrpläne verlangen. Das Gebiet sei aber gross genug und Freiheit hinreichend gelassen, um in diesem Rahmen Tüchtiges zu leisten.

Einen festen Plan für das Werk schon jetzt aufzustellen, sei durchaus verfrüht. Er stimme den Anregungen und Ausführungen des Herrn Professor Pietzker durchaus zu. Wenn dieselben im Druck vorlägen, könnten sich die Fachgenossen in den Zeitschriften darüber äussern, und so ein wertvolles Material gewonnen werden.

Provinzial-Schulrat Kaiser (Cassel) erklärt sich gleichfalls dafür, dass die Elemente der Differential- und Integral-Rechnung in den Unterricht aufzunehmen seien, eine sachgemässe Behandlung der Aufgaben über Maximum und Minimum sei, wie dies seinerzeit auf der Wiesbadener Versammlung des Vereins eingehend dargelegt worden sei, sonst nicht möglich. Herr Holzmüller besitze ja eine wahrhaft staunenswerte Gewandtheit in der elementaren Behandlung von Problemen, zu deren Lösung man sonst die Methoden der Infinitesimal-Analysis heranziehe, aber das mache ihm auch so leicht Niemand nach, da wohl kein zweiter Mathematiker die Elementar-Mathematik in gleich virtuoser Weise beherrsche wie er; der Mehrzahl werde die Infinitesimalbehandlung leichter fallen, darauf werde die Encyklopädie Rücksicht nehmen müssen.

F. Klein (Göttingen): Ich bin eigentlich nicht hierher gekommen, um mich aktiv an der Debatte zu beteiligen, sondern um zu hören und zu lernen. Als Hochschullehrer habe ich ein natürliches Interesse, über Elementarmathematik und ihren Unterricht im allgemeinen orientiert zu sein; ich kann mich aber nicht wohl in die Besprechung der Einzelheiten mengen; die verstehen Sie viel besser als ich. In der That will ich hier auch nur solche Bemerkungen machen, die sich aus meiner besonderen Stellung zum Gegenstand ergeben.

Es ist vorhin geklagt worden, dass die Universitätslehrer die Fragen der Elementarmathematik und überhaupt die Interessen des mathematischen Lehrbuchs zu wenig in den Kreis ihrer Vorlesungen ziehen. Ich halte diese Klagen im allgemeinen für berechtigt, wünsche aber doch hervorzuheben, dass in den letzten 10 oder 15 Jahren eine Besserung eingetreten ist und dass diese Besserung zweifellos noch weiter fortschreiten wird. Es ist davon bereits die Rede gewesen, dass Prof. Heinrich Weber, Strassburg, seinerseits damit beschäftigt ist, eine „Encyklopädie der Elementarmathematik" zu schreiben. Ich füge hinzu, dass er bereits seit Jahren in seinen aufeinanderfolgenden Stellungen in Marburg, Göttingen und Strassburg unter eben diesem Titel eine für höhere Semester bestimmte allgemein-orientierende Vorlesung gehalten hat, in der er insbesondere bemüht war, die Grundlagen der verschiedenen inbetracht kommenden Gebiete möglichst streng herauszuarbeiten. Dies ist nur ein Beispiel; ich will aber Ihre Zeit für weitere Ausführungen nicht in Anspruch nehmen und nur die Bitte aussprechen, dass in demselben Masse, wie die Universität der Schule wieder ihr Interesse zuwendet, uns auch Ihr Vertrauen nicht vorenthalten bleiben möchte.

Es ist sodann die Frage gestreift worden, ob das Unternehmen einer umfassenden Darstellung der Elementarmathematik, wie es hier zur Debatte steht, nicht als eine Konkurrenz zu der „grossen" Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften aufgefasst werden könne, die von der mathematischen Vereinigung, beziehungsweise den Akademieen in Göttingen, München und Wien in die Hand genommen wurde. Ich glaube, dass dies in keiner Weise der Fall ist, sondern dass die Unternehmer der grossen Encyklopädie alle Ursache haben, über Ihren Plan sehr erfreut zu sein. In der That: je tiefer wir in unsere Arbeit eindringen, desto mehr empfinden wir neben der übergrossen Ausdehnung unseres Arbeitsprogramms die Reibungswiderstände, die sich seiner Bewältigung entgegenstellen; da kann es nur sehr erwünscht sein, dass von einem neuen Kreise mit frischen Kräften eine Parallelaktion in Gang gesetzt wird. Besonders wertvoll wird es mir sein, wenn es Ihnen gelingt, das von den meisten Rednern betonte Ziel zu erreichen, nämlich nicht nur die Einzelgebiete nach ihrem wesentlichen Inhalte zu erschöpfen, sondern auch die gegenseitigen Beziehungen, die Netzverbindungen, klar herauszuarbeiten. Welche Darstellungsweise die geeignetste ist, dürfte sich nach meinen Erfahrungen erst nach längerer Dauer der Vorarbeit entscheiden. Ich möchte Sie von vornherein bitten, Ihren Plan nicht zu eng anzulegen und insbesondere die ausländischen Arbeiten mit zu berücksichtigen. Die Literatur der Elementarmathematik erscheint ja vielfach national begrenzt, was insofern berechtigt ist, als die praktischen Fragen der Schulorganisation überall hineinspielen. Aber schliesslich sind es doch dieselben wissenschaftlichen Probleme, welche dabei in allen Kulturstaaten: in England, Frankreich, Italien usw. in ähnlicher Weise verfolgt werden, wie in Deutschland; es ist mir kein Zweifel, dass durch den Vergleich der verschiedenen nationalen Literaturen gerade nach wissenschaftlicher Seite ausserordentlich viel Anregung gewonnen werden kann.

Ueber die sonst berührten Fragen: die Beziehung von Raumanschauung und analytischer Behandlung sowie die Einbeziehung der Differential- und Integralrechnung in den Unterricht an den höheren Realanstalten hätte ich schliesslich auch noch manches zu sagen, aber es würde vermutlich zu sehr über die heutige Tagesordnung hinausführen; vielleicht dass der Vorstand die Frage der Differential- und Integralrechnung auf die Tagesordnung des nächsten oder des zweitfolgenden Jahres setzt.

In seinem Schlusswort wiederholte der Berichterstatter Schotten, dass ihm nichts ferner liege, als persönliche Gegnerschaft gegen Herrn Holzmüller, für den er aufrichtige Hochschätzung hege. Er habe seinem Bewusstsein nach die Sache durchaus nur sachlich behandelt, bitte Herrn H. davon überzeugt zu sein und auch seinerseits jedes persönliche Moment aus dem rein sachlichen Streite auszuscheiden. Zum Zeichen seiner Wertschätzung und der Anerkennung der Verdienste des Herrn H. um die hier verhandelte Sache, bot er diesem die Hand, die dieser annahm.

Eine bestimmte Beschlussfassung erfolgte nicht.

Neue Apparate und Versuchsanordnungen.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf*)

von

E. Grimschl (Hamburg).

I.

Im verflossenen Winter habe ich im Auftrage der Oberschulbehörde in Hamburg eine Reihe von Vorlesungen gehalten mit dem Thema: „Anleitung zu physikalischen Demonstrationen mit einfachen Hilfsmitteln". Gelegentlich dieser Vorlesungen, deren Zuhörerschaft sich in erster Linie aus Lehrern und Lehrerinnen derjenigen Hamburger Schulen zusammensetzte, die darauf angewiesen sind, den physikalischen Unterricht mit einfachen Hilfsmitteln zu erteilen, also der Volksschulen, der Privatschulen und der höheren Töchterschulen sind eine Reihe von neuen Apparaten und Versuchsanordnungen entstanden, die auch, glaube ich, für weitere Fachkreise ein gewisses Interesse bieten können, weshalb ich die Gelegenheit unserer diesjährigen Pfingstversammlung gern benutze, um Ihnen einige der Apparate vorzuführen.

Die mir zur Verfügung stehende Zeit gebietet eine beschränkte Auswahl der Apparate, doch habe ich die Absicht, andere aus diesem Vorlesungskursus herrührende Versuchsanordnungen in Poske's Zeitschrift der Oeffentlichkeit zu übergeben. Die Originale der vorzuführenden Apparate sind alle von mir selbst ohne Mithilfe eines Mechanikers oder Handwerkers hergestellt. Die Ihnen hier vorzuführenden Exemplare sind von der bekannten Hamburger mechanischen Werkstatt von A. Krüss genau nach den Originalen angefertigt. Sie unterscheiden sich von den Originalen nur durch präzisere Arbeit und gefälligeres und schöneres Aussehen.

Diese Entstehungsgeschichte begründet und erklärt die Einfachheit der Apparate, und gerade dieses erachte ich als einen Vorzug gegenüber anderen, da man den Schülern um so verständlicher im Vortrag und im Experiment ist, je einfacher man beides gestaltet.

Bemerken will ich noch, dass ich in den oben erwähnten Vorlesungen, die die Gebiete der Magnetik und Elektrik in 22 Doppelstunden behandelten, fast nur selbstverfertigte Apparate benutzt habe.

Als ersten Gegenstand zeige ich Ihnen hier eine „Stab-Elektrisiermaschine". Dieselbe soll die Wirkungsweise der Teile einer Reibungs-Elektrisiermaschine im einzelnen demonstrieren. Sie soll insbesondere dazu dienen, die Elektrisierung des Reibzeuges in einfacher Weise vorzuführen.

Auf einem Grundbrette von 10 × 25 cm Grösse (Fig. 1) sind in einem Abstande von 12 cm zwei Hart-

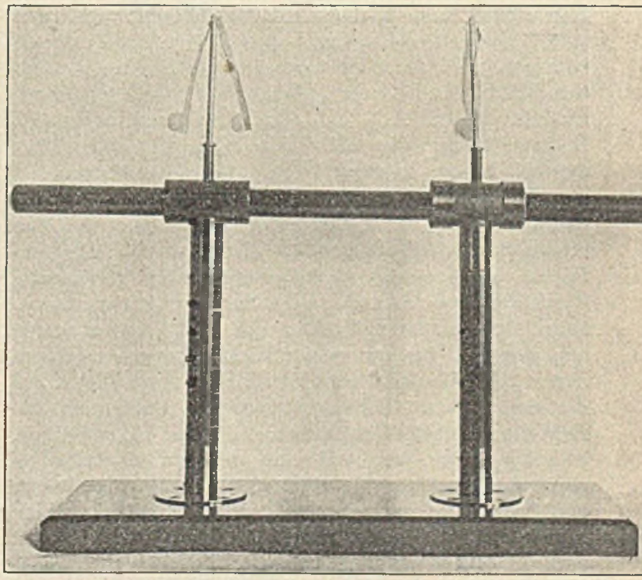

Fig. 1.

gummisäulen vertikal aufgestellt. Auf jeder dieser Säulen ist an ihrem oberen Ende mittels einer Hülse ein horizontales Messingrohr von 2 cm Weite und 4 cm Länge befestigt, auf das oben ein kurzes, enges, vertikal stehendes Röhrchen aufgelötet ist, in welches ein kleines Papier-Elektroskop, ein Konduktor, ein Haken zur Ab-

---

*) S. Unt.-Bl., VIII, 3, S. 65.

leitung der Elektrizität oder sonstige kleine Hilfsapparate, wie z. B. ein elektrischer Schirm hineingesteckt werden können.

Die Hülse, mittels der die horizontalen Messingröhren befestigt sind, sind nur mit Reibung auf den Hartgummisäulen aufgesteckt und daher können die Rohre leicht abgenommen und gegen andere ähnliche Rohre ausgewechselt werden. Sie sehen hier drei solcher Messingrohre. Das erste ist im Innern mit Katzenfell ausgefüttert. Die aus dem Rohre herausragenden Enden der Fellfütterung sind durch zwei über das Rohr geschobene Messingrohre befestigt. Hierdurch wird die Fellfütterung ohne Klebstoff gegen Verschiebungen einfach und sicher festgehalten. Dieses zweite Messingrohr ist in genau derselben Weise mit Schafleder ausgefüttert, das mit Amalgam tüchtig eingerieben ist. Das dritte Messingrohr enthält im Innern einige Blättchen aus Rauschgold, die mit einem Tropfen Zinn so hineingelötet sind, dass ihre scharfen Kanten nach der Achse des Rohres gerichtet sind.

Die beiden ersten Rohre dienen als Reibzeuge, das dritte als Saugvorrichtung der Elektrisiermaschine.

Zu dem Apparat gehört ausserdem ein Hartgummi- und ein Glasstab von ca. 12 cm Dicke und 50 cm Länge. Ich stecke jetzt das Fellreibzeug mit dem Elektroskop auf eine der Säulen und schiebe den Hartgummistab in das Innere hinein. Sie sehen, dass sofort die Blättchen des Elektroskops durch ihre Divergenz eine starke Elektrisierung anzeigen. Die Divergenz bleibt auch nach dem Herausziehen des Hartgummistabes bestehen. Dieser ist selbst ebenfalls elektrisch geworden, und zwar zieht er die Blättchen des Elektroskops an. Hierdurch ist die entgegengesetzte Elektrizität von Reiber und Reibzeug sofort nachgewiesen. Auf die zweite Säule stecke ich jetzt das Reibzeug mit dem amalgamierten Schafleder und stecke den Glasstab hinein. Die Ausführung des vorigen Versuchs überzeugt uns, dass auch hier Reiber und Reibzeug entgegengesetzt elektrisch sind. Endlich sehen wir, dass der Glasstab das noch vom ersten Versuche her divergierende Elektroskop auf dem Fellreibzeug abstösst; ebenso stösst der Hartgummistab das Elektroskop auf dem Amalgamreibzeug ab. Es folgt hieraus die Gleichheit bezw. Verschiedenheit der bei beiden Versuchen erzeugten Elektrizitäten.

Nun ersetze ich das Amalgam-Reibzeug durch die Saugvorrichtung und richte die beiden jetzt auf den Säulen stehenden Rohre so, dass ihre Achsen zusammenfallen, dass ich also den Hartgummistab gleichzeitig durch das Reibzeug und die Saugvorrichtung stecken kann. Ich führe den Versuch aus, und Sie beobachten eine starke Divergenz beider Elektroskope. Ausserdem ziehen die Blättchen des einen Elektroskops diejenigen des anderen an. Der herausgezogene Hartgummistab zieht das eine Blättchenpaar an und stösst das andere ab.

Wir haben hier jetzt eine vollständige Reibungselektrisiermaschine mit Reiber, Reibzeug, Konduktor und Saugvorrichtung unmittelbar aufgebaut aus ihren Elementen. In genau derselben Weise lässt sich mit dem Glasstabe und dem Amalgam-Reibzeug eine zweite Maschine aufbauen. Die Scheiben - Elektrisiermaschine unterscheidet sich hiervon nur durch die Form des Reibers.

Mittels dieser kleinen Maschine kann ich alle Versuche ausführen, die man sonst mit einer kleinen Scheibenmaschine ausführt, wenn man auf Kraftwirkungen, wie Durchbohren von dicken Glasplatten und ähnliches kein Gewicht legt.

Stecke ich diese beiden rechtwinkelig gebogenen Drähte in die oberen Hülsen, in denen die Elektroskope steckten, so kann man im Dunkelen bei sorgfältiger Beobachtung kleine Fünkchen zwischen ihren Enden überspringen sehen. Diese kleine Leidener Flasche kann ich durch ca. 50maliges Hin- und Herbewegen des Hartgummistabes so stark laden, dass man beim Entladen durch den Körper einen empfindlichen Schlag verspürt, oder dass beim Entladen mittels Entladers ein kräftiger Funke mit lautem Knall überspringt. Ein elektrisches Glockenspiel arbeitet vorzüglich, mit der Maschine betrieben. Dieser kleine elektrische Schirm breitet sich beim Hin- und Herschieben des Hartgummistabes völlig auseinander.

Endlich hebe ich noch hervor, dass ich die kleine Stab-Elektrisiermaschine bequem auseinander nehmen und in diesem kleinen Kästchen von $25 \times 15 \times 6$ cm Grösse bequem unterbringen kann. Man kann sie so geschützt vor Beschädigungen durch Staub und Licht, den ärgsten Feinden elektrostatischer Apparate, solange aufbewahren, bis sie nach Ablauf der durch den Unterricht bedingten Ruhepause von einem halben oder ganzen Jahre wieder aufs Neue Verwendung findet.

Als nächsten Gegenstand führe ich Ihnen hier eine Tangentenbussole vor, mit welcher die Abhängigkeit des Ausschlagswinkels von der Stromstärke auf rein experimentellem Wege ohne Voraussetzung der Kenntnis der trigonometrischen Funktionen nachgewiesen wird.

Als wesentliches Merkmal ist bei diesem Apparat hervorzuheben, dass der kreisförmige Leiter von dem Gehäuse mit der Magnetnadel, also von der eigentlichen Bussole losgelöst ist, sodass man den Leiter nach Belieben um diese Bussole aufstellen oder ihn davon entfernen kann. Ausserdem kann man den einfachen Kreisleiter durch einen doppelten Kreisleiter ersetzen oder ihn endlich gleichzeitig mit dem einfachen Leiter zusammen benutzen, sodass man auf diese Weise einen dreifachen Kreisstrom erhält.

Demgemäss besteht die neue Tangentenbussole aus einem Grundbrett von 18×24 cm Grösse, in dessen Mitte eine Messingsäule von 12 cm Höhe unverrückbar befestigt ist. Diese Säule trägt an ihrem oberen Ende eine Bussole gebräuchlicher Art mit spiegelnder Grundplatte, kurzer Magnetnadel mit senkrecht dazu stehenden Aluminiumzeigern, die über einer in ganze Grade eingeteilten Gradteilung spielen. Die Magnetnadel ist wie gewöhnlich mittels Achathütchen auf eine Stahlspitze aufgesetzt und durch eine Arretierung von dieser Spitze abhebbar. Das Grundbrett ist an den Längsseiten mit zwei schmalen Leisten versehen, die als Führung für die aufzusetzenden Kreisleiter dienen. In der Mitte der Leisten sorgt ein Anschlag dafür, dass die Leiter genau an einer vorgeschriebenen Stelle stehen.

Von den beiden Kreisleitern ist der eine einfach, der andere doppelt. Beide haben einen Radius von 10 cm. Jeder Leiter endigt in zwei Zuleitungsklemmen, die seitlich neben einander so angebracht sind, dass die Zuführungsleitungen möglichst wenig Einfluss auf die Magnetnadel haben. Jeder der beiden Kreisleiter ist auf einem Brette von 10×15 cm Grösse mittels aufgeschraubter Fiberstreifen befestigt. Die Bretter haben eine solche Grösse, dass sie genau zwischen die Führungsleisten des grossen Grundbrettes passen, und dass sie bis zum Anschlag vorgeschoben den Leiter in eine solche Stellung bringen, dass der Drehpunkt der Magnetnadel mit dem Mittelpunkte des Kreisleiters zusammenfällt. Wenn beide Kreisleiter auf dem Grundbretto stehen, so liegen sie unmittelbar aneinander, sind aber vor leitender Berührung durch kleine Fiberstückchen, die auch die beiden Kreise des Doppelleiters von einander isolieren. geschützt. Bei gleichzeitiger Aufstellung beider Kreisleiter liegen die Zuführungsklemmen derselben auf derselben Seite des Apparats.

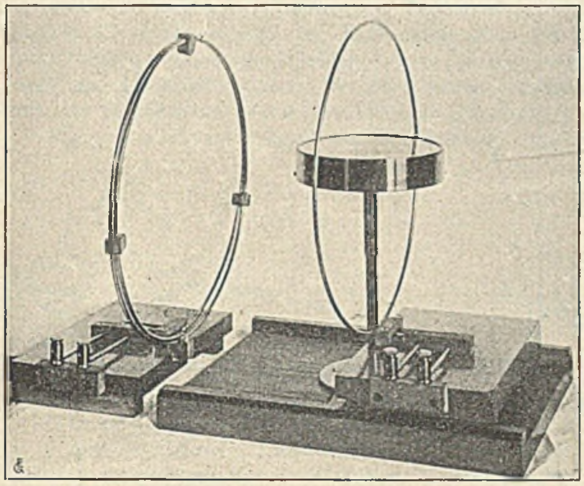

Fig. 2.

In der Figur 2 ist der einfache Leiter an seiner richtigen Stelle über die Bussole geschoben. Der Doppelleiter steht getrennt davon neben dem übrigen Apparat.

Um mit diesem Apparate die Abhängigkeit des Ablenkungswinkels von der Stromstärke nachzuweisen, um also die Tangentenbussole als Messinstrument zu aichen, kann man in zweifacher Weise verfahren, indem man entweder nur eine Stromquelle für beide Kreisleiter, die dann hintereinander geschaltet vom Strome durchflossen werden, oder indem man zwei getrennte Stromquellen für die beiden Kreisleiter benutzt.

Die Aichung im einfachen Stromkreise geschieht nach dem Schema von Figur 3 in folgender Weise:

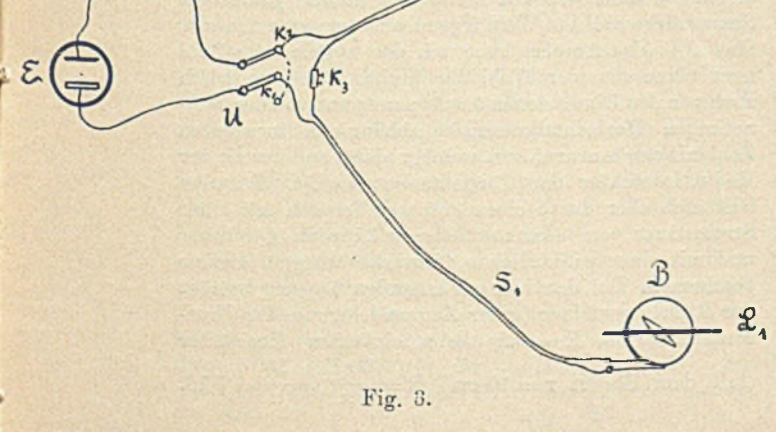

Fig. 3.

Man verbindet den einen Pol einer möglichst konstanten Stromquelle, am besten eines Akkumulators mit einem regulierbaren Rheostaten R; der zweite Pol von E, sowie die zweite Klemme von R wird darauf mit den Zuleitungsklemmen eines einfachen Umschalters U verbunden. Die Ableitungsklemme K_1 des Umschalters verbindet man mit dem einen Leiter einer ca 2 m langen biegsamen Doppelleitungsschnur S_1; der zweite Leiter derselben Schnur endet in der Drahtverbindungsklemme K_3. Die beiden anderen Enden dieser Leitungsschnur sind mit den Klemmen des einfachen Kreisleiters L_1 verbunden. Die zweite Ableitungsklemme K_2 des Umschalters und die Verbindungsklemme K_3 sind durch die Doppelleitungsschnur S_2 mit den Klemmen des doppelten Kreisleiters L_2 verbunden. Bei Schluss des Stromes fliesst also derselbe Strom hintereinander durch Rheostat, Umschalter, einfachen und doppelten Kreisleiter der Bussole.

Nachdem ich die angegebenen Verbindungen hergestellt habe, stelle ich den einfachen Kreisleiter (wie in der Figur 3 schematisch angegeben) über die Bussole und entferne den doppelten Kreisleiter so weit, wie es die Leitungsschnur gestattet, damit die magnetische Einwirkung dieses Doppelkreises auf die Magnetnadel der Bussole gleich Null ist. Darauf schliesse ich den Strom und reguliere den Rheostaten so, dass der Ausschlag der Bussole nur einige Grad beträgt. Er beträgt jetzt genau 6^0. Nun entferne ich den einfachen Kreisleiter, aber ohne an den Verbindungen oder an der Stellung der Rheostaten irgend etwas zu ändern und setze den Doppelleiter L_2 über die Bussole. Die Bussole zeigt jetzt einen Ausschlag von $11^1/_2{}^0$. Endlich stelle ich den einfachen und den doppelten Kreisleiter gleichzeitig über die Bussole und lese den Ausschlag 17^0 ab. Eine Wiederholung derselben Versuchsreihe mit umgekehrter Stromrichtung (nach Umstellen des Umschalters) ergiebt dieselben Resultate.

Nenne ich nun die Elektrizitätsmenge, die in der gesamten Leitung während der Zeiteinheit fliesst, „Eins" und demnach die Stromstärke auch „Eins", so hat bei Anwendung des einfachen Kreisleiters die Elektrizitätsmenge „Eins" die Bussole umflossen, bei Anwendung des Doppelkreises aber in derselben Zeitdauer die Elektrizitätsmenge „Zwei", ebenso bei Anwendung des dreifachen Leiters die Elektrizitätsmenge „Drei". Es ist daher auch der Schluss berechtigt, dass die Wirkung des Doppelkreises dieselbe ist, wie die eines einfachen Leiters, der vom Strome mit der Stromstärke „Zwei" durchflossen wird. In derselben Weise ist die Wirkung des vom Strome „Eins" durchflossenen dreifachen Leiters identisch mit dem vom Strome mit der Stromstärke „Drei" durchflossenen einfachen Kreisleiter.

Bei dem vorbin ausgeführten Versuche hat der Strom „Eins" die Ablenkung 6^0, der Strom „Zwei" die Ablenkung $11^1/_2{}^0$, der Strom „Drei" die Ablenkung 17^0 hervorgerufen. Ich schreibe die Beobachtungsresultate tabellarisch neben einander, also:

Stromstärke	Ausschlag
1	6^0
2	$11^1/_2{}^0$
3	17^0

Nun fange ich eine neue Versuchsreihe mit dem einfachen Kreisleiter an. Ich reguliere den Rheostaten so, dass der einfache Kreisleiter den Ausschlag $11^1/_2{}^0$ erzeugt. Vertausche ich jetzt bei derselben Stromstärke den einfachen Leiter mit dem Doppelkreise, so erhalte ich 22° Ausschlag. Bei Anwendung beider Leiterkreise, also des dreifachen Kreisleiters entsteht der Ausschlag 31°.

Wenn in der ersten Versuchsreihe der Strom „Zwei" den Ausschlag $11^1/_2{}^0$ hervorgebracht hat, so ist es berechtigt, den jetzt in der gesamten Leitung fliessenden Strom auch „Zwei" zu nennen, ich habe daher in dieser zweiten Versuchsreihe die Stromstärken „Zwei", „Vier" und „Sechs" benutzt und die dementsprechenden Ablenkungen $11^1/_2{}^0$, 22°, 31° erhalten. Diese Beobachtungsresultate füge ich der vorhin begonnenen Tabelle ein.

Jetzt mache ich eine dritte Beobachtungsreihe, indem ich bei Benutzung des einfachen Kreisleiters den Rheostaten so verstelle, dass ich den Ausschlag 17° erhalte. Beim Doppelkreise bekomme ich jetzt 31° und beim dreifachen Kreise 42°. Mittels einer Schlussweise, die der vorigen analog ist, komme ich zu den Resultaten, dass die Stromstärken „Drei", „Sechs", „Neun" die Ausschläge 17°, 31°, 42° erzeugen. Auch diese Zahlen werden der früheren Tabelle eingefügt. Die jetzt bei der Stromstärke „Sechs" gemachte Beobachtung bestätigt das für dieselbe Stromstärke in der zweiten Versuchsreihe erhaltene Beobachtungsresultat.

Die nächste Beobachtungsreihe beginne ich mit der Ablenkung 22° beim einfachen Kreisleiter. Die Beobachtungsresultate sind: Stromstärke 4, 8, 12 erzeugt die Ablenkungen 22°, $38^1/_2{}^0$, $48^1/_2{}^0$. Wenn ich nun in derselben Weise weiter fortfahre, erhalte ich die Tabelle, die ich hier bis zur Stromstärke 64 hingeschrieben habe:

Stromstärke	Ablenkung
1	6°
2	$11^1/_2{}^0$
3	17°
4	22°
6	31°
8	$38^1/_2{}^0$
9	42°
12	50°
16	58°
18	61°
24	$67^1/_2{}^0$
27	$69^1/_2{}^0$
32	73°
36	$74^1/_2{}^0$
48	78°
54	$79^1/_2{}^0$
64	81°

Diese Beobachtungsresultate benutze ich nun zu einer graphischen Darstellung, indem ich die Werte der Stromstärken als Abscissen und die dazu gehörigen Ablenkungen als Ordinaten eintrage. Bequemer noch für den Gebrauch ist die Konstruktion einer Kurve, bei der die Stromstärken die Ordinaten und die Ablenkungen die Abscissen sind. Die beobachteten Werte und die danach konstruierten Punkte liegen einander nahe genug, um die Kurve mit der grössten Sorgfalt auszeichnen zu können. Das Resultat zeige ich Ihnen hier in den folgenden Figuren und zwar ist die Kurve Figur 4 nach dem ersten, die Kurve Figur 5 nach dem zweiten Verfahren gezeichnet. Beide Kurven sind natürlich nichts anderes, als die Kurve für tang α. Figur 5 zeigt die Tangentenlinie unmittelbar, während Figur 4 dieselbe Kurve mit vertauschten Achsen zeigt.

Man kann nun die auf rein empirischem Wege hergestellte Kurve vollständig benutzen, um die Stromstärke daraus abzulesen, die zu einer durch einen will-

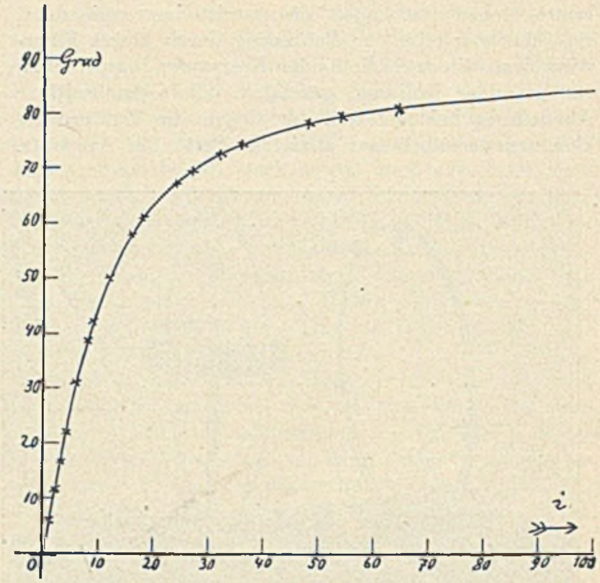

Fig. 4.

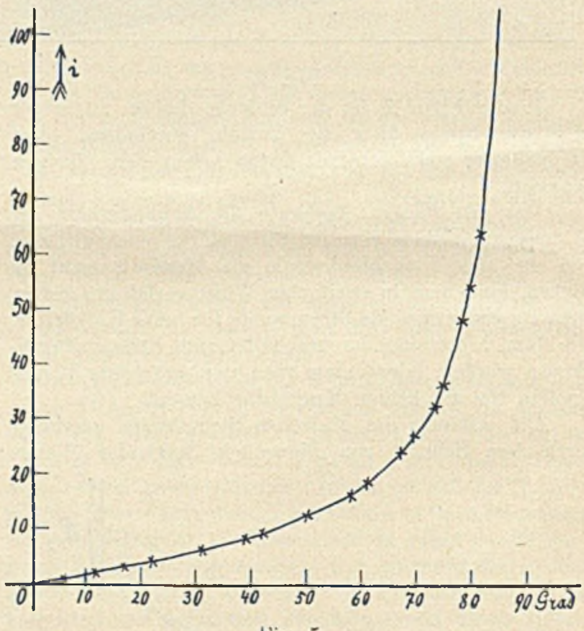

Fig. 5.

kürlichen Strom hervorgerufenen Ablenkung gehört. Zwar lese ich direkt nur die durch die bei meinem ersten Versuche willkürlich gewählte Einheit gemessene Stromstärke ab. Bei Wahl irgend einer anderen Einheit, also z. B. des Ampère habe ich der abgelesenen Zahl noch einen von der Wahl der Einheit (und natürlich auch von den Dimensionen des Apparats und von der magnetischen Horizontalintensität) abhängigen konstanten Zahlenfaktor hinzuzufügen, welcher nichts anderes als der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole ist. Derselbe lässt sich aber durch einen einzigen Versuch mit einer Stromstärke von bekannter oder willkürlich gewählter und mit einer willkürlichen Masszahl belegten Grösse bestimmen. Bei dem hier vorliegenden Apparat beträgt der Reduktionsfaktor (unter Zugrundelegung der Horizontalintensität $H = 0{,}2$) beim einfachen Kreisleiter (mit dem Radius $r = 10$ cm) $R = \frac{5\,r\,H}{\pi} = \frac{10}{\pi} = 3{,}18.$

Die Aichung der Tangentenbussole in zwei Stromkreisen erinnert entfernt an die von Kolbe angewandte Methode der Aichung eines Galvanometers, insofern zu der Wirkung eines Stromkreises immer derselbe konstante Summand hinzugefügt wird (siehe Kolbe, Einführung in die Elektrizitätslehre II, p. 67), weicht aber deshalb wesentlich von der Kolbeschen Methode ab, weil kein Hilfsmagnet angewandt wird, sondern die Summierung der Stromwirkungen wird direkt durch elektrische Ströme hervorgerufen, die genau an der Stelle wirken, an der beim Gebrauch auch der zu messende Strom die Ablenkung hervorruft.

Figur 6 zeigt das Schema der Schaltung:

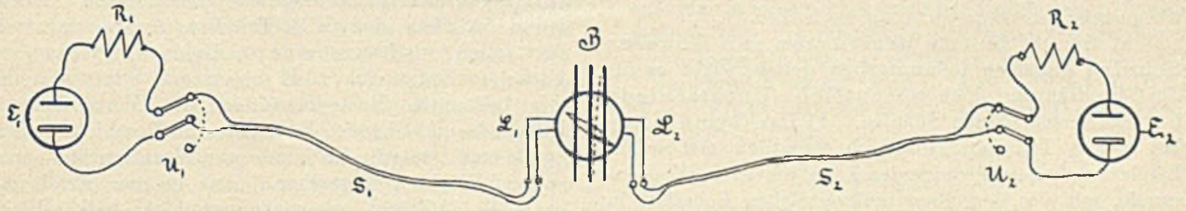

Fig. 6.

Element (Akkumulator) E_1 und Rheostat R_1 sind durch den Umschalter U_1 mit der Doppelleitungsschnur S_1 und hierdurch mit dem um die Bussole B stehenden einfachen Kreisleiter L_1 dauernd verbunden. In derselben Weise ist das Element E_2 und der Rheostat R_2 durch den Umschalter U_2 und die Doppelleitungsschnur S_2 mit dem gleichfalls um die Bussole B stehenden Doppelkreisleiter L_2 verbunden. Beide Kreisleiter behalten während der ganzen Aichung dauernd ihre Plätze.

Die Aichung geschieht auf folgende Weise: Ich schliesse den Strom I und reguliere den Rheostaten, bis der Kreisleiter L_1 die Ablenkung 6° erzeugt. Dann öffne ich den Strom I, ohne an der Einstellung von R_1 etwas zu ändern, schliesse Strom II und reguliere R_2, bis auch hier der Doppelkreisleiter die Ablenkung 6° erzeugt. (Zur Kontrolle, dass die Wirkung genau dieselbe, wie die vom Strom I ist, schliesse ich beide Ströme, aber so, dass sie die Kreisleiter in einander entgegengesetzter Richtung durchfliessen, dann darf kein Ausschlag eintreten).

Schliesse ich jetzt beide Ströme so, dass sie beide im selben Sinne die Bussole umfliessen, so erzeugen sie jetzt die Ablenkung 11½°. Diese Ablenkung wird also durch die doppelte Stromwirkung erzeugt, wie die von 6°.

Ich öffne wieder beide Stromkreise, aber bei R_1 bleibt auch fernerhin derselbe Widerstand eingeschaltet, sodass beim jedesmaligen Schliessen dieses Stromes I stets dieselbe Stromwirkung auf die Bussole eintritt.

Nun schliesse ich Strom II allein und verändere den Widerstand R_2, bis der Strom II allein die Ablenkung 11½° hervorbringt. Wenn ich nun Strom I auch schliesse, so erhalte ich die summatorische Wirkung von 17° Ablenkung. Diese rührt jetzt von der dreifachen Wirkung des Anfangsstromes her. Nach Oeffnen von I verstelle ich R_2 wieder, bis Strom II allein 17° Ablenkung erzeugt. Addiere ich hierzu die Stromwirkung des unveränderten Stromes I, so erzeugt diese vierfache Stromwirkung die Ablenkung 22°. Diese Ablenkung rufe ich nun wieder durch Strom II allein hervor und addiere Strom I aufs neue. Der fünffachen Stromwirkung entspricht die Ablenkung 26½°. So fahre ich weiter fort, indem ich immer zu der Wirkung des Stromes II die unveränderliche Wirkung von I addiere. Bin ich dann zu grösseren Stromstärken auf diesem Wege gekommen, so würde die stetige Addition von „Eins" ermüdend werden, deshalb kann ich jetzt auf Grund der durch die niederen Stromstärken hervorgerufenen Ablenkungen auch den Strom I so verändern, dass er selbst die doppelte, dreifache oder mehrfache Wirkung des Stromes „Eins" hat. Ich kann also jetzt diese mehrfache Wirkung zu einer durch den Strom II erzeugten Ablenkung in beliebiger aber messbarer Weise addieren. Doch wo es mir wünschenswert erscheint, kann ich beliebig kleine, an anderen Stellen wieder beliebig grosse Intervalle empirisch festlegen. Durch Stromwechsel in einer der beiden Stromkreise kann ich auch eine Subtraktion von Stromwirkungen in beliebiger Weise vornehmen und auf diese Weise frühere Beobachtungen durch die späteren kontrollieren oder umgekehrt. Diese zweite Methode der Aichung der Bussole mit zwei getrennten Stromkreisen hat den Vorteil der beliebig ausführbaren Variation der Intervalle, während die erste wieder den Vorteil hat, dass bei der Anwendung desselben Stromes in beiden Kreisleitern die durch ungenaues Einstellen und Ablesen der Ablenkung verursachten Fehler geringer sind.

Auf die wirkliche Ausführung einer Aichung der Tangentenbussole nach der zweiten Methode muss ich aus Zeitmangel verzichten, doch will ich nicht unerwähnt lassen, dass auch diese Methode Resultate ergeben hat, die in jeder Beziehung mit der theoretischen Abhängigkeit $i = R \cdot tg\,\alpha$ übereinstimmen. Erwähnen will ich aber noch, dass diese zweite Additionsmethode mit zwei Stromkreisen nicht nur bei dem vorliegenden Apparate, sondern bei jedem Galvanometer anwendbar ist, das zwei getrennte Wickelungen oder Stromleiter hat, also z. B. bei den bekannten Wagegalvanometern mit zwei Wickelungen, bei den Differentialgalvanometern u. a. Hat ein Apparat, den man auf diese Weise aichen will, nur eine Wickelung, so kann man leicht eine Hilfswickelung oben auf die schon vorhandene Wickelung aufwickeln, um den durch diese Hilfswickelung fliessenden konstanten Strom als konstanten Summanden zu benutzen.

Meines Erachtens ist diese Methode der Aichung eines Galvanometers deshalb der Kolbeschen Methode vorzuziehen, weil das von dem oder den Hilfsmagneten erzeugte magnetische Feld doch ganz wesentlich von dem durch die Ströme hervorgerufenen magnetischen Felde abweicht. Es kann zwar in einem einzelnen Punkte des Feldes die Einwirkung des Magneten der des Stromes gleich gesetzt werden; aber wenn diese Gleichheit in einem Punkte vorhanden ist, so ist sie gewiss in den anderen Punkten nicht vorhanden, sodass es also bei der durch die vergrösserte Ablenkung verursachten Stellung der Magnetnadel falsch ist, wenn man die beiden magnetischen Wirkungen von Magnet und Strom gleichsetzt. Bei der Methode der Summierung von Strömen aber bleibt während der ganzen Versuchsreihe die Form des magnetischen Feldes ungeändert.

(Fortsetzung folgt).

Bemerkungen zu dem neuen Lehrplan der Erdkunde.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Düsseldorf*) (Auszug).

Von A. Pahde (Krefeld).

Es ist nicht meine Absicht, auf die Einzelheiten einzugehen, durch die sich der neue Lehrplan von dem früheren unterscheidet — als da sind: Kurze Uebersicht der Länder der Erde statt einer blos oro-hydrographischen in Sexta; Weglassung des Zusatzes von der besonderen Betonung der Mittelmeerländer in Quarta; vernünftiger Austausch der Lehrstoffe in den Tertien; Vereinfachung der Lehraufgabe der Unter-Sekunda. Es sei mir vielmehr gestattet, die Aufmerksamkeit auf einige Punkte von allgemeiner Bedeutung zu lenken.

a) Obwohl für alle drei Arten von höheren Schulen dieselben Lehraufgaben gelten, giebt es für die Durchführung doch wesentliche Unterschiede bei den verschiedenen Schulen. 1) Das Gymnasium hat in den Tertien, wo doch eigentlich erst wahre Länderkunde getrieben werden kann, nur eine Wochenstunde, soll also denselben umfangreichen Lehrstoff in der halben Zeit erledigen, wie das Realgymnasium und die Oberrealschule! (Vergl. meine Ausführungen auf der Düsseldorfer Naturforscher-Versammlung 1898). 2) Die „Oberstufe" des erdkundlichen Unterrichts steht auf dem Gymnasium und dem Realgymnasium auf höchst unsicheren Füssen; nur auf der Oberrealschule ist auch in OII, UI und OI je eine Wochenstunde dafür fest bestimmt. Gesichert erscheint auch auf den ersteren beiden Anstalten nur die mathematische Erdkunde, wird diese doch an 12 verschiedenen Stellen der neuen Lehrpläne (S. 49, 50, 52, 54, 56, 59, 60, 62, 64, 67) genannt! Sie kommt bei der sphärischen Trigonometrie und bei der Mechanik unbedingt zur Geltung. Im Unklaren lässt uns aber der neue Lehrplan darüber, wer in den Oberklassen des Gymnasiums und des Realgymnasiums das Wesentlichste aus der allgemeinen Erdkunde behandeln soll. Dem Mathematiker oder Physiker ist es nicht mehr zugewiesen; den älteren Historikern liegt der Stoff aber meist zu fern. Von diesem besonderen Lehrstoff der Oberstufe will die Mehrzahl der klassischen Philologen für das Gymnasium überhaupt nichts wissen; sie will vielmehr gerade jetzt das Gymnasium wieder möglichst auf das Altertum verdichten — wie sich auf der Osterversammlung des „Vereins rheinischer Schulmänner" (richtiger: klassischer Philologen, unter O. Jaegers Vorsitz) zeigte und wie es gestern Direktor Dr. Cauer in Bonn ausgesprochen hat (vgl. 7 Thesen, allg. deutscher Gymnasialverein, und Cauers Programmabhandlung vom Jahre 1900 „Wie dient das Gymnasium dem Leben?"). Ja, meine Herren, wenn jeder Philologe bei der lateinischen und griechischen Lektüre so verständnisvoll und feinsinnig auf die Erklärungen aller vorkommenden geographischen, astronomischen u. a. Verhältnisse einginge wie Direktor Cauer, dann liesse sich vom Standpunkte jener Richtung aus noch über eine derartige Behandlung reden — aber wieviele Philologen sind (dem Gange ihres Studiums gemäss) gar nicht imstande, eingehende Erklärungen von Naturerscheinungen zu geben?! Das kann eben nur der Fachmann! Und angesichts des hohen Bildungswertes der Erdkunde (vgl. Rich. Lehmann, Vhdlgn. d. XI. Deutschen Geographentages 1895, S. 191—221) fragen wir: weshalb sollen die Zöglinge des Gymnasiums unserer Zeit dieser Bildungselemente nicht, oder nur so wenig teilhaftig werden? Und für wieviele Teile der Erdoberfläche ist eine „organische Einfügung in den historischen Unterricht" überhaupt ausgeschlossen?! Es ist eine dankenswerte Errungenschaft der neuen Lehrpläne, dass sie in den „methodischen Bemerkungen" dem Fachlehrer der Erdkunde zu seinem Rechte verhelfen; vermag er doch auch kraft der Beherrschung des Stoffes Auswahl zu treffen und Ueberbürdung zu vermeiden — einzelne junge Heisssporne bestätigen als Ausnahmen diese Regel. Das Wort „Fachlehrer" braucht niemanden abzuschrecken; als wenn etwa der betreffende Herr nur Geographie unterrichten sollte. Es hat doch vielmehr jeder, der über eine volle Fakultas in Erdkunde verfügt, auch mindestens eine solche in einem anderen Fache, so finden sich z. B. bei vier Oberlehrern eines mir bekannten Realgymnasiums die Verbindungen: Erdkunde und Chemie, Erdkunde und Geschichte, Erdkunde und Deutsch, Erdkunde und Mathematik — von anderen Fächern abgesehen. Aus eigener Erfahrung kann ich bestätigen, wie wirkungsvoll der erdkundliche Unterricht auf der Oberstufe sein kann; in den Jahren 1884—92 hatte ich in Prima wöchentlich fünf Stunden Mathematik und eine Stunde allgemeine Erdkunde zu erteilen. Auf Bitten der Primaner wurde letztere durch Eifel-, Harz- und Schwarzwald-Wanderungen in den Ferien ergänzt.

b) Die ältere Schulgeographie trennte physische und politische Erdkunde und begünstigte wohl gar vorzugsweise die letztere. Seit dem Erscheinen von Prof. Alfred Kirchhoffs Schulbuche (1881) trat dem die neuere, wissenschaftliche Richtung entgegen, und zu ihren Gunsten haben jetzt die Lehrpläne entschieden, indem sie verlangen, dass die physischen und politischen Elemente im Sinne der Länderkunde in einander verarbeitet werden (S. 50 unten). Selbst die Ausdrücke „physische" und „politische Erdkunde" kommen deshalb in dem „Lehrziel" und den „Lehraufgaben" gar nicht mehr vor. Damit hat sich die Unterrichtsbehörde auch in der Lehrbuchfrage — um es kurz auszudrücken — pro Kirchhoff, contra Seydlitz ausgesprochen. Bei den meisten Leitfäden, namentlich der älteren Richtung, war der sog. Telegrammstil beliebt; über diesen ist zwar im neuen Lehrplan der Erdkunde nichts gesagt, aber in dem der Geschichte ist (S. 49 oben) ausdrücklich die „zusammenhängende Darstellung" verlangt, und was der Geschichte recht ist, ist der Erdkunde billig (vergl. Vorwort zum 2. Teil meiner „Erdkunde"). In neuer Form aber lebt der Depeschenstil seit 1901 wieder auf: es soll jetzt mit einem Male einen Unterschied zwischen „Lehrbuch" und „Lernbuch" geben! und letzteres soll vorwiegend mit Stichworten und Fragen arbeiten! Solch ein Schlagwort wie „Lernbuch" erregt ja Aufsehen und die Ankündigung „neuer methodischer Grundsätze" erst recht. Aber mancher wird jenen Unterschied nicht gelten lassen und die methodischen Grundsätze kaum als neu anerkennen. Es wird zwar den „Lehrbüchern" mit zusammenhängender Darstellung vorgeworfen, der Schüler passe im Unterrichte nicht auf, weil er wisse: alles steht schön im Buche, und er lerne dies dann auswendig — nun: der Lehrer thut mir leid, der selbst im Unterrichte nichts bringen kann, als das, was das Lehrbuch giebt, der im Unterrichte die Jungen nicht zu der nötigen Aufmerksamkeit zwingt und der sich bei Wiederholungen auf auswen-

*) S. Unt.-Bl. VIII, 3, S. 65.

dig gelerntes Plappern einlässt! Wenn gesagt wird: der Vortrag ist Sache des Lehrers, nicht des Buches, so erwidere ich: die Fragen kommen erst recht dem Lehrer zu, gerade beim induktiven Unterricht; ist aber der Unterricht in der Klasse induktiv lebendig gewesen, so darf das Lehrbuch, das ja nur für die häusliche Wiederholung bestimmt ist, den erarbeiteten Stoff in zusammenhängender Form geben, denn sonst führt es zur Ueberbürdung!! Die „Lernbücher“ mit Fragen halte ich aber geradezu für pädagogisch gefährlich, denn wie leicht kann sich ein Schüler, namentlich bei späteren Wiederholungen, falsche Antworten auf die Fragen zu Hause einprägen. Dass einzelne Schüler sich die Antworten bei oder gleich nach dem Unterrichte aufschreiben werden, soll hier nur als wahrscheinlich hingestellt werden; die Absicht des „Lernbuches“ wäre damit sofort vereitelt. — Endlich aber stimme ich mit Prof. S. Günther (München) darin überein, dass eine anregend geschriebene, zusammenhängende Darbietung des vollen Lehrstoffes den Schülern lieb wird; ein Buch mit ewigen Fragen, wie sie in anderer Form schon vor Jahrzehnten üblich waren, ist aber der Jugend einfach langweilig.

Möge der Deutsche Geographentag im nächsten Jahre zu Köln in solchen Fragen weiter klärend wirken!

Zur Behandlung der regelmässigen Vielecke.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf*)

von

Dr. Karl Bochow (Magdeburg.)

Die Flächen der regulären Vielecke berechnet man gewöhnlich aus Basis und Basishöhe des Bestimmungsdreiecks. Schenkel und Schenkelhöhe liefern eine handlichere Formel (vergl. Baltzers Elemente). Es sei (Fig. 1) AB Durchmesser eines Kreises M, dessen

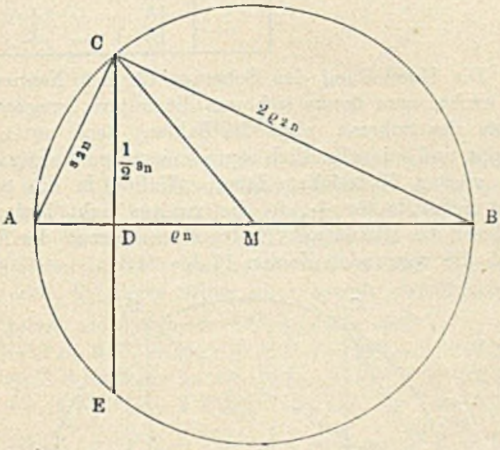

Fig. 1.

Radius r ist, AC sei die Seite eines regulären Vielecks von 2n Seiten. Ich fälle von C auf AB das Lot CD, es schneide den anderen Halbkreis in E; so ist CE Seite des Vielecks von n Seiten, und $CD = \frac{1}{2}s_n$.

Also $\triangle ACM = \frac{1}{2}AM \cdot CD = \frac{1}{2}r \cdot \frac{1}{2}s_n$, und die Fläche des 2n-Ecks ist das 2n-fache hiervon:

$$f_{2n} = \frac{2n}{4} r s_n,$$

z. B. $f_4 = \frac{4}{4} r s_2 = 2r^2$; $f_8 = \frac{8}{4} r s_4 = 2r^2\sqrt{2}$, u. s. f. $f_6 = \frac{6}{4} r s_3 = \frac{3}{2} r^2\sqrt{3}$, $f_{12} = \frac{12}{4} r s_6 = 3r^2$ u. s. f. Die Gleichung $f_{10} = \frac{5}{2} r s_5$ kann zur Berechnung der Seite des Fünfecks dienen. Diese Formel wollte ich nicht unerwähnt lassen.

Mein Thema ist eine einfache Methode zur Berechnung der Seiten und Diagonalen aller den elementaren Unterricht beschäftigenden regulären Vielecke, einzig beruhend auf fortgesetzter Anwendung des Satzes

„Das Quadrat einer Kreissehne ist einem Rechteck gleich, dessen eine Seite der Durchmesser, dessen andere Seite die Projektion der Sehne auf den durch einen ihrer Endpunkte gehenden Durchmesser ist.“

In Figur 1 ist $AC^2 = AB \cdot AD = 2r(r - MD) = 2r^2 - r \cdot 2MD$. Ist $AC = s_{2n}$, so ist $MD = \varrho_n$, also $s_{2n}^2 = 2r^2 - r \cdot 2\varrho_n$,

$$\frac{s_{2n}}{r} = \sqrt{2 - \frac{2\varrho_n}{r}}.$$

Ziehe ich BC, so ist es doppelt so gross als das Lot von M auf AC, es ist $BC = 2\varrho_{2n}$. Derselbe Satz liefert $BC^2 = BA \cdot BD = 2r(r + MD) = 2r^2 + r \cdot 2\varrho_n$,

$$\frac{2\varrho_{2n}}{r} = \sqrt{2 + \frac{2\varrho_n}{r}}$$

Diese Formel giebt den Uebergang vom n-Eck zum 2n-Eck über die ϱ hinweg. Dieser Gang ist übersichtlicher als der gewöhnliche (direkt von s_n zu s_{2n}). Geht man von $\frac{2\varrho_3}{r} = 1$ aus, so erhält man alles zur Berechnung des archimedischen Wertes von π nötige leicht und übersichtlich.

Wichtiger ist mir, zu zeigen, wie durch fortgesetzte Anwendung dieses einen Satzes vom Quadrat der Kreissehne die Reihen 4, 6, 10, 15 nach einheitlichem Verfahren ermittelt werden.

I. Wir projizieren s_4, die Seite des Quadrats im Kreise, auf den durch einen ihrer Endpunkte gehenden Durchmesser. Die Projektion ist r, also nach unserem Satze $s_4^2 = 2r \cdot r$,

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

Um das Achteck zu erhalten, teilen wir (Fig. 2) einen

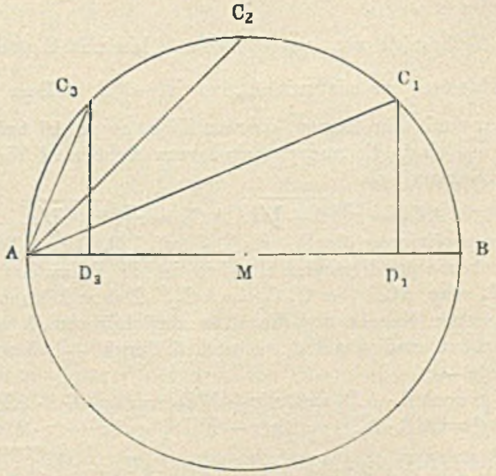

Fig. 2.

Halbkreis M, dessen Durchmesser $AB = 2r$ ist, in vier gleiche Teile, bezeichnen die Teilpunkte, von B nach A

*) S. Unt.-Bl. VIII, 3, S. 65.

hin, mit C_1, C_2, C_3, und verbinden sie mit A; so ist AC_3 Seite des Achtecks, AC_2 und AC_1 sind Diagonalen desselben. Es ist $\sphericalangle C_1AB = \frac{1}{8}\Pi$, $C_2AB = \frac{2}{8}\Pi$, $C_3AB = \frac{3}{8}\Pi$, wenn ich mit Π den Gestreckten bezeichne. Der „Zähler" 2 der Sehne AC_2 lässt sich mit dem „Nenner" 8 heben, sie gehört bereits dem Viereck an als $s_4 = r\sqrt{2}$, neu sind beim Achteck die anderen beiden Sehnen, deren Zähler zum Nenner teilerfremd sind. Diese projizieren wir auf AB, die Projektionen von C_1 und C_3 nennen wir D_1 und D_3, so ist ihr Abstand der Sehne C_1C_3 gleich. Diese spannt zwei Achtel oder ein Viertel des Kreises, darum ist sie gleich s_4, also auch $D_1D_3 = s_4 = r\sqrt{2}$. Unser Satz liefert:

$AC_1^2 = AB \cdot AD_1 = 2r(r + MD_1) = 2r^2 + r \cdot 2MD_1$

$AC_3^2 = AB \cdot AD_3 = 2r(r - MD_3) = 2r^2 - r \cdot 2MD_3$

Es ist $2MD_1 = 2MD_3 = D_1D_3$, also

$$2\varrho_8 = AC_1 = r\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad s_8 = AC_3 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Um zum 16-Eck überzugehen, halbieren wir alle Bögen von Figur 2, bezeichnen aber nun in Figur 3

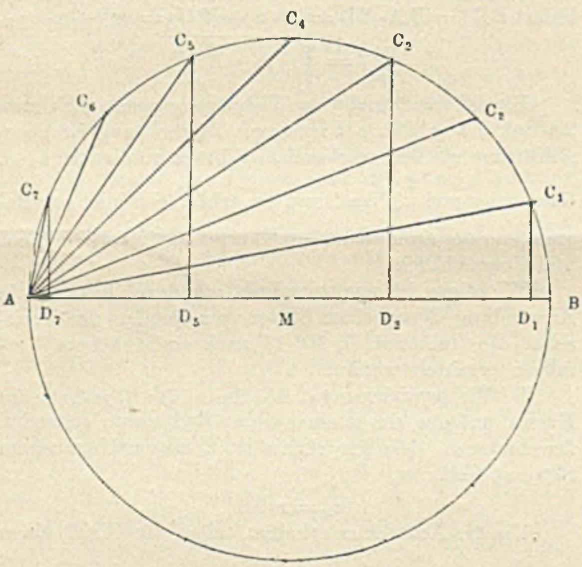

Fig. 3.

die Teilpunkte neu, von B nach A hin mit C_1 bis C_7. Verbinden wir sie mit A, so ist $\sphericalangle C_pAB = \frac{p}{16}\Pi$. Neu sind die Sehnen, deren Zähler zu 16 teilerfremd sind, die anderen sind vom Acht- und Viereck her bekannt, als

$$AC_2 = r\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad AC_6 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Wir projizieren die C_p als D_p auf AB. Der Abstand der korrespondierenden Punkte ist $D_1D_7 = C_1C_7 = AC_2$ resp. $D_3D_5 = C_3C_5 = AC_6$. Daher können wir die neuen Sehnen auf die alten zurückführen, 1 und 7 auf 2, 3 und 5 auf 6, 1 und 3 durch +, 5 und 7 durch —:

$AC_1^2 = AB \cdot AD_1 = 2r(r + MD_1) = 2r^2 + r \cdot 2MD_1$,

$AC_7^2 = AB \cdot AD_7 = 2r(r - MD_7) = 2r^2 - r \cdot 2MD_7$,

also, da $2MD_1 = 2MD_7 = D_1D_7 = C_1C_7 = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ist, $AC_1 = r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $AC_7 = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Ebenso

$AC_3^2 = AB \cdot AD_3 = 2r(r + MD_3) = 2r^2 + r \cdot 2MD_3$,

$AC_5^2 = AB \cdot AD_5 = 2r(r - MD_5) = 2r^2 - r \cdot 2MD_5$,

also, da $2MD_3 = 2MD_5 = D_3D_5 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ist,

$AC_3 = r\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, $AC_5 = r\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

So sind Seite (AC_7), Diagonalen, Fläche ($f_{16} = 4rs_8$) und Inkreisradius ($2\varrho_{16} = AC_1$) des 16-Ecks ausgedrückt. Aber auch für eine Reihe von Winkelfunktionen haben wir ihre Werte:

$$\cos\frac{p}{16}\Pi = \frac{AC_p}{2r},\quad \sin\frac{p}{16}\Pi = \frac{AC_{8-p}}{2r}.$$

Der weitere Fortgang zum 32-, 64-, 128-Eck bietet sich ungezwungen. Das 32-Eck erhalten wir, indem wir die bereits vorhandenen Zähler von Figur 3 verdoppeln (sodass alle gerade Zahlen werden), alle Bögen halbieren und die neuen Teilpunkte mit den ungeraden Zahlen von 1 bis 15 bezeichnen. Von den Projektionen D der Punkte C auf AB fallen D_1 bis D_7 rechts von M, D_9 bis D_{15} links von M, also werden die neuen Sehnen AC_1 bis AC_7 durch +, AC_9 bis AC_{15} durch — abgeleitet; AC_1 und AC_{15} aus dem neuen AC_2, welches AC_1 in Figur 3 war; AC_3 und AC_{13} aus dem neuen AC_6, welches AC_3 in Figur 3 war. AC_5 und AC_{11}; aus dem neuen AC_{10}, welches AC_5 in Figur 3 war; AC_7 und AC_9 aus dem neuen AC_{14}, welches AC_7 in Figur 3 war. So erscheinen die Sehnen des Nenners 32 (die Werte $2r\cos\frac{p}{32}\Pi$) in der Form

$$AC_p\,(\text{Nenner } 32) = r\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}},$$

und die Verteilung der Vorzeichen giebt nebenstehende Tabelle, in welcher das eben erläuterte Gesetz deutlich hervortritt.

Nenner 32	1	+	+	+
	3	+	+	—
	5	+	—	—
	7	+	—	+
	9	—	—	+
	11	—	—	—
	13	—	+	—
	15	—	+	+

Die Herstellung des Schemas für den Nenner 64 ist leicht: man denke sich um die untere, wagerechte Linie das Schema (ohne die Zahlen) nach unten geklappt und spiegelbildlich reproduziert; man setze dann die vierten Vorzeichen davor, nämlich in die ersten acht Zeilen lauter +, in die zweiten acht lauter —, und vor die letzten acht Zeilen schreibe man der Reihe nach die ungeraden Zahlen 17 bis 31.

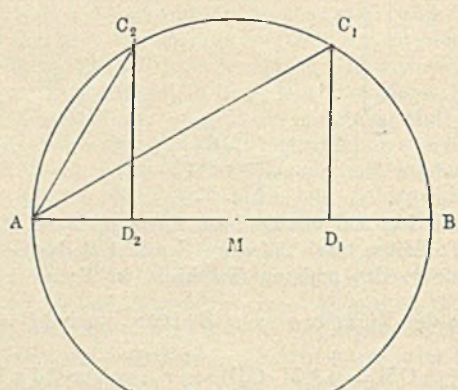

Fig. 4.

II. Die Reihe 3 beginnt mit dem Sechseck: der Halbkreis AB (Fig. 4) ist in drei gleiche Teile geteilt, $\sphericalangle C_1AB = \frac{1}{6}\Pi$, $\sphericalangle C_2AB = \frac{2}{6}\Pi$. Die Thatsache, dass $AC_2 = s_6 = r$ ist, brauchen wir nicht als bekannt vorauszusetzen. Es ist eine gute Vorbereitung für die Reihe 5, hier bereits s_6 zu berechnen. Setzen wir es gleich x, so ist $x^2 = AC_2^2$ $= AB \cdot AD_2 = 2r(r - MD_2) = 2r^2 - r \cdot 2MD_2$. Nun ist $2MD_2 = D_1D_2 = C_1C_2 = AC_2 = x$, also genügt x der Gleichung $x^2 = 2r^2 - rx$, deren Wurzeln $x_1 = +r$, $x_2 = -2r$ sind. Letztere hat auch ihre Bedeutung, hier gilt nur die positive Wurzel, also

$$x = s_6 = AC_2 = r.$$

Hieraus weiter $AC_1^2 = AB \cdot AD_1 = 2r(r + MD_1)$

$$= 2r^2 + r \cdot 2MD_1 = 2r + r^2,$$

$$AC_1 = s_3 = r\sqrt{3}.$$

Um zum 12-Eck überzugehen, halbieren wir wieder die Bögen von Figur 4 und projizieren ihre Mittelpunkte auf AB, neue Bezeichnung anbringend (Fig. 5).

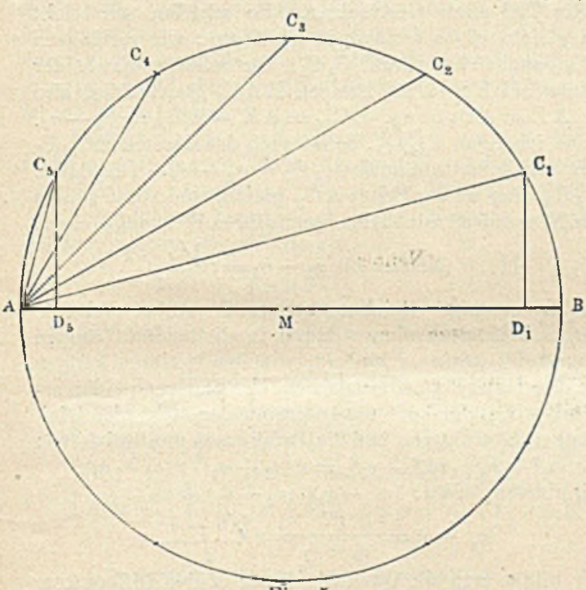

Fig. 5.

Punkt C_3 fällt aus, die Sehnen AC_2 und AC_4, deren Zähler sich mit 12 heben lassen, sind als AC_1 resp. AC_2 von Figur 4 bekannt, neu sind die Sehnen, deren Zähler zu 12 teilerfremd sind, AC_1 und AC_5. Die Projektionen D ihrer Endpunkte haben den Abstand $D_1D_5 = C_1C_5$, diese Sehne aber spannt vier Zwölftel des Kreises, sie ist gleich $AC_2 = r\sqrt{3}$, und $AC_1^2 = AB \cdot AD_1 = 2r(r + MD_1) = 2r^2 + r \cdot 2MD_1$, $AC_5^2 = AB \cdot AD_5 = 2r(r - MD_5) = 2r^2 - r \cdot 2MD_5$ also da $2MD_1 = 2MD_5 = D_1D_5$, so erscheint $2\varrho_{12} = AC_1 = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $s_{12} = AC_5 = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Die Fortführung zu den Nennern 24, 48, 96 u. s. f. darf ich wohl unterlassen, ebenso die Erläuterung der Vorzeichentafel, welche sich am Schluss befindet.

III. Die Reihe 5. In Figur 6 ist der Halbkreis AB in fünf gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte C_1 bis C_4 sind als D_1 bis D_4 auf AB projiziert, es ist

$$\sphericalangle C_pAB = \frac{p}{10}\Pi, \text{ also}$$

$$\sphericalangle C_2AB = \frac{1}{5}\Pi, \quad C_4AB = \frac{2}{5}\Pi,$$

$$C_1AB = \frac{1}{10}\Pi, \quad C_3AB = \frac{3}{10}\Pi.$$

Schon hiernach ordnen sich die Sehnen in zwei Gruppen.

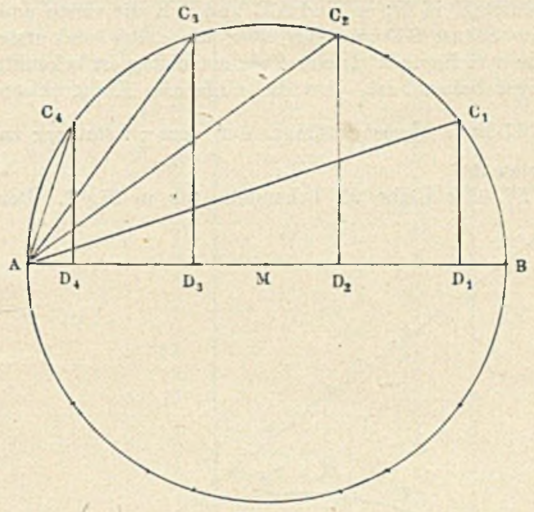

Fig. 6.

Die in gewohnter Weise zu gewinnenden Gleichungen lauten

$AC_1^2 = 2r^2 + r \cdot AC_3$	$AC_2^2 = 2r^2 + r \cdot AC_4$
$AC_3^2 = 2r^2 - r \cdot AC_4$	$AC_4^2 = 2r^2 - r \cdot AC_2$

Die ungeradzähligen Sehnen können erst aus den geradzähligen gewonnen werden, diese aber sind durch ein Gleichungssystem miteinander verknüpft, aus welchem sie berechnet werden können. Wir setzen

$$AC_2 = x, \; AC_4 = y, \text{ so ist}$$

$$x^2 = 2r^2 + ry, \; y^2 = 2r^2 - rx.$$

Subtraktion giebt $x^2 - y^2 = r(x + y)$, also, da wir heben dürfen, $x - y = r$, $x = y + r$. Substitution liefert

$$y^2 = r^2 - ry, \; y = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Die positive Wurzel gilt:

$$y = AC_4 = s_{10} = r\frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

$$x = y + r = AC_2 = r\frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

$$AC_1^2 = 2r^2 + r^2\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = r^2\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \text{ analog } AC_3:$$

$$AC_1 = \frac{1}{2}r\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \; AC_3 = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

So haben wir mit einem Schlage $s_{10} = AC_4$, $s_5 = AC_3$, $f_{10} = \frac{5}{2}rs_5$, $2\varrho_{10} = AC_1$, $2\varrho_5 = AC_2$, $f_5 = \frac{5}{4}r \cdot AC_1$.

Will man mehr geometrisch verfahren, so zieht man die Radien MC_2 und MC_4, der letztere schneide AC_2 in E. In den Dreiecken MEC_2 und EC_4A ist je ein Winkel der fünfte Teil des Gestreckten, während ein zweiter Winkel doppelt so gross ist. Daher ist jedes Dreieck gleichschenklig, also ist $AC_2 = AE + EC_2 = AC_4 + r$, d. h. $x = y + r$.

Fragt man, welche Konstruktion des 10-Ecks aus diesen Formeln sich als die nächstliegende ergeben würde, so weise ich noch darauf hin, dass es leicht ist, folgende Beziehungen abzuleiten: $AC_2 + AC_4 = r\sqrt{5}$, $AC_2 \cdot AC_4 = r^2$, $AC_1^2 = r^2 + AC_2^2$, $AC_3^2 = r^2 + AC_4^2$. Daraus ergiebt sich als einfachste Konstruktion folgende: Ich zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $AB = r$, $AC = \frac{1}{2}r$, konstruiere mit CB um C den Kreis, er schneide Strahl CA in D, den

Gegenstrahl in E; so sind AD und AE die vierte und zweite Sehne, BD und BE aber die dritte und erste Sehne von Figur 6. Dieser Zusammenhang ist bekannt, weniger bekannt ist, dass die einfachste Konstruktion des 17-Ecks ebenso anfängt, nur dass $\frac{1}{4}$ r statt $\frac{1}{2}$ r zu nehmen ist.

IV. Die Reihe 15 behandeln wir in Fig 7. Der

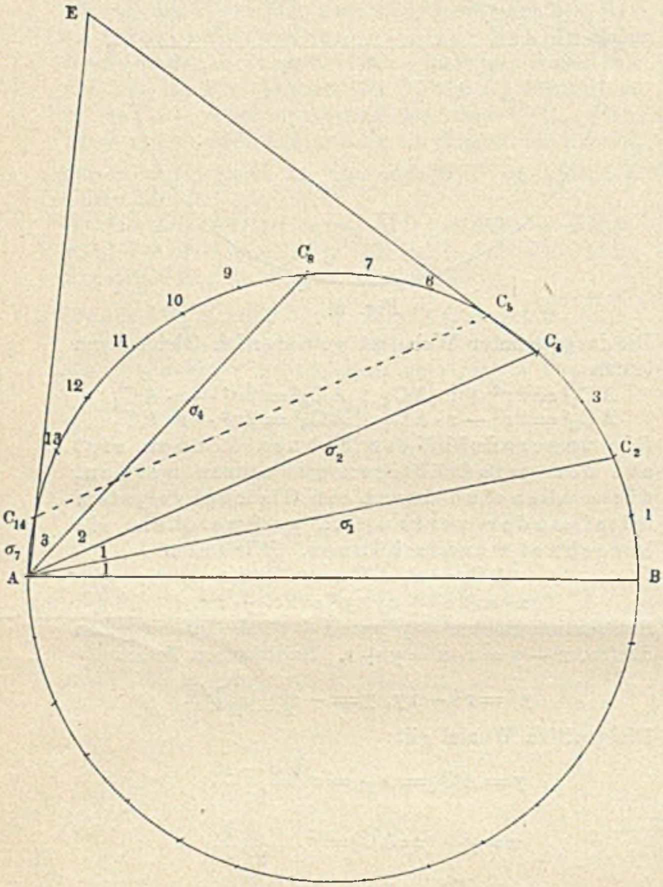

Fig. 7.

Halbkreis AB ist in 15 Teile geteilt, die Teilpunkte sind von B nach A hin mit 1 bis 14 bezeichnet. Erledigt sind die Sehnen ACp, deren Zähler die 3 oder die 5 in sich enthält, die Sehnen 3, 5, 6, 9, 10, 12. Z. B. die Sehne AC_6 bildet mit AB den Winkel $\frac{6}{15}\Pi$ oder $\frac{2}{5}\Pi$, sie ist die Sehne AC_2 von Figur 6, also

$$\text{(Fig. 7, Nenner 15)}\quad AC_6 = r\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Die übrigen Sehnen ordnen sich wieder in zwei Gruppen, die ungeradzähligen und die geradzähligen. Es ist

$$AC_1^2 = 2r^2 + r\cdot AC_2,\quad AC_7^2 = 2r^2 + r\cdot AC_{14},$$
$$AC_{11}^2 = 2r^2 - r\cdot AC_8,\quad AC_{13}^2 = 2r^2 - r\cdot AC_4,$$

also die ungeradzähligen Sehnen lassen sich auf die geradzähligen zurückführen. Diese aber bilden einen geschlossenen Cyklus:

$$AC_2^2 = 2r^2 + r\cdot AC_4,\quad AC_4^2 = 2r^2 + r\cdot AC_8,$$
$$AC_8^2 = 2r^2 - r\cdot AC_{14},\quad AC_{14}^2 = 2r^2 - r\cdot AC_2.$$

Nun ist $\sphericalangle C_2AB = \frac{1}{15}\Pi$, $C_4AB = \frac{2}{15}\Pi$, $C_8AB = \frac{4}{15}\Pi$, $C_{14}AB = \frac{7}{15}\Pi$, alle Winkel erscheinen als Vielfache des 15. Teiles des Gestreckten. Wir thun gut, hierauf auch in der Bezeichnung Rücksicht zu nehmen, wir setzen $AC_2 = \sigma_1$, $AC_4 = \sigma_2$, $AC_8 = \sigma_4$, $AC_{14} = \sigma_7$; so genügen die σ folgenden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \sigma_1^2 = 2r^2 + r\sigma_2, & \sigma_2^2 = 2r^2 + r\sigma_4 \\ \sigma_4^2 = 2r^2 - r\sigma_7, & \sigma_7^2 = 2r^2 - r\sigma_1. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich ohne weitere Hilfsmittel lösen, wie ich a. a. O. gezeigt habe. Hier nehmen wir geometrische Betrachtungen zu Hilfe.

Ich schreibe in die aneinander liegenden Winkel zwischen den σ hinein, das wievielfache von $\frac{1}{15}\Pi$ sie sind: $\sphericalangle C_2AB = \frac{1}{15}\Pi$, $C_4AC_2 = \frac{1}{15}\Pi$, $C_8AC_4 = \frac{2}{15}\Pi$, $C_{14}AC_8 = \frac{3}{15}\Pi$. Die letzten beiden Winkel ergeben zusammen $\frac{5}{15}\Pi = \frac{1}{3}\Pi$, es ist $\sphericalangle C_4AC_{14}$ der dritte Teil eines Gestreckten. So schaffen wir leicht ein gleichseitiges Dreieck in die Figur: wir verlängern AC_{14} und ziehen Strahl C_4C_5, der Schnittpunkt beider Linien sei E; so ist Dreieck EAC_4 gleichseitig, also ist $AE = AC_4 = \sigma_2$, $EC_{14} = AE - AC_{14} = \sigma_2 - \sigma_7$. Ziehe ich noch $C_{14}C_5$, so ist auch das Dreieck $EC_{14}C_5$ gleichseitig, mithin auch $C_{14}C_5 = \sigma_2 - \sigma_7$. Die Sehne $C_{14}C_5$ aber ist der Sehne AC_6 gleich, und diese gehört dem Nenner 5 an, wir hatten bereits ihren Wert angegeben:

$$\text{II.}\quad \text{(Nenner 15)}\ \sigma_2 - \sigma_7 = r\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

In unserem Gleichungssystem I ordnen sich die vier Unbekannten ohne weiteres in die beiden Gruppen „1 und 4", sowie „2 und 7", von den letzteren kennen wir ihre Differenz. Die Differenz der anderen beiden erhalten wir, indem wir die untereinander stehenden Gleichungen subtrahieren und die Differenzen multiplizieren:

$$(\sigma_1^2 - \sigma_4^2)\cdot(\sigma_2^2 - \sigma_7^2) = r(\sigma_2 + \sigma_7)\cdot r(\sigma_1 + \sigma_4).$$

Wir dürfen heben: $(\sigma_1 - \sigma_4)\cdot(\sigma_2 - \sigma_7) = r^2$,

$$\sigma_1 - \sigma_4 = \frac{r^2}{\sigma_2 - \sigma_7} = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Wir bilden nun die Quadrate dieser beiden Differenzen, in Nr. I die untereinanderstehenden Gleichungen addierend und die doppelten Produkte hinzufügend:

$$(\sigma_1 - \sigma_4)^2 + 2\sigma_1\sigma_4 = 4r^2 + r(\sigma_2 - \sigma_7),$$
$$(\sigma_2 - \sigma_7)^2 + 2\sigma_2\sigma_7 = 4r^2 - r(\sigma_1 - \sigma_4).$$

Da die Differenzen bekannt sind, können wir die Produkte bestimmen; nach Ausführung einer leichten Rechnung erhalten wir zur Bestimmung der vier σ folgende Gleichungssysteme:

$$\sigma_1 - \sigma_4 = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \sigma_2 - \sigma_7 = r\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$
$$\sigma_1\cdot\sigma_4 = r^2\,\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \sigma_2\cdot\sigma_7 = r^2\,\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

aus denen sie sich berechnen lassen.

Damit ist auch die Reihe 15 erledigt, der weitere Fortgang zu den Nennern 30, 60, 120 u. s. f. macht keine Schwierigkeit. In meiner Programmarbeit finden Sie die geschlossenen Ausdrücke für alle zum Nenner 60 gehörigen Sehnen.

V. Weiter verfolgen, etwa auf das 17-Eck und die allgemeine Theorie der regelmässigen Vielecke, will ich hier den Gedanken nicht. Ich wollte nur das hervorheben, was für den elementaren Unterricht brauchbar ist. Weiteres bietet meine Programmarbeit 1895/96. In derselben lege ich allerdings ein anderes Verfahren zugrunde, erwähne das hier geschilderte Verfahren jedoch zu Anfang des zweiten Teiles. Ich glaube, Sie werden zugeben, dass man die regulären Vielecke so behandeln k a n n; und die Methode liefert ein für a l l e Vielecke anwendbares Mittel zur Aufstellung der Gleichungssysteme, durch welche die Diagonalen eines Vielecks von bestimmter Seitenzahl zusammengehalten werden und sich bestimmen lassen, sie liefert auch in Gestalt der „periodischen Kettenwurzel" einen gemeinsamen Ausdruck für diese Kreissehnen. also ein einheitliches Prinzip ist damit gewonnen; dasselbe verlangt weder trigonometrische Formeln, noch die Exponentialgrösse e^{ix}, noch zahlentheoretische Grundlagen, seine Grundlagen sind rein geometrisch. — Dass ich die Lehre vom goldenen Schnitt und ähnliches nicht deshalb ausgeschlossen sehen möchte, brauche ich wohl kaum zu betonen. — Zugleich haben wir die Möglichkeit, zwei Gebiete des Unterrichts zu verknüpfen: die G e o m e t r i e schliesst in unserer (der Realschule) Sekunda mit den regulären Vielecken, die Prima beginnt mit Logarithmen und Trigonometrie; diese Ableitungen bieten Gelegenheit, W e r t e v o n W i n k e l f u n k t i o n e n zu bestimmen, deren numerische Berechnung passende Uebung in unterbrochener logarithmischer Rechnung erfordert.

Für eine grosse Anzahl von Winkeln, welche Vielfache von Teilen des Gestreckten sind, finden Sie die geschlossenen Ausdrücke in meiner Programmarbeit.

Seit Jahren benutze ich diese Methode, meine Schüler gehen gern auf sie ein.

T a b e l l e n.

$$s_n = 2\,r \cos\left(\frac{n-2}{2\,n}\,\Pi\right);\quad f_n = \frac{n}{2}\,r^2 \cos\left(\frac{n-4}{2\,n}\,\Pi\right);$$

$$\varrho_n = r \cos\left(\frac{1}{n}\,\Pi\right)$$

$$2\cos\left(\frac{p}{2^q}\,\Pi\right) = \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots\ldots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}}$$

$$2\cos\left(\frac{p}{3\cdot 2^q}\,\Pi\right) = \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}}}$$

Nenner	Zähler	Vorzeichen	Zähler	Nenner
8	1	+	1	12
	3	—	5	
16	1	+ +	1	24
	3	+ —	5	
	5	— —	7	
	7	— +	11	
32	1	+ + +	1	48
	3	+ + —	5	
	5	+ — —	7	
	7	+ — +	11	
	9	— — +	13	
	11	— — —	17	
	13	— + —	19	
	15	— + +	23	
64	1	+ + + +	1	96
	3	+ + + —	5	
	5	+ + — —	7	
	7	+ + — +	11	
	9	+ — — +	13	
	11	+ — — —	17	
	13	+ — + —	19	
	15	+ — + +	23	
	17	— — + +	25	
	19	— — + —	29	
	21	— — — —	31	
	23	— — — +	35	
	25	— + — +	37	
	27	— + — —	41	
	29	— + + —	43	
	31	— + + +	47	

An diesen Vortrag schloss sich eine eingehende Debatte, an der sich ausser dem Vortragenden selbst die Herren K a i s e r (Cassel), B ö t t c h e r (Leipzig) und H e r m e s (Osnabrück) beteiligten. Insbesondere machte B ö t t c h e r die nachfolgend wiedergegebenen ausführlichen Mitteilungen von seiner Behandlung des Stoffes.

Anschauliche Kreisberechnung

von J. E. B ö t t c h e r (Leipzig).

In Uebereinstimmung mit Herrn B o c h o w finde ich, dass die Behandlung der regelmässigen Vielecke im Unterricht einen zweifachen Nutzen gewährt: erstens zur naturgemässesten Einführung in die Goniometrie und sodann zur Ausmessung des Kreises; zu den wohlzusammenhangenden r e c h n e r i s c h e n Entwicklungen des vorstehenden Vortrages möchte ich einiges A n s c h a u l i c h e hinzufügen.

I.

Zunächst ein anschauliches E x h a u s t i o n s v e r f a h r e n für die F l ä c h e n i n h a l t e. Ist demselben Kreise ein regelmässiges n-eck eingeschrieben und eins umgeschrieben, so lässt sich die Differenz der beiden Flächeninhalte wiederum als ein n-eck darstellen. (Zum Beweise braucht man bloss den für ähnliche Vielecke erweiterten Satz des Pythagoras: $\mu r^2 - \mu \varrho^2 = \mu s^2$). Mit zunehmender Seitenanzahl n sieht der Schüler die Flächendifferenz kleiner und kleiner werden [1]).

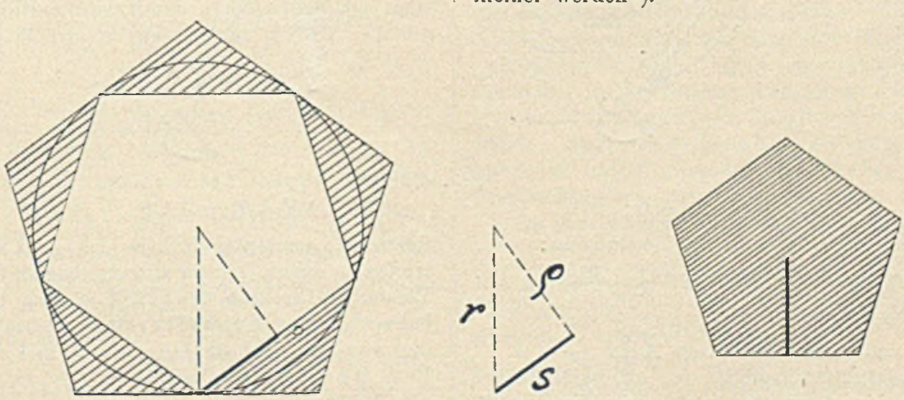

Fig. 1.

II.

Besonders lehrreich ist es, wenn man in wohlgeordneter Reihe für die konstruirbaren Sehnen- und Tangentenpolygone (etwa vom 2- bis zum 60-eck) die Halbumfänge als Strecken, die Vollflächen als Rechtecke wirklich zeichnen lässt: die Strecken abgeteilt in Radiuslängen, die Rechtecke in Quadratradien, und Bruchteile davon. (Dabei wird man mit Vorteil Millimeterpapier benutzen und den Kreisdurchmesser z. B. 100 mm lang nehmen; den Halbumfang eines Sehnen-n-ecks stellt man zunächst dar in der Verlängerung der ersten Vielecksseite, den Flächeninhalt erst als ein auf diese schiefe Strecke aufgesetztes Schiefeck, danach als ein Rechteck, das auf der Anfangstangente steht.) Lässt man jeden Schüler der Klasse nur eine oder zwei von diesen Figuren zeichnen und fügt dann alles zusammen, so gewinnt man mit leichter Mühe ein Lehrmittel, das mit überzeugender Kraft erkennen lässt, wie die Halbumfänge von innen und aussen her auf 3,14 Radiuslängen, die Vollflächen auf 3,14 Quadratradien losstreben.

III.

Aus dieser Reihe sind diejenigen rationalen Beispiele besonders hervorzuheben, welche als erste Eingrenzung bei der Rektifikation der Halbkreislinie und der Quadratur der Vollkreisfläche zu dienen haben. Nun sind für die Längenmessung am Kreis diese rationalen Grenzen allgemein gebräuchlich: drei Radiuslängen beträgt der Halbumfang des Sehnensechseckes, der Halbumfang des Tangentenquadrats ihrer vier, also die Halbkreislinie zwischen drei und vier Radiuslängen. Beim Kreisflächenmessen erwähnt man fast immer den oberen Grenzbetrag von vier Quadratradien = dem Inhalt des Tangentenquadrats; dagegen wird eine Veranschaulichung des untern Grenzwertes, von drei Quadratradien, in den Lehrbüchern meistens vermisst. Und doch lässt er sich aufs einfachste vor Augen führen: es ist nämlich der Inhalt des regelmässigen Sehnen-Zwölfecks.

Das kann man zwar auch rechnerisch beweisen (— denn allgemein enthält die Vollfläche des Sehnen-2n-ecks ebensoviel Quadratradien, wie der Halbumfang des Sehnen-n-ecks Radiuslängen —), weit einfacher jedoch durch ein blosses „Mosaikspiel", d. h. durch ein Zerschneiden in wenige Stücken und deren neue Zusammensetzung — ganz im Sinne von Prof. Traub[2]) oder Schönemann[3]), Heis-Eschweiler, und anderen Vorgängern, nämlich in dem Sinne Bhâskaras[4]), der statt alles Beweises nur sein Siehe! neben die Figur schrieb. Die Zwölfecks-Verwandlung erfolgt so[5]):

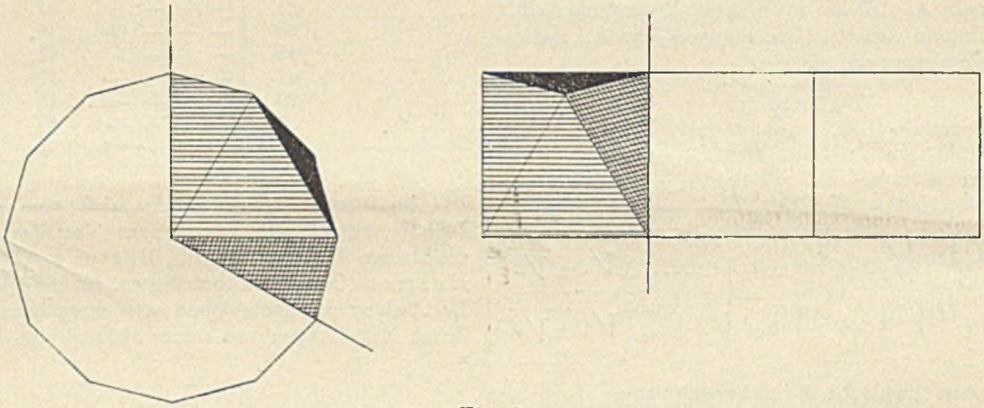

Fig. 2.

IV.

Die aufeinanderfolgenden Längen der Halbumfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmässigen Vielecke, oder nach beliebter Bezeichnung $e_6\ e_{12}\ e_{24} \ldots$ und $u_6\ u_{12}\ u_{24} \ldots$ kann man sehr einfach in Streckenform darstellen. Die Konstruktion gründet sich am kürzesten auf die beiden Elementarfiguren

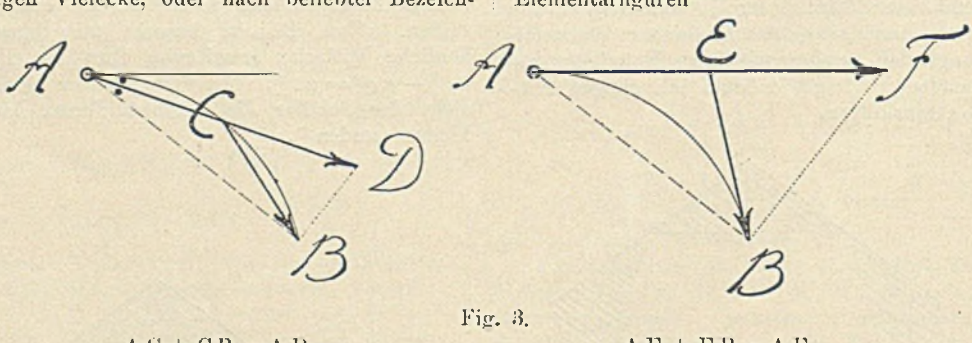

Fig. 3.

$AC + CB = AD$; $AE + EB = AF$.

und gestaltet sich z. B. für die Sechsteilung so:

$$AZ = e_{\infty} \text{ Radiuslängen} = u_{\infty} \text{ Rlgn.}$$
$$= \pi \text{ Rdlgn.}$$
$$= \text{der Halbkreislänge } \widehat{AH}.$$

Diese Konstruktion fand ich vor elf, zwölf Jahren und habe sie in Grunerts Archiv veröffentlicht.[6]) Doch bin ich leider nicht der erste, der hierauf verfallen ist: nachträglich habe ich ganz dasselbe angetroffen in einem (schwer aufzutreibenden) Heftchen des Wasserbau-Direktors Nehls[7]), ja schon bei dem Eisenbahn-Ingenieur Scheffler[8]) im Jahre 1849[9]). Ganz die nämliche Konstruktion fand und veröffentlichte Prof. Goering in Dresden[10]).

Man hat an diese harmlose planimetrische Darstellung weitgehende Spekulationen geknüpft[11]): es sei

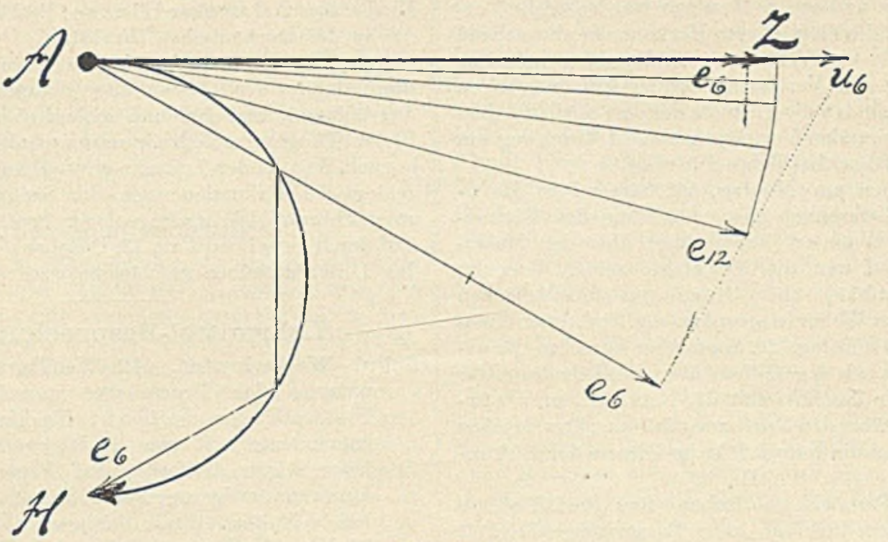

Fig. 4.

ratsam, mit ihrer Hilfe die Zahl π aus dem planimetrischen Unterrichte ganz hinauszutreiben. Das wird kaum geschehen. Zu dem Grundsatze gesunden Gleichgewichtes zwischen Anschauen und Denken bekennt sich grade der als Zeuge aufgerufene Geheimrat Felix Klein mit allem Nachdruck:

„Indem ich für das Recht der Anschauung im „Gebiete meiner Wissenschaft kämpfe, will ich die „Bedeutung der logischen Entwickelungen keineswegs „hintansetzen. Nur da findet die Mathematik (— man darf wohl zufügen: ebenso auch der mathematische Unterricht —) ihre volle Geltung, wo beide Seiten „nebeneinander zur Entfaltung kommen.“ [12]

So auch hier bei unsern Halbumfängen. Weil jene Konstruktion nichts anderes ist, als der planimetrische Ausdruck der goniometrischen Sätze [13]

$$\frac{u_n}{e_n} = \frac{1}{\varrho_n}; \quad \frac{e_{2n}}{e_n} = \frac{1}{\varrho_{2n}},$$

so besteht die belebende Kraft der obigen Konstruktion gerade darin, dass nun die Schüler beides, Hand in Hand ausführen können: erstens können sie numerisch auf einer Oktavseite ϱ_n, $\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1+\varrho_n}{2}}$, $\varrho_{4n} \ldots$, $e_n\, e_{2n}\, e_{4n} \ldots$, $u_n\, u_{2n}\, u_{4n} \ldots$ usw. bis zum π, berechnen; und zweitens können sie Schritt für Schritt jedes Zwischenergebnis an der leicht zu zeichnenden Figur vor sich sehen und nachmessen. Solche fortwährende Selbstkontrole durch die Anschauung muss ihnen das Vertrauen in die eigene Arbeit mächtig stärken.

[1]) Diese wenig bekannte Darstellung rührt her von Dufay 1727, (Cantor, Gesch. d. Math. III, S. 528).

[2]) K. Traub, Anhang zur 10. Aufl. von Spitz, Geometrie. 1899.

[3]) P. Schönemann, Mechanische Verwandlung der Polygone. Soest 1884.

[4]) Vergl. Hrm. Hankel, Zur Geschichte der Mathem. 1874, S. 205 u. 210.

[5]) Böttcher, Vorbereitung zur Kreismessung, in Frick's Lehrproben, IX, 1886.

[6]) Böttcher, Beliebig weit angenäherte π-Konstruktion Grunert-Hoppes Archiv, zweite Reihe, XII, 1894. Auch abgedruckt in den neueren Auflagen von Glinzers Lehrbuch der Planim. (Kühtmann).

[7]) Chr. Nehls, Ueber graphische Rektifikation. (Hamburg, P. Jenichen) 1882.

[8]) Hrm. Scheffler, Geometrische Näherungsmethode zur Rektifikation und Quadratur des Kreises. Grunert. XIII, 1849. (Dort mit trigonometrischen Reihen bewiesen.)

[9]) In etwas anderer Form findet sie sich sogar schon 1763, wahrscheinlich von Euler; siehe die Dingeldeysche Mitteilung in Schottens Zschr. math. U. XXXIII, 4 vom Juni 1902.

[10]) Wh. Goering, Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur. (Dresden-Schürmann) 1899.

[11]) Vergl. hierzu die Diskussion in der Hoffmannschen Zeitschrift XXXI. 1900, SS. 201, 300, 301.

[12]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1899. S. 128 oben.

[13]) Vergl. u. a. Mehlers Hauptsätze der Elem.-Math.

Vereine und Versammlungen.

74. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Karlsbad. Die vom 21. bis zum 26. September tagende Versammlung bot in ihrer Organisation das gleiche Bild wie die vorjährige Versammlung in Hamburg, die Zahl der Abteilungen war, ebenso wie die Verteilung der Fächer, der vorjährigen fast gleich; von 28 Abteilungen kamen 11 auf die naturwissenschaftliche, 17 auf die medizinische Hauptgruppe, nur in der letzteren war eine Abteilung (15) neugebildet worden, die der Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften gewidmet war, dabei aber, wie schon ihre Einreihung zeigt, fast ausschliesslich Vorträge aus dem Gebiete der Medizin aufwies.

Eine besondere Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht war auch diesmal nicht gebildet worden, von den angemeldeten Vorträgen stand nur einer (Grimsehl — Ueber den Voltaschen Fundamentalversuch) in näherer Beziehung zum Unterricht; selbstverständlich hatte auch eine sehr erhebliche Zahl der anderen Vorträge für den Unterricht ein indirektes, z. T. sehr grosses Interesse.

Wie in Hamburg, war ein Tag (Mittwoch, 24. September) einer Gesamtsitzung beider Hauptgruppen gewidmet, in der E. Suess (Wien) über das Wesen der heissen Quellen, W. Meyerhoffer (Berlin), über die chemisch-physikalische Beschaffenheit der Heilquellen, J. Ruff (Karlsbad) über David Becher, den Karlsbader Hippokrates (1725—1792) sprachen.

Am Donnerstag, 25. September folgten gemeinschaftliche Sitzungen einer jeden Hauptgruppe für sich. In der Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe, die Herr Nernst (Göttingen) leitete, trugen vor Koch (Göttingen) über Bodenbakterien und Stickstoff-Frage, Remy (Berlin) über Stickstoffbindung durch Leguminosen.

In den beiden allgemeinen Sitzungen am

Eröffnungstage und am Schlusstage wurden sechs Vorträge gehalten, die diesmal vom Herkommen abweichend zu zwei Dritteln von Vertretern der Naturforschung, zu einem Drittel von Vertretern der Heilkunde gehalten wurden. Doch boten die Themata der dem medizinischen Gebiete angehörenden Vorträge auch fast durchweg ein direkt naturwissenschaftliches Interesse.

Es sprachen am Montag, 22. September: Hofmeister (Strassburg) über den Bau des Eiweissmoleküls; M. Weber (Amsterdam) über den Malayischen Archipel und die Geschichte seiner Vorwelt; Voller (Hamburg) über Grundlagen und Methoden der elektrischen Wellentelegraphie (sog. drahtlosen Telegraphie). Am Freitag, 26. September sprachen Freiherr v. Eiselsberg (Wien) über die Bedeutung der Schilddrüse für den Haushalt der Natur; R. v. Wettstein (Wien) über den Neo-Lamarckismus; O. v. Miller (München) über die Naturkräfte im Dienste der Elektrotechnik.

Bei dem Festmahl gab insbesondere Prof. Voller (Hamburg) dem Gefühl der Zusammengehörigkeit zwischen den reichsdeutschen und den österreichischen Forschern deutscher Nationalität einen besonders lebendigen Ausdruck.

In der Geschäftssitzung am Mittwoch, 24. September wurde als Ort der nächstjährigen Versammlung Cassel gewählt, Geschäftsführer dieser Versammlung werden die Herren Dr. med. Rosenblath und Prof. Dr. Hornstein sein. Aus dem Vorstande der Gesellschaft scheidet Geheimrat Heubner aus, ihm folgt Prof. van't Hoff als erster Vorsitzender im nächsten Jahre, die dritte Stelle im Vorstand wird Herrn Dr. Ing. v. Hefner-Alteneck übertragen. Den Vorsitz in der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe übernimmt für nächstes Jahr Herr Nernst (Göttingen), die Stellvertretung in diesem Vorsitz Herr Penck (Wien).

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkursus zu Berlin vom 30. September bis 11. Oktober, unter Leitung des Provinzial-Schulrats Geh. Regierungsrats Dr. Vogel.

An Vorträgen sollen gehalten werden:

Prof. Dr. Wedding: Ueber Fortschritte der Beleuchtungstechnik mit besonderer Berücksichtigung der schulhygienischen Forderungen.

Prof. Dr. Miethe: Farbige Photographie durch additive Synthese. — Radioaktive Substanzen.

Dr. Ruff: Chemische Reaktionen bei hohen und tiefen Temperaturen.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Schwendener: Ueber den gegenwärtigen Stand der Descendenzlehre in der Botanik.

Prof. Dr. Branco: Vulkane und Erdbeben.

Dr. Süring: Wetterkarten und Wetterprognosen.

Dazu treten folgende Uebungen:

Oberlehrer Dr. Lüpke: Experimentalkursus über die wichtigsten Erscheinungen der theoretischen und praktischen Elektrochemie.

Dr. Graff: Abteilungsvorstand der Sternwarte Urania: Praktischer Kursus über astronomische Messungsmethoden.

Privatdozent Dr. Kolkwitz: Miskroskopischer und physiologischer Kursus über hygienisch und wirtschaftlich wichtige Mikroorganismen.

Oberlehrer Dr. Röseler unter Beihülfe eines Präparators: Uebungen in der Anfertigung zoologischer Präparate.

Mechaniker und Optiker Hintze: Praktische Uebungen in der mechanischen Werkstatt.

An Exkursionen sind in Aussicht genommen: Besichtigung der in der alten Urania veranstalteten Ausstellung botanischer und zoologischer Lehrmittel. — Besichtigung verschiedener wissenschaftlicher Institute, je nach Wunsch der Teilnehmer. — Einundeinhalbtägige geologische Exkursion nach der Sächsischen Schweiz unter Führung des Landesgeologen Prof. Dr. Potonié. Auf der Bastei wird am 12. Oktober der Kursus durch den Leiter desselben geschlossen werden.

Lehrmittel-Besprechungen.

Schul-Wetterkarten. 12 Wandkarten, unter Benutzung der Typen von van Bebber und Teisserenc de Bort für Unterrichtszwecke zusammengestellt von R. Börnstein. — Preis jeder Karte dreifarbig auf Papier Mk. 3; auf Leinwand aufgezogen mit Stäben Mk. 5 (Grösse 125 × 98 cm). Preis der ganzen Serie 30, bezw. 54 Mk. Verlag von Dietrich Reimer (Ernst Vohsen), Berlin SW.

Ein höchst verdienstliches Unternehmen, sehr willkommen namentlich in dem Augenblick, wo die Einführung der Schüler in ein gewisses Verständnis der praktischen Wetterkarte von oben her ausdrücklich empfohlen worden ist.

Nach der zunächst vorliegenden Probekarte No. 1 (Typus van Bebber I) kann man auch die Ausführung nur im höchsten Masse loben. Die Angaben der Karten sind auf weite Entfernung sehr gut sichtbar, sie zeigen in roter Farbe die Isothermen, in schwarzer die Isobaren und die meteorologischen Einzelsignaturen auf einem Grunde, der die zwischen 40 und 68° nördlicher Breite, 15° westlicher und 35° östlicher Länge liegenden Teile von Europa mit blauer Zeichnung der Meeresküsten aufweist. Die Karte hat Kreisform, das Gradnetz ist anscheinend das der reinen Kegelprojektion, wobei die Nordpartien in stärkerer Vergrösserung erscheinen, was ja natürlich hier nichts schadet.

Die Isothermen sind von 10 zu 10 Grad angegeben, die Isobaren in Abständen von 5 mm, dabei ist die Isobare 760 durch eine besonders starke Linie dargestellt, die Isobaren unter 760 durch punktierte Linien.

Eine wesentliche Erhöhung des Wertes für Lehrzwecke erfährt die Karte durch Hinzufügung zweier im halben Massstab der Hauptkarte ausgeführter Nebenkarten, die übrigens ohne die Isothermen die Wetterlage vor und nach dem Zeitpunkte der Hauptkarte darstellen. Jede Karte bringt nämlich das Bild einer ganz bestimmten Wetterlage, die vorliegende Karte das vom 8. Juli 1900, vormittags 8 Uhr, die beiden Nebenkarten das vom Vortage, abends 8 Uhr und das von demselben Tage, nachmittags 2 Uhr. Gerade durch diese Zusammenstellung wird die Vermittlung eines tieferen Verständnisses für die der Karte beigefügte Uebersicht über die Witterung nebst der daran anschliessenden Prognose der Seewarte sehr erleichtert.

Der vorliegende Prospekt zeigt zugleich, wie bei der Auswahl der Wetterkarten jede wichtigere Witterungsart Berücksichtigung finden wird. Neben dem kalten und regnerischen Tage, den die Karte No. 1 zur Darstellung bringt, finden sich die verschiedensten anderen Wettertypen, u. a. auch 11. Mai 1900 (Kälterückfall).

Die Vorzüge dieser Karten sind, nach dem vorliegenden Probeblatt zu urteilen, so erheblich, dass ihre Anschaffung jeder Anstalt auf das Angelegentlichste zu empfehlen ist. Es mag auch nicht als Beeinträchtigung dieses Lobes empfunden werden, wenn Referent eine kleine Ausstellung nicht unterdrücken kann. Die Umschrift um die Hauptkarte weist nämlich auch das Wort „Seegang" auf. In der Karte selbst ist davon aber nichts zu entdecken. P.

Bücher-Besprechungen.

H. Müller und **M. Kutnewsky**, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Teil II, 248 S., Preis Mk. 3.20. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

Die Zustimmung, welche der erste Teil der vorliegenden Sammlung in der Fachpresse fand, sicherte dem zweiten für die obersten Stufen der höheren Schulen bestimmten Teile im Voraus die Aufmerksamkeit der Fachkreise. Gerade auf dieser Stufe ist dem Lehrer ein mannigfaltiges, gründliches und modernen Anforderungen gerecht werdendes Aufgabenwerk sehr erwünscht und daher begreift sich die Erwartung, ob man diese dem ersten Teil zuerkannten Vorzüge bei dem zweiten Teil der Müller-Kutnewskyschen Sammlung wieder vorfinden würde.

Ein Durchblättern des vorliegenden Bandes zeigt, dass er sehr inhaltreich ist und eine grosse Auswahl der mannigfaltigsten Aufgaben aus allen, in den oberen Klassen zu behandelnden Gebieten bringt. Der Arithmetik sind 149, der Trigonometrie 81, der Stereometrie 70 und der Lehre von Koordinaten und Kegelschnitten 48 Seiten gewidmet.

Bei näherem Zusehen erkennt man dann, dass die sämtlichen Gebiete mit Gründlichkeit behandelt, und auch in diesem Teile die Planimetrie, die Physik und das praktische Leben bei der Aufstellung der Aufgaben berücksichtigt sind.

Dass wir bei den Gleichungen zweiten Grades auch zahlreiche Anwendungen auf die Planimetrie finden werden (S. 24 bis 32), ist selbstverständlich, aber es folgen auch sofort (S. 32 bis 36) solche aus der Physik und zwar nicht blos aus der Mechanik (über Wurf, Schwungkraft, Elastizität, Bodendruck), sondern auch aus der Optik. Bei den diophantischen Gleichungen finden wir mannigfache Anwendungen aus dem modernen Leben. Auch für die Ermittelung der grössten und kleinsten Werte ist (was recht selten ist) die Physik ausgiebig herangezogen in Aufgaben über Wurf, Stoss, Wasserräder, Bodendruck, Schleusen, magnetische Pole, elektrische Ladungen, Wärmemengen im Schliessungsbogen einer Kette, über Lichtstärke, Brechung und Regenbogen. Bei den arithmetischen Reihen treten wieder vielfache physikalische Aufgaben z. B. über Lufttemperaturen im Gebirge, die Erdwärme in der Tiefe usw. auf. Als ein nicht eben häufiger Vorzug erscheint es ferner, dass die Rentenlehre in der vorliegenden Sammlung durch wirklich brauchbare, nicht blos künstlich zusammenkonstruierte Aufgaben aus dem Leben dem Interesse des Schülers nahe gebracht wird. Da wird (S. 80 bis 102) der wirtschaftliche Wert der Grundstücke, Wälder, Fabriken, Güter, Häuser in Rechnung gezogen, mit Rücksicht auf Buch- und wirklichen Wert, auf Kursschwankungen, Bevölkerungsbewegung der Städte, Schwankungen des Kredits und der Erwerbsverhältnisse.

Es ist auch von einem modernen Aufgabenbuche zu erwarten, dass Versicherungen verschiedenster Form aufgenommen werden; das Versicherungswesen spielt staatlich wie privatim eine derartige Rolle, dass die Schule hier der Steigerung der Ansprüche im Leben gerecht werden muss. Auch dieser Pflicht wird das Müller-Kutnewskysche Buch gerecht, dieser Abschnitt allein sichert ihm eine Stellung unter den besten vorhandenen Aufgabensammlungen. Ich könnte so fortfahren und die physikalischen Aufgaben aus der Trigonometrie usw. zitieren, besonders auch die interessanten Anwendungen der Lehre vom Kugeldreieck auf die Nautik und Astronomie, will aber lieber auf etwas eingehen, was wichtiger ist, als alles bisher Gesagte, das ist die Methodik, die sich doch auch im Aufbau der Aufgaben jedes Abschnittes zeigen muss. Zunächst ist es für den Lehrer sehr erwünscht, dass er unter derselben Nummer eine Anzahl von Aufgaben findet, die in ihrer Schwierigkeit einander sehr nahe stehen, dass er also ohne Bedenken derartige aufgeben kann, wenn er sich überzeugt hat, dass die Schüler eine oder einige davon verstanden haben. Im Müller'schen Buche schreitet meist die Schwierigkeit fort, und zwar wird es dem erfahrenen Fachmanne bald klar, dass er beim allmählichen Vorwärtsgehen das Pensum in gründlicher Weise zur Behandlung bringt. Ueberall merkt man, dass der Verfasser, ohne es besonders zu sagen, vom Bedürfnisse des zusammenhängenden Unterrichtes ausgeht und danach den Unterrichtsstoff ordnet. Man hört gelegentlich wohl von Verfassern von Uebungsbüchern, es schade nichts, wenn der Schüler plötzlich einmal nach leichten auf eine sehr schwere, oder nach schweren auf eine ganz leichte Aufgabe stosse. Nun dies Vergnügen kann der Lehrer, wenn er will, dem Schüler auch nach dem vorliegenden Buche machen, indem er einfach nach schweren eine Aufgabe aus den Anfängen des Abschnittes aufgiebt oder umgekehrt; von einem Buche aber wird man gern die Ueberzeugung haben wollen, dass es selbst konsequent ist und dass man sich möglichst auf die anwachsende Schwierigkeit verlassen kann. Geissler (Charlottenburg).

* * *

Lesser, Oskar, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M., Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. X. u. 189 S. Mit 91 Figuren im Text. — Preis geheftet 2 Mk. Berlin, Otto Salle, 1902.

Die Verbesserungen, welche die Methode des geometrischen Unterrichts in neuerer Zeit erfahren hat, treten naturgemäss auch in den Lehrbüchern zu Tage, die auf diesem Gebiete in den letzten Jahren erschienen sind und noch erscheinen. Wie der geometrische Unterricht selbst mit der rein dozierend-synthetischen Methode von ehedem gebrochen hat, so sind die neueren geometrischen Lehrbücher darauf zugeschnitten, die Schüler von vornherein zur Selbstthätigkeit anzuleiten, indem sie den Lehrstoff im wesentlichen als Uebungsstoff behandeln. Dementsprechend vermeiden einzelne dieser Bücher geradezu den Namen „Lehrbücher" und nennen sich Aufgabensammlungen, Uebungsbücher usw.

Zu diesen letzteren gehört auch das vorliegende „Hilfsbuch". Es will kein dozierendes Lehrbuch sein, vielmehr ein Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht, das zwar den Lehrstoff nach bestimmten methodischen Gesichtspunkten als Uebungsstoff behandelt, trotzdem aber jedem Lehrer gestattet, seine Lehrmethode durchaus nach seiner Eigenart zu gestalten.

Das Hilfsbuch ist nicht eine Folgeerscheinung der neuen Lehrpläne von 1901, da das Manuskript bereits fertig gestellt war, noch bevor jene erschienen. Um so mehr verdient hervorgehoben zu werden, dass sich das Buch dennoch in voller Uebereinstimmung mit den neuen Lehrplänen befindet. Zwar geht es nicht, wie die Lehrpläne vorschreiben, von der Betrachtung einfacher Körper aus, vielmehr führt der Unterricht die Schüler hinaus auf einen Berg oder Aussichtsturm und lässt aus der Anzahl der Punkte am Horizonte die Anzahl der Richtungen durch den Standort des Beobachters bestimmen, danach die Gerade als Richtung, den Punkt als Schnittort zweier Geraden definieren. Aber die Aufgaben und das Konstruieren stehen im Vordergrunde, aus den Aufgaben erst ergeben sich die Sätze. Nach diesem Prinzip — erst die Aufgabe, dann Satz und Beweis — ist der Lehrstoff für die Unter- und Mittelstufe bearbeitet, bei dem Pensum der Oberstufe musste davon abgegangen werden. So lernt der Schüler frühzeitig Zirkel und Lineal gebrauchen, Figuren betrachten und ihre Eigentümlichkeiten beobachten, und findet selbstthätig durch Zeichnen und Konstruieren die Sätze. Diese werden hinterher zusammengestellt und streng bewiesen, sodass trotz der induktiven Methode auch das streng syllogistische Beweisverfahren zu seinem Rechte kommt, ohne dass die Beweise rein synthetisch gefunden werden.

Der Begriff der Symmetrie, die Lage zur Symmetrie-Achse, räumliche Verschiebungen und Drehungen, das Umklappen von Figuren oder von Teilen derselben finden ausgiebige Verwendung. Von vornherein wird der Schüler zur Bestimmung der Lage eines Punktes aus seinen geometrischen Oertern und zur Lösung der Konstruktionsaufgaben durch die Methode der geometrischen Oerter angeleitet; die wichtigsten geometrischen Oerter werden in einem Anhange zusammengestellt. Zur Lösung der Aufgaben und zum Beweise der Sätze sind in verschiedenster Weise Anleitungen und Andeutungen gegeben, sei es durch Hinweis auf Sätze und Konstruktionsaufgaben, sei es durch Vorbemerkungen und direkte Winke. An die wichtigsten Sätze, die durch den Druck hervorgehoben sind, schliessen sich noch zahlreiche Uebungs- und Erweiterungssätze an. Ueberhaupt ist der Lehr- und Uebungsstoff ausserordentlich reichhaltig bemessen. Dies gilt insbesondere auch für das Pensum der Obersekunda, in welchem u. a. zu den gewöhnlich nur behandelten vier merkwürdigen Punkten im Dreieck noch die Punkte von Nagel, Gergonne und Lemoine hinzutreten.

Referent hat das Hilfsbuch mit grossem Interesse durchgesehen, nur würde ihm statt der in Kap. XIV angegebenen Berechnung des Kreisumfanges das Verfahren zweckmässiger erscheinen, das sich u. a. in „Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik“ findet, bei dem die zu berechnenden Ausdrücke eine ungleich bequemere logarithmische Rechnung zulassen.

Die Ausstattung des Buches, der Druck des Textes und der in denselben eingefügten Figuren ist eine sehr sorgfältige. So glaubt Referent sein Gesamturteil dahin zusammenfassen zu dürfen: Das Hilfsbuch von Lesser verdient in jeder Beziehung wärmste Empfehlung und weiteste Verbreitung.

Knake (Nordhausen).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Alsberg, M., Die Abstammung des Menschen und die Bedingungen seiner Entwickelung. Cassel 1902, Fisher & Co. Mk. 3.20.

Auerbach, F., Die Weltherrin und ihr Schatten. Ein Vortrag über Energie und Entropie. Jena 1902, Fischer. Mk. 1.20.

Bachmann, Fr. u. Kanning, R., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 6. Heft Mk. 1.— geb. 7. Heft Mk. 1.40 geb. 2. Auflage. Leipzig 1902, Freytag.

Bauerreiss, Ferienaufgaben aus der Planimetrie. Würzburg 1902, Stahel. Mk. 1.— geb.

Bettazzi, R., Aritmetica razionale ad uso dei ginnasi. Torino 1902, Tipografia Salesiana.

Bohnert, F., Elementare Stereometrie. Mit 119 Fig. (Sammlung Schubert IV). Leipzig 1902, Göschen Mk. 2.40 geb.

Bork, H. u. Poske, F., Hauptsätze der Arithmetik. 4. Aufl. Berlin 1902, Rockenstein. Mk. —.80 geb.

Brüsch, W., Grundriss der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen. Leipzig 1902, Teubner. Mk. 3.— geb.

Buckendahl, A., Lehrbuch für den Unterricht in der anorganischen Chemie. 3. Auflage. Mit Abb. Gotha 1901, Perthes. Mk. 2.40 geb.

Carvallo, E., L'Électricité déduite de l'Expérience et ramenée au principe des travaux virtuels. (Scientia No. 19). Paris 1902, Naud.

Chun, C., Aus den Tiefen des Weltmeeres. Schilderungen von der deutschen Tiefsee-Expedition. 2. Aufl. 1. Liefg. Mk. 1.50. Jena 1902, Fischer.

Dahl, Fr., Das Tierleben im deutschen Walde nach Beobachtungen im Grunewald. (Eine Anwendung der biocentrischen Lehrmethode). Mit 15 Abb. Ebenda. Mk. 1.—.

Doehlmann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. 2. Aufl. Mit 85 Fig. (Sammlung Goeschen No. 72). Leipzig 1902, Goeschen. Mk. —.80 geb.

Dziobek, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Teil. Analytische Geometrie des Raumes. Mit 30 Fig. Braunschweig 1902, Graff. Mk. 6.—.

Edert, R. u. Kröger, M., Geometrie für Mittelschulen und verwandte Anstalten. 1. Heft: Vorkursus und Planimetrie, I. Teil. Mk. 1.— kart. 2. Heft: Planimetrie, II. Teil und Stereometrie. Mk. 1.— kart. Mit Figuren. Hannover 1902, Meyer.

Effert, G., Mathematische Geographie für Gymnasien. Mit 17 Fig. Würzburg 1902, Stahel. Mk. 1.— geb.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale, IVme Année, No. 3—5. Paris 1902, Naud.

Ernecke, J., Preisliste No. 18 über Physikalische Apparate. Berlin 1902, Selbstverlag.

Fitting, Fr., Ein Anordnungsproblem. Druck von Teubner, Leipzig 1902,. Prgr. d. Gymn. zu M.-Gladbach 1902, No. 494.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1901, dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 57. Jahrg. 1. Abteilung (Physik der Materie) redig. von Karl Scheel. II. Abt. Physik d. Aethers, redig. v. K. Scheel. III. Abt., Kosmische Physik, redig. von R. Assmann, Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. Mk. 17.—.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1902, Halbmonatliches Literaturverzeichnis, redig. von K. Scheel u. R. Assmann. Ebenda. No. 13—18.

Geissler, K., Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1902, Teubner.

Griep, M., Kleine Rechts- und Bürgerkunde. Ebenda. Mk. 1.40.

Griesbach, M., Gesundheit und Schule. Ebenda. Mk. —.80.

Grujic. Sp., D., Das Wesen der Anziehung und Abstossung. Berlin 1902, Peters.

Güntsche, R., Ein allgemeiner Beweis f. d. Additonstheorem der trigonometrischen Funktionen. Sonderabdruck aus der Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr. Jahrg. XXXIII, Heft 3; 1902.

Haas, H., Katechismus der Geologie. 7. Aufl. Mit 186 Abb. u. 1 Tafel (Webers illustr. Katechismen No. 42). Leipzig 1902, Weber. Mk. 3.60 geb.

Haussner, R., Darstellende Geometrie. 1. Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Mit 100 Fig. (Sammlung Goeschen No. 142). Leipzig 1902, Goeschen. Mk. 0.80.

Holzmüller, G., Elemente der Stereometrie. 3. Teil: Die Untersuchung und Konstruktion schwieriger Raumgebilde. Mit 126 Fig. Ebenda. Mk. 9.—.

Jaekel, O., Ueber verschiedene Wege phylogenetischer Entwickelung. Mit 28 Fig. Jena 1902, Fischer. Mk. 1.50.

Junker, Fr., Höhere Analysis. 2. Teil: Integralrechnung. Mit 89 Fig. 2. Aufl. (Sammlung Goeschen No. 88), Leipzig 1902, Goeschen. Mk. 0.80 geb.

—, — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Mit 50 Fig. (Sammlung Goeschen No. 147), Ebenda. Mk. 0.80 geb.

—, — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Mit 42 Fig. (Sammlung Goeschen No. 146). Ebenda. Mk. 0.80 geb.

Kiessling, J., Leitfaden f. d. Unterricht i. d. Experimental-Physik; nach dem Lehrbuch der Physik von E. Budde bearbeitet. Berlin 1902, Parey. Mk. 5.50.

Kinkelin, H., Quadraturen. Basel 1902, Schwabe. Mk. 1.60.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.