Jahrgang IX. 1903. Nr. 2.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von Bernhard Schwalbe,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Tagesordnung der XII. Hauptversammlung zu Breslau, Pfingsten 1903.

Montag, 1. Juni, abends 8 Uhr: Geselliges Beisammensein in Böttchers Festsälen, Neue Gasse 15.

Dienstag, 2. Juni, vormittags 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung in der Aula des Gymnasiums und Realgymnasiums zum Heiligen Geist, Kaiserin-Augusta-Platz 1.

Eröffnung und Begrüssung. — Geschäftliche Mitteilungen.
Vortrag von K. Geissler (Charlottenburg): Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterricht.
Diskussion über den Gegenstand des Vortrags.

11 $^1/_2$—12 Uhr: Frühstückspause.
12—2 Uhr: Abteilungssitzungen.
Nachmittags: Besichtigungen.
Abends 6 Uhr: Festmahl in Hansens Weinstuben, Schweidnitzer Strasse 16—18.
(Preis des trockenen Gedecks: 4 Mk.)

Mittwoch, 3. Juni, vormittags 9 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Vortrag von F. Pietzker (Nordhausen): Der exaktwissenschaftliche Unterricht in der Schulreformbewegung.
Diskussion über den Gegenstand des Vortrags.

11—11 $^1/_2$ Uhr: Frühstückspause.
11 $^1/_2$—2 Uhr: Abteilungssitzungen.
2—3 Uhr: Mittagspause.
Nachmittags: Besichtigungen.
Abends 8 Uhr: Gemütliches Beisammensein im Pschorr-Bräu, Schweidnitzer Strasse 36.

Donnerstag, 4. Juni, vormittags 9 Uhr: Dritte allgemeine Sitzung.

Vortrag von W. Krebs (Münster i. O.-Elsass): Der naturgeschichtliche Unterricht an den Realanstalten Elsass-Lothringens.
Fortsetzung der Diskussionen der beiden ersten Versammlungstage.

11—11 1/2 Uhr: Frühstückspause.

11 1/2 Uhr: Geschäftliche Sitzung: Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Hansen, Pietzker und B. Schmid. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Beschluss über etwaige Vertretung des Vereins auf der diesjährigen Naturforscherversammlung. — Neuordnung der dauernden geschäftlichen Vereinsausgaben. — Sonstige geschäftliche Anträge.

Nachmittags: Besuch des Zoologischen Gartens.

Freitag, 5. Juni: Weitere Ausflüge nach Wahl (Zobten; Fürstensteiner Grund; Schneekoppe.)

Angemeldete Abteilungsvorträge:

Ebner (Breslau): Die Schubkurbel, ein Kapitel aus der angewandten Mathematik.
Franz (Breslau): Thema vorbehalten.
Grimsehl (Hamburg): Mechanische Kraft und Kraftübertragung.
Hahn-Machenheimer (Berlin): Physikalische Schülerübungen.
Krebs (Münster i. O.-Elsass): Die Regelation im Lichte der Versuche Faradays und als Gegenstand des Schulunterrichts.
Vogt (Breslau): Ueber die Herleitung der Formel für das Pyramidenvolumen.
Vorschläge zur Durchführung der Düsseldorfer Beschlüsse hinsichtlich des biologischen Unterrichts:
a) an humanistischen Gymnasien, Referent: B. Landsberg (Allenstein).
b) an neunklassigen Realanstalten, Referent: K. Fricke (Bremen).
c) an Realschulen, Referent: B. Schmid (Zwickau).

Für Besichtigungen sind in Aussicht genommen:

Die naturwissenschaftlichen Universitätsinstitute. — Schulmuseum. — Botanischer Schulgarten. — Städtischer Hafen. — Werft von Cäsar Wollheim. — Brauerei von Haase.

Das Anmeldebureau wird am Montag, nachmittags von 6 Uhr ab in Böttchers Festsälen, Neue Gasse 15, an den folgenden Tagen im Gebäude des Gymnasiums und Realgymnasiums zum Heiligen Geist, Kaiserin-Augusta-Platz 1 geöffnet sein.

Als Absteigequartiere werden empfohlen die Hotels: König v. Ungarn, Bischofstrasse 13; Schlesischer Hof, Bischofstrasse 4/5; Deutsches Haus, Albrechtstrasse 22; Hotel zur Post, Albrechtstrasse 28/29; Bayerischer Hof, Zwingerplatz 3; Goldene Gans, Junkernstrasse 14/15.

Wie alljährlich, wird sich der Vereinsvorstand auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der deutschen Staaten mit der Bitte wenden, den Leitungen der einzelnen Anstalten eine wohlwollende Berücksichtigung der behufs Teilnahme an unserer Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche zu empfehlen. Es ist zu hoffen, dass diese Bitte, wie es bisher regelmässig geschehen ist, auch in diesem Jahre Gewährung finden wird.

Der Hauptvorstand — **Der Ortsausschuss.**

Pietzker. — Maschke.

Das Zeichnen in seinen Beziehungen zum naturwissenschaftlichen und zum erdkundlichen Unterricht.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf*)

Von Wilhelm Krebs (Barr i. E.)

Der Gegenstand der folgenden Ausführungen ist das Zeichnen nicht an sich, sondern nur in seinen Beziehungen zu den naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Fächern des Sachunterrichts. Die Streitfragen über den allgemeinen Bildungswert des Zeichenunterrichts und über die Art und Ausdehnung seines Betriebes sind damit eigentlich ausgeschlossen. Immerhin lassen sich in ihrer zu einer umfangreichen Literatur angewachsenen Erörterung Beziehungen allgemeinerer Art zu der Methodik des Sachunterrichts finden, durch welche die weiter zu behandelnden engeren und besonderen Beziehungen von vornherein eine scharfe, ihren Wert kennzeichnende Beleuchtung erfahren.

*) S. Unt.-Bl. VIII, 3, S. 65.

Ich führe sie an mit den Worten zweier Führer der neuzeitlichen Reformbewegung im Zeichenunterricht, des Deutschen Fedor Flinzer und des Amerikaners Liberty Tadd.

Flinzer verlangt: „Das Volk soll befähigt werden, die Sprache der Formen und Farben nicht nur zu verstehen, sondern auch sie selbst zu sprechen. . . . Mit vollem Bewusstsein soll es geniessen, was Kunst und Natur ihm an grossem und schönem bietet, mit einem Worte, es soll sehen, schaffen und geniessen mit denkendem Auge.“ [1])

Tadd schliesst: „So hat denn das Zeichnen als ein Ausdrucksmittel den grössten erziehlichen Wert. Das Bild gibt von einer Sache eine stärkere, intensivere Anschauung als Worte“ . . .[2]) und ferner: „Zeichnen muss zum Gedankenausdruck ebenso oft wie Sprechen und Schreiben benutzt werden.“ [3])

Das gilt unzweifelhaft für eine wichtige aktive Beziehung oder Hilfe des Zeichnens zum Betrieb naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterrichts. Das Zeichnen bietet dem Lehrer eine besondere, in vielen Fällen unersetzliche Form des Ausdrucks. Der freihändige Entwurf eines Blütendiagramms im botanischen, einer Profilzeichnung im erdkundlichen Unterricht, wie sie jeder Lehrer bei hinreichender Vorbereitung und Sorgfalt liefern kann, eröffnet verwickelte Verhältnisse oft erst dem vollen Verständnis seiner Schüler.

Der durch derartige, im Entstehen beobachtete Skizzen und überhaupt durch Anschauungsbilder den Schülern gebrachte Vorteil darf aber nicht überschätzt werden. Nie sollen sie, wenn ein solches zu haben, das lebende oder auch tote Naturobjekt beim biologischen und mineralogischen, noch den anschaulichen Versuch oder den direkten Einblick in die Praxis der Technik beim chemischen und physikalischen Unterricht ersetzen. Mit der Benutzung einer jeden fremden Zeichnung oder Malerei ist mehr oder weniger ein Sehen durch fremde Augen verbunden. Umsomehr muss dies gelten, je einfacher und schematischer solche Vorlagen gehalten sind.

An rechter Stelle verwendet, können solche Vorlagen aber als Reizmittel des Interesses zur Sache und ferner zum Selbstzeichnen sehr wohltätig wirken.

In diesem Zeichnen der Schüler, für den naturwissenschaftlichen wie für den erdkundlichen Unterricht, möchte ich vor allem auch selbst ein Reizmittel erkennen.

Eine Zeichnung, und vorzugsweise gilt das von den Kartenzeichnungen, enthält immer die Nötigung für den Zeichnenden, in den notwendigen Zügen vollständig zu sein. Jede Unklarheit und jeder Mangel starrt augenfällig als Lücke entgegen, so gewandt auch das Wort bei mündlicher Erklärung darüber hinwegzugleiten vermag. Daraus folgt in notwendiger Entwicklung die Nötigung, wiederholt zu vergleichen, den zu zeichnenden Gegenstand also auf Einzelheiten hin nochmals anzusehen. Es folgt daraus ferner die Nötigung, die notwendigen Züge des betrachteten Gegenstandes erst herauszufinden, also zu schematisieren. Lehrreiche Beispiele in allen drei Hinsichten bieten aus dem biologischen Unterricht die von Geheimrat E. Wagner in der Zeitschrift „Natur und Schule" angeführten Gedächtniszeichnungen des Rabenschädels und des Aesculus-Blattes,[4]) aus der Botanik ferner die beliebten Blütendiagramme, durch deren Einübung aber unter keinen Umständen die beschreibende Beobachtung am Naturobjekt beeinträchtigt werden darf, aus der Naturlehre der schematische, nicht parallelprojektive Entwurf von Apparaten, der dem naturalistisch-perspektivischen schon aus Rücksicht auf die verfügbare Zeit vorzuziehen ist,[5]) aus dem Kartenzeichnen der Erdkunde besonders die Gebirgszeichnungen, für die von manchen Seiten sogar einfache Striche vorgeschlagen werden.[6])

Der erziehliche Einfluss des Selbstzeichnens, der bis zu seiner ethischen Wirkung hin in Tadd einen beredten Vertreter gefunden hat,[7]) gehört mehr zu den Fragen des eigentlichen Zeichenunterrichts. Doch verlangt jedenfalls eine sehr hoch zu veranschlagende Wirkung hier angeführt zu werden. Es ist die Gelegenheit, die das Zeichnen im Sachunterricht einzelnen einseitig beanlagten Schülern bietet, endlich auch einmal etwas zufriedenstellendes oder noch mehr zu leisten. Dies ist mir vor allem bei dem Kartenzeichnen, wie ich es im erdkundlichen Unterricht betreiben lasse, wiederholt entgegengetreten. Ich habe schwächeren Schülern die Zeugnisse deshalb aufbessern können, umsomehr als die gewandtere Hand in diesen Fällen die Gewähr gab die dem ungeübten Sprachvermögen versagt blieb, dass, nämlich der Schüler tatsächlich sich bemüht hatte, das topographische Bild der Atlaskarte zu lesen, und dass er es einigermassen verstanden hatte.

Der moralische Einfluss solchen gelegentlichen Lobes ist erfahrungsgemäss nicht zu unterschätzen. Manchmal vermag es vorher unfruchtbaren Boden geradezu aufzuschliessen.

Die eben angeführten Beispiele gelten noch für eine andere Hilfe, die vom Zeichnen dem erdkundlichen und dem naturwissenschaftlichen Unterricht geleistet wird. Das Zeichnen der Schüler ist ein Mittel zu leichter, schneller und doch recht scharfer Kontrolle des Masses, bis zu welchem während des Unterrichts Verständnis und Anschauung der Schüler gereift sind.

Im erdkundlichen Unterricht kann es nach meiner später zu erläuternden Methode gehandhabt werden zu stetiger Kontrolle des der Selbsttätigkeit der Schüler als wichtigste Aufgabe gestellten Kartenlesens. Die nach einer gegebenen Anleitung immer wiederkehrende Forderung, auch das Terrain und besonders den Gebirgsbau nach der Atlaskarte in seinen Hauptzügen, also schematisch, zu kartieren, führt zugleich zu einer Kontrolle der Ausbildung in diesem schwierigsten Kapitel topographischen Verstehens. Von anderer Seite werden sogar Kartenextemporalien empfohlen, um einen sicheren Anhalt über den Gesamtertrag an geographischem Wissen zu gewinnen.[8])

In der Mineralogie findet die zeichnende Methode wenig Raum. Die Krystallographie, die vor allem in Betracht kommen würde, arbeitet besser mit den Anschauungsmitteln körperlicher Modelle. Schwierigere Achsenverhältnisse, wie z. B. die Unterscheidung des mono-, di- und triklinen Systemes, lassen sich auch an der Wandtafel leicht kontrollieren erst unter Zuhilfenahme der dritten Raumdimension.

In der Physik und Chemie kommen für die Kontrolle, schon aus Rücksicht auf die Zeit, nur die schematischen Skizzen der Anordnung durchgenommener Versuche in Betracht.

In der Biologie sei gestattet, auf zwei Gegenstände noch weiter einzugehen, auf Blütendiagramme und Skizzen nach mikroskopischen Beobachtungen.

Vor einer weitgehenden Forderung an die Schüler, Blütendiagramme zu entwerfen, habe ich schon oben gewarnt. Meine absprechende Meinung habe ich hauptsächlich aus eigenen Versuchen, sie zur Kontrolle zu verwenden, geschöpft. Sie erfordern eine bestimmte Einübung, zu der schematische Vorzeichnungen des Lehrers notwendig sind. Und zwar sind nicht allein Blütengrundrisse nötig, sondern unumgänglich für das Verständnis wichtiger Fragen (Unterschied des Blütenbaues von Rosifloren und Ranunculaceen, Bau zygomorpher Blüten etc.) auch Aufrisse.[9]) Das erfordert aber sehr viel Zeit, zumal diese Vorübungen nur in den untersten Klassen ihren Zweck erfüllen. Das Ergebnis war meist eine rein mechanische, vom wirklichen Blütenbau abstrahierende Erarbeitung, die zur freien Verwendung für Zwecke der Kontrolle sich mehrfach als so ungeeignet erwies, dass ich schliesslich ganz davon Abstand nahm, solche Zeichnungen von Schülern zu verlangen.

Das mikroskopische Sehen zu üben, kann an modernen höheren Schulen nicht mehr vermieden werden. In den einschlägigen Universitätskursen ist dem schematischen Nachzeichnen mikroskopischer Bilder, vor allem zur Selbstkontrolle, eine grosse, wonicht ausschlaggebende Bedeutung beigemessen. Es pflegt so innig damit verbunden zu werden, dass schon deshalb ein annähernd gleiches Verfahren für den Schulunterricht mehr als wünschenswert erscheint. Erschwert wird es zwar durch verschiedene Einstellung der Augen, dafür sehr erleichtert dadurch, dass es sich um die Auffassung und zeichnerische Uebertragung fast rein flächenhafter Formgebilde handelt.

Auf die Notwendigkeit dieser Verbindung des kontrollierenden Zeichnens mit dem Mikroskopieren scheinen mir Erfahrungen zu sprechen, die ich beim warenkundlichen Unterricht in 2 R der Barrer Realschule gemacht habe. Im verflossenen Schuljahr fixierte ich sie durch eine systematische Versuchsreihe, von der ich den grössten Teil schliesslich auf dem vorgelegten Blatt in den Originalskizzen der 12 Sekundaner zusammengestellt habe.

Es handelte sich um die sicherlich nicht schwer verständlichen Bilder der hauptsächlichsten Pflanzenfasern:

Baumwolle, Flachs, Jute, Hanf und Kokosfaser.

Der Unterricht ging in der Weise vor sich, dass die mikroskopischen Bilder bei 100—200 facher Vergrösserung in scharfer Einstellung vorgeführt und nach der Beobachtung von den Schülern sogleich auf ein Blatt skizziert wurden. Die Blätter wurden danach eingesammelt. Erst dann wurde die schematische Zeichnung korrekt an der Wandtafel entworfen, auf Fehler der einzelnen Schülerzeichnungen aufmerksam gemacht und die Klasse nunmehr zu nochmaliger mikroskopischen Beobachtung zugelassen.

Das Ergebnis war äusserst lehrreich.

Wenn die vollkommen richtigen ausgeschieden werden, so blieben als falsch übrig von je 12 Skizzen

bei Baumwolle,	Flachs,	Jute,	Hanf,	Kokosfaser
11 = 93%	8 = 66%	11 = 92%	3 = 25%	1 = 8%

Die einzige richtige Skizze der Baumwollfaser rührte von einem Schüler her, der allein von allen den vorjährigen Unterricht genossen hatte. Zwei Skizzen liessen erkennen, dass die Schüler den richtigen Typus wenigstens geahnt hatten.

Um so auffallender ist das sekundäre Fehlermaximum bei der an dritter Stelle durchgenommenen Jutefaser. Bei genauer Diskussion der 11 fehlerhaften Skizzen stellt sich aber heraus, dass sechs nur deshalb fehlgeschlagen waren, weil Eigenschaften der vorher durchgenommenen Flachsfaser irrtümlich in das neue Bild übertragen waren, und zwar

3 mal die Querbrüche
2 mal der mediane Kanal
1 mal die drehrunde Gestalt.

Also ein ganz auffallender und zweifelloser Fall der Autosuggestion! Ohne ihn würde die Kurve der Fehler stetig abwärts verlaufen sein. Auch kam nach der daraufhin geübten Korrektur der gleiche Fehler bei der der Jutefaser an Schwierigkeit gleichstehenden Kokosfaser nicht wieder vor, ein Umstand, der den wohltätigen Einfluss zeichnerischer Kontrolle ohne weiteres hervortreten lässt. Ohne jene neu erworbenen Fehler würde überdies die Fehlerabnahme stetig gewesen sein.

Ergänzend darf ich wohl hinzufügen, dass ähnliche Schwierigkeiten des mikroskopischen Erkennens sich schon der Seiden- und der Wollfaser gegenüber eingestellt hatten. Damals liess ich die Zeichnungen an der Wandtafel entwerfen, von dem ersten abtretenden Schüler, und von den folgenden verbessern. Keiner brachte beispielsweise den schuppigen Bau der Oberfläche der Wollfaser heraus.

Gesunde Wechselwirkung der einzelnen Fächer in einem einheitlichen Unterricht bringt es mit sich, dass ein jedes Fach für Hülfen, die es einem andern leistet, reiche Zinsen zurückerstattet erhält. Der von Herbart aufgestellte Begriff der Konzentration des Unterrichts muss in diesem Blick als ideale Krönung eines Schulunterrichts erscheinen. Ich kann mich nicht enthalten, ihn auch an dieser Stelle als das beste, wo nicht einzige Sanierungsmittel in der Vielgestaltigkeit des modernen Schulunterrichts anzusprechen.

Wechselwirkung des Zeichnens mit den Hauptfächern des Sachunterrichts tritt ohne Weiteres entgegen. Den aktiven Beziehungen des Zeichnens laufen passive parallel. Das Zeichnen gibt nicht allein, sondern die zeichnerische Ausbildung ist leicht in der Lage, eigene Förderung für ihr Eingreifen zurückzuerhalten.

An dieser Stelle muss zunächst gestreift werden, was Zeichnen und Malen in künstlerisch-methodischer Hinsicht von den Naturwissenschaften erwarten dürfen. Ist auch im Schulunterricht für die eigentliche Kunst-Erziehung kein Raum, nur für eine Vorbereitung derselben im Sinne Bastian Schmid's [10]), so wird doch eine rege und umsichtige Verknüpfung des Zeichnens mit unseren Schulfächern manchem entlassenen Schüler kräftigen Anlass zur Fortsetzung dieser Verbindung in seinem weiteren Bildungsgange mitgeben können.

Die Vorbildung zu einem ästhetischen Verstehen der Pflanzen- und Landschafts-Formen und -Farben, wie sie Schmid vom botanischen Unterricht erwartet, — natürlich aber nur erwarten kann, wenn dieser zu fleissigen Ausflügen führt —, wird sicherlich in weiterer Zukunft auf die Landschafts- und Blumenmalerei günstig zurückwirken können.

Aus meiner eigenen Unterrichtspraxis könnte ich einen früheren Schüler von entschieden malerischer Veranlagung anführen, den der faunistisch-zoologische Unterricht nicht zum Schaden seines Talents die wunderbare Formen- und Farbenwelt in den sonst recht abseitsliegenden Ordnungen der urodelen Amphibien und der Käfer erst entdecken liess.

Der Wert anatomischer Vorstudien für Figuren- und Porträtzeichnen und -malen und für verwandte Gebiete der plastischen Kunst ist allgemein und längst anerkannt. Auch für Zeichnungen und Gemälde von Tieren werden sie wohl von den massgebenden Seiten als unerlässlich angesehn. Jedenfalls erinnere ich mich aus dem Verkehr mit Flinzer, der mir als jungem Studenten der Zoologie vergönnt war, dass er für sein malerisches Spezialfach, die Tier-, im engsten Sinne die Katzenmalerei, sehr grossen Wert darauf legte, sich über die Zootomie, bis herab zu Einzelheiten des Knochengerüstes, zu unterrichten.

Von geologischer und meteorologischer Seite wurde seit den 80er Jahren Stellung genommen gegen die konventionelle Naturwidrigkeit gewisser Züge (Berg- und Wolkenformen und -färbungen) damals moderner Methoden der Landschaftsmalerei. [11])

Nach diesem Ausblick in das Höhengebiet der reinen Kunst und Wissenschaft, kehre ich zurück zu Fragen unserer unterrichtlichen Tagesarbeit. Vor allem von den biologischen Fächern dürfte da die zeichnerische Ausbildung manchen Vorteil zurückzuerwarten haben.

Ich erwähne da die Sanierung des in seiner konventionellen Erstarrung vielfach geradezu verpönten Baumschlags und die Zeichnung von Baumformen nach der Natur und aus dem Gedächtnis. Um so strengeren Anforderungen wird sie entsprechen, je klarer der Einblick in die grundlegenden morphologischen und anatomischen Verhältnisse gewonnen und je verständnisvoller demzufolge das Naturobjekt betrachtet worden ist.

(Schluss folgt.)

Anmerkungen.

1) F. Flinzer, Lehrbuch des Zeichenunterrichts an deutschen Schulen. 5. Auflage. Bielefeld und Leipzig 1896. S. 59.

2) J. L. Tadd, Neue Wege zur künstlerischen Erziehung der Jugend. Für Deutschland herausgegeben von der Lehrervereinigung für die Pflege der künstlerischen Bildung in Hamburg. Leipzig 1900. S. 183.

3) Tadd a. a. O. S. 10.

4) Natur und Schule. Berlin und Leipzig 1902. S. 31—33.

5) Solche schematischen Zeichnungen enthält als Abbildungen u. a. F. Pietzker's Einführung in die Chemie und Mineralogie. Leipzig 1901.

6) K. Hassert, Das Kartenzeichnen im geographischen Unterricht (Sonderabdruck aus dem Neuen Korrespondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, Jahrgang 1901, Heft 10—12). Stuttgart 1901. S. 29, 30. Vergl. auch Seidlitz, Schulgeographie. Breslau.

7) Tadd a. a. O. S. 9—12.

8) Hassert (a. a. O.) berührt in seiner zusammenfassenden Schrift diese wichtige Verwendungsart des Kartenzeichnens nicht, obgleich die gelegentliche Erwähnung von Kartenzeichnen aus dem Gedächtnis (S. 11, 12, 24) das nahegelegt hätte. Im Gebrauch war sie nach meiner persönlichen Erfahrung hin und wieder an Altonaer und Strassburger Gymnasien, dort in Gradnetzen des Debes'schen Kartenatlas, hier in stummen Kartenhektogrammen.

9) E. Köhne, Pflanzenkunde für den Unterricht an höheren Lehranstalten (Bielefeld u. Leipzig 1901) bringt nur Grundriss-Diagramme. Wie wenig diese das Verständnis des Blütenbaues in den erwähnten Fällen zu fördern geeignet sind, dafür führe ich die Grundriss-Diagramme in Fig. 141 (Pirus) und Fig. 133 (Caltha) an. Der entscheidende Unterschied tritt hier erst an den Aufrissen entgegen.

10) B. Schmid, Anordnung und Verteilung des botanischen Lehrstoffs und dessen erzieherische Aufgaben. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Berlin 1902. S. 31, 32.

11) Vorträge von A. Penck (Wien) und W. Köppen (Hamburg) ca. 1889.

Der Winkel und das Unendliche.

Von Dr. Kurt Geissler.

(Fortsetzung und Schluss.)

3. Die Definition des Winkels und die Kongruenzsätze.

Die Definition für den Winkel stimmt in den gebräuchlichen Geometriebüchern nicht überein. Zum Teil ist die Rede von „Abweichung" zweier Linien. Im Lehrbuche Le Gendre's (Eléments de Géométrie, II édit. an VIII, p. 2) steht: „Lorsque deux lignes droites AB, AC, se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre s'appelle angle." Noch undeutlicher wird der Winkel als Oeffnung bezeichnet, so in Bezout's Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und ebenen Trigonometrie (übersetzt von Kausler, 1820, S. 199): „Zwei Linien AB, AC, welche sich durchschneiden, bilden dadurch eine mehr oder minder grosse Oeffnung zwischen sich; diese Oeffnung BAC nennt man einen Winkel." Als unbestimmten Raum definiert z. B. Lacroix (Lehrbuch der Elementargeometrie, übersetzt von Ideler, 1828, S. VIII): „Der unbestimmte Raum, der zwischen zwei sich schneidenden Geraden liegt, welche man sich soweit als man will verlängert denken kann, wird ein Winkel genannt." In Koppe (Planimetrie 63, S. 6) heisst es: „... schneiden diese beiden Linien von der unbegrenzten Ebene ein Stück aus, welches sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt, nach zwei Seiten hin aber durch die Linien AB und AC begrenzt wird. Man nennt dasselbe einen Winkel!" Aehnlich sind die Winkel Teile der unendlichen Ebene in den meisten verbreiteten Büchern wie Hallerstein, Elementarmathematik, oder Felder der Ebene (Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 65, 4. Buch, S. 4). Spieker (S. 7) sagt: „Der Teil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen liegt, heisst ein Winkel oder Winkelraum. Der Winkelraum ist nicht vollkommen begrenzt, sondern wie die Schenkel nach der Seite der Oeffnung unbegrenzt ausgedehnt. Die Grösse des Winkels hängt daher nur von der Lage, nicht von der zufälligen Länge der Schenkel ab." Müller (in der älteren Möserschen Ausgabe, S. 5): „Ein Strahl beschreibt bei seiner Drehung um seinen Ausgangspunkt eine Fläche, welche Winkel genannt wird. Erklärung: Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen begrenzt wird." Bisweilen findet sich auch als Hauptdefinition oder nebenher die Deutung durch Richtungsunterschied. So sagt das letztgenannte Buch (S. 6): „Winkel und Kreisbogen dienen als Mass für die Drehung des zweiten Schenkels und geben den Richtungsunterschied der beiden Schenkel (Radien) an." Spieker benutzt den Begriff der Richtung etwas anders, indem er sagt (S. 2): „Eine Linie heisst gerade oder eine Gerade, wenn sie in allen ihren Punkten einerlei Richtung hat, krumm dagegen, wenn kein Teil derselben gerade ist," und fügt als Bemerkung hinzu: „Der Begriff der Richtung ist eine Grundvorstellung und lässt weiter keine Erklärung zu. Bewegt sich ein Punkt immer in derselben Richtung, so beschreibt er eine gerade Linie, ändert er aber bei der Bewegung stetig seine Richtung, so beschreibt er eine krumme Linie."

Was zunächst den Begriff der Krümmung betrifft, so will ich auf denselben, der die grössten Schwierigkeiten bietet, zunächst noch nicht eingehen. (Ausführliches darüber im erwähnten Buche über das Unendliche.) Die Definition durch Richtungsunterschied, die lange beliebt war, ist meist aufgegeben worden. Doch lohnt es sich, kurz auf den Begriff der Richtung einzugehen. Man spricht von entgegengesetzten Richtungen auf einer Linie (z. B. positiver und negativer als der Axe). Es ist nicht als selbstverständlich zu betrachten, dass die Vorstellung einer Dimension auch schon die Vorstellung dieser beiden Richtungen mit sich bringe. Man kann sich denken, dass von irgend einem Punkte aus unser Vorstellungsvermögen gezwungen wäre, sich nur immer Strecken nach einer Richtung hin vorzustellen und nie umzukehren. So ist es tatsächlich nicht, eine Subtraktion wäre alsdann nicht auf die Geometrie anwendbar. Es muss als eine besondere Tatsache angesehen werden, dass die Raumvorstellung diese Umkehr erlaubt und somit die bekannte grosse Freiheit der Vorstellung gibt. Mit der Tatsache der hinzukommenden zweiten Dimension ist noch nicht ausgemacht, dass man auch die Vorstellung der Ebene, wie wir sie kennen, mit ihren unzähligen von einem Punkte ausgehenden Strahlen haben müsse. Es könnte so sein, dass man allerdings das Bewusstsein hätte, an irgend einem Punkte einer Linie diese Linie verlassen zu können und doch sich nur wieder eine Linie von da aus vorzustellen mit beliebigen Streckengrössen und zwei Richtungen (Rückkehr). Dann gäbe es den Winkel und den Begriff der Richtung nicht, den einige bei der Definition anwenden. Wenn man sagt, die Ebene oder Fläche habe zwei Dimensionen, so wird darunter verstanden, man könne von einem Punkte einer Linie aus diese Linie in beliebig vielen neuen Linien verlassen und diese müssten dann obenein in einer einzigen zusammenhängenden Fläche vorgestellt werden können;

innerhalb einer Ebene genüge es in irgend einer Richtung die Gerade zu verlassen, d. h. von irgend einem Punkte der Geraden irgend eine der zahllosen neuen Geraden in Gedanken zu betreten. Soll hierdurch die Tatsache der zwei Dimensionen klar ausgedrückt sein, so wie wir sie kennen, so gehört dazu noch die Vorstellung, dass man zu einer solchen zweiten Axe in jedem anderen Punkte der ersten Geraden eine Parallele innerhalb der Ebene ziehen und so von der ersten Axe zu jedem Punkte der Ebene gelangen könne. Man sieht, dass in der Tat die unendliche oder beliebige Mannigfaltigkeit der Winkelgrössen dabei vorausgesetzt oder dass umgekehrt durch diese das Wesen der zweidimensionalen Ebene erschöpft wird. Gleichwohl kann es unrichtig sein, den Winkel durch Richtungsunterschied zweier Geraden definieren zu wollen; es könnte sein, dass man jene Mannigfaltigkeit der Richtungen gerade erst durch den auf andere Art klar bestimmten Begriff des Winkels auszudrücken hätte. Soll Richtungsunterschied etwas Mathematisches sein und das Wort Unterschied nicht etwa in einem nichtmathematischen, anderen Sinne gebraucht werden, so muss auch der Unterschied Grössen voraussetzen, die man unterscheidet. Diese Grössen sollten hier die „Richtungen" sein? Dann wäre es nötig, diese Richtungen auch als solche zu definieren und zwar derart, dass man sie voneinander abziehen und dadurch den Winkel erhalten kann. Mathematisch sind bloss solche Grössen voneinander abziehbar, deren Differenz durch dieselbe Einheit ausgedrückt werden oder mit derselben vorgestellt werden kann wie die abzuziehenden Grössen selbst. Die beiden „Richtungen" müssten Winkeleinheiten haben, also selbst schon Winkel sein. In der Tat entsteht durch Abziehen zweier Winkel wieder ein Winkel. Dann bedürfte aber die Richtung wieder einer Winkelerklärung usw. Will man etwas definieren, so bedarf man dazu eines Einfacheren und Allgemeineren, unter das man den Begriff unterordnet. Man hat darum wohlgetan, die genannte Definition nicht mehr zu verwenden.

Sind nun Winkel Teile der Ebene, so gebraucht man dabei allerdings etwas Allgemeineres, den Teil und andererseits die Ebene. Beide Begriffe oder Vorstellungen sind auch sonst zu verwenden und können vorausgehen (auf die Schwierigkeit des Begriffes der Ebene brauche ich hier nicht einzugehen, da sie für unsere Frage nicht geradezu nötig ist — man denke z. B. an die allgemeine Anschauung der Fläche als eine Grundanschauung und die Eigenschaft, dass die kürzeste räumliche Verbindung je zweier Punkte ganz in die Fläche fällt).

Aber es erhebt sich nun die Schwierigkeit der Grössenvergleichung solcher „Winkel". Wir haben gesehen, dass die Unendlichkeit der Winkelflächen eine Kongruenz nur bei Begrenzungen zulässt. Wir können also nicht damit einverstanden sein, uns einfach mit dem Aufeinanderlegen der Schenkel zu begnügen und dann nur zu sagen (als ob das ganz klar wäre), es wären nun die Winkel entweder gleich oder ungleich. Das Paradoxon der Winkelflächen z. B. verbietet dies. Zweitens aber wird, wie wir sahen, beim Aufeinanderlegen bereits die Gleichheit vorausgesetzt, wir erfahren darum durch dies Verfahren nichts Neues, was wir nicht schon vorher gewusst hätten; wir gewinnen also nichts Besseres, als wenn wir einfach sagten: man kann sich gleiche und ungleiche Winkel vorstellen, zwei Winkel sind dann gleich, wenn wir sie uns als gleich vorstellen. Durch das Aufeinanderlegen will man ferner den Vorteil erreichen, ein Mass für die Winkel zu gewinnen, z. B. von doppelter Grösse sprechen zu dürfen. Das allbekannte Mittel hierfür ist der Kreis, der mit beliebigem Radius um den Winkelpunkt beschrieben wird. Für zwei getrennte Winkel muss derselbe Radius genommen werden. Man setzt nun — als ob das ganz selbstverständlich oder höchst einfach wäre — gewöhnlich voraus, dass Kreise mit gleichem Radius sich decken lassen, und doch macht man so viele Umstände, um die Kongruenz von viel einfacheren Figuren, den Dreiecken, nachzuweisen und Sätze darüber aufzustellen. Die Gleichheit aller Radien eines Kreises veranlasst dies offenbar; denn die Ausmessung der Kreislinie, die — wie jeder weiss — grosse Schwierigkeiten hat, kann die Sache nicht so einfach erscheinen lassen. Also man nimmt hier auf die Länge der krummen Linie keine Rücksicht oder nimmt als selbstverständlich an, dass diese Umfänge gleich sind, man erklärt also nur die Ausmessung des Umfanges durch den Radius (!) für schwierig. Dies liegt offenbar an der Vorstellung, dass der Kreisumfang aus Punkten bestehe oder überall Punkte besitze, nach denen Radien gezogen werden können und dass die verschiedene Lage der Radien bei verschiedenen Endpunkten ganz klar sei. Ist dem so, so setzt man wieder die Winkel als etwas an sich Klares voraus und brauchte dann besser keine Erklärung dafür. Oder man glaubt, da die Umfänge zweier Kreise mit gleichen Radien sich deckten, so müssten dies auch die Teile, falls sie nur gleich sind, und glaubt den Bruchteil eines Umfanges, z. B. den 360. Teil, in der Vorstellung als etwas räumlich ganz Bestimmtes annehmen zu dürfen. Es fragt sich nur, ob irgend ein Teil eines Kreises sich auch bestimmt mit demselben Bruchteile eines anderswo liegenden Kreises mit gleichem Radius deckt, und ob sich die Umfänge solcher Kreise überhaupt decken.

Die Schwierigkeit der Unendlichkeit aller denkbaren Punkte führt — wie wir sahen — oft zu Widersprüchen. Es ist also durchaus nicht richtig, sich einfach auf die Gleichheit aller Radien zu berufen. Inwiefern haben beide Kreise gleichviele und zugeordnete Punkte? Nur die gleiche Art der Behaftung mit Punkten erlaubt uns eine Zuordnung. Auf gleichen Linienstücken (geraden oder krummen) können bei verschiedener Behaftungsart (z. B. verschiedener Entfernung und Lage des Ausgangspunktes eines die Schnitte erzeugenden Strahlenbüschels) verschieden viele Punkte vorgestellt werden und umgekehrt. Es ist darum der allgemeine Satz aufzustellen:

Zwei getrennt liegende Strecken sind als gleich zu betrachten, wenn bei genau gleicher Behaftungsart auf beiden gleichviele Punkte gezählt werden.

Mit diesem Satze könnte man in der Tat bei Kreisen mit gleichen Radien auskommen, wenn man nur wüsste, was gleiche Behaftungsart hier ist. Die Gleichheit der Radien genügt nicht. Denn dann könnte ja auch die Hälfte des einen Kreises gleich dem ganzen andern Kreise sein. Etwa anzunehmen, dass je zwei Radien, die Punkte ergeben sollen, parallel sein sollten, scheint eher anzugehen, aber man ist alsdann schuldig zu erklären, wieso das Parallelsein bei beiden eine gleiche Behaftungsart involviert, und dazu wird wohl wieder der Winkelbegriff herangezogen werden müssen. Bei paarweis parallelen Schenkeln sind allerdings die Winkel gleich, aber kann man das zu allererst voraussetzen? Dies erscheint mir möglich. Man würde dann den Winkel nicht definieren als einen unendlichen Teil der unendlichen Ebene (das wäre die Winkelfläche, über deren Gleichheit die Begrenzung entschiede), sondern als die Anzahl der auf einem mit beliebigem Radius um den Schnitt der Geraden beschriebenen Kreise ablesbaren Einheiten. Es wäre also der Winkel nicht eine reine Zahl, sondern eine benannte Zahl mit einer anschaulichen Benennung, jenem Gradbogen. Das Neue und Wichtige dabei ist die Feststellung der Gleichheit der Gradbogen. Der Gradbogen ist ebenfalls ein Winkel, nämlich mit der Zahl Eins. Es gehört zum Begriffe dieses Winkels durchaus die Vorstellung der beiden Radien und zwar von beliebiger Grösse und die Vorstellung, dass auf einem Kreise mit beliebiger Grösse Umfangsstücke als gleich anzusehen sind. Es ist auch hier wieder die Gleichheit des Räumlichen etwas Ursprüngliches, das man nicht erst durch Kongruenz mittels Aufeinanderlegen nachzuweisen hat, das vielmehr bei der Bewegung zur Kongruenz vorausgesetzt wird.

Aber warum kann man überhaupt zwei als gleich lang angesehene Bogen, zwei krumme Linienstücke zur Deckung bringen, warum sind sie hier kongruent (falls kongruent bedeutet, dass sie zur Deckung gebracht werden können)? Ueber diesen Kernpunkt der ganzen Frage darf man nicht leicht hinweggehen!

Mag man auch für zwei getrennt liegende Kreise oder Winkel mit parallelen Schenkeln nach jenem Satze die Gleichheit für genügend ausgesprochen halten, es liegen doch nicht alle gleichen Winkel, die nicht gleich 360 Grad sind, derartig in Parallellage, und es geht nicht an (siehe Aufsatz 1!), sie sich in derartige Lage gedreht zu denken; denn es ist ein Zirkel, sie bei der Drehung als gleich oder kongruentbleibend anzusehen. Wir können darum mit jenem Behaftungssatze nicht allgemein auskommen.

Man möchte nach diesen Schwierigkeiten wohl erstlich darauf verzichten, die Winkel als unendliche Winkelflächen zu definieren, im Gegenteil möchte man wohl lieber erst nach der Definition des Winkels und nach der daraus abgeleiteten Kongruenz von begrenzten ebenen Figuren die Kongruenz von unendlichen Winkelflächen oder Teilen der unendlichen Ebene versuchen. Zweitens aber möchte man wohl auch lieber auf eine krumme Begrenzung verzichten und es mit einer geradlinigen versuchen. Ein Verzicht auf jede Definition ist nur solange zu empfehlen, wie die Schwierigkeiten nicht überwunden sind.

H. Müller gibt wohl nur vorläufig in der neueren Teubner'schen Ausgabe seiner Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen 1902, 2. Aufl., gar keine eigentliche Definition des Winkels, sondern sagt (S. 7): Erklärung 1. Zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen bilden einen Winkel. Die beiden Strahlen heissen Schenkel und ihr Ausgangspunkt heisst Scheitel des Winkels. Die Strahlen MA und MB können durch Drehung um den Punkt M ineinander übergeführt werden. Daraus folgt: Zusatz 1. Ein Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt. Anstatt der früheren allgemeinen Definition der Kongruenz sagt er lieber zunächst, zwei Dreiecke seien kongruent, „wenn sie aufeinander gelegt werden können, dass ihre Seiten und Ecken zusammenfallen" (S. 14). Suchen wir hier die Schwierigkeiten zu überwinden!

Denkt man sich zwei sich schneidende beliebig lange Schenkel unter Voraussetzung des Grundsatzes von dem Gleichbleiben bei Bewegen und unter Beibehaltung ihrer Gleichheit in jeder Beziehung, von der ersten Stelle fortgerückt an eine zweite, so wird man die erste Lage als kongruent mit der zweiten ansehen und dies so deuten, dass irgend ein irgendwie bestimmtes Gebilde der ersten ein entsprechendes der zweiten Lage habe, sodass es zu den übrigen daselbst etwa vorgestellten ganz genau dieselbe Beziehung habe. Es hat z. B. ein Punkt A (Fig. 2) des einen Schenkels

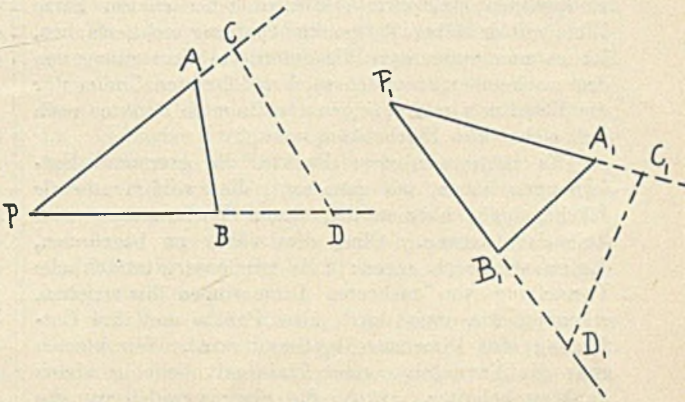


Fig. 2.

einen entsprechenden A_1, sodass $AP = A_1 P_1$, oder falls $PB = P_1 B_1$ vorgestellt wird, auch $AB = A_1 B_1$ ist. Man spricht hierbei nicht von den unendlichen Flächen, sondern irgend welchen Linien wie AB und $A_1 B_1$, die irgendwo in bestimmter Weise (von entsprechenden Punkten aus) vorgestellt sind und zwar sowohl im Endlichen wie etwa auch im Unendlichen (auch Unendlichkleinen jeder Ordnung). Es fragt sich nun, ob bei Voraussetzung zweier von vornherein als getrennt vorgestellter Schenkelpaare, bei Verwerfung der Gewissheit der Kongruenz oder Gleichheit nach Verschiebung, bei vorausgesetzter Gleichheit von AP und $A_1 P_1$, BP und $B_1 P_1$ und endlich auch noch von AB und $A_1 B_1$ irgend welche entsprechend vorgestellten anderen Gebilde, wie etwa die Verbindungen CD und $C_1 D_1$ sicher gleich sein müssen. Darf man annehmen, dass es kongruente Dreiecke giebt, d. h. solche, die in allen etwaigen Stücken übereinstimmen?

Es steht der Vorstellung nichts im Wege, dass zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, auch der anderen Vorstellung nichts, dass zwei Flächen (Gebilde zweier Dimensionen) übereinstimmen, sind aber auch bei Gleichheit der drei Seiten die Flächen gleich? Fragen wir lieber erst, ob bei völliger Gleichheit der Flächen (Dreiecksflächen) auch die drei Seiten gleich sind! Man möchte antworten, wenn die Flächen genau dieselben sein sollten, so müssten es auch die Seiten. Es dürfte in der Tat nicht möglich sein, die Vorstellung genau zu bilden, dass drei solche Flächen genau dieselben sein sollen (oder in anderen Fällen ungleich), ohne die Begrenzungen in diese Vorstellung hineinzuziehen oder als darin enthaltend anzuerkennen. Ohne Begrenzungslinien gibt es überhaupt gar nicht die Vorstellung von genau gleichen Dreiecksflächen. Also sind auch umgekehrt bei der Vorstellung der drei Begrenzungsseiten die ebenen Flächengrössen dieselben, freilich nur, wenn man voraussetzt, dass zur Bestimmung der drei Seitenlängen bei Behaftung mit Endpunkten auch drei bestimmt liegende Punkte vorgestellt werden müssen. Beim Viereck ist dem nicht so, da zwei Vierecke mit vier paarweis gleichen Seiten bei verschiedener Lage der Endpunkte, also ohne Kongruenz vorhanden sein können.

Es führt damit unsere Betrachtung schliesslich zur Untersuchung von Bestimmtheiten durch vorgestellte Punkte. Der Grundsatz ist allgemein anerkannt, dass es zwischen zwei Punkten nur eine kürzeste Verbindung gebe; umgekehrt würde ich lieber sagen: es giebt gewisse Linien, die bei Behaftung mit Endpunkten eine zweite kürzere oder ebenso kurze Linie mit derselben Endpunktsbehaftung nicht erlauben. Ist es nun wahr, dass die geforderte Vorstellung von drei aneinanderstossenden solchen kürzesten Linien nur die Behaftung mit drei ganz bestimmten Punkten nach sich ziehe (also Flächenkongruenz)?

Es bestimmen drei Punkte, die getrennte Entfernungen haben, wie man sagt, die zweidimensionale Fläche, nicht aber solche, deren Entfernungen sich (teilweise) decken. Ohne dies näher zu begründen, dürfen wir doch sagen: falls wir unsere tatsächliche Vorstellung von mehreren Dimensionen hinzuziehen, erkennen wir, dass durch zwei Punkte und ihre Entfernung eine Dimension bestimmt wird. Wir können zwar die Vorstellung einer Linie mit beliebig vielen Punkten behaften, sowohl die einer geraden wie die einer krummen, aber, sobald man sich auf einer geraden auch nur zwei Punkte vorstellt, so genügt diese Behaftung, um damit die eine Dimension auszudrücken mittels der Vorstellung, dass zwischen ihnen eine Linie verläuft. Denken wir uns, wir befänden uns in der Vorstellung ganz und gar innerhalb einer (sonst) krumm vorgestellten Linie, so würden wir beim Fortrücken auf derselben nicht wissen können, ob sie krumm oder gerade ist (es gehört zu dieser Beurteilung das Ueberschauen von mehr Dimensionen, das Herausschauen aus jener Linie). Also auch auf dieser krummen genügen zwei Punkte, um, beim Befangensein innerhalb derselben, sich ein gewisses Stück vorzustellen. Sobald man aber die anderen Dimensionen mit überschaut und dabei (auf irgend eine Art) die Anschauung von zwei Dimensionen, mit dem Krummen darin, hat, dann braucht man die Behaftung mit drei Punkten, um im besten Falle (falls sie nämlich nicht auf einer Geraden liegen) das Vorhandensein der zwei Dimensionen festzustellen.

Während also die Behaftung mit zwei Punkten und die eine kürzeste Linie die eine Dimension genügend andeutet, genügen für zwei Dimensionen drei Punkte mit nicht zusammenfallenden Entfernungen. Dies ist zwar nicht bewiesen, wird aber von jedermann als eine Tatsache anerkannt. Ich halte es nun für sehr natürlich, diesen Satz als einen Grundsatz zu benutzen, also nicht etwa durch andere Annahmen (über Winkel oder dergleichen) erst auf diesen Satz zu kommen. Denn es hat sich ja nun gezeigt, dass bei solchen Annahmen Zirkel vorkommen. Ist es aber ein Grundsatz, so ist einerseits ein vierter Punkt für die Bestimmung der Ebene nicht nötig, andererseits bestimmt der dritte zu zweien hinzukommende Punkt ein Flächenelement vollkommen und unzweideutig. Wäre eine solche Begrenzung durch drei Seiten zweideutig, so würde man etwas Viertes zur unzweideutigen Bestimmung nötig haben. Ein vierter Punkt aber deutet im allgemeinen bereits die dritte Dimension mit an. Wir werden demnach den betreffenden sogenannten Kongruenzsatz so formulieren, dass eine Begrenzung durch drei Seiten (die mit drei Endpunkten zu behaften sind), die Vorstellung eines derartigen dreieckigen Ebenenstückes eindeutig bestimmt. Dieser Satz, welcher oft erst an vierter oder dritter Stelle angeführt wird, ist nicht beweisbar und braucht auch nicht bewiesen zu werden. Die Beweise sind Scheinbeweise, eine Lehre von Winkeln darf man nicht vorher angeben und für begründet halten, der Winkel kann vorher gar nicht richtig definiert werden.

Wir können nun fragen, ob (in Fig. 2) $CD = C_1 D_1$ und ein irgendwie sonst noch vom einen bis zum zweiten Schenkel abgegrenztes Flächenstück gleich dem entsprechend begrenzten ist, falls PAB und $P_1 A_1 B_1$ als bestimmende Flächenelemente mit gleichen Seiten angenommen werden. Stimmen die Dreiecke PAB und $P_1 A_1 B_1$ völlig überein und zieht man die Vorstellung der verlängerten Geraden (mit allem, was dazu gehört) hinzu, so folgt auch, dass sich die verlängerten Schenkel decken müssen; dass sich der eine Schenkel mit dem entsprechenden deckt, hat nur dann Bedeutung, wenn man sich beide durch gleiche Strecken z. B. PC und $P_1 C_1$ in begrenzter Grösse vorstellt (mögen diese Strecken auch beliebig und ausserdem unendlich gross sein). Aber dass nun auch PB und $P_1 B_1$ zur Deckung gelangen und zwar in beliebiger Länge etwa bis D und D_1, das folgt aus der Uebereinstimmung der Dreiecke und daraus, dass eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, also beim Zusammenfallen dieser Punkte auch die verlängerten Geraden zusammenfallen. Endlich müssen auch die Verbindungen CD und $C_1 D_1$ sich decken, also gleich gross sein, da es zwischen zwei Punkten nur eine gerade Verbindung gibt.

Wenn wir uns Winkelflächen als beliebig durch eine Gerade wie AB oder CD irgendwo, auch im Unendlichen abgegrenzte Figuren vorstellen, so decken sich in unserem Falle auch die Winkelflächen. Trotzdem werden wir die Winkel nicht als diese Flächen definieren. Denn es kommt uns bei der Vergleichung der Winkel nicht bloss darauf an, ob sie gleich sind, sondern auch, ob wir genau aussprechen, wenn der eine doppelt so gross wie der andere ist oder in bestimmtem Grössenverhältnis zu ihm steht. Die Abgrenzung durch beliebige Dreiecke aber ist nicht zu einer solchen Vergleichung geeignet. Man müsste schon übereinkommen, die Schenkel PA und PB gleich gross zu wählen und an das erste Dreieck PAB (Fig. 3) in derselben Ebene ein zweites PAA_1 und dann ein drittes PA_1A_2 usw. anzutragen und die Winkel für gleich zu erklären, wenn dann $AB = AA_1 = A_1A_2$ usw. ist. Die Halbierung aber des Winkels APB hat Schwierigkeiten, eine Verbindung des Mittelpunktes M von AB mit P ergiebt einen Schenkel MP, der nicht gleich $PA = PA_1$ usw. ist. Er müsste um ein kleines Stück MA' verlängert werden, um ihnen gleich zu sein. Wählt man Seite AB, AA_1

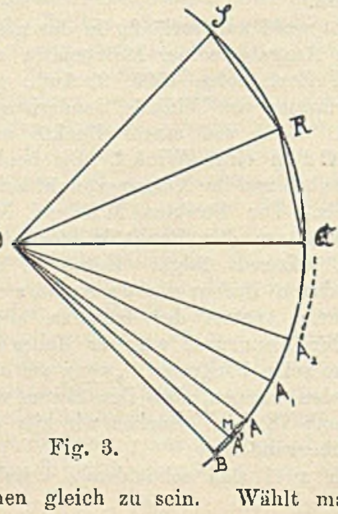


Fig. 3.

usw. so klein, dass ihre Länge unvergleichlich ist mit den Längen PA usw., so ist erst recht die Länge MA' unvergleichlich mit ihnen (sie ist vom Grade δ^2, wenn AB vom Grade δ ist). Behaften wir die Grössen AB usw. welche in einer anderen Dimension wie PA liegen, mit der Vorstellung des Unendlichkleinen ersten Grades, die Schenkel PA usw. nur mit Vorstellungen von endlichen oder auch unendlichkleinen Grössen ersten Grades (sodass man z. B. ausser einer endlichen Grösse sich darauf auch noch solche von der Weite δ vorstellen dürfte), so hat die Verlängerung MA' keine Bedeutung mehr und ist (für solche Behaftung) gleich Null. Es ist dann nicht bloss BMA als gerade vorgestellt, sondern auch $BAA_1A_2A_3\ldots$, bei endlicher Anzahl solcher zusammengefassten Strecken. Kommen aber unendlichviele solcher unendlichkleinen Grössen zusammen, so würde sich eine endliche Summe ergeben, und die Endpunkte dieser endlichen Summe haben alsdann eine geradlinige Entfernung, die nicht mehr mit den bisherigen unendlichkleinen Grössen zusammenfällt, sondern deren Mitte einen endlichen Abstand von jenem Zuge $AA_1A_2A_3\cdots$ hat. Dieser Zug von endlicher Länge ist dann für die endliche Weitenbehaftung als krumm anzusehen (oder nach meiner Auffassung ist er krumm. Dass in der Tat eine solche Auffassung des Krummen viele Vorteile für die Erklärung der Schwierigkeiten des Krummen und der Berührung gewährt, darüber muss ich auf das genannte Buch verweisen). Wenn man deshalb einen Kreis mit endlichem Radius um den Punkt P beschreibt, so heisst die Gleichheit zweier Winkel folgendes: es decken sich die gleichschenkligen Dreiecke PQR und PRS, falls die Sehnen PR und RS gleich sind und zwar ohne Kongruenzbeweis nach dem Grundsatze des zweidimensionalen Elementes. Es decken sich aber auch die Bogen (!) QR und RS, falls man sie sich bestehend vorstellt aus gleich vielen unendlichkleinen gleichen Seiten. Es decken sich mithin die gleichlangen Bogen desselben Kreises, folglich auch die Endpunkte. Mithin entstehen zwei Dreiecke mit sich deckenden Endpunkten, bei solchen decken sich nach obigen Ausführungen auch die Flächen und Seiten. Folglich gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen und es ist vollkommene Umkehrbarkeit vorhanden.

Es eignet sich mithin zur Definition des Winkels am besten ein Kreis mit endlichem Radius, der aber stets in derselben Grösse für verglichene Winkel angenommen wird. Auch Kreise mit unendlichkleinem oder unendlichgrossem Halbmesser dürfen gewählt werden; auf allen sind gleiche Teile des Umfanges verstellbar und die Verschiedenheit der Winkelgrössen nach den Sätzen über kongruente Bogen angebbar. Der Winkel sei danach eine Anzahl von Gradbogen oder Teilen desselben, ablesbar auf solchem, eingeteilt vorgestellten Kreisumfange. Wohlgemerkt ist der Winkel hiernach nicht etwas rein Arithmetisches, sondern eine benannte Zahl, er gehört sowohl der zählenden Grössenvergleichung wie auch der räumlichen Vorstellung („Teile des Umfanges") an, wie es auch in der Eigentümlichkeit desselben als einer vergleichbaren Grösse und einer Anschauung liegt.

Das Resultat obiger Betrachtungen ist danach kurz: Der Kongruenzsatz der drei Seiten ist nicht durch Winkelsätze beweisbar, sondern muss selbst erst die Gleichheit von Winkelflächen definieren, die Kongruenz von Kreisbogen möglich machen und zwar mittels des Unendlichkleinen und seiner Grundsätze. Die Kongruenz kann nicht einfach von vornherein durch Aufeinanderlegen bewiesen werden. Sie ist nicht durch das Zusammenfallen aller Punkte zu definieren, wenn man nicht das übereinstimmende Behaftungsgesetz hinzuzufügen vermag. Der erste und zweite Kongruenzsatz (eine S., zwei anliegende Winkel; zwei S., der eingeschl. W.) werden auf jenen Grundsatz der Kongruenz von Dreiecken bei gleichen Begrenzungen ganz kurz zurückgeführt, die Kongruenz der Winkelflächen wie überhaupt in irgend einer Weise unendlicher Gebilde hat nur Sinn bei Begrenzungen, aber es ist auch die Begrenzung, die Gleichheit und Kongruenz bei unter- und übersinnlichvorstellbaren (unendlichen) Grössen zuzulassen. Die Schule kann sehr wohl diese Auffassung im Anfangsunterrichte durchführen. Die (von mir mehrfach auch im Klassenunterrichte erprobte) Formulierung hierfür gehört nicht hierher, da sie im Anfange eines entsprechend ausgearbeiteten Schulbuches stehen muss und ihre praktische Brauchbarkeit (nämlich in den Einzelheiten ihrer Wortfassung) erst im Zusammenhange recht zeigt.

Ich kann nicht umhin, zum Schlusse auf eine der hervorragendsten neueren geometrischen Schriften einzugehen, deren Bedeutung darin liegt, dass sie auch die gewöhnlichen, meist durch Hinweisung auf die Anschauung abgemachten Grundvorstellungen durch Axiome (z. B. der „Verknüpfung und Anordnung") logisch zu analysieren und ein vollständiges System unabhängiger Axiome aufzustellen sucht, nämlich David Hilbert's Grundlagen der Geometrie (B. G. Teubner 1899). Und zwar will ich hier nicht erörtern, dass mir darin durch das Fehlen der Behaftung mit dem Unendlichen Lücken vorhanden zu sein scheinen (bei einer im übrigen hervorragenden Vollständigkeit der Axiomenaufstellung), sondern auf den Winkelbegriff und das, was damit zunächst zusammenhängt, eingehen. Es steht da als Einführung des Winkels (S. 11): „Definition. Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen Winkel und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle$ (h, k) oder $\sphericalangle$ (k, h)." Es wird dann gesagt, dass es ein ausgezeichnetes Gebiet gibt, „indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heisse das Innere des Winkels (h, k) zum Unterschiede von dem anderen Gebiete, welches das Aeussere des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heissen Schenkel des Winkels und der Punkt O heisst der Scheitel des Winkels."

Es ist hier durch das Wort System vermieden, den Winkel durch Ebene, Fläche, Richtung oder dergleichen zu definieren. Selbstverständlicherweise wird man fragen, was denn nun System bedeute. Denn ganz selbstverständlich ist dies nicht, vielmehr offenbar höchst wichtig für die gesamten Grundlagen, die alles von vorn erklären und aufbauen sollen. Es kommt nun dieses Wort zuerst vor gleich in der ersten Zeile des ersten Kapitels: (S. 4) „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte, die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade usw." Was System bedeuten soll oder ob es ein nicht weiter erklärbarer Grundbegriff ist, wird nicht gesagt. Man sollte denken, es wäre vielleicht die Gesamtheit von Punktvorstellungen; doch heisst es sofort: „die Punkte heissen auch die Elemente der linearen Geometrie.“ Ist hier mit „Elementen“ gemeint, dass diese Elemente eine Linie durch Zusammensetzung bilden können? Oder sind sie nur etwas, was mit der Linie nach irgend welchen Gesetzen zusammenhängt? Ersteres sollte man denken nach S. 8: „Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heissen auch ein von O ausgehender Halbstrahl; somit trennt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen.“ Dann S. 6: „Definition. Das System zweier Punkte A und B, die auf einer Geraden liegen, nennen wir eine Strecke und bezeichnen dieselbe mit AB oder BA.“ Da bis hierher von Geraden schon die Rede war, aber nicht von Strecken, so sollte man denken, würde durch das Wort System die Gerade spezialisiert. Aber da die Erklärung des Wortes System fehlt, so muss man versuchen, sie sich zu denken; jedenfalls kann hier System nicht blosse Zusammenfassung zweier Punkte heissen, denn das wäre keine Strecke, sondern es muss die Geradenvorstellung hinzukommen. S. 8: „Definition. Ein System von Strecken AB, BC, CD, ..., KL heisst ein Streckenzug, der die Punkte A und L miteinander verbindet.“ „Die Punkte heissen Punkte des Streckenzuges.“ System bedeutet demnach hier zwar eine Zusammenfassung von Strecken, aber dazu noch die Vorstellung, dass sie in der Ebene liegen (und sich zum Polygone schliessen können). Der Schwerpunkt der ganzen Schrift ist der, dass die Begriffe sich aufbauen sollen aus den einfachsten und dieser Aufbau nichts verschweigt und lückenlos ist. Wird indessen bei dem „System der Halbstrahlen“, dem Winkel nichts verschwiegen? Ist der Winkel nur eine Zusammenfassung der Halbstrahlen, und gehört nicht doch noch mehr dazu wie die Vorstellung der ebenen Teile? Das „Innere des Winkels“ ist ein Gebiet; wie gross ist dieses Gebiet? Wenn es das Innere des Winkels ist, gehört es dann in den Begriff des Winkels hinein oder kommt es äusserlich dazu?

Es wird dann sofort nach jener Definition ein Axiom über den Winkel aufgestellt. „IV 4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle$ (h, k) in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', sodass der Winkel (h, k) (oder (k, h)) kongruent dem Winkel (h', k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels (h', k') auf der gegebenen Seite von a' liegen. in Zeichen $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$.“ Als Axiom IV 6 aber wird aufgestellt, dass, wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel kongruent sind, auch die anderen Winkel kongruent seien.

Natürlich ist hierbei von grosser Wichtigkeit, was kongruent heissen soll. Darüber heisst es (S. 10, beim Beginn des Kapitels über die Axiome der Kongruenz): „Die Axiome dieser Gruppe (wozu auch das genannte vom Winkel gehört) definieren den Begriff der Kongruenz oder der Bewegung. Erklärung: Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen, zu deren Beschreibungen uns insbesondere das Wort „kongruent“ dient“. Es ist also ebensowenig wie beim Worte System gesagt, was denn nun „kongruent“ bedeuten solle, ob man dies auf etwas Einfacheres zurückführen könne. Es wird auch im Folgenden nur etwas ausgesagt über Kongruenz, dieselbe aber nicht definiert. Nur heisst es über Figuren (S. 17): „Zwei Figuren heissen kongruent, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, dass die auf diese einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander kongruent sind“. Sobald der Versuch gemacht worden wäre, die Wörter System, Winkel und kongruent (bei Strecken und Winkeln) durch einfachere Vorstellungen zu definieren, so würden die Schwierigkeiten des Unendlichen zutage getreten sein. Der Kongruenzsatz der drei Seiten lässt sich nicht einfach, wie es bisher so allgemein und auch bei Hilbert geschieht, nach den beiden ersten und dem Drachensatze beweisen, denn gerade in diesen stecken die Schwierigkeiten des Winkels, und wenn diese umgangen sind, so möchte es auch leicht sein, dass gerade das, was man beweisen will, schon in dem Verschwiegenen darin steckt. Es bleibt uns also nichts übrig als beziehlich des Winkels und der Kongruenz auf die vorher von mir gegebenen Auseinandersetzungen zurückzukommen und die Hilbertsche verdienstreiche Arbeit der Ergänzung und Umänderung zu unterziehen, um mit ihrer Hilfe zu einer ausreichenden Zusammenstellung von Grundsätzen für die Geometrie zu gelangen.

Ueber die Berechnung der Näherungswerte von π.

Von Dr. Th. Adrian (Flensburg).

In dem Kapitel über die Berechnung der Zahl π stellen die meisten Schulbücher Tabellen auf, welche die halben Perimeter der einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmässigen Polygone mit der Seitenzahl 6, 12, 24 usw. aneinander reihen. Es zeigt sich dabei sehr hübsch der allmähliche Zusammenschluss der Zahlen. Mit Hinweis auf die Tabelle wird dann die unanfechtbare Folgerung gezogen, dass die Dezimalstellen, soweit sie beim In- und Umpolygon derselben Seitenzahl vollständig übereinstimmen, auch als brauchbar für die Zahl π gelten müssen.

Will man dabei die Ludolf sche Zahl auf mehrere Dezimalwagen richtig erhalten, so bedarf es einer Steigerung der Seitenzahl, für die im Unterricht wohl nie die Zeit zu haben sein dürfte. Z. B. wäre für die Gewinnung von 3,14159 schon das 1536-Eck heranzuziehen.

Es macht sich infolgedessen das Bedürfnis nach einem Verfahren geltend, durch das man schon bei geringerer Seitenzahl aus den Perimetern des In- und des Umpolygons zu einem Näherungswerte gelangen kann. Da liegt nun der Gedanke nahe, das arithmetische Mittel dieser beiden Werte zu wählen, und in der Tat gelangt man auf diese Weise schon beim 192-Eck zu dem der Wahrheit sehr nahe kommenden Werte 3,1416.

Die volle Bedeutung dieses Resultats ergibt sich aber erst, wenn man die Art und den Grad der Annäherung ermittelt, die man auf diesem Wege erzielt. Zu diesem Zwecke sollen zunächst die dabei auftretenden Mittelwerte für die vom Sechseck ausgehende Vielecksreihe in der nachstehenden Tabelle *) zusammengestellt werden.

3,2321 (6-Eck)
3,1606 (12-Eck)
3,1462 (24-Eck)

*) Die Werte sind dem Bussler'schen Buche (Die Elemente der Mathematik für das Gymnasium, 1893) entnommen.

3,1427 (48-Eck)
3,1419 (96-Eck)
3,1416 (192-Eck)

Man sieht sofort, dass sie sämtlich zu gross sind, bei geringerer Seitenzahl sogar beträchtlich zu gross. Dies kann nur daher kommen, dass das umbeschriebene Polygon von der Kreisperipherie wesentlich mehr abweicht als das einbeschriebene. In der Tat überredet auch jede Figur, welche einen Kreis mit In- und Umpolygon darstellt, den Beschauer leicht, dass sich das erstere dem Kreise mehr anschmiegt als das letztere.

Um nun zu untersuchen, ob sich vielleicht für die Abstände der beiden Perimeterwerte von dem Werte der Peripherie ein einfaches Verhältnis finden lässt, wollen wir, mit dem regelmässigen 12-Eck beginnend, die Differenzen $\pi - p_i$ und $p_u - \pi$ aufstellen, wobei p_i und p_u die Werte der Perimeter vom In- und Umpolygon mit dem Durchmesser 1 bezeichnen.

Für das 12-Eck hat die erste Differenz den Wert $3{,}1416 - 3{,}1058 = 0{,}0358$, die zweite Differenz den Wert $3{,}2154 - 3{,}1416 = 0{,}0738$. Man sieht sofort, dass die zweite Differenz fast genau doppelt so gross ist wie die erste.

Noch genauer stimmt die Sache beim regelmässigen 24-Eck. Dort ist

$$3{,}1416 - 3{,}1326 = 0{,}0090$$
$$3{,}1597 - 3{,}1416 = 0{,}0181.$$

48-Eck

$$3{,}14159 - 3{,}13935 = 0{,}00224$$
$$3{,}14609 - 3{,}14159 = 0{,}00450$$

96-Eck

$$3{,}14159 - 3{,}14103 = 0{,}00056$$
$$3{,}14271 - 3{,}14159 = 0{,}00112$$

192-Eck

$$3{,}14159 - 3{,}14145 = 0{,}00014$$
$$3{,}14187 - 3{,}14159 = 0{,}00028$$

Es zeigt sich bei der Verfolgung dieser Aufstellung immer deutlicher, dass sich die Differenzen mehr und mehr dem Werte 1 : 2 nähern. Wir haben also, zunächst auf empirischem Wege, ein Mittel gefunden, um die Näherungswerte für π besser zu berechnen als bei Verwendung des arithmetischen Mittels zwischen p_i und p_u. Setzen wir

$$\pi - p_i = d$$

so ist nach den obigen Untersuchungen

$$p_u - \pi = 2\,d$$

Eliminiert man d aus diesen beiden Gleichungen so ergibt sich die Formel:

$$\pi = \frac{2\,p_i + p_u}{3}$$

A l s o i s t d e r N ä h e r u n g s w e r t f ü r π d a s a r i t h m e t i s c h e M i t t e l z w i s c h e n d r e i G r ö s s e n, v o n d e n e n e i n e d e m P e r i m e t e r d e s U m -, z w e i d e m d e s I n p o l y g o n s g l e i c h s i n d.

Da aus der Addition der Differenzgleichungen sich

$$3\,d = p_u - p_i$$

also $d = \frac{p_u - p_i}{3}$ ergibt, andererseits $\pi = p_i + d$ ist, so lässt sich auch folgende Rechnungsregel für die Ermittelung des Näherungswertes aufstellen:

Man subtrahiert die beiden Perimeterwerte von einander, dividiert durch 3 und zählt den Quotienten zum inneren Perimeterwerte hinzu.

Um die Sache auf sichere Füsse zu stellen, dürfte es sich wohl lohnen, einen Beweis für die aufgestellte Formel des Näherungswertes zu suchen. In der Tat lässt sich ein solcher finden. Die Betrachtung von Fig. 1, in der A B die Seite des einbeschriebenen regu-

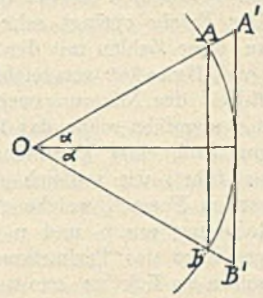


Fig. 1.

lären n-Ecks, A' B' die des umbeschriebenen n-Ecks bezeichnet, ergibt:

$$A'B' = 2\,r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$AB = 2\,r\sin\alpha$$
$$\widehat{AB} = r \,.\, 2\,\alpha = 2\,r\,\alpha,$$ wobei α als im Bogenmass ausgedrückt gedacht wird.

Folglich gilt die fortlaufende Proportion

$$A'B' : \widehat{AB} : AB = \mathrm{tg}\,\alpha : \alpha : \sin\alpha.$$

Daher auch, wenn die drei Glieder der linken Seite mit n multipliziert werden,

$$p_u - \pi : p_i = \mathrm{tg}\,\alpha : \alpha : \sin\alpha$$

und

$$p_u - \pi : \pi - p_i = \mathrm{tg}\,\alpha - \alpha : \alpha - \sin\alpha.$$

Der Beweis läuft also darauf hinaus, zu zeigen, dass

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha : \alpha - \sin\alpha = 2 : 1 \text{ ist.}$$

Natürlich kann von einer Konstanz dieses Verhältnisses nur für kleine Werte von α die Rede sein. Unter dieser Voraussetzung führt aber die Entwickelung der beiden trigonometrischen Funktionen in Reihen sehr schnell zum Ziel. Für unsere Zwecke genügen die beiden ersten Glieder dieser Reihe

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \cdots$$
$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \cdots$$

Also ergibt sich

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha = \frac{\alpha^3}{3}$$
$$\alpha - \sin\alpha = \frac{\alpha^3}{6}$$

Tatsächlich ist der erste Ausdruck doppelt so gross als der zweite.

Der Beweis stützt sich allerdings auf die Reihentheorie und kann daher den Schülern auf der Stufe, wo die L u d o l f sche Zahl zuerst eingeführt wird, nicht vorgetragen werden. Es wäre erfreulich, wenn vielleicht ein elementarer Beweis oder wenigstens eine plausible Veranschaulichung aufgedeckt werden könnte. Aber selbst für den Fall, dass dies nicht gelingen sollte, dürfte es sich doch wohl verantworten lassen, von der Formel

$$\text{Näherungswert } \pi = \frac{2\,p_i + p_u}{3}$$

Gebrauch zu machen, wenn es sich darum handelt ziemlich schnell zu einem brauchbaren Werte für π zu gelangen. Was die Formel in dieser Beziehung leistet, ist in der Tat beachtenswert.

Aus dem 12-Eck ergibt sich der Näherungswert 3,142, aus dem 24-Eck 3,1416, aus dem 48-Eck 3,1416 (die 6 ist durch Erhöhung entstanden), aus dem 96-Eck genau 3,14159.

Also erhält man schon beim 96-Eck den Betrag, mit welchem man gewöhnlich in der Schule zu operieren pflegt. Der Erfolg springt sehr deutlich ins Auge, wenn man diese Zahlen mit der am Eingange zitierten Tabelle von Bussler vergleicht. Dort ergab sich bei dem 96-Eck der Näherungswert 3,1419, den bei unserer Formel ungefähr schon das 12-Eck liefert.

Die Forschung nach einer Veranschaulichung der bewiesenen Formel führt, wie sogleich gezeigt werden soll, zu einer zweiten Formel, welche es ermöglicht, durch leichte Rechnung aus p_i und p_u, die für das n-Eck gelten, den Wert des Perimeters für das einbeschriebene reguläre 2n-Eck zu ermitteln, natürlich unter der Voraussetzung kleiner Zentriwinkel.

In Fig. 2, welche unserer Betrachtung zu Grunde

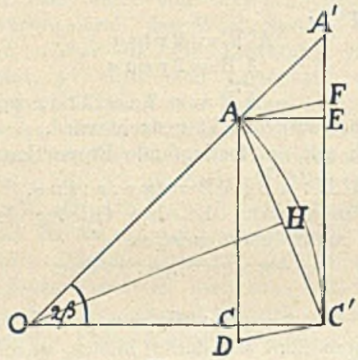


Fig. 2.

gelegt werden soll, ist diese Voraussetzung nicht verwirklicht, weil sonst gewisse Linien sehr nahe an einander rücken würden.

A' C' bezeichnet die halbe Seite des umbeschriebenen, A C die halbe Seite des einbeschriebenen regulären n-Ecks. Verbindet man A mit C', so ist diese Linie die Seite des einbeschriebenen 2n-Ecks. Setzt man $\sphericalangle AOC' = 2\beta$, so ergibt sich leicht, dass $\sphericalangle OC'A = 1R - \beta$ und daher sowohl $\sphericalangle CAC' = \beta$ als auch $\sphericalangle AC'A' = \beta$ ist. Zieht man nun $AE \perp A'C'$ und macht sowohl AD als auch $C'F = AC'$, so entstehen die beiden gleichschenkligen und kongruenten Dreiecke AC'D und AC'F, und es folgt aus einer Betrachtung, die der eben angestellten ähnlich ist, dass $\sphericalangle CC'D = \frac{\beta}{2}$ und $\sphericalangle AFE = \frac{\beta}{2}$ ist. Offenbar ist auch, da $AE \parallel OC$ ist, $\sphericalangle A'AE = 2\beta$ und $\sphericalangle A'AF = 2\beta - \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2}\beta$. In dem Dreieck AEA' teilt also die Transversale AF den Winkel bei A so, dass sich die beiden Teile wie 1 : 3 verhalten.

Nun ist aber $EF = CD = AC' - AC$ d. h. gleich dem Unterschied zwischen der Seite des 2n-Ecks und der halben Seite des n-Ecks, wobei beide Figuren dem Kreise einbeschrieben sind.

Ferner ist $FA' = C'A' - C'F = C'A' - C'A$ d. h. gleich dem Unterschied zwischen der halben Seite des umbeschriebenen n-Ecks und der Seite des einbeschriebenen 2n-Ecks.

Führt man nun für die Seiten des ein- und des umbeschriebenen n-Ecks die bekannten Symbole s_i und s_u ein, während man für das 2n-Eck die Seitenzahl in Klammer zum Index setzt, so ergibt sich

$$EF = s_{i(2n)} - \frac{s_i}{2}$$

$$FA' = \frac{s_u}{2} - s_{i(2n)}$$

Daher bei der Division

$$\frac{EF}{FA'} = \frac{s_{i(2n)} - \frac{s_i}{2}}{\frac{s_u}{2} - s_{i(2n)}}$$

Multipliziert man auf der rechten Seite dieser Gleichung Zähler und Nenner mit 2n, so erlangt sie, da dann die Seiten in die Perimeterwerte übergehen, die Form

$$\frac{EF}{FA'} = \frac{p_{i(2n)} - p_i}{p_u - p_{i(2n)}}$$

Für kleine Winkelgrössen sind aber die Strecken EF und FA' den gegenüberliegenden Winkeln EAF und FAA' proportional, von diesen ist aber schon gezeigt worden, dass sie sich wie 1 : 3 verhalten. Die Ausrechnung von $p_{i(2n)}$ aus der Gleichung

$$\frac{1}{3} = \frac{p_{i(2n)} - p_i}{p_u - p_{i(2n)}}$$

ergibt die Formel

$$p_{i(2n)} = \frac{3p_i + p_u}{4}$$

Also ist der Perimeter des einbeschriebenen 2n-Ecks gleich dem arithmetischen Mittel von vier Grössen, unter denen der Perimeter des einbeschriebenen n-Ecks dreimal, der des umbeschriebenen n-Ecks einmal auftritt.

Auch auf trigonometrischem Wege lässt sich unter Benutzung der Reihen der Beweis dieses Satzes führen. Zieht man in Fig. 2 $OH \perp AC^1$, so ergibt sich $AC' = 2r\sin\beta$, während $AC = r\sin 2\beta$ und $A'C' = r\,\mathrm{tg}\,2\beta$ ist. Daraus folgt

$$s_{i(2n)} - \frac{s_i}{2} = r(2\sin\beta - \sin 2\beta)$$

$$\frac{s_u}{2} - s_{i(2n)} = r(\mathrm{tg}\,2\beta - 2\sin\beta)$$

Die Division dieser Gleichungen und die schon vorhin benutzte Einführung der Perimeterwerte ergibt

$$\frac{p_{i(2n)} - p_i}{p_u - p_{i(2n)}} = \frac{2\sin\beta - \sin 2\beta}{\mathrm{tg}\,2\beta - 2\sin\beta}$$

Die Reihen für die rechtsstehenden Werte, soweit wir sie gebrauchen, lauten:

$$2\sin\beta = 2\beta - \frac{\beta^3}{3} + \ldots$$

$$\sin 2\beta = 2\beta - \frac{4\beta^3}{3} + \ldots$$

$$\mathrm{tg}\,2\beta = 2\beta + \frac{8\beta^3}{3} + \ldots$$

Daraus folgt aber, dass der Zähler des Bruches den Wert $-\frac{\beta^3}{3} + \frac{4\beta^3}{3} = \beta^3$, der Nenner den Wert $\frac{8\beta^3}{3} + \frac{\beta^3}{3} = 3\beta^3$ besitzt. Also hat der ganze Bruch wieder den Wert $\frac{1}{3}$, und das früher gewonnene Resultat ist gesichert.

Es verlohnt sich nun wohl, die Genauigkeit der Formel

$$p_{i(2n)} = \frac{3p_i + p_u}{4}$$

zu prüfen.

Um zu einem Urteil darüber zu gelangen, von wo an die Formel brauchbar wird, wollen wir gleich von vornherein mit 5 Dezimalen rechnen.

$$p_{i\,(24)} = \frac{9{,}31749 + 3{,}21539}{4} = 3{,}13322$$

(richtig 3,13263)

$$p_{i\,(48)} = \frac{9{,}39789 + 3{,}15966}{4} = 3{,}13939$$

(richtig 3,13935)

$$p_{i\,(96)} = \frac{9{,}41805 + 3{,}14609}{4} = 3{,}14103$$

(stimmt überein)

$$p_{i\,(192)} = \frac{9{,}42309 + 3{,}14271}{4} = 3{,}14145$$

(stimmt überein).

Bei den folgenden Polygonen geht die Uebereinstimmung bis auf 6 Dezimalen; die benutzten Zahlen sind dabei dem Kambly-Roeder entnommen.

$$p_{i\,(384)} = \frac{9{,}424356 + 3{,}141873}{4} = 3{,}141557$$

$$p_{i\,(768)} = \frac{9{,}424671 + 3{,}141662}{4} = 3{,}141583$$

$$p_{i\,(1536)} = \frac{9{,}424749 + 3{,}141610}{4} = 3{,}141590$$

Was nun die Anwendung unserer zweiten Formel auf die Berechnung von π anbetrifft, so kann man sich dieselbe so denken, dass sie die Benutzung der allbekannten, für die Rechnung aber schwerfälligen Formel

$$s_{i\,(2n)} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_i^2}}$$

vom 96-Eck an überflüssig macht und für die Berechnung der betreffenden Seite des umbeschriebenen Polygons die Hinzuziehung der Formel

$$s_u = \frac{2\,s_i}{\sqrt{4 - s_i^2}}$$

erfordert. (In beiden Formeln ist $r = 1$ gesetzt). Dann kann man die beiden Perimeterreihen so lange fortsetzen, bis sich durch Zusammenschluss der Zahlen π in der gewünschten Genauigkeit ergibt.

Konstitutions- und Strukturformeln für geometrische Konstruktionen.

Von S. Leisen, Dülken.

In No. 2 des vor. Jahrg. der „Unt.-Bl." erschien ein Artikel von mir über „Relative Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen und ihre Bestimmung". Derselbe enthielt in gedrängter Form meine seit 1890 befolgten Grundsätze inbezug auf geometrische Konstruktionen und meine (in ihrer ersten Form ebenso alte) symbolische Darstellung der Konstruktionen durch sog. Klassenbilder.

Nur eine Besprechung der letzteren ist mir zu Gesicht gekommen, die von Herrn Güntsche in seinem Artikel „Ueber Geometographie" in No. 3 der „Unt.-Bl."

Eine Erwiderung auf den Artikel des Herrn Güntsche, die nach einer kurzen Darlegung der allmählichen Entwickelung meiner Klassensymbole alle von dem Verfasser dagegen erhobenen Bedenken als unbegründet nachzuweisen suchte, wurde mir von der Redaktion der „Unt.-Bl." als zu umfangreich für sofortige Aufnahme bezeichnet und dann auf meinen Wunsch zurückgesandt.

Obgleich mir die von Herrn Güntsche erhobenen Einwände durchaus unbegründet erschienen (vgl. u.), habe ich mich dennoch dadurch veranlasst gesehen, strenger zu untersuchen, ob nicht vielleicht doch die in dem angeführten Artikel gegebenen, etwas sehr kurzen Erklärungen meiner Symbole missverständlich seien und ob am Ende mein Klassensystem nicht nur nicht in der von Herrn Güntsche vorgeschlagenen Form zu vereinfachen sei, sondern vielmehr einer Ergänzung bedürfe.

Beide Fragen musste ich mir nach reiflicher Ueberlegung bejahen.

Bei der Erklärung der Symbole für die verschiedenen Klassen, in die ich die Kreise einteile, habe ich wohl mit Recht nicht besonders hervorheben zu müssen geglaubt, dass für jeden Kreis die Zirkelöffnung höchstens einmal abzuändern ist. Ich durfte aber nicht voraussetzen, dass eine Einstellung einer Spitze auf einen Punkt oder eine Linie immer, wo es nach der Gesamtzahl der Einstellungen angeht, ohne gleichzeitige Abänderung der Zirkelöffnung vorgenommen gedacht werde. Ich hätte der Erklärung, dass die mit einem Strich (Accent) versehenen Symbole Kreise bezeichnen, bei deren Konstruktion eine der Zirkelspitzen auf einer Linie eingesetzt wird, nicht nur — wie ich tat — beifügen müssen, dass diese Einstellung zuletzt, sondern auch, dass sie ohne gleichzeitige Abänderung der Zirkelöffnung vorzunehmen ist.

Zu einer Vervollständigung meines Klassensystems gelangte ich, als ich mir nochmals ernstlich die Frage vorlegte, ob in meinen alten Zeichen wirklich jede irgendwie erhebliche Verschiedenheit in der Konstruktion der verschiedenen Linien zum Ausdruck komme.

Inbetreff der Lemoineschen Symbole ist — nach Kenntnisnahme ihrer Erklärung durch Herrn Lemoine selbst in seiner Géométrographie (Sammlung Scientia No. 18) — mein Urteil folgendes.

Zur Bestimmung der Einfachheits- und Genauigkeitskoeffizienten nach den Lemoineschen Prinzipien sowie der Anzahl der zu zeichnenden Linien genügen halb so viele Zeichen wie Herr Lemoine für diesen (seinen einzigen oder doch wichtigsten!) Zweck verwendet. Es genügte etwa das Zeichen P (praeparatio) für jede genau vorzunehmende vorbereitende Operation (d. i. Neueinstellung des Lineals oder Zirkels) sowie daneben die Zeichen R (recta linea) und C (circulus) für das Ziehen einer Geraden bezw. eines Kreises. Statt R und C brauchte sogar nur ein einziges Symbol, etwa L (linea), verwandt zu werden.

Die Bedeutung dieser Zeichen wäre zugleich viel verständlicher und leichter behältlich als die der Lemoineschen Zeichen. Inwiefern erinnert z. B. der Index 2 in dem Symbol R_2 an das Ziehen der Geraden, da dieser Operationen nach Herrn Lemoine bald zwei vorbereitende Operationen (Einstellungen des Lineals auf vorher bestimmte Punkte) vorangehen, bald nur eine solche, bald keine. Weshalb soll ich das Beschreiben der Kreislinie durch C_3 ausdrücken, nachdem ich die dieser Zeichnung unmittelbar vorhergegangene Operation durch C_1 bezeichnet habe? Kommt einmal die Operation C_2 vor, so geht ihr wieder durchaus nicht immer die Opertion C_1 unmittelbar vorauf. Weshalb unterscheidet Herr Lemoine übrigens das Einsetzen einer Zirkelspitze auf einen beliebigen Punkt einer bestimmten Linie von der Einstellung in einen ganz bestimmten Punkt, während er andere, und zwar viel grössere Verschiedenheiten unberücksichtigt lässt?

Wenn überhaupt Unterscheidungen zwischen einzelnen vorbereitenden Operationen wie die von Herrn Lemoine durch R_1, C_1 und C_2 bezeichneten gemacht werden, so müssen folgerichtig alle wesentlichen Verschiedenheiten Berücksichtigung finden. Die Zeichen für die verschiedenen Operationen müssen ferner so gewählt werden, dass ihre Bedeutung leicht ersichtlich und behältlich ist.

Diesen Anforderungen dürften wohl die folgenden 9 Operationszeichen genügen:

a_1, a_2, L; p, l, vp, vl, nl, O.

Die kleinen Buchstaben bedeuten genaue Einstellungen des Lineals und des Zirkels auf bestimmte, d. h. vorher genau bezeichnete Punkte oder auf Punkte bestimmter, d. h. vorher gezeichneter Linien (alle Einstellungen auf beliebige, nicht vorher gezeichnete Punkte bleiben — wie bei Herrn Lemoine — unberücksichtigt!); die grossen Buchstaben werden gebraucht zur Bezeichnung des Ziehens der Linien.

a_1 bedeutet das Anlegen des Lineals (d. h. Linealrandes) an einen vorher bezeichneten Punkt,

a_2 das Anlegen des Lineals an zwei bestimmte Punkte zugleich.

(Der Buchstabe a ist nicht nur der Anfangsbuchstabe des deutschen Wortes „anlegen", sondern zugleich der Anfangsbuchstabe der lateinischen Wörter appositio und applicatio!)

Beim Zeichnen von Kreisen sind zunächst die Zirkelspitzen in Berührung mit der Zeichenfläche zu bringen. Die Einstellung der einen (der ersten) Zirkelspitze auf die Zeichenfläche erfolgt unter Beibehaltung der Zirkelöffnung ohne weitere Einschränkung der Beweglichkeit der anderen Spitze. Die Einstellung dieser anderen (der zweiten) Spitze aber geschieht in wesentlich verschiedener Weise, nämlich während die erste in ihrer Lage auf der Zeichenfläche festgehalten wird. Das genaue Einsetzen der 1. Zirkelspitze soll durch einen Buchstaben bezeichnet werden, das der 2. Spitze durch zwei Buchstaben. Und zwar wird das Einsetzen der 1. Zirkelspitze durch p oder l ausgedrückt, je nachdem die Einstellung auf einen vorher genau bezeichneten Punkt oder auf einen beliebigen Punkt einer vorher gezeichneten Linie stattfindet. Die Einstellung der 2. Zirkelspitze auf einen bestimmten Punkt oder auf einen Punkt einer bestimmten, vorher gezeichneten Linie wird durch vp bezw. vl bezeichnet, wenn sie mit einer Veränderung (variatio) der Zirkelöffnung verbunden ist; wird dagegen (s. u.) bei Einstellung der 2. Spitze auf eine Linie die Zirkelöffnung (d. h. ihr Abstand von der [ruhenden] ersten Spitze) nicht verändert, so bezeichne ich diese Einstellung durch nl.

Als erste Zirkelspitze wird gewöhnlich, aber nicht notwendigerweise immer (vgl. u. am Schlusse) die nichtzeichnende oder, wie ich lieber mit Herrn Prof. Pietzker sagen will, nichtschreibende Spitze genommen, als zweite die schreibende. Die Operation nl ist stets mit der nichtschreibenden, die ihr unmittelbar vorangehende Einstellung der ersten Spitze auf einen bestimmten Punkt also mit der schreibenden Spitze auszuführen. Hiernach hat

p die Bedeutung: Eine Zirkelspitze ist unter Beibehaltung der Zirkelöffnung (aber ohne weitere Einschränkung der Beweglichkeit der anderen Spitze) auf einen vorher genau bezeichneten Punkt einzusetzen.

l bedeutet: Eine Zirkelspitze (die nichtschreibende!) ist unter Beibehaltung der Zirkelöffnung auf einen beliebigen Punkt einer vorher gezeichneten Linie einzusetzen, ohne dass während dieser Operation die andere Spitze in einem bestimmten Punkte festgehalten wird.

vp bedeutet: Während die erste Zirkelspitze in ihrer Lage festgehalten wird, ist die zweite (unter Veränderung der Zirkelöffnung) auf einen bestimmten, d. h. vorher gezeichneten Punkt einzustellen.

vl bedeutet: Während die erste Zirkelspitze in dem Mittelpunkte eines früher gezeichneten Kreises festgehalten wird, ist die zweite (unter Veränderung der Zirkelöffnung) auf einen beliebigen Punkt jener Kreislinie einzusetzen.

nl bedeutet: Während die schreibende Zirkelspitze (als erste) in ihrer Lage festgehalten wird, ist die nichtschreibende auf eine bestimmte Linie einzustellen, dabei aber die Zirkelöffnung nicht zu verändern. (S. u.)

Das Ziehen der Linien soll durch die Buchstaben L und O des grossen lateinischen Alphabets dargestellt werden. L bedeutet das Ziehen einer geraden Linie (Linea recta), O das Beschreiben einer Kreislinie (Orbis). Die lateinischen Buchstaben L und O erinnern in der Druckschrift [und so können und sollen sie auch geschrieben werden!] schon durch ihre Form an die dadurch bezeichneten Linien.

Die angeführten 9 Operationszeichen sind alle eindeutig, dagegen sind die Lemoineschen Zeichen zwei- oder mehrdeutig. Geometrische Konstruktionen, die durch die nämliche Lemoinesche Operationsformel ausgedrückt werden, enthalten nicht notwendigerweise die nämlichen elementaren Operationen, sind daher nicht notwendigerweise absolut gleich inbezug auf Einfachheit und Genauigkeit, wohl aber sind dies zwei Konstruktionen, wenn die Formeln, durch die sie in meinen Zeichen dargestellt werden, genau übereinstimmen.

Die der Lemoineschen Operations-Formel entsprechende Darstellung einer geometrischen Konstruktion durch meine Operationszeichen (a_1, a_2, p, l, vp, nl, L und O) nenne ich die **Konstitutionsformel der Konstruktion**.

Sie gibt die sämtlichen mit Sorgfalt vorzunehmenden Elementaroperationen an, aus denen sich die Konstruktion zusammensetzt, konstituiert.

Die Arbeit der Einstellung des Lineals oder Zirkels auf ganz beliebige Punkte der Zeichenfläche ist gegen die Arbeit, die eine genaue Einstellung auf einen bestimmten Punkt oder eine bestimmte Linie erfordert, gleich Null. Daher bleiben diese Einstellungen bei den Konstitutionsformeln (wie bei den Lemoineschen Operationsformeln) unberücksichtigt.

Ein paar Beispiele von Konstitutionsformeln folgen unten.

Den geometrischen Konstitutionsformeln stelle ich als **geometrische Strukturformeln** meine (durch Ergänzung meines Liniensystems) verbesserten früheren „Klassenbilder" zur Seite.

Bei meiner früheren Einteilung der bei geometrischen Konstruktionen zu zeichnenden Geraden und Kreise in verschiedene Klassen habe ich das Abmessen des Halbmessers eines Kreises, d. h. des Abstandes des Mittelpunktes eines früher gezeichneten Kreises von einem beliebigen Punkte der Kreislinie mit dem Abmessen einer bestimmten Strecke, d. h. des Abstandes zweier genau bezeichneten Punkte für gleich erachtet, die Operation vl nicht von der Operation vp unterschieden.

Diese Nichtunterscheidung war eine Unvollkommenheit meines früheren Klassensystems (auf die ich indessen von keiner Seite aufmerksam gemacht worden bin!); ich beseitige sie durch Hinzufügung neuer Klassen.

Noch eine andere Lücke hatte mein früheres System; es waren nämlich nicht diejenigen Fälle darin berücksichtigt, wo der Mittelpunkt des zuletzt gezeichneten Kreises der eine Endpunkt der unmittelbar darauf abzumessenden Strecke ist, so dass die Zeichnung des neuen Kreises mit der Einstellung der zweiten Zirkelspitze beginnt. Auch diese Lücke meines alten Klassensystems [die früher in den betreffenden Fällen die Hinzufügung von Worten zu dem Klassenbilde erforderlich machte] fülle ich jetzt aus.

Endlich setze ich, um die Bedeutung der Symbole auch für Nichtdeutsche leicht behältlich zu machen, anstelle des Buchstabens „z", des Anfangsbuchstabens vom Worte Zirkel, den lateinischen Buchstaben „o", der 1) durch seine Gestalt an eine Kreislinie erinnert und 2) den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wörtchens orbis (Kreis) bildet.

Das kleine lateinische l behalte ich zur Bezeichnung einer geraden Linie bei, da es in der Druckschrift durch einen einfachen geraden Strich dargestellt wird und zudem den Anfangsbuchstaben von linea recta (gerade Linie) wie auch von Lineal bildet.

Dem Buchstaben l werden unten Ziffern, dem Buchstaben o unten Ziffern und Kommata sowie oben Striche (Accente) beigefügt.

Bei dem Buchstaben l bedeuten die Ziffern 0, 1, 2 die Anzahl der bestimmten, d. i. vorher genau bezeichneten Punkte, die der Rand des Lineals beim Ziehen der entsprechenden Geraden berühren soll; die Ziffer 1 hat also hier die Bedeutung des Operationszeichens a_1, die Ziffer 2 die von a_2.

Ist dem Buchstaben o unten der Index 0 beigefügt, so bedeutet dies, dass dem Beschreiben der betreffenden Kreislinie keine Neueinstellung auf einen bestimmten Punkt oder auf eine bestimmte Linie voraufgeht. Die Ziffer 1 bedeutet als Index von o die Operation p, d. h. dass die erste Zirkelspitze auf einen bestimmten Punkt einzusetzen ist. Die Ziffer 2 bedeutet hier die Operation p + vp, d. h. dass zunächst die für sich allein durch 1 bezeichnete Operation vorzunehmen und dann, während die erste Zirkelspitze in ihrer Lage verbleibt, die zweite in einen bestimmten Punkt einzustellen ist. Eine dem Buchstaben o als Index beigefügte 3 bedeutet die zusammengesetzte Operation p + vp + p, d. h. dass zunächst die durch 2 auszudrückende Operation und dann wieder eine Einstellung wie diejenige, die durch 1 bezeichnet wird, vorzunehmen ist.

Als Indices von o kommen auch die Differenzen 2—1 und 3—1 vor. Erstere hat die (leicht zu erratende) Bedeutung, dass von den beiden durch die Ziffer 2 angedeuteten Operationen die erste (die ja für sich durch den Index 1 bezeichnet wird) wegfällt, dass also, während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des unmittelbar vorher gezeichneten Kreises verbleibt, die zweite (unter Veränderung der Zirkelöffnung) in einen bestimmten Punkt eingesetzt wird (die einfache Operation vp). In ähnlicher Weise bedeutet die Differenz 3—1 als Index von o, dass von den drei durch den Minuenden angedeuteten Operationen die erste wegfällt, also die zusammengesetzte Operation vp + p.

Ein dem Buchstaben o u n t e n angehängtes Komma ist das Zeichen für die Operation vl, bedeutet also, dass, während die erste Zirkelspitze in einem bestimmten Punkte festgehalten wird, die zweite (unter Abänderung der Zirkelöffnung) auf eine früher um jenen Punkt gezeichnete Kreislinie einzustellen ist.

Ein dem o o b e n beigefügter Strich (Accent) bedeutet die Einstellung einer Zirkelspitze auf eine Linie o h n e gleichzeitige Abänderung der Zirkelöffnung, also entweder die Operation l oder die Operation nl, je nachdem ihr — als der notwendigerweise zuletzt vorzunehmenden Einstellung — eine gerade oder eine ungerade Anzahl von bestimmten Einstellungen des Zirkels für die betreffende Linie vorangehen.

Hiernach dürfte die Bedeutung meiner neuen (wie auch meiner alten) Klassenzeichen für jeden Leser klar sein. Um indessen jedes Missverständnis der Bedeutung der einzelnen Symbole auszuschliessen, will ich im Folgenden jedes Klassenzeichen für sich erklären und zwar zuerst [in Form von Gleichungen] durch die oben genau erklärten 9 Operationszeichen und dann in Worten.

Es bedeutet:

1) $l_0 = L$: Eine Gerade ist zu ziehen (ohne dass vorher das Lineal auf einen bestimmten Punkt einzustellen ist).

2) $l_1 = a_1 + L$: Durch einen bestimmten, vorher gezeichneten Punkt soll eine (im übrigen beliebige) Gerade gezeichnet werden.

3) $l_2 = a_2 + L$: Durch zwei bestimmte vorgezeichnete Punkte soll eine Gerade gezogen werden.

4) $o_0 = O$: Ein Kreis ist zu zeichnen, ohne dass eine Neueinstellung einer Zirkelspitze auf einen vorher genau bezeichneten Punkt oder eine vorher gezeichnete Linie stattfindet.

5) $o_1 = p + O\,[= O_p]$: Eine der Zirkelspitzen ist auf einen bestimmten vorgezeichneten Punkt einzustellen und dann u m diesen Punkt (oder d u r c h denselben [s. u.]) ein Kreis zu beschreiben.

6) $o'_0\,(= o') = l + O\,[= O_l]$: Die nichtschreibende Zirkelspitze ist (nicht auf einen ganz bestimmten Punkt, aber) auf irgend einen Punkt einer bestimmten, d. h. früher gezeichneten Linie einzustellen und hierum ein Kreis zu beschreiben.

7a) $o_2 = p + vp + O\,[= O_{pvp}]$: Eine Zirkelspitze ist zunächst in einen bestimmten vorgezeichneten Punkt einzusetzen und dann in diesem Punkte festzuhalten, während die andere Spitze (unter Veränderung der Zirkelöffnung) in einen zweiten bestimmten Punkt eingestellt wird, endlich ist um den von der nichtschreibenden Spitze berührten Punkt oder um einen ganz beliebigen Punkt ein Kreis zu beschreiben.

7b) $o_{2-1} = vp + O\,[= O_{vp}]$: Während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises festgehalten wird, ist die andere Spitze (unter Abänderung der Zirkelöffnung) in einen bestimmten vorgezeichneten Punkt zu bringen und alsdann um irgend einen beliebigen Punkt ein Kreis zu beschreiben.

8a) $o_{1,} = p + vl + O\,[= O_{pvl}]$: Eine Zirkelspitze ist auf den Mittelpunkt eines früher gezeichneten Kreises einzustellen und dann in diesem Punkte festzuhalten, während die andere Spitze (durch Vergrösserung oder Verkleinerung der Zirkelöffnung) auf einen beliebigen Punkt der Kreislinie eingestellt wird, endlich ist um letzteren oder aber um einen beliebigen anderen Punkt ein Kreis zu beschreiben.

8b) $o_{,} = vl + O\,[= O_{vl}]$: Während die nichtschreibende Spitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises verbleibt, ist der Halbmesser eines hiermit konzentrischen, bereits früher gezeichneten Kreises wieder in den Zirkel zu nehmen und dann um irgend einen beliebigen Punkt ein Kreis zu schlagen.

9) $o'_1 = p + nl + O\ [= O_{pnl}]$: Die schreibende Zirkelspitze ist (als erste) in einen bestimmten vorgezeichneten Punkt einzusetzen, dann unter Beibehaltung der Lage jener und unter Beibehaltung der Zirkelöffnung die andere Spitze in einen Punkt einer bestimmten vorgezeichneten Linie zu bringen und um letzteren Punkt ein Kreis zu beschreiben (s. u.).

10a) $o_3 = p + vp + p + O\ [= O_{pvp} + p]$: Zunächst ist durch Neueinstellung beider Zirkelspitzen [wie bei o_2] der Abstand zweier bestimmter vorgezeichneter Punkte abzumessen, dann die nichtschreibende Spitze in einen dritten, genau bezeichneten Punkt einzusetzen und hierum ein Kreis zu schlagen.

10b) $o_{3-1} = vp + p + O\ [= O_{vp} + p]$: Während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises festgehalten wird, ist die andere Spitze (unter Veränderung der Zirkelöffnung) in einen vorher markierten Punkt zu bringen, dann die nichtschreibende Spitze in einen neuen, vorher genau gezeichneten Punkt einzusetzen und hierum ein Kreis zu beschreiben.

11a) $o_{1,1} = p + vl + p + O\ [= O_{pvl} + p]$: Zuerst ist durch Neueinstellung beider Zirkelspitzen (wie bei $o_{1,}$) ein beliebiger Radius eines früher gezeichneten Kreises abzumessen, dann die nichtschreibende Spitze in einen neuen bestimmten, vorgezeichneten Punkt einzusetzen und hierum einen Kreis zu schlagen.

11b) $o_{,1} = vl + p + O\ [= O_{vl} + p]$: Während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises verbleibt, ist der Halbmesser eines hiermit konzentrischen früher konstruierten Kreises wieder in den Zirkel zu nehmen, dann die nichtschreibende Spitze in einen neuen bestimmten Punkt einzusetzen und hierum ein Kreis zu beschreiben.

12a) $o'_2 = p + vp + l + O\ [= O_{pvp} + l]$: Durch Neueinstellung beider Zirkelspitzen ist eine bestimmte Strecke (d. i. der Abstand zweier bestimmten vorgezeichneten Punkte) abzumessen, dann die nichtschreibende Spitze in einen beliebigen Punkt einer bestimmten, früher gezeichneten Linie zu bringen und zuletzt hierum ein Kreis zu schlagen.

12b) $o'_{2-1} = vp + l + O\ [= O_{vp} + l]$: Während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt konstruierten Kreises festgehalten wird, ist die andere (unter Abänderung der Zirkelöffnung) in einen bestimmten, vorgezeichneten Punkt zu bringen, dann die nichtschreibende auf einen beliebigen Punkt einer bestimmten, vorgezeichneten Linie einzustellen und hierum ein Kreis zu schlagen.

13a) $o'_{1,} = p + vl + l + O\ [= O_{pvl} + l]$: Durch Neueinstellung beider Zirkelspitzen ist ein beliebiger Radius eines bestimmten, früher gezeichneten Kreises in den Zirkel zu nehmen, dann die nichtschreibende Zirkelspitze auf einen beliebigen Punkt einer bestimmten anderen Linie einzusetzen und hierum ein Kreis zu beschreiben.

13b) $o'_{,} = vl + l + O\ [= O_{vl} + l]$: Während die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises festgehalten wird, ist die andere auf einen beliebigen Punkt einer früher gezeichneten konzentrischen Kreislinie einzustellen, dann die nichtschreibende Spitze in einen beliebigen Punkt einer bestimmten anderen, früher gezeichneten Linie zu bringen und hierum ein Kreis zu schlagen.

14a) $o'_3 = p + vp + p + nl + O\ [= O_{pvp} + pnl]$: Zunächst ist durch neue Einstellung beider Zirkelspitzen der Abstand zweier bestimmten, vorgezeichneten Punkte abzumessen, dann die schreibende Spitze in einen anderen bestimmten Punkt einzusetzen und darin festzuhalten, bis die nichtschreibende durch Drehung ohne Veränderung der Zirkelöffnung in einen Punkt einer bestimmten, früher gezeichneten Linie gebracht ist, und endlich um letzteren Punkt ein Kreis zu beschreiben (s. u.).

14b) $o'_{3-1} = vp + p + nl + O\ [= O_{vp} + pnl]$: Während zunächst die nichtschreibende Zirkelspitze im Mittelpunkte des zuletzt gezeichneten Kreises festgehalten wird, ist die andere (unter Veränderung der Zirkelöffnung) in einen bestimmten vorgezeichneten Punkt zu bringen; dann ist die schreibende Spitze in einen neuen bestimmten Punkt einzustellen und darin festzuhalten, bis die nichtschreibende durch Drehung ohne Veränderung der Zirkelöffnung auf einen Punkt einer bestimmten, früher gezeichneten Linie gebracht ist, und endlich um letzteren Punkt ein Kreis zu schlagen (s. u.).

15a) $o'_{1,1} = p + vl + p + nl + O\ [= O_{pvl} + pnl]$: Durch Neueinstellung beider Zirkelspitzen ist der Halbmesser eines bestimmten, früher gezeichneten Kreises (wieder) abzumessen, dann die schreibende Spitze in einen neuen bestimmten Punkt einzusetzen und darin festzuhalten, bis die andere durch Drehung ohne Veränderung der Zirkelöffnung in einen Punkt einer bestimmten, früher gezeichneten Linie gebracht ist, und endlich um letzteren Punkt ein Kreis zu schlagen (s. u.).

15b) $o'_{,1} = vl + p + nl + O\ [= O_{vl} + pnl]$: Zunächst ist durch blosse Neueinstellung der schreibenden Zirkelspitze der Halbmesser eines mit dem letzten konzentrischen, früher gezeichneten Kreises in den Zirkel zu nehmen; dann ist die schreibende Spitze in einen neuen bestimmten Punkt einzusetzen und darin festzuhalten, während die andere durch Drehung (ohne Veränderung der Zirkelöffnung) auf irgend einen Punkt einer bestimmten, früher gezeichneten Linie gebracht wird, und endlich um letzteren Punkt ein Kreis zu beschreiben (s. u.).

Für die Praxis empfiehlt es sich, wie gleich unten an einem Beispiel erläutert werden soll, im Text der Konstruktion die einzelnen Linien durch ihre Klassensymbole zu bezeichnen, diese hiernach zur Strukturformel der Konstruktion zusammenzufassen und zum Schluss hieraus die Konstitutionsformel abzuleiten. Aus der Strukturformel einer geometrischen Konstruktion lässt sich leicht deren Konstitutionsformel entwickeln. Ebenso lassen sich aus beiden die Lemoineschen „Operationsformeln“ ableiten, aber nicht umgekehrt. Die Konstitutionsformeln enthalten ja alle Angaben der Lemoineschen Operationsformeln und noch andere dazu; wiederum mehr als die Konstitutionsformeln sagen die Strukturformeln aus. (Uebrigens liefern nicht bloss meine Klassensymbole Strukturformeln, sondern auch aus den für die Konstitutionsformeln benutzten 9 Operationszeichen lassen sich (vgl. u.) durch Anwendung von Klammern oder Anhängung der kleinen Buchstaben an die grossen Strukturformeln bilden!)

(Schluss folgt.)

Lebensversicherungs-Rechnungen beim Unterricht.

(Mit einer Beilage.)

Von Dr. A. Schülke (Osterode Ost-Pr.)

Die Anwendung der Zinseszins- und Rentenrechnung auf Lebensversicherungen ist neuerdings mehrfach für den Unterricht empfohlen, namentlich von Kiepert*) (Unt.-Bl. 1899 S. 87) und F. Klein (Über angewandte Mathematik, Leipzig, Teubner 1900). Tatsächlich sind auch in die Aufgaben-Sammlungen von Bardey (bearbeitet von Pietzker und Presler) und Schülke einige Aufgaben über diesen Gegenstand aufgenommen. Trotzdem kann man nicht erwarten, dass diese Bestrebungen weiteren Eingang finden, denn die für diesen Zweck erforderlichen Zahlenangaben sind in Schulbüchern entweder garnicht oder unzureichend vorhanden und an anderen Orten schwer zugänglich. Eine Sterblichkeitstafel findet man nämlich in den Logarithmentafeln von Greve, Heger und Jelinek (fünfstellig), Schubert und Schülke (vierstellig), Σv_x bei Schubert, v_x und Σv_x bei Heger, ausserdem noch in einigen Spezialwerken z. B. von Knebel Doeberitz und Dr. Broecker, Das Sterbekassenwesen in Preussen (Berlin 1902) und Grossmann, Versicherungsmathematik (Leipzig 1902). (Die Tabellenwerke, welche die Versicherungsanstalten benutzen, können wegen ihres hohen Preises, 100—332 Mk., nicht in Betracht kommen). Sehr zahlreiche Sterblichkeitstabellen, nämlich Deutsche, Berliner, Preussische, Mecklenburgische, Oldenburgische, Schweizerische, Französische, Englische, Niederländische, Dänische, Schwedische, Norwegische, von 23 deutschen und 20 englischen Gesellschaften enthalten die Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs, November 87 zugleich mit der ausführlichen Herleitung der deutschen Sterbetafel.

Für den Unterricht kommen nun nicht allein die absoluten Werte in Betracht, sondern man muss auch erkennen, in welcher Weise dieselben von der gewählten Sterblichkeit und dem Prozentsatz abhängig sind. Ich habe daher für die 4. Auflage meiner Logarithmentafel (Leipzig 1903) folgende Auswahl getroffen, die aus den obigen Gründen vielleicht ein allgemeines Interesse hat und die ich daher als Beilage beifüge. Als Sterblichheitstafeln wählte ich die deutsche (aus 45 Millionen Einwohnern 1871/1881 abgeleitet) und die aus den Erfahrungen von 23 deutschen Versicherungsgesellschaften über Personen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, beide für Männer. Diese Tafeln schienen mir die wichtigsten zu sein, wenngleich die Sterblichkeit nicht immer zwischen diesen Grenzen liegt; es zeigen sich vielmehr in den einzelnen Gegenden Deutschlands erhebliche Abweichungen, auch ist auffallend, dass die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung etwa in der Mitte zwischen derjenigen der versicherten männlichen Personen mit vollständiger und mit unvollständiger ärztlicher Untersuchung liegt. Da das Beobachtungsmaterial der 23 deutschen Gesellschaften nicht ausreichte, um die Sterblichkeit über 91 Jahre hinaus mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, so habe ich die Tafel bis zu 100 Jahren ergänzt und zwar nach dem Vorgange von Zillmer aus den 17 englischen Gesellschaften.

Um die Sterblichkeit zwischen der Reichsbevölkerung und den ärztlich untersuchten Personen bequemer vergleichen zu können, sind die Zahlen der deutschen Sterbetafel (sowie v_x und Σv_x) durch 0,59287 dividiert und dadurch $\lambda_{20} = 100000$ gemacht.

Die Berechnung ist mit 10stelligen Zinsfaktoren 7-, 6- und 5stellig durchgeführt und dann sind die Zahlen soweit gekürzt, wie angegeben; dadurch erklären sich die kleinen Abweichungen der letzten Stelle in den Gleichungen $\Sigma v_x = v_x + \Sigma v_{x+1}$. Bei der Berechnung fand ich kleine Abweichungen von den oben genannten Werken, z. B. von Knebel Doeberitz gibt $v_{76} = 999{,}9$ es müsste jedoch 1000,0 heissen, da der genauere Wert 999,97 wird. Wesentlicher fällt ins Gewicht, dass bei Grossmann log $v_{55} = 116174$ angegeben ist, während es 114174 heissen muss, dadurch werden dort die folgenden Zahlen unrichtig.

Σv_x enthält anfangs 7, später 6 geltende Ziffern, weil Nullen ebensoviel Platz wegnehmen würden. Es ist jedoch nicht erforderlich, bei der Benutzung dieser Tabellen zu 7stelligen Tafeln zu greifen. Denn die Sterblichkeitstafeln enthalten nur 5 Ziffern, also können auch die daraus abgeleiteten Werte v_x und Σv_x nicht weiter als auf 5 geltende Ziffern zuverlässig sein, wie ich in meiner Aufgaben-Sammlung in § 112 über die Grenzen für die Genauigkeit der Rechnung nachgewiesen habe.*) Berücksichtigt man jedoch, dass die Sterbetafeln selbst ausgeglichen sind, dass ferner die Sterblichkeit fortwährenden Schwankungen unterworfen ist, indem sie namentlich durch Volkskrankheiten vermehrt, durch hygienische Massregeln und durch Besserung der Lebenshaltung vermindert wird, dass ferner der Prozentsatz niemals längere Zeit ungeändert bleibt, und dass endlich die berechneten Werte Netto-Prämien darstellen, während für die Grösse der genannten Schwankungen sowie für die Bestimmung der Verwaltungskosten der Schüler gar keinen Anhalt hat — so ist es klar, dass auch hierbei 4stellige Tafeln für alle Schulzwecke genügen.

Die wichtigsten Aufgaben, die man durch die beiliegende Tafel lösen kann, sind:

1) Jemand ist x Jahre alt und zahlt an eine Versicherungsgesellschaft jährlich 1 Mk.; welchen Betrag R_x empfängt die Gesellschaft (auf die Gegenwart bezogen)? $R_x = \Sigma v_x : v_x$.

2) Jemand hat sein Leben mit 1000 Mk. versichert, wie gross ist der gegenwärtige Wert dieser Summe?

$$P_x = 1000\left(1 - \frac{q-1}{q} \cdot \frac{\Sigma v_x}{v_x}\right)$$

3) Welchen jährlichen Beitrag hat man für eine Lebensversicherung von 1000 Mark zu zahlen?

$$r_x = 1000\left(\frac{v_x}{\Sigma v_x} - \frac{q-1}{q}\right)$$

In meiner Logarithmentafel ist noch die preussische Sterblichkeitstafel und die mittlere Lebensdauer nach derselben angegeben. Da die letztere zwischen 20 und 60 Jahren von der deutschen Tafel nur wenig abweicht, so kann man noch untersuchen, wie gross die Annäherung für die obigen Aufgaben ist, welche man durch Benutzung der mittleren Lebensdauer erhält.

---

*) Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat Kiepert für seine Unterstützung bei der nachfolgenden Arbeit auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

*) Schon der Umstand, ob man λ_{90} durch die Sterbewahrscheinlichkeit der deutschen Tafel oder direkt aus der englischen Tafel ergänzt, gibt einen Unterschied von 5—8 Einheiten.

Vereine und Versammlungen.

75. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Cassel vom 20. bis 26. September 1903. Die Versammlung wird in ihrer äusseren Organisation dasselbe Gepräge tragen, wie ihre Vorgängerinnen, insbesondere wird an der Zusammenlegung der verwandten Gebiete festgehalten, so dass die Zahl der Fachabteilungen sich auf 30 stellt, von denen die Abteilungen 1 bis 13 der naturwissenschaftlichen, die Abteilungen 14 bis 30 der medizinischen Hauptgruppe angehören. Neu ist die Eingliederung der bisher der letzteren Hauptgruppe angehörig gewesenen Abteilung für Pharmacie und Pharmakognosie in die naturwissenschaftliche Hauptgruppe (Abt. 13), ferner die Wiederherstellung der auf den beiden letzten Versammlungen in Fortfall gekommenen Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (No. 12). Einführende für diese Abteilung sind Prof. W. Völler (Cassel, Schlangenweg 9) und Prof. O. Hebel, Schriftführer: Oberlehrer W. Bauer. Anmeldungen für diese Abteilung, wie für alle anderen Fachabteilungen werden bis zum 15. Mai erbeten. Allgemeine Sitzungen werden am 21. und 25. September stattfinden, am 23. wird eine Gesamtsitzung beider Hauptgruppen stattfinden, die durch verschiedene zu der Vorgeschichte der Erde und der Menschheit in Beziehung stehende Vorträge ausgefüllt werden soll, am 24. September folgen dann gesonderte Sitzungen der beiden Hauptgruppen, in der Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe werden Vorträge und Verhandlungen über die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und die Ziele der modernen Mechanik stattfinden.

Geschäftsführer der Versammlung sind, wie bereits in No. 5 des vergangenen Jahrgangs mitgeteilt worden ist, Prof. Dr. Hornstein und Dr. med. Rosenblath.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkurse in Jena im August 1903. Die allbekannten Kurse in Jena, die am 2. August eröffnet werden, umfassen wie sonst die Gebiete der Naturwissenschaften, der Pädagogik, der Geschichte nebst Theologie und Philosophie, der Kunst und der Sprachen.

In den naturwissenschaftlichen, vom 3.—15. August dauernden Kursen werden vortragen: Prof. Detmer über Botanik; derselbe: Anleitung zu botanisch-mikroskopischen Arbeiten und pflanzenphysiologischen Experimenten; Prof. Ziegler: Die Tierwelt des Meeres; derselbe: Praktischer Kursus der Zoologie; Dr. Noll: Physiologie des Gehirns mit Demonstrationen; Prof. Joh. Walter: Die Geologie in der Schule; Dr. Gänge: Anwendung optischer Instrumente zum Zweck chemischer Untersuchungen.

Nähere Auskunft erteilt das Sekretariat: Frau Dr. Schnetger (Jena, Gartenstrasse 2), vom 1. August ab Pädagog. Universitäts-Seminar, Grietgasse 17a.

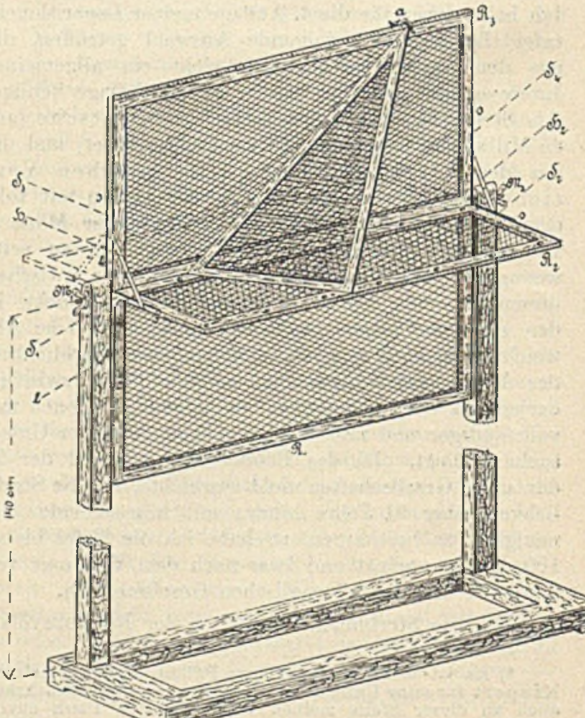
Lehrmittel-Besprechungen.

Universalapparat für Stereometrie und darstellende Geometrie. Die Mehrzahl der Apparate für darstellende Geometrie gestattet nur die Veranschaulichung von Raumgebilden im ersten Raum. Wenn man sich nun auch die darzustellenden Gebilde vorzugsweise im ersten Raum denkt, so bedingt doch oft die Konstruktion eine Zuhilfenahme der anderen Räume. Da sich im Unterricht immer wieder zeigt, dass die Vorstellung der Lage von Raumelementen im zweiten, dritten und vierten Raum den Schülern besondere Schwierigkeiten bereitet, so macht sich das Bedürfnis nach einem Apparat geltend, der es ermöglicht, diesem Uebelstand abzuhelfen. Aus diesem Bedürfnis heraus ist der Universalapparat entstanden. Er hat sich im Unterricht als durchaus gebrauchsfähig und seinem Zweck entsprechend erwiesen. Seine Einrichtung und seine Verwendung ergeben sich aus dem Folgenden:

A. Der Apparat.

1. Auf einem Holzrahmen von 120 cm Länge sind zwei Ständer von 140 cm Höhe aufgeschraubt. Jeder Ständer ist am oberen Ende durchbohrt. Die Durchbohrungen nehmen kurze eiserne Achsen auf, welche in starrer Verbindung mit den Scheiteln zweier unter rechtem Winkel aneinander geschweissten Metallschienen S_1 und S_2 (siehe die Abbildung) stehen. Durch Anziehen zweier Flügelmuttern M_1 und M_2 lassen sich die eisernen Winkel in jeder beliebigen Lage feststellen. Die beiden Flügelmuttern sind stets gleichzeitig zu lösen bezüglich anzuziehen. Ist eine Mutter zu fest angezogen, sodass sie der Lösung grossen Widerstand entgegensetzt, so dreht man zunächst die Schienen zurück, wodurch die Mutter gelockert wird.

2. Zwischen je zwei Schenkel der Schienen S_1 und S_2 ist eine Grundebene R_1 bez. R_2 so befestigt, dass sie sich um die in die Schienen eingeschraubten Stifte s, s drehen und durch die Schrauben k, k befestigen lässt. Infolge dieser Anordnung lässt sich die Seite der Ebene, welche für die Zeichnung am geeignetsten ist, stets in den Raum bringen, in welchem sich das zu betrachtende Raumgebilde befindet. Jede Grundebene besteht nämlich aus einem Holzrahmen von 100 cm Länge und 50 cm Breite, der mit einem feinmaschigen Drahtnetz bespannt ist. Da das Netz nur auf der einen Seite des Rahmens in gleicher Höhe mit der Oberfläche desselben, auf der anderen Seite da-



gegen entsprechend der Stärke des Rahmens tiefer liegt, so ist die vorher erwähnte Einrichtung getroffen, welche eine Drehung der Ebene um 180° gestattet.

3. Behufs Darstellung des zweiten, dritten und vierten Raumes sind auf den Achsen der rechtwinkligen Schienen S_1 und S_2 zwei gerade Schienen S_3 und S_4 so angebracht, dass sie sich um die Achsen drehen lassen, auch wenn die Schienen S_1 und S_2 durch Anziehen der Flügelmuttern festgestellt sind. Eine Grundebene R_3 ist mit den Schienen S_3 und S_4 in derselben Weise verbunden, wie die Ebene R_1 und R_2 mit den Schienen S_1 und S_2, so dass auch sie sich umwenden lässt. Mit den Schienen S_3 und S_4 ist je ein beweglicher Halter (H_1, H_2) in Verbindung. Der Halter trägt am anderen Ende einen Zapfen, welcher in eines der Löcher l in S_1 bez. S_2 gesteckt werden kann. Dadurch wird erreicht, dass R_3 sowohl in eine Stellung rechtwinklig zu R_1 als auch in eine solche rechtwinklig zu R_2 gebracht werden kann. Man ist somit in der Lage, mit drei Ebenen alle vier Räume darzustellen. Es ist leicht ersichtlich, dass man durch Umlegen von R_3 zeigen kann, wie man die Projektionen auf zwei Grundebenen in einer Zeichenebene vereinigt.

B. Das Zubehör.

Zum Apparat gehören folgende Teile:

1. zwei quadratische Drahtnetzrahmen, 50 × 50 cm. Diese sind mit Schraubenspindeln versehen, für welche in den Rahmen der Grundebenen Löcher vorhanden sind. Durch Flügelmuttern lassen sich diese Rahmen an mehreren Stellen der vier Räume senkrecht zu zwei Grundebenen schnell befestigen. Eine Metallplatte mit zwei Zapfen, von denen der eine in ein Loch der oberen wagrechten Leiste der Vertikalebene, der andere in ein solches des quadratischen Drahtnetzrahmens eingreift, verhindert ein seitliches Ausweichen der quadratischen Ebene. Diese quadratischen Rahmen dienen zur Darstellung der Seitenrissebene bezw. einer Ebene, die auf zwei Grundebenen senkrecht steht.

2. zwei rechteckige Drahtnetzrahmen, 50 × 80 cm. Dieselben werden entsprechend den quadratischen Rahmen in einen der vier Räume so eingesetzt, dass sie auf einer Grundebene senkrecht stehen und mit einer anderen Grundebene einen schiefen Winkel bilden.

3. zwei verschieden grosse dreieckige Drahtnetzrahmen mit ungleichen Seiten. Klammern (a), welche an die Leisten der Grundebenen geschraubt werden, geben diesen Dreiecken Halt beim Einsetzen in einen Raum. Die Dreiecke stellen Ebenen in beliebiger Lage zu den Grundebenen vor.

4. Stahlstäbe verschiedener Länge, weiss lackiert und an beiden Enden zugespitzt. Diese Stäbe werden mit den Spitzen in die Maschen der Ebenen eingesetzt und gestatten die Darstellung von Geraden in beliebiger Lage.

5. Stahlstäbe verschiedener Länge, rot lackiert, zum Teil mit Spitzen an den Enden, zum Teil an einem Ende mit einer Oese. Sie werden zur Veranschaulichung von Loten benutzt. Die Oesen werden zu dem Zweck auf die weissen Stäbe geschoben und dort, wenn nötig, durch ein vorgeschobenes Stückchen Kork in ihrer Lage gehalten. Die Spitzen aller Stahlstäbe sind ziemlich lang gemacht, damit die Maschen des Drahtnetzes nicht unnötig erweitert werden. Für manche Lagen der Stäbe empfiehlt es sich, einige Abschnitte von alten Korken bereit zu halten, in welche man die Spitzen der Stäbe auf der Rückseite des Netzes steckt. Man erreicht dadurch, dass die Stäbe nicht seitlich ausweichen, sondern genau in ihrer Lage verharren, sodass man einen Aufbau längere Zeit stehen lassen kann. Zur Schonung des Anstrichs der Stahlstäbe erscheint es angebracht, bei der Darstellung der Durchdringungen von Ebenen und Geraden vermittelst einer Stricknadel von passender Stärke eine oder mehrere Maschen des Netzes entsprechend zu erweitern und diese stets wieder zu benutzen.

6. Korkkugeln zur Darstellung von isolierten Punkten.

7. ein Stativ, bestehend aus einem schweren eisernen Dreifuss, auf den eine starke eiserne Stange aufgeschraubt ist. An dem Stativ wird vermittelst einer Muffe mit Universalgelenk eine 50 cm lange Stange befestigt. Diese Stange trägt an dem einen Ende eine kleinere Klemme für stereometrische Drahtkörper, an dem anderen Ende eine grössere Klemme zum Einspannen von Drahtnetzrahmen. Das Stativ ermöglicht also, Ebenen oder Körper in jede beliebige Lage zwischen die Grundebenen zu bringen und sie an ihrem Ort beliebigen Drehungen zu unterwerfen.

C. Vorteile des Apparates.

1. Die Verwendung von Drahtgaze gestattet ein Hindurchsehen durch die Ebenen, sodass die Lage von verdeckten Gebilden zur Anschauung gebracht werden kann. Da alle Drahtnetze mit einem dauerhaften mattschwarzen Anstrich versehen sind, so kann man die Projektionen auf denselben mit Kreide zeichnen; die weissen und farbigen Zeichnungen sind auf grössere Entfernungen deutlich sichtbar. Das Abwaschen der Zeichnungen wird wie bei der Schultafel vermittels eines Schwammes vorgenommen.

2. Ein anderer wesentlicher Vorzug der Drahtgaze besteht im Gegensatz zu Holztafeln darin, dass man im Unterricht in der Stereometrie und in der darstellenden Geometrie jede beliebige Lage von Geraden im Raum und deren Projektionen zur Anschauung bringen kann. So erreicht man z. B. spielend ein Verständnis für die Lage der Projektionen windschiefer Geraden zueinander, welches sich der Lernende ohne räumliche Darstellung gewöhnlich nur sehr mühsam erwirbt.

3. Die eigenartige Befestigung der Grundebenen ermöglicht es, alle Ebenen gleichzeitig zu drehen und damit der Horizontalebene eine solche Neigung zu geben, dass die Schüler eine gute Aufsicht auf diese Ebene erhalten.

4. Mittels des Stativs und der unter B 2 aufgeführten rechteckigen Drahtnetze kann man die Halbierungsebenen der vier Räume herstellen und namentlich aus Gebilden in der Halbierungsebene des zweiten und vierten Raumes und deren Projektionen die wichtigen affinen Beziehungen anschaulich machen und herleiten.

5. Der Aufbau des Apparates ist derart, dass jeder Teil desselben herausgenommen und zum Zweck einer Reparatur gesondert versandt werden kann. Eine Erneuerung der Drahtgaze oder ihres Anstrichs lässt sich daher ohne besondere Umstände leicht erreichen.

Kleinere Aenderungen, welche eine Verbesserung des Apparates bezwecken, behält sich der Fabrikant vor; ebenso ist er bereit, Wünsche in bezug auf Grössenverhältnisse oder in anderer Hinsicht soweit wie möglich zu erfüllen.

Der Apparat ist gesetzlich geschützt unter der Nr. 192 764 und der Bezeichnung: „Für räumliche Darstellungen in Stereometrie und darstellender Geometrie dienender Apparat mit zwei unter rechtem

Winkel starr aneinander befestigten Ebenen in Verbindung mit einer dritten beweglichen Ebene." Der Preis einschliesslich Zubehör beträgt 150 Mk. Bestellungen sind an den Unterzeichneten oder an Herrn Mechaniker F. A. Hintze, Berlin N 37, Metzerstrasse 29 zu richten.

A. Hupe, Charlottenburg 5, Kantstr. 76.

Bücher-Besprechungen.

Max Bernhard, Darstellende Geometrie mit Einschluss der Schattenkonstruktionen. Stuttgart 1901. Heinrich Enderlen (VIII + 195). 8⁰.

Der vorliegende Leitfaden, der zum Gebrauche an höheren Schulen und technischen Lehranstalten bestimmt ist, macht im grossen und ganzen einen recht erfreulichen Eindruck. Die Auswahl des Stoffes und der Methoden, die zur Lösung der Aufgaben dienen, ist im allgemeinen zweckmässig getroffen; die Figuren sind sehr sauber und sorgfältig ausgeführt; die vielfachen Uebungsaufgaben, speziell die der Praxis entnommenen, recht glücklich gewählt und der Text ist, von Einzelheiten abgesehen, recht klar und verständlich geschrieben.

Wenn ich dem Buche, wie aus diesen wenigen Worten hervorgehen dürfte, weite Verbreitung wünsche, so würde sich die Brauchbarkeit desselben noch wesentlich erhöhen, wenn der Verfasser einige Mängel, die ich hier besprechen möchte, abstellen würde.

Was zunächst die theoretische Seite anbetrifft, mathematische Erklärungen und Beweise stereometrischer Sätze, die sich vorwiegend im ersten Abschnitte, teilweise auch in den folgenden zerstreut finden, so erscheint mir hier eine recht gründliche Durchsicht geboten. Es werden zunächst in der landläufigen Schulbuchmanier die wichtigsten Lagenbeziehungen zwischen Linien und Ebenen bewiesen; meines Erachtens wird bei den Lehrsätzen viel mehr Gewicht auf die Schablone — Voraussetzung, Behauptung, Beweis — und auf Formelkram im Beweise gelegt als auf Erweckung klarer Raumvorstellung.

Recht scharf tritt dies in § 16 hervor; ein einfacher Hinweis auf den früher bewiesenen Satz, dass ein rechter Winkel sich als rechter abbildet, wenn ein Schenkel parallel der Projektionsebene ist, würde eine unmittelbare und klarere Vorstellung erzeugen als die zwei im Texte angegebenen Lehrsätze mit ihren Beweisen. Nicht alle Beweise sind ferner einwandfrei; bei dem wichtigen Satze, dass Winkel im Raume mit parallelen Schenkeln gleich sind, wird als Axiom angenommen, dass Linien, die einer dritten parallel sind, selbst parallel sind. Mit demselben Rechte wie dieser Satz hätte dann auch der zu beweisende als Axiom angenommen werden können. Auch über den Hauptsatz in § 2 — Normale zu einer Ebene —, die zugehörige Erklärung, Anmerkung etc. liesse sich manches sagen. Ermüdend wirkt es ferner, wenn dieselben Erklärungen wiederholt vorkommen; so werden in der Einleitung die verschiedenen Projektionsarten genau unterschieden, später (§ 4) wiederholen sich diese Erklärungen fast mit denselben Worten. Merkwürdig berührt es auch, wenn in §§ 6 und 7 Projektionen von Pyramiden, Zylindern und Kegeln gegeben werden und erst viel später (§§ 13 und 20) genaue Erklärungen dieser Körper folgen.

Damit bin ich schon auf einen zweiten Punkt gekommen, auf die Anordnung des Stoffes, und auch hier kann ich mich mancher Bedenken nicht erwehren. Pädagogisch dürfte es zweckmässiger sein, zunächst die orthogonale Parallelprojektion allein zu besprechen und erst, wenn man Sicherheit in der Benutzung ihrer Methoden bei den Schülern erwarten kann, andere Projektionsarten einzuführen. Ebenso halte ich es nicht für richtig, dass erst sehr spät, nachdem schon Schnitte der Polyeder und Kegel besprochen sind, Seitenrissebenen und andere Hilfsprojektionsebenen eingeführt werden. Auch die Bestimmung der wahren Grösse von Strecken und Winkeln dürfte wohl mehr an den Anfang gerückt werden. Warum ferner der Verfasser den zweiten und vierten Quadranten gegen die übliche Darstellung mit einander vertauscht, ist mir nicht klar geworden.

Was den dargebotenen Stoff selbst anbetrifft, so ist mir ein recht grosser Mangel aufgefallen, nämlich die Nichtbenutzung der einfachsten geometrischen Verwandtschaften, im speziellen der Affinität. Freilich wird dieselbe in einer Anmerkung kurz erwähnt, nirgends aber wird von ihr Gebrauch gemacht; weder zur Erleichterung der Zeichnung noch zu deren Kontrolle wird die Affinitätsachse je verwendet.

Ferner muss es verwirrend wirken, dass die Zeichnungen des § 20 für gerade Kreiskegel ausgeführt sind, während sie für schiefe durchaus nicht schwieriger sind und auch im Texte nicht von geraden Kegeln die Rede ist.

Wie schon eingangs bemerkt, ist abgesehen von diesen Mängeln, denen ja leicht abgeholfen werden kann, das gediegen ausgestattete Buch ein recht brauchbarer Leitfaden für Lehrer und Schüler, dem weite Verbreitung und eifrige Durcharbeitung sehr zu wünschen ist.

P. Schafheitlin (Berlin.)

* * *

v. Oettingen, A., Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. Mit 209 Textfiguren. VII und 177 Seiten. Leipzig, Engelmann 1901. Preis Mk. 8, geb. Mk. 9.

Der Wortlaut des Titels ist so zu verstehen, dass der Verfasser den Hauptlehren des perspektivischen Zeichnens durch enge Inbeziehungsetzung zu den Lehren der synthetischen Geometrie eine wissenschaftliche Basis zu geben beabsichtigt. Zur Erreichung dieses Zwecks, bei dem die Parallelprojektion als Spezialfall der Zentralprojektion zur Geltung kommt, gliedert er den Stoff in drei Hauptabschnitte: Perspektive der Lage, Massperspektive, Anwendungen auf Erzeugnisse projektivischer Gebilde im Raume. Ueberall wird unmittelbar auf Steiners grundlegendes — von dem Verfasser in Ostwalds Klassikern (No. 82, 83) neu herausgegebenes — Werk Bezug genommen, der dritte Hauptabschnitt beschränkt sich auf die Diskussion gewisser Einzelprobleme, wodurch er gewissermassen zu einer Ergänzung des Werkes: „Freie Perspektive in ihrer Begründung und Anwendung" von v. Peschka und Kontny wird. Ein Anhang gibt eine (sehr summarische) Darstellung von den Eigenschaften der Kegelschnitte.

Das Werk hat, wenn es auch direkt für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den höheren Mittelschulen nicht verwendbar ist, doch als Mittel zur Vertiefung dieses Unterrichts für diesen einen indirekten Wert. Eine gewisse Beeinträchtigung erfährt derselbe durch die manchmal etwas dunkle Ausdrucksweise, auch die Bezeichnung will mir nicht immer gefallen. In beides muss man sich erst hineinlesen. Einiges Befremden muss auch der Wert erregen, den der Verfasser auf die gedächtnismässige Einprägung von Sachverhältnissen legt, für die m. E. in dem richtigen innerlichen Verständnis eine weit grössere Bürgschaft des sicheren Festhaltens gegeben ist. P.

* * *

Natur und Schule. Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, herausgegeben von B. Landsberg, O. Schmeil und B. Schmid. Leipzig, B. G. Teubner.

Soll der naturwissenschaftliche Unterricht den Forderungen, die heutzutage an denselben gestellt werden, einigermassen gerecht werden, so erwächst für den Lehrer, der ihn zu erteilen hat, die unerlässliche Pflicht, nicht nur den Fortschritten der Methodik, sondern vor Allem auch den neuen Errungenschaften der wissenschaftlichen Forschung auf allen für den Unterricht in Betracht kommenden Gebieten stetig zu folgen. Durch das ungemein starke Anwachsen der Fachliteratur, namentlich die von Jahr zu Jahr wachsende Zahl der Zeitschriften, in welchen die neu gewonnenen Ergebnisse niedergelegt werden, wird dieses jedoch denen, die nicht die Hilfsmittel einer grösseren Bibliothek zur Verfügung haben, fast unmöglich gemacht. Die Begründung einer besonderen Zeitschrift, welche sich die Aufgabe stellt, aus allen Zweigen naturwissenschaftlicher Forschung das für die Schulen Wichtige und Förderliche zusammenzufassen, ist daher als ein dankenswertes Unternehmen zu bezeichnen. Es ist den Herausgebern, deren Namen durch ihre vortrefflichen Lehr- und Hilfsbücher bei den Fachgenossen einen guten Klang gewonnen haben, gelungen, eine grosse Zahl von Mitarbeitern aus den Kreisen der Universitäts- und Schullehrer zu gewinnen, und der Inhalt des nunmehr vorliegenden ersten Jahresbandes ist ein sehr vielseitiger und reichhaltiger. Neben einer grossen Zahl von Originalaufsätzen, welche teils einzelne, gegenwärtig viel diskutierte wissenschaftliche Fragen, teils interessante neue Funde und Entdeckungen, teils Fragen aus allen Gebieten der naturwissenschaftlichen Didaktik behandeln, finden sich Referate über neu erschienene Bücher und Zeitschriften, Besprechungen neuer Lehr- und Anschauungsmittel, sowie Berichte über wissenschaftliche Versammlungen. Dem Fortgang der durch die Verhandlungen der Hamburger Naturforscher-Versammlung im Jahre 1901 angeregten Bewegung zur Förderung des biologischen Unterrichts wird besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Ein Sprechsaal, in welchem schwebende Fragen durch Meinungsaustausch von verschiedenen Seiten geklärt werden, auch Auskunft über alle den Unterricht betreffenden Fragen vermittelt wird, sowie kurze Mitteilungen über besonders instruktive Schulversuche, Demonstrationen, Exkursionen u. dgl. mehr kommen hinzu. Man darf der neuen Zeitschrift die sich mit diesem ersten Bande gut eingeführt hat, wohl einen weiteren guten Fortgang in Aussicht stellen.

R. v. Hanstein (Gross-Lichterfelde).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Bork, H., Mathematische Hauptsätze. Ausgabe f. Gymnasien. Nach dem Tode d. Verf. herausgegeben von Max Nath. Erster Teil, Pensum der Unterstufe. Vierte, den Lehrplänen von 1901 angepasste Auflage. Leipzig 1903, Dürr.

Donath, B., Physikalisches Spielbuch für die Jugend. Mit 156 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. M. 6.—, geb.

Fricke, R., Hauptsätze der Differential- u. Integral-Rechnung. 3. umgearbeitete Auflage. Ebenda, M. 5.—

Haentzschel, E., Rotationszykliden und Lamesche Produkte. Eine Antikritik zweier Abhandlungen des Herrn Safford. Sonderabdruck aus dem Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe.

Ibrügger, Ch., Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte im Anschluss an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln. Festschrift IV zur Jubelfeier des Greifenberger Gymnasiums. Greifenberg i. P., Lemcke.

Korntler, F., Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz. Budapest, Druck der Pester Lloydgesellschaft 1897.

—„—, Die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen. Nachtrag zu der ersteren Schrift. Ebenda.

Klein, J., Elemente der forensisch-chemischen Ausmittelung der Gifte. 2. Aufl. Mit 10 Abb. Hamburg 1902, Voss. M. 2.50 geb.

Königsberger, L., Hermann v. Helmholtz. Erster Band. Mit drei Bildnissen. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn.

Koppe-Dickmann's Geometrie zum Gebrauche an höh. Unterrichtsanstalten. Ausgabe für Reallehranstalten. Bearbeitet von Prof. Dr. Diekmann. 1. Teil: 5. Aufl. mit 8 Tafeln und 184 Fig. Mk. 2.40 geb. 2. Teil: 2. Aufl. mit 114 Fig. Mk. 2.40 geb. Essen 1903, Baedeker.

Krebs, W., Schmelzungs- und Bewegungsvorgänge an ringbildenden Eiswolken der Hochatmosphäre und Verwertung solcher Beobachtungen für die Witterungs-Prognose. („Weltall", Jahrg. II, 24. Heft, 15. Sept. 1902).

Marshall, W., Gesellige Tiere. No. 1: Allgemeines. Tiergesellschaften ohne Arbeitsteilung. No. 2: Die Arbeitsteilung, ihr Wesen und ihr Wirken. No. 3: Allgemeines über den Insektenstaat. Die Papierwespen. Nr. 4: Allgemeines über den Insektenstaat. Hummeln und Meliponen. (Aus Hochschul-Vorträge für Jedermann). Leipzig 1901, Dr. Seele & Co.

Martin, R., Wandtafeln f. d. Unterr. i. Anthropologie, Ethnologie und Geographie. Kl. Ausg. 8 Tafeln Mk. 28.— Gr. Ausg. 24 Tafeln Mk. 64.— Zürich, Art. Inst. Orell Füssli. — Probetafel.

Migula, W. Kryptogamen-Flora (V. Band von Thomés Flora von Deutschland) Lief. 1—5. Subskriptionspreis der Lief. Mk. 1.— Gera 1903, v. Zezschwitz.

Mocnik, F. v., Lehrbuch der Arithmetik f. Unter-Gymnasien. Bearbeitet von A. Neumann. 1. Abt. 36. Auflage. Leipzig 1902, Freytag. Mk. 2.— geb.

Nitsche, J., Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für die 1. und 2. Gymnasialklasse. Wien 1902, Deuticke. Mk. 1.80 geb.

Periodische Blätter für Realien-Unterricht und Lehrmittelwesen. VIII. Jahrgang, 1902-3, Heft 1. Tetschen a. Elbe, Henckel.

Portig, G., Das Weltgesetz des kleinsten Kraftaufwandes in den Reichen der Natur. 1. Band: In der Mathematik, Physik und Chemie. Stuttgart 1903, Kielmann. Mk. 8.—

Reinisch, R., Mineralogie und Geologie f. höh. Schulen. Mit 2:0 Fig., 2 Tafeln und 1 Karte. Leipzig 1903, Freytag. Mk. 2 — geb.

Schröder, Th., Beispiele und Aufgaben aus der Algebra. 11. Aufl. Nürnberg 1903, Korn. Mk. 1.20 geb.

Schubert, H., Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt, mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. Leipzig 1902, Göschen. Mk. —.60.

Schultz, E., Vierstellige Logarithmen zum Gebrauche an höheren Schulen. Essen 1902. Baedeker. Mk. 1.50.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Ausgabe A.: Für Vollanstalten. 2. Teil: Trigonometrie. Mit 1 Tafel. Leipzig 1902, Teubner.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Deutsch bearb. v. Axel Harnack. 2. Auflage herausgeg. v. Georg Bohlmann. 3. Band. 1. Liefg. Mit 10 Fig. Ebenda. Mk. 6.—.

Stolz, O. und Gmeiner, A., Theoretische Arithmetik. II. Abt.: Die Lehren von den reellen und von den komplexen Zahlen. 2. Aufl. Mit 19 Fig. Ebenda.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. 2. Teil: Die Oberstufe. Mit 162 Fig. Leipzig 1902, Freytag. Mk. 2.50 geb.

Thomé, Flora von Deutschland, 2. Aufl. Bd. I, Liefg. 1,2. Gera 1903, v. Zezschwitz. Pro Lieferung Mk. 1.25.

Weinnoldt, E., Leitfaden der analytischen Geometrie. Mit 62 Fig. Leipzig 1902, Teubner. Mk. 1.60 geb.

Weiss, J. E., Grundriss der Botanik. Ein Leitfaden für den botanischen Unterricht zum Gebrauche an Mittelschulen und zum Selbstunterricht. Mit 527 Abb. 4. Aufl. München, Oldenbourg. Mk. 3.— geb.

Wertheim, G., Anfangsgründe der Zahlenlehre. Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler und Gauss. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. Mk. 3.—

Wettstein, R. v., Der Neo-Lamarckismus und seine Beziehungen zum Darwinismus. Jena 1903, Fischer. Mk. 1.—

Zeissig, E., Die Raumphantasie im Geometrie-Unterrichte. Ein Beitrag zur methodischen Ausgestaltung des Geometrie-Unterrichts aller Schulgattungen. Berlin 1902, Reuther & Reichard. Mk. 2.40.

Zindler, R., Liniengeometrie mit Anwendungen. 1. Band. Mit 87 Fig. (Sammlung Schubert 34). Leipzig 1902, Göschen. Mk. 12.— geb.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.