Jahrgang IX. 1903. Nr. 3.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten (S. 45). — Das Zeichnen in seinen Beziehungen zum naturwissenschaftlichen und zum erdkundlichen Unterricht. (Schluss). Von Wilhelm Krebs (S. 45). — Eine propädeutische Behandlung der ersten Sätze der Arithmetik. Von J. Thiede (S. 47). — Ueber die Aufgabe: „Ein beliebiges Tetraeder nach einem Parallelogramm zu schneiden.“ Von Dr. H. Wieleitner (S. 49). — Zur Theorie der konjugierten Durchmesser der Ellipse. Von Oberlehrer Dr. Ebner (S. 50). — Allgemeine Charakteristik der Entwickelung der Naturwissenschaften im 16. Jahrhundert. Von F. Dannemann (S. 51). — Zur Adrianschen Berechnung der Näherungswerte von π. Von C. Langhans (S. 53). — Konstitutions- und Strukturformeln für geometrische Konstruktionen. (Schluss). Von S. Leisen (S. 55). — Bericht über die zwölfte Hauptversammlung (S. 59). — Vereine und Versammlungen [Naturforscherversammlung zu Cassel; Deutsche Rosenausstellung zu Sangerhausen] (S. 62). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [Ferienkursus zu Giessen] (S. 62). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 62). — Bücher-Besprechungen (S. 62). — Zur Bespr. eingetr. Bücher (S. 65). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Die vorliegende Nummer bringt den Bericht über den allgemeinen Verlauf der während der Pfingstwoche in Breslau abgehaltenen zwölften Hauptversammlung des Vereins. Ueber die Vorträge und Verhandlungen auf dieser Versammlung werden in der bisher schon üblich gewesenen Weise Einzelberichte erscheinen, mit denen in der nächsten Nummer begonnen werden wird.

Wie aus dem Versammlungsbericht ersichtlich, sind die satzungsgemäss ausscheidenden Vorstandsmitglieder wiedergewählt worden. Demnach besteht der Vorstand für die Zeit bis zur nächsten Versammlung, wie bisher, aus den Herren Hamdorff (Guben), Hansen (Giessen), Pietzker (Nordhausen), Presler (Hannover), Bastian Schmid (Zwickau), Schotten (Halle a. S.). Das Amt des Schatzmeisters wird auch weiterhin Herr **Presler** verwalten (siehe die Notiz am Kopfe des Blattes unter der Rubrik „Verein“).

Als Ort der nächsten Hauptversammlung ist Halle a. S. gewählt worden. Zuschriften, die sich auf diese Versammlung beziehen, wolle man an Direktor Dr. Schotten in Halle, Sophienstrasse 37, oder an Prof. Pietzker in Nordhausen richten. **Der Vorstand.**

Das Zeichnen in seinen Beziehungen zum naturwissenschaftlichen und zum erdkundlichen Unterricht.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf.

Von Wilhelm Krebs (Barr i. E.)

(Schluss.)

Auf eine besondere einzelne Sache darf ich wohl etwas näher eingehen, deshalb, weil sie mit den neuzeitlichen Streitfragen der Methodik des Zeichenunterrichts eng verknüpft ist: Das Zeichnen nach frischen oder getrockneten Naturblättern. Es wird gewöhnlich recht früh, oft schon in Quinta, vorgenommen. Die älteren, an deutschen Schulen üblichen Methoden, die den ganzen Unterricht von der geraden Linie und von geradlinigen Figuren ausgehen liessen, griffen natürlich zu einer geradlinigen Hilfsfigur für die Umrisse der Blattspreite. Die neuen Methoden, die auf amerikanische, richtiger vielleicht auf japanische Anregungen zurückgeführt werden, verwerfen jenen geradlinigen Beginn schon deshalb, weil die krumme Linie der menschlichen Handfertigkeit natürlicher liegt. Auf einer zur Hebung des reichsländischen Zeichenunterrichts im Oktober 1900 einberufenen Zeichenlehrer-Versammlung erregte es ein lautes Befremden, als einer der Redner, nach Verur-

teilung jenes Ausgehens von der geraden Linie, doch für das Blattzeichnen die geradlinigen Hilfspolygone beibehielt.[12]) Die rein biologische Betrachtung liess mir dagegen die Blattnerven in ihrer Eigenschaft als Richtungslinien des Blattwachstums als die von Natur gebotenen Hilfslinien, der praktische Versuch dieser Technik als leicht erscheinen, da spitzwinklig angesetzte Strahlen sicherer zu treffen sind, als stumpfe Polygonwinkel. Ich hatte später die Genugtuung, zu erfahren, dass sie tatsächlich an Kunst- und anderen höheren Schulen des Reichslandes sich praktisch bewährt und anders wo sogar in der neueren Zeichenliteratur entschieden Vertretung gefunden hat. So in Tadds Neuen Wegen[13]) und schon 1896 in Hölschers Beitrag zum Programm des Neuen Gymnasiums in Darmstadt.[14]) Auch scheint mir geboten, bei Entwickelung des naturalistischen Flachornaments, auf Grund solcher Zeichnungen nach der Natur, ähnlichen biologischen Gesichtspunkten zu folgen. Die Zusammenstellung von Oleander- oder anderen einfachen, gestielten Blättern in Kreuzform, wie sie in manchen praktischen Kursen üblich sein soll, erscheint nicht zum mindesten deshalb geschmacklos, weil sie unnatürlich ist. — Der Natur abgelauschte Lehrproben guter naturalistischer Flachornamente enthält in grosser Fülle das zunächst für den Zeichenunterricht an Töchterschulen bestimmte neue Lehrbuch von J. Hipp besonders in den der Oberstufe dienenden Tafeln.[15])

Die beste Unterstützung erfährt aber die zeichnerische Ausbildung dann von den sie ausnutzenden Fächern, wenn in diesen stets auf Sorgfalt und tunlichste Richtigkeit jeder Zeichnung, die im Unterricht angefertigt, und jedes Bildes, das in ihm benutzt werden soll, gehalten wird.

Für den zeichnerischen Ausdruck sollte demnach dieselbe Forderung gelten, die für die Ausdrucksweise in der Muttersprache längst allgemeine Anerkennung und auch behördliche Unterstützung gefunden hat. Erst unter dieser Voraussetzung sollte überhaupt daran gedacht werden, den Zeichenunterricht aus Gründen der Zeitersparnis direkt in den Dienst eines anderen Faches zu stellen, wie der Mathematik, der Archäologie etc. Erst dann ist eine Ausmünzung seines Bildungswertes auch in der eingangs gewählten Beschränkung zu erwarten.

Die zeichnerische Korrektheit ist im Blick auf dieses Ziel auszudehnen auf das gesamte Anschauungsmaterial an Bildern und Zeichnungen, das zum Unterricht herangezogen wird. Sogar in Schulbüchern ist dagegen bis in die neueste Zeit gefehlt. Ich erwähne die grelle Buntheit gewisser Atlaskarten. Noch bedenklicher als diese ästhetische Inkorrektheit sind aber direkte Unrichtigkeiten im Abbildungsmaterial gewisser Schulbücher.

So ist in einem 1900 in erster, 1901 in zweiter Auflage erschienenen vielgerühmten Lehrbuch der Physik ein Insekt als Träger der Energieeinheit abgebildet, das auf den ersten Blick ein Käfer aus der Familie Lamellicornia sein könnte. Es soll eine Stubenfliege vorstellen.[16]) Auch Tadds mehrfach erwähntes Werk ist in der deutschen Bearbeitung nicht von leicht vermeidbarer Inkorrektheit freigehalten. Auf Abb. 294, nach der „Artname und Tierform mittelst Zeichnung gemerkt werden soll; ist der Ordnungsname Quadrumana durch Wiederkäuer übersetzt!“[17]) Also peccatur extra muros et intra.

Es sollte überhaupt wie beim sprachlichen, so auch beim zeichnerischen Ausdruck, mit dem Prinzip gänzlich gebrochen werden, dass um der schnellen Klärung und Darstellung der Sache willen, die Form vernachlässigt werden dürfe. Jedenfalls sollte das in denjenigen Fächern vermieden werden, die gewisse Vorteile gerade von einem zeichnerischen Betrieb für sich erwarten.

Vor allem erhebe ich diese Forderung für das Kartenzeichnen im geographischen Unterricht.

Die sogenannten Faustzeichnungen, die frei hingeworfen werden sollten, noch dazu „wie mit dem Besenstiel“ (Kirchhoff), mittelst deren das Kartenbild durch wiederholtes Zeichnen eingeprägt werden sollte, müssen endlich verlassen werden. Und nicht allein mit Rücksicht auf die zeichnerische oder allgemeiner auf die ästhetische Ausbildung. Auch eine im besten Sinne geographische Ausbildung verlangt das gebieterisch. Denn für sie bedeutet das Kartenbild nichts, die Lage alles. Diese Anschauung beginnt, sich neuerdings auch in weiteren und schliesslich in den massgebenden Kreisen durchzuringen. Der Leipziger Geograph Ratzel setzt in einer vor nicht langer Zeit erschienenen schulgeographischen Darlegung die Lage geradezu in den Mittelpunkt des geographischen Unterrichts.[18])

Die gegebenen Kartenzeichnungen sind unter diesen Umständen solche in einfache, aber wissenschaftlich richtige und nach ihren Fehlerquellen berechenbare Gradnetze. Diese müssen schon um der unter jenen Umständen vermehrten Wichtigkeit der mathematischen Geographie willen, von den Schülern selbst entworfen werden. Die einzutragenden Kartenzeichnungen müssen, auch um dieser anfänglichen Bemühung willen, tunlichst korrekt und sauber sein, Das ist nur dadurch ohne übermässige Ansprüche an Zeit zu erreichen, dass die Einzeichnung nach und nach, im Anschluss an Durchnahme und Repetition des jeweiligen Pensums geschieht. Für die zur Konstruktion der Gradnetze nicht durch den Massstab gegebenen Stücke, ist lediglich eine graphische Kosinuskonstruktion nötig, die wegen ihrer Einfachheit auch jungen Schülern eingeprägt werden kann. Das war die grundlegende Ueberlegung, von der aus ich dem Geographentage zu Karlsruhe vor nun 18 Jahren meine Vorschläge unterbreitete, vereinfachte Projektionen, zugleich als Vorschule einer topographischen Ausbildung, die bei den den Einjährigen entnommenen Reserveoffizieren sehr vermisst wird, einzuführen.[19]) Noch in Hasserts zusammenfassender Schrift über das Kartenzeichnen im graphischen Unterricht, die 1901 erschienen ist, wird die von mir vorgeschlagene Methode mit dem Bemerken abgetan, sie habe lebhaften Widerspruch erfahren. In derselben Anmerkung, geradezu in einem Atem, zollt er ihr aber eine Zustimmung, wie sie ihr lebhafter kaum werden kann, nämlich eine unwillkürliche. Unter dem Namen eines Herrn L. Henkel führt er eine graphische Konstruktion an für die Bestimmungsstücke der zwar unvollkommenen, aber nicht wesentlich einfacheren Lehmannschen Gradnetze (Abb. 1). Diese stimmt genau überein mit einer von mir in dem erwähnten Vortrage vorgelegten Kosinuskonstruktion, an deren Stelle ich aus keinem anderen Grunde die danach im Vortragsauszug veröffentlichte andere Konstruktion setzte, (Abb. 2) als weil diese viel leichter zu merken und einfacher zu zeichnen ist.[20]) Das durch diese Kosinuskonstruktion leicht erhältliche Verhältnis zum Breitenwinkel entspricht der Verkürzung der Meridianabstände in den vorgelegten Schülerkarten nach Flamstedscher und nach Pyramidenprojektion und dem Wachsen der Parallele in den Karten nach vereinfachter Seekartenprojektion.

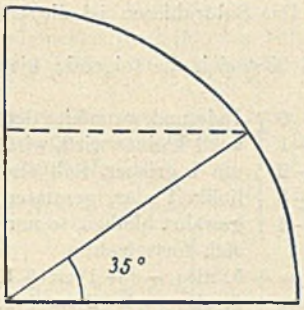


Abb. 1.
Die von Henkel angegebene graphische Konstruktion.

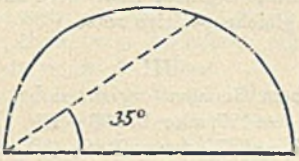


Abb. 2.
Die von Krebs schliesslich vorgeschlagene Konstruktion.

Die vorgelegten Karten[21]) benutzen ausser diesen Gradnetzen noch für die Passatregion die dort nur geringe Verzerrungen verschuldende Plattkarte.

Sie sind sonst ganz in der jenen Vortrag entsprechenden Weise ausgeführt, nur, dass sie durchaus als stumme Karten gehalten sind. Ich habe zwei Schuljahre hindurch nach dieser Methode arbeiten lassen, zuerst in zwei Klassen, jetzt in den vier oberen Klassen der Barrer Realschule. Die Hauptsorge der Gegner, die Ueberbürdung der Schüler, ist mir nirgends entgegengetreten, während dieser ganzen Zeit, als in den durch den Erfolg nicht bewahrheiteten Besorgnissen voreingenommener Kollegen.

Im Gegenteil kamen vielfach die Schüler derart in das Zeichnen hinein, dass nicht wenige freiwillig Extrakarten lieferten, so im vorigen Jahre farbige Karten der politischen Teilung Afrikas, in diesem Jahre bisher Karten Südamerikas und Westeuropas. Mit den Klassenpensen werde ich, trotz dreiwöchigen Urlaubs in Anfang des Schuljahres, früher fertig als ich brauche, wie aus dem Stande der in unfertigem Zustand vorgelegten letzten Karten zu ersehen ist.

Es sind noch mehr als zehn Wochen, demnach ca. 20 Stunden, bis zu unserem Jahresschluss verfügbar. Durchzunehmen bleiben

in Quarta von den fünf aussereuropäischen Erdteilen noch Afrika zu etwa $^1/_3$ und Australien,

in Tertia von Mitteleuropa noch süddeutsche Staaten, hauptsächliche Eisenbahnlinien und event. Oesterreich-Ungarn,

in Sekunda von den übrigen Staaten Europas noch Frankreich zu etwa $^1/_3$, Spanien, Portugal, Schweiz, Belgien, Luxemburg und Niederlande,

in Prima noch die wichtigsten Verkehrswege zur See.

Das ist sicherlich in 20 Stunden zu erreichen.

Eine Art topographischer Schulung wird durch solche Zeichnungen deshalb erzielt, weil sie ähnlich dem Krokieren nach dem Gelände, unter genauem Nachsehen und mehr und mehr geübtem Schätzen, das Kartenbild aus der Projektion der Atlaskarte in die selbstgeschaffene des eigenen Gradnetzes umzeichnen lassen. Hierdurch haben sie schon einen bescheidenen Anteil an der Ausbildung des Auges. Diese wird aber darüber hinaus durch wesentliche Züge der Einzelausführung, vor allem durch die vereinfachte Uebertragung der Bodenplastik ebenfalls noch gefördert.

Aesthetisch sollen sie nicht wirken durch Schönheit der Linienführung. Das können, entgegen manchen phantastischen Anschauungen eines überwundenen geographischen Mystizismus, Landkarten überhaupt nicht. Wohl aber sollen sie in jener Richtung wirken durch die Garantie tunlichst korrekter und sauberer Ausführung, die das Gradnetz und die allmähliche fortschreitende Einzeichnung unter steter Kontrolle des Lehrers bietet. Wenn es bei den verschieden begabten Schülern angängig erscheint, ist auch diskrete Farbengebung diesen überlassen. Sonst ist die Gefahr des Ueberfärbens tunlichst vermieden, indem grundsätzlich nur drei Farben als notwendig verlangt sind. Bleistiftgrau, schwarze und rote Tinte. Welche Fortschritte bei den einzelnen Schülern auch in zeichnerischer Beziehung erzielt sind, geht ohne weiteres aus dem Vergleich der ausgestellten Schülerkarten hervor, die sich über 1—2 Jahrgänge erstrecken.

Auf diesem Wege wird hoffentlich auch das Kartenzeichnen des geographischen Unterrichts die Bahn frei finden, um an der ästhetischen Erziehung unserer Schüler mitzuwirken, anstatt diese Erziehung geradezu zu stören, wie von der Gewöhnung an rohe, höchstens dem Memorieren und der Kontrolle dienlichen Skizzenentwürfe leider erwartet werden muss.

Die vereinfachte Projektionslehre und ihre praktische Ausübung zum selbständigen Entwurf von wirklich diesen Namen verdienenden Gradnetzen ist zugleich geeignet, mit den neuzeitlichen Ansprüchen des mathematischen Unterrichts an die zeichnerische Ausbildung besonders der Realschüler zu vermitteln.

So tritt auch in diesem Sonderfalle das für den Schulunterricht hochwichtige Walten der Konzentration entgegen. Seine wohltätige Wirkung in der Gesamtheit der Beziehungen des Zeichnens zu den Fächern des Sachunterrichts als einer Gesamtheit von wechselseitiger Förderung, habe ich in meinem Vortrag versucht darzulegen.

Anmerkungen.

[12]) Leibrock, Neue Bestrebungen im Zeichenunterricht. Strassburg 1901. Tafel V.

[13]) Tadd, a. a. O. S. 59.

[14]) R. Hölscher, Der Zeichenunterricht an dem Neuen Gymnasium. Darmstadt 1896. Progr. No. 645. S. 7, 8.

[15]) J. Hipp, Der Zeichenunterricht für Mädchen. Strassburg 1900, Tafel 11—30.

[16]) Kleiber, Lehrbuch der Physik. München 1901. Fig. 233.

[17]) A. a. O. S. 184.

[18]) Ratzel, Die Lage im Mittelpunkt des geographischen Unterrichts. Hettner's Geographische Zeitschrift. Leipzig. 1900, S. 29—27.

[19]) Wilhelm Krebs, Ueber Kartenzeichnen in der Schule. Verhandlungen des 7. Deutschen Geographentages zu Karlsruhe. Berlin 1887. S. 174—181.

[20]) Hassert a. a. O. S. 20, 21.

[21]) Der gesamte Kartenertrag zweier Schuljahre war übersichtlich ausgestellt. Interessenten kann die eine oder andere Serie zur Ansicht übersandt werden. Anfrage und spätere Rücksendung werden erbeten an den Verfasser nach Münster (Oberelsass), Parkstrasse.

Eine propädeutische Behandlung der ersten Sätze der Arithmetik.

Von J. Thiede (Köslin).

In den neuesten Lehrplänen ist für die Einführung in die Planimetrie, die Trigonometrie und die Stereometrie eine propädeutische Art der Lehrweise vorgeschrieben. Für die Arithmetik ist derartiges nicht ausdrücklich ausgesprochen. Ist dies mehr ein Zufall,

oder ist auf diesem Gebiete ein propädeutisches Vorgehen unnötig oder gar unmöglich?

Mir scheint, dass die Entwickelung der ersten arithmetischen Sätze, wie sie sich in den Lehrbüchern findet, einen viel abstrakteren Charakter hat und dem Anfänger eine verhältnismässig viel höhere geistige Leistung zumutet, als dies bei den späteren Stoffen auf den höheren Klassenstufen der Fall ist. Und ich zweifle nicht, dass hier in der Praxis wohl oft andere Wege eingeschlagen werden. Ich möchte in dem Folgenden einen solchen sehr nahe liegenden vorführen.

I.

Es soll, wie es wohl allgemein geschieht, vom Thermometer ausgegangen werden. Der Quecksilberstand fällt von 5 Grad um einen, wieder um einen und immer wieder um einen. Die Möglichkeit des Sinkens der Gradzahl unter Null und danach der Uebergang von den Gradangaben nach Wärme und Kälte im speziellen Beispiele zu der allgemeinen Unterscheidung von „Zahlen über Null“ und „Zahlen unter Null“, zugleich mit der äusseren Kennzeichnung durch „Vorzeichen“ wird den Knaben schnell verständlich. — Jetzt wird die Zahlenreihe von 0 aus einige Stellen nach oben und nach unten aufgeschrieben, und zwar in aufrechter Linie. Nicht aber sollte auf dieser Stufe eine in gleiche Strecken geteilte Gerade daneben gezeichnet werden, bei welcher schon der Begriff der Stetigkeit und der Irrationalzahl sozusagen im Hintergrunde lauert. Nötig ist eine solche Gerade für die Entwickelung der neuen Vorstellungen für den Schüler jedenfalls nicht; und je einfacher, je besser hier zu Beginne!

An diese Zahlenreihe von $-\alpha$ bis $+\alpha$ gilt es jetzt den Schüler zu gewöhnen; er soll sie als etwas Einheitliches auffassen lernen, wo überall nur das eine Gesetz des gleichmässigen Steigens oder Fallens in der einen oder der anderen Richtung herrscht. Dazu werden zunächst die ersten Additionsaufgaben geübt: $+3+7$, $-3+7$, $+3-7$, $-3-7$, und zwar in der Weise, dass zunächst das eine Glied durch Abzählen von 0 aus aufgesucht und sodann das andere Glied durch Weiterzählen von hier aus hinzugefügt wird. Dabei ist jede Aufgabe doppelt auszuführen, in der Art, dass auch zuerst das zweite Glied von 0 aus abgezählt und dann das erste hinzugefügt wird. Ohne weiteres findet sich dann:

1. Satz: Das Addieren kommt auf einfaches Zählen hinaus; und zwar beginnt es immer bei der Null und wendet sich bei positiven Gliedern nach oben, bei negativen nach unten in der Zahlenreihe.

2. Satz: In einer Summe ist die Reihenfolge der Summanden gleichgiltig.

Auf diese Weise ist die doch garzu mechanische Regel, dass über das Vorzeichen des Ergebnisses dasjenige des grösseren Gliedes entscheide, vermieden; bei der Gewöhnung an die Vorstellung der ganzen Zahlenreihe übersieht der Schüler bei einer Aufgabe gleich von vornherein, ob das Ergebnis über oder unter 0 liegen wird. Und so soll er auch dieses Vorzeichen des Ergebnisses bei den kleinen Exempeln immer zuerst feststellen.

Vor allen Dingen aber wird mit dieser Erfassung der ganzen Zahlenreihe als etwas Einheitlichem die wichtige Grundlage für die folgenden, wie ich denke, einfachen Entwickelungen gewonnen.

II.

Von den Rechenübungen auf den früheren Stufen her ist ohne weiteres verständlich der

3. Satz: Das Subtrahieren ist die Umkehrung des Addierens:

Hiernach lässt sich die folgende kleine Tafel aufstellen:

$+4-4=0$
$+4-3=+1$
$+4-2=+2$
$+4-1=+3$
$+4-0=+4$

Jedesmal, wenn hier der Subtrahendus um 1 kleiner wird, wird das Ergebnis um 1 grösser. Soll also die Einheitlichkeit der gesamten Zahlenreihe gewahrt bleiben, so muss unsere Tafel sich fortsetzen:

$+4-(-1)=+5$, also $-(-1)=+1$,
$+4-(-2)=+6$, also $-(-2)=+2$,
$+4-(-3)=+7$, also $-(-3)=+3$.

Es ergiebt sich als

4. Satz: Eine negative Zahl wird subtrahiert, indem man die gleiche positive setzt.

III.

In einfachem Rechnen ergiebt sich:

a) $100+27=127$, oder
$100+(20+7)=127$, oder
$100+20+7=127$.

b) $100+27=127$, oder
$100+(30-3)=127$, oder
$100+30-3=127$.

Also: 5. Satz: Eine Summe wird addiert, indem man die Summanden einzeln addiert.

c) $100-27=73$, oder
$100-(20+7)=73$, oder
$100-20-7=73$.

d) $100-27=73$, oder
$100-(30-3)=73$, oder
$100-30+3=73$.

Also: 6. Satz: Eine Summe wird subtrahiert, indem man die Summanden einzeln subtrahiert.

Erst wenn die Anwendung dieser beiden Regeln unter gesonderter Behandlung jedes einzelnen Gliedes an einer Reihe von Uebungsbeispielen geübt ist, werden sie auf die bequemere Form gebracht:

7. Satz: Eine Plus-Klammer kann ohne weiteres weggelassen werden; eine Minus-Klammer darf nur unter Umkehrung aller Vorzeichen in der Klammer weggelassen werden.

IV.

Es ist
$+5+5+5=+3\cdot+5$
$+5+5+5+5=+4\cdot+5$
$-5-5-5=+3\cdot-5$
$-5-5-5-5=+4\cdot-5$.

Also: 8. Satz: Das Multiplizieren kommt auf wiederholtes Addieren desselben Summanden hinaus.

Sodann werde weiter die folgende kleine Tafel aufgestellt:

$+3\cdot+5=+15$
$+2\cdot+5=+10$
$+1\cdot+5=+5$
$0\cdot+5=0$

Jedesmal, wenn hier der erste Faktor um 1 fällt, fällt das Ergebnis um 5; es muss also wegen der Einheitlichkeit der Zahlenreihe die Tabelle sich fortsetzen:

$-1\cdot+5=-5$
$-2\cdot+5=-10$
$-3\cdot+5=-15$.

Nun werde die weitere Tabelle hinzugefügt:

$+3\cdot-5=-15$
$+2\cdot-5=-10$
$+1\cdot-5=-5$
$0\cdot-5=0$

Jedesmal, wenn hier der erste Faktor um 1 fällt, steigt das Ergebnis um 5; die Tabelle muss sich also fortsetzen:

$-1\cdot-5=+5$
$-2\cdot-5=+10$
$-3\cdot-5=+15$. So ergiebt sich:

9. Satz: Beim Multiplizieren zweier Zahlen geben gleiche Vorzeichen Plus, ungleiche Minus.

10. Satz: In einem Produkt ist die Reihenfolge der Faktoren gleichgiltig.

V.

Aus dem einfachen Rechnen her bekannt ist der

11. Satz: Das Dividieren ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Danach müssen die Gesetze des Multiplizierens sich auf das Dividieren übertragen lassen. Es lässt sich die folgende Tabelle aufstellen:

$$+4 \cdot +3 = +12, \text{ also } \frac{+12}{+4} = +3$$

$$+4 \cdot -3 = -12, \text{ also } \begin{cases} \frac{-12}{+4} = -3 \\ \frac{-12}{-3} = +4 \end{cases}$$

$$-4 \cdot -3 = +12, \text{ also } \frac{+12}{-4} = -3.$$

So ergiebt sich:

12. Satz: Auch beim Dividieren ergeben gleiche Vorzeichen Plus, ungleiche Minus.

Die nächsten Sätze über das Multiplizieren und Dividieren mit Aggengaten ergeben sich in einfachster Weise ähnlich wie in Absatz III aus Beispielen des gewöhnlichen Rechnens.

Schlussbetrachtung.

Die vorstehende Entwickelung bringt den Aufbau dieser allerersten Sätze in einer zwanglosen, natürlichen Folge. Das Charakteristische darin ist der vollständige Verzicht auf die Verwendung der allgemeinen Buchstabengrössen, wobei trotzdem eine hinreichende Strenge erzielt wird. Wie in der Planimetrie z. B. beim Beweise des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck der Gedankengang etwa an einer durch eine Ecke zur Gegenseite gezogenen Parallelen durchgeführt wird und dabei von dem speziell gezeichneten „Beispiele" eines Dreiecks und der einen bestimmt gewählten Parallelen sich sogleich die Abstraktion, die Verallgemeinerung der Giltigkeit auf alle Dreiecke, auf das Dreieck überhaupt vollzieht, genau so werden die oben gewählten „Beispiele" auf dem arithmetischen Gebiete ohne weiteres zu Vertretern der Allgemeinheit.

Den Buchstabenzeichen für die Zahlen fehlt das Kennzeichen einer bestimmten Zahl grösse, deren Verwertung bei der vorgeführten Art die Entwickelung für den Lernenden leicht und übersichtlich gestaltet.

Es könnte in den Buchstabenzeichen der gewonnene Gedanke des Satzes jedesmal hinterher noch in Gestalt einer Formel zum Ausdruck gebracht werden; aber um der Sache willen nötig ist dies gewiss nicht. Es mag doch das Beste sein, es auf dieser Stufe mit der Fassung des Kernes der Sache in die Form eines recht kurzen Satzes bewenden zu lassen.

Die allgemeinen Buchstabenzeichen gewinnen ihren Wert, wenn dieselben auf den späteren Stufen durch neue Definitionen über Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Proportionen usw. einen Inhalt bekommen. Und auf dieser mittleren Stufe empfiehlt es sich denn, den Gedanken zugleich durch eine Formel und durch einen kurz gefassten Satz ausdrücken zu lassen. — Auf der Oberstufe endlich, bei den Reihen usw. erfordert der Gegenstand und ermöglicht das vorgeschrittene Verständnis der Schüler eine Darstellung der Gedanken vorwiegend und allmählich ausschliesslich durch allgemeine Zeichen.

Soll es sich in dem Vorstehenden also um eine Unterrichts-Methode für die unterste Stufe handeln, und nicht um den Beginn einer systematischen Darstellung der Arithmetik, so wird die Beschränkung auf die blossen Zahlen gerechtfertigt sein.

Ueber die Aufgabe: „Ein beliebiges Tetraeder nach einem Parallelogramm zu schneiden".

Von Dr. H. Wieleitner (Speyer).

Die im Titel näher bezeichnete Aufgabe wird, mit irgend einer Spezialisierung, wohl öfters als Uebungsstoff zur darstellenden Geometrie verwendet. Ihre einfache Lösung findet sie bekanntlich, indem man zu irgend einem Gegenkantenpaar des Tetraeders, z. B. AC und BD irgend eine Parallelebene legt. Das sind im ganzen $3 \cdot \infty$ Lösungen. Jeder dieser Faktoren gibt zu einer vielleicht nicht ganz uninteressanten Betrachtung Anlass.

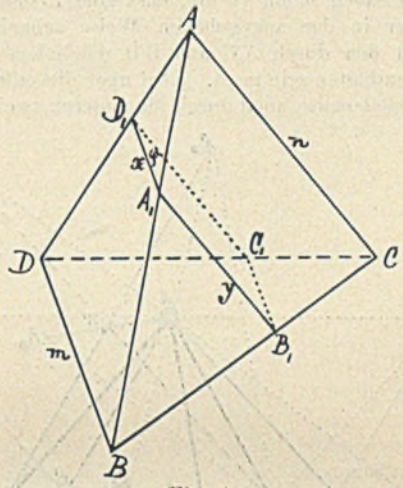


Fig. 1.

I.

Gibt man das betr. Kantenpaar, das wieder AC und BD sei, so existiert eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen, die man sich auch über das eigentliche Tetraeder hinaus fortgesetzt denken kann. Es sei eine dieser Lösungen das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$, die Kantenlängen $BD = m$, $AC = n$, die Seitenlängen $A_1 D_1 = C_1 B_1 = x$, $A_1 B_1 = C_1 D_1 = y$ und der Winkel $(AC \wedge BD) = \varphi$, so ist, wenn ich von nebensächlichen Erläuterungen absehe, die Fläche f des Parallelogramms

$$f = x y \sin \varphi.$$

Nun ist aber $x : m = AA_1 : AB$, daraus: $(m-x) : m = A_1 B : AB$, und $y : n = A_1 B : AB$,

also schliesslich $y : n = (m-x) : m$, und es ergibt sich

$$y = \frac{n}{m}(m-x),$$

$$\text{also } f = \frac{n}{m} \sin \varphi \cdot x (m-x).$$

Betrachtet man x als Abszisse, f als Ordinate, so stellt dies eine Parabel dar mit dem Scheitel

$$x' = \frac{m}{2}, \; y' = \frac{n}{2},$$

mit den beiden Nullstellen $x = o$ und $x = m$, wie man sich leicht überlegt, und das sagt offenbar:

Die ausgeschnittene Parallelogrammfläche beginnt, wenn wir die Ebene zuerst durch BD selbst legen, mit dem Wert 0, steigt dann parabolisch, bis die Parallelebene die vier anderen Kanten des Tetraeders halbiert, und fällt wieder ebenso, wie sie stieg, bis zum Wert 0 bei AC. Gehen wir nach links über BD, nach rechts über AC hinaus, so wird die Fläche negativ, aber immer grösser, was den beiden unter der X-Achse

liegenden Parabelästen entspricht. Der positive Maximalwert ist offenbar

$$F = \frac{m\,n}{4} \sin \varphi.$$

II.

Gibt man für die schneidende Ebene einen Punkt im Raum, durch den sie gehen soll, so existieren, wenn wir die Flächen des Tetraeders wieder beliebig erweitern, immer 3 Lösungen, entsprechend den 3 gegenüberliegenden Kantenpaaren. Was ich hier besprechen will, ist die Determination der in das eigentliche Tetraeder fallenden Schnitte.

Wir sahen schon vorhin, dass eine Ebene, die das Tetraeder in der angegebenen Weise schneiden soll, zwischen den durch A C und B D möglichen Parallelebenen enthalten sein muss. Legt man die entsprechenden Parallelebenen auch durch die anderen zwei Kanten-

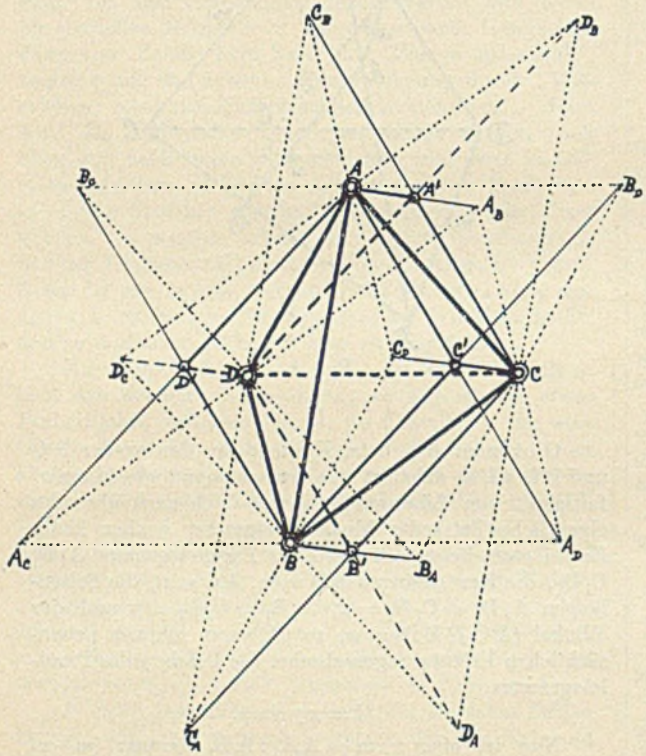


Fig. 2.

paare A D, B C und A B, C D, so schliessen die 6 Ebenen ein Parallelepiped ein A D' B C'-A' D B' C. Liegt nun der gegebene Punkt der gesuchten Schnittebene innerhalb dieses Parallelepipeds, so existieren 3 Lösungen. Liegt er in einem der parallelepipedischen Schächte über irgend einer Seitenfläche des Parallelepipeds, so gibt es immer zwei, ist er aber nur mehr von zwei Parallelebenen eingeschlossen (solcher Räume gibt es, den Kanten entsprechend, zwölf), so gibt es bloss eine Lösung, und wenn der Punkt in einem der acht noch übrigen Dreikante liegt, gar keine in das Tetraeder fallende Lösung.

Zur Zeichnung der Figur bemerke man, dass z. B. die Parallelebene durch A B (zu C D) die Tetraederebene D B C längs $A_C A_D \parallel C D$, die Tetraederebene D C A aber längs $B_C B_D \parallel C D$ schneidet. Legt man nun die entsprechende Parallelebene durch B C (zu A D), so schneidet diese die Tetraederebene D C A längs $B_A B_D \parallel A D$ und B_D ist (nebst B selbst) ein gemeinsamer Punkt der Parallelepipedflächen durch A B und C D, $B B_D$ also eine Kante desselben. Setzt man diese Betrachtungen fort, so gelangt man zu der einfachen Zeichenvorschrift: Ziehe in jeder Tetraederebene die Parallelen durch die Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten (z. B. im $\triangle$ A D C ziehe $B_C B_D \parallel C D$, $B_C B_A \parallel C A$, $B_A B_D \parallel A D$), und verbinde dann die Gegenecke des Tetraeders (B) mit den erhaltenen Schnittpunkten (B_C, B_A, B_D); diese Verbindungslinien sind ebensoviel Kanten des gesuchten Parallelepipeds. Dabei gehen natürlich immer, wie sich das aus der gleichlautenden räumlichen Konstruktion von selbst ergibt, viermal drei Gerade von der Art

$$B B_A,\ B C_A,\ B D_A$$

durch einen Punkt (B'). Die so erhaltenen vier Eckpunkte des Parallelepipeds (A', B', C', D') bilden ein zweites Tetraeder, von dem man ebensogut hätte ausgehen können. Alle anderen Eigenschaften der auf diese Weise entstandenen ebenen Konfiguration möge man aus der Figur entnehmen. Bemerkt sei nur noch, dass der Schwerpunkt beider Tetraeder mit dem des Parallelepipeds zusammenfällt, was in der Figur, um sie nicht zu überladen, nicht gezeichnet wurde.

Es ist nun nicht die Meinung des Verfassers, dass solche Ueberlegungen mit dem Schüler angestellt werden sollen — man hätte ja auch gar kein Kriterium, ob des Schülers Intuition folgen kann —, aber der Lehrer soll derart über der Aufgabe stehen, dass er immer gleich weiss, woran die Unmöglichkeit einer Lösung liegt, wo hier z. B. der gegebene Punkt der gesuchten Ebene am bequemsten anzunehmen ist und ähnliches mehr. Dies an einem konstruktiv sehr einfachen Beispiel zu zeigen, war meine Absicht.

Zur Theorie der konjugierten Durchmesser der Ellipse.

Von Oberlehrer Dr. Ebner in Breslau.

Das Folgende enthält eine Theorie der konjugierten Durchmesser der Ellipse, die in der Literatur über diesen Gegenstand noch nicht enthalten zu sein scheint, und die sich durch ihre Einfachheit und Eleganz im Gegensatz zu der sonst gebräuchlichen Herleitung der Sätze über konjugierte Durchmesser aus der Gleichung der Ellipse für Unterrichtszwecke brauchbar erweisen dürfte.

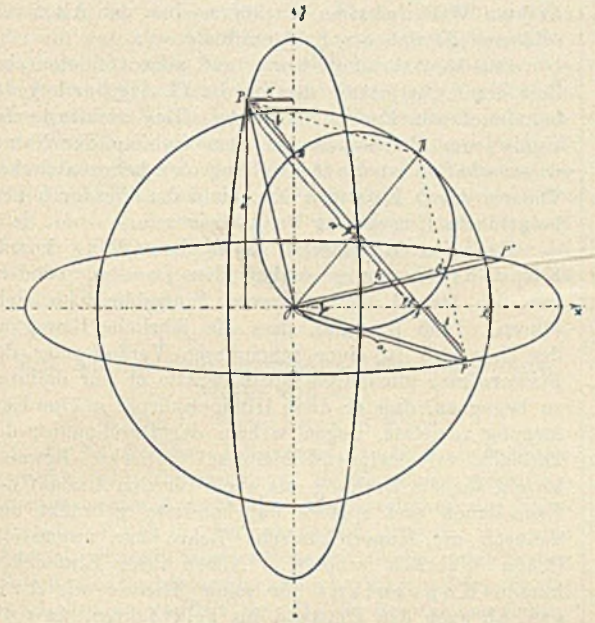
Bekanntlich beschreibt jeder Punkt P einer Geraden, die sich so bewegt, dass zwei ihrer Punkte, A und B immer auf zwei zu einander senkrechten Geraden bleiben, eine Ellipse, deren Halbachsen in die Richtung der beiden senkrechten Linien fallen und die Grösse PA bezw. PB haben. Bezeichnen nämlich x und y die rechtwinkligen Koordinaten von P, φ den Winkel der gleitenden Geraden mit der x-Achse, so folgt aus der Figur:

$$x = P B \cos \varphi,\quad y = P A \sin \varphi$$
$$= b \cos \varphi \quad = a \sin \varphi$$

woraus durch Quadrieren und Addieren die Ellipsengleichung resultiert.

Beschreibt man ferner über AB als Durchmesser den Kreis vom Mittelpunkt M und um O den Kreis vom Radius AB, der den ersten in H berührt, so folgt aus der leicht nachzuweisenden Gleichheit der Bogen HA und HA_0, dass die Bewegung der Geraden AB aus ihrer Anfangslage OA_0 auch ersetzt werden kann durch das Rollen des kleinen Kreises in dem doppelt

so grossen Kreise vom Radius AB; es ist das die bekannte Erzeugung der Ellipse vermittelst der beiden Cardanischen Kreise.



Da für einen kleinen Zeitmoment das Rollen des kleinen Kreises im grossen auch angesehen werden kann als eine Drehung des kleinen Kreises um den jeweiligen Berührungspunkt Π, den sog. Momentanpol der Bewegung, so beschreibt während dieses Moments jeder mit dem Rollkreise fest verbundene Punkt P einen kleinen Kreisbogen um Π, der zugleich ein Bahnelement von P sein muss, oder anders ausgedrückt: die Verbindungslinie $P\Pi$ steht senkrecht auf der Ellipsentangente in P, ist also die Normale der Ellipse in P.

Man betrachte nach diesen voraufgeschickten Erinnerungen nunmehr die Bahnellipsen zweier Punkte P und P', die von M gleichweit entfernt liegen. Die beiden Bahnellipsen haben dann gleiche Achsen, sind also kongruent. Konstruiert man auch für P' die Ellipsennormale $P'\Pi$, so ist diese gleich OP, da in dem Viereck $OP\Pi P'$ die Diagonalen sich gegenseitig halbieren.

Wird nun die Bahnellipse von P um den Ellipsenmittelpunkt O um 90^0 gedreht, so fällt P auf einen Punkt P'' der Bahnellipse von P', für den OP'' senkrecht zu OP und $OP'' = OP$ ist. Dann ist aber auch OP'' senkrecht zu der parallelen Strecke $P'\Pi$, also parallel zu der Ellipsentangente in P', d. h. OP'' ist der zu OP' konjugierte Halbmesesr und $OP'' = P'\Pi$.

Daraus folgt die bekannte Konstruktion einer Ellipse aus zwei gegebenen konjugierten Halbmessern OP' und OP'': Man fälle vom Endpunkt des einen Halbmessers, z. B. P' die Senkrechte auf den anderen und trage auf ihr den zugeordneten Halbmesser $OP'' = P''\Pi$ ab. Den Endpunkt Π dieser Senkrechten verbinde man mit dem Schnittpunkt O der beiden Halbmesser und beschreibe über $O\Pi$ den Kreis vom Mittelpunkt M. Dieser Kreis schneidet die Verbindungslinie $P'M$ in zwei Punkten A und B, die mit O verbunden die Richtungen der Achsen der gesuchten Ellipse geben, die Grössen der halben Ellipsenachsen sind dann $P'A$ und $P'B$.

Setzt man zur Abkürzung:

$$OP' = a_1,\ OP'' = b_1,\ \sphericalangle P'OP'' = \omega$$

so folgt aus der Figur:

$$\sin\omega = \frac{P'C}{a_1}$$

Nach dem Sekantensatze ist aber:

$$P'C \,.\, P'\Pi = P'A \,.\, P'B \text{ oder } P'C \,.\, OP'' = ba$$

Also wird:

$$\sin\omega = \frac{\frac{ab}{b_1}}{a_1} = \frac{ab}{a_1 b_1}$$

oder:

$$a_1 b_1 \sin\omega = ab$$

d. h. der Inhalt aller aus zwei konjugierten Halbmessern gebildeten Parallelogramme ist konstant gleich dem Rechteck a b, ein bekannter Satz.

Weiter folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken OCP' und $OC\Pi$:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{P'C}^2 = \overline{O\Pi}^2 - \overline{C\Pi}^2 + \overline{P'C}^2 \\ &= \overline{AB}^2 - (P'\Pi - CP')^2 + \overline{P'C}^2 \\ &= (a-b)^2 - (b_1 - CP')^2 + \overline{P'C}^2 \\ &= (a-b)^2 - b_1^2 + 2b_1 \,.\, CP' \end{aligned}$$

Setzt man hierin für CP' den vorhin gefundenen Wert $\frac{ab}{b_1}$, so folgt:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (a-b)^2 - b_1^2 + 2ab \\ &= a^2 + b^2 - b_1^2 \end{aligned}$$

oder:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

d. h. die Summe der Quadrate von je zwei konjugierten Halbmessern ist konstant, der zweite bekannte Satz.

Allgemeine Charakteristik der Entwickelung der Naturwissenschaften im 16. Jahrhundert.*)

Von F. Dannemann (Barmen).

Dasjenige Ereignis, welches gewöhnlich als ein Markstein in der Geschichte der Wissenschaften betrachtet wird und mit dem auch wir die neuere Zeit beginnen lassen, ist die Aufstellung des heliozentrischen Weltsystems durch Kopernikus. Man darf jedoch nicht ausser acht lassen, dass der geistige Umschwung, dem wir jetzt begegnen, allmählich erfolgte und dass man auf allen Wissensgebieten zunächst an das Vorhandene anknüpfte. Auch ging für die einzelnen Zweige die Befreiung aus den Formen des mittelalterlichen Denkens durchaus nicht gleichzeitig vor sich. Zuerst war es die Astronomie, welche einen erhöhten Standpunkt gewann. Ihr folgten die Physik seit dem 17. und die Chemie seit dem 18. Jahrhundert, während die Naturkunde erst im Laufe des 19. Jahrhunderts auf den Rang einer exakten Wissenschaft erhoben wurde.

Eine Darstellung der neueren Geschichte der Wissenschaften lässt erkennen, dass zahlreiche Aufgaben, um die es sich jetzt handelte, schon im Altertum gestellt wurden. Während des Mittelalters hatte man sie fast sämtlich aus den Augen verloren, die neuere Zeit nimmt sie nahezu dort, wo das Altertum stehen geblieben, wieder auf. Zum grossen Teil führt sie diese Aufgaben ihrer Lösung entgegen, sie knüpft aber auch an die gelösten und schwebenden Aufgaben neue Probleme an, welche noch unsere Zeit vollauf beschäftigen, sodass die letztere das Gefühl beseelt, dass sich ein Ende in

*) Ein vom Verfasser gekürzter Abschnitt aus seiner demnächst in 2. Auflage erscheinenden Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig, Verlag von W. Engelmann, 1903.

der Kette der Entdeckungen und Erfindungen nirgends absehen lässt.

Ein kurzer Rückblick soll uns zunächst das Erbe vergegenwärtigen, welches die neuere Zeit vom Altertum übernahm. Die Elemente der Mathematik waren in der Hauptsache entwickelt und am vollständigsten durch Euklid zusammengefasst worden. Hieran schlossen sich die Untersuchungen des Archimedes und des Apollonios an, welche insbesondere die wichtige Lehre von den Kegelschnitten begründeten. Der Almagest enthielt die Grundzüge der ebenen und der sphärischen Trigonometrie. Das Ziffernsystem und die Anfänge der Algebra verdankte man als Schöpfungen einer späteren Zeit den Indern und den Arabern.

Die Alten hatten ferner gezeigt, in welcher Weise sich die Mathematik auf astronomische und mechanische Probleme anwenden lässt. Das Werk von Ptolemäos und vor allem die Schriften des Archimedes boten zahlreiche Beispiele dafür. Über den Lauf der Gestirne hatte man eine grosse Summe von Beobachtungen gesammelt, ferner lagen Ansätze zu einer richtigen astronomischen Theorie vor, welche nur der weiteren Entwickelung harrten. Die Methoden und die Instrumente waren noch im wesentlichen dieselben, deren sich die Griechen bedient hatten. Auch gab es im Beginn der neueren Zeit für die Astronomie keine Aufgabe, die sich nicht schon die Alten gesteckt hätten. Die Bestimmung des Umfanges der Erdkugel, ihr Verhältnis zu den übrigen Himmelskörpern, eine genaue Topographie des Fixsternhimmels, genaue Zeit- und Ortsbestimmung, die Vorhersage astronomischer Ereignisse: alles das waren Probleme, mit denen sich schon das Altertum, insbesondere die alexandrinische Periode eingehend beschäftigt hatte, und von denen die neuere Zeit vorzugsweise durch das Hauptwerk des Ptolemäos Kenntnis erhielt.

Auch die Statik und die Optik, Gebiete, welche sich für die den Alten geläufige deduktive Behandlung besonders eigneten, empfing die Neuzeit in einer bis zu einem gewissen Grade wissenschaftlich durchgebildeten Form, während bezüglich der übrigen Teile der Physik nur die Kenntnis von mehr oder minder wertvollen Einzelbeobachtungen übermittelt wurde, deren richtige Deutung und weiterer Verfolg der neueren Periode vorbehalten blieb. Es gilt dies namentlich von den magnetischen und den elektrischen Erscheinungen, sowie von dem Verhalten der Gase und der Dämpfe, mit deren Studium Heron von Alexandrien einen vielversprechenden Anfang gemacht hatte.

Ist es auch nicht mehr möglich, im einzelnen zu entscheiden, welche Kenntnisse Geber und seine Nachfolger den späteren Alexandrinern verdankten und welche sie selbständig erwarben, so muss doch anerkannt werden, dass die Chemie ausnahmsweise dem Mittelalter die grössere Pflege und Förderung verdankt. Die Chemie in ihrer ersten unvollkommenen Gestalt war so sehr eine Wissenschaft des Mittelalters, dass sie weit über den Beginn der neueren Zeit hinaus sich nach den in jener Periode gesteckten Zielen bewegt und sich erst spät den neueren Denkformen anbequemt hat.

Auf dem Gebiete der beschreibenden Naturwissenschaften knüpfte man gleichfalls dort an, wo das Altertum mit ihrer Bearbeitung aufgehört hatte. Nachdem das Studium des Aristoteles, des Dioskorides und Theophrast die erste Anregung gegeben, wandte man sich aber in steigendem Masse der eigenen, auf keine Autorität zurückgreifenden Beobachtung zu, der sich alsbald durch die Erweiterung des gesamten menschlichen Gesichtskreises und infolge der Entwickelung der exakten Wissenschaften ein überreiches, den Alten verschlossen gebliebenes Feld eröffnete.

Das 16. Jahrhundert war auf allen Gebieten eine Zeit der Vorbereitung, der erst im 17. Jahrhundert der bahnbrechende Fortschritt folgte. Das wichtigste Ereignis jenes Zeitraumes auf dem Gebiete der Naturwissenschaften ist die Aufstellung der heliozentrischen Theorie durch Kopernikus und der hierdurch herbeigeführte Umschwung der Astronomie.

Für die Richtigkeit seiner Darstellung konnte Kopernikus keine schlagenden Beweise, sondern nur den Grund der grösseren Einfachheit ins Feld führen. Dem Einwand, dass die jährliche Bewegung der Erde sich in einer scheinbaren Veränderung der Fixsternörter offenbaren müsse, wusste er nur dadurch zu begegnen, dass er diese Himmelskörper in eine Entfernung versetzte, gegen welche der Durchmesser der Erdbahn verschwindend klein sei. Direkte Beweise, sowohl für die Drehung als auch für den Umlauf der Erde haben erst spätere Jahrhunderte gebracht und dadurch die Kopernikanische Lehre zur unumstösslichen Wahrheit erhoben. Neben ihrer Einfachheit konnte Kopernikus für seine Theorie wie Aristarch auch den Umstand ins Feld führen, dass die Sonne der bei weitem grössere Weltkörper sei.

Einer der ersten begeisterten Anhänger der Kopernikanischen Lehre war der Dominikanermönch Giordano Bruno, Spinozas Vorläufer in der Begründung einer pantheistischen Weltanschauung. Seinen divinatorischen Blicken erweiterte sich das Fixsterngewölbe zu einem in Raum und Zeit unendlichen Universum. Er war auch der erste, der die Fixsterne als Sonnen und als Mittelpunkte ungezählter, dem unseren gleichartiger Planetensysteme ansprach.

Wie auf dem astronomischen, so machte sich auch auf den übrigen Gebieten der Naturwissenschaft während des 16. Jahrhunderts das Bestreben geltend, die Fesseln der Autorität zu sprengen und Beobachtung und Nachdenken an ihre Stelle zu setzen.

Fanden sich schon bei Leonardo da Vinci klare, wenn auch noch nicht hinreichend durchgearbeitete mechanische Begriffe, z. B. bezüglich des Falles über die schiefe Ebene, vor, so mehren sich die Ansätze, je weiter wir uns dem Auftreten Galileis nähern. Vor allem greift eine bessere, schon auf physikalischen Prinzipien beruhende Auffassung der Wurfbewegung Platz. Man erkennt, dass die Bahn des geworfenen Körpers eine einzige krumme Linie und nicht aus geraden und krummen Stücken zusammengesetzt ist, wie die Peripatetiker behaupteten, sowie dass die grösste Wurfweite bei einem Elevationswinkel von 45° erzielt wird. Auch die Meinung der Aristoteliker, dass ein Körper um so schneller falle, je schwerer er sei, wird schon vor Galilei erschüttert.

Für die Chemie und für die Mineralogie wurde in dieser Periode ebenfalls ein Grund geschaffen, auf dem sich mit Erfolg weiter bauen liess. Das Gleiche gilt auch von den übrigen Gebieten der Naturbeschreibung, der Botanik, der Zoologie, sowie der Lehre vom Bau und von den Verrichtungen des menschlichen Körpers. Diese Gebiete wurden nicht nur durch das Bekanntwerden der bezüglichen Schriften der Alten zu neuem Leben geweckt, sondern es trat für sie noch ein zweiter günstiger Umstand hinzu. Infolge der Entdeckungs-

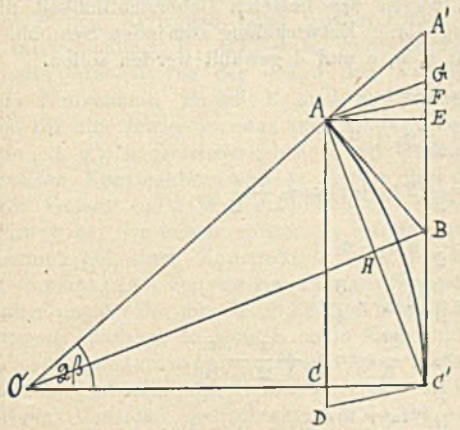
reisen wurde nämlich die europäische Menschheit mit einer solchen Fülle neuer Naturerzeugnisse bekannt, wie es nie zuvor in gleichem Masse geschehen war. Dass man zur selben Zeit die Augen öffnen und die Fesseln des Autoritätsglaubens und der Büchergelehrsamkeit abstreifen lernte, ist für die weitere Entwickelung der beschreibenden Naturwissenschaften gleichfalls von grossem Einfluss gewesen. Waren diese Wissenszweige früher nur nebenbei und insbesondere zu Heilzwecken geflegt worden, so bot sich jetzt eine solche Fülle von Material, dass die Tätigkeit derjenigen, die sich ihnen widmeten, vollauf in Anspruch genommen wurde. Damit musste die Beziehung dieser Fächer zur Medizin ihrer eigenen Bedeutung gegenüber allmählich in den Hintergrund treten.

Zur Adrianschen Berechnung der Näherungswerte von π.*)

Von C. Langhans in Ploen.

In No. 2 dieses Jahrganges der Unterrichtsblätter veröffentlicht Dr. Adrian in Flensburg einen bemerkenswerten Aufsatz über die Berechnung der Näherungswerte von π, bemerkenswert, weil in ihm eine Formel mitgeteilt wird, welche mittels der Bussler'schen Tabelle der Sechseckreihe schon bei Zugrundelegung des regelmässigen 24-Ecks den für die Schule ausreichenden Wert 3,1416 liefert. Seine Formel $\pi = \frac{2p_i + p_u}{3}$ leitet er aus den Perimetern der dem Einheitskreise ein- und umbeschriebenen n-Ecke her. Im weiteren Verlauf seiner Untersuchung gelangt er zu einer neuen Formel $p_{i(2n)} = \frac{3p_i + p_u}{4}$, mittels welcher der Umfang des einbeschriebenen 2n-Ecks aus den oben genannten n-Ecken in bequemer Weise gefunden werden kann. Für die Bestimmung des Wertes des umbeschriebenen 2n-Ecks bedient er sich aber der für die Rechnung umständlichen Gleichung $s_u = \frac{2s_i}{\sqrt{4 - s_i^2}}$.

Nun lässt sich zeigen, dass hierfür eine Formel gefunden werden kann, welche die vorige an Einfachheit übertrifft, wenn derselbe Satz, den Dr. Adrian in seinem Aufsatz angewandt hat, zur Verwendung kommt, dass nämlich die Teilungslinie eines kleinen Dreieckswinkels die Gegenseite in zwei Abschnitte zerlegt, welche den Teilwinkeln proportional sind.



*) Eine denselben Gegenstand von allgemeineren Gesichtspunkten aus behandelnde Abhandlung eines anderen Verfassers wird die nächste Nummer bringen. Anm. d. Red.

Zu dem Zwecke verlängere man in der Adrianschen Fig. 2 OH bis zum Schnittpunkt B mit A'C', beschreibe um B mit AB einen Kreisbogen, welcher A'C' in G trifft, und verbinde A mit B und G. Da $AG \perp AC'$ und $AE \perp A'C'$ steht, so ist

$$\angle EAG = \angle AC'A' = \frac{1}{2} \angle AOC' = \beta.$$

AG halbiert also $\angle EAA'$ und somit nach dem soeben angeführten Satze auch die Gegenseite A'E.

Nun ist $EG = C'G - C'E = 2AB - AC$

und $A'G = A'C' - C'G = A'C' - 2AB$,

demnach $2AB - AC = A'C' - 2AB$.

Hieraus ergibt sich $AB = \frac{AC + A'C'}{4}$

und somit $p_{u(2n)} = \frac{p_i + p_u}{2}$.

Der Umfang des umbeschriebenen 2n-Ecks ist also das arithmetische Mittel zwischen den Umfängen des ein- und umbeschriebenen n-Ecks.

Wer die obenstehenden Formeln inbezug auf ihre Leistungsfähigkeit prüft, wird sich bald überzeugen, dass sie gestatten, die Zahl π mit leichter Mühe auf beliebig viele Stellen zu berechnen, wenn die Umfänge des ein- und umbeschriebenen n-Ecks mit hinreichender Genauigkeit bestimmt worden sind. Aber damit ist noch nicht ihre Verwendbarkeit in der Schule — denn darauf kommt es hauptsächlich an — bewiesen. Sollen die Näherungsformeln in den Schulunterricht eingeführt werden, muss ihre Herleitung dem Fassungsvermögen der Schüler angepasst sein. Dies trifft bei dem Adrianschen Beweisverfahren nicht zu. Denn einerseits erfordert jener Beweis die Entwickelung trigonometrischer Funktionen in Reihen, welche wenigstens auf dem Gymnasium nicht gelehrt wird. Andererseits wird der Schüler einen Beweis für den angewandten Satz vermissen, dass eine Gerade, welche einen kleinen Dreieckswinkel in einem bestimmten Verhältnis teilt, auch die Gegenseite in demselben Verhältnis teilen soll; dieser Satz wird ihm solange unverständlich bleiben, bis er ihm bewiesen ist, und leicht dazu dienen, seine mathematischen Kenntnisse zu verwirren.

Auch der von Dr. Adrian mitgeteilte empirische Weg, welcher gleichfalls zur Aufstellung der ersten Näherungsformel führt, ist meiner Meinung nach auf der Schule nicht zu verwenden, so bestechend es auch auf den ersten Blick erscheinen mag, mit so leichter Mühe zum Ziele zu kommen. Denn er setzt die numerischen Werte der Perimeter der Um- und Inpolygone und der Zahl π selbst als bekannt voraus, während doch gerade die eigene Arbeit des Schülers jene Werte zu Tage fördern soll.

Nun ist es aber möglich, jene Näherungsformeln mit Hilfsmitteln herzuleiten, wie sie der Schule, auch dem Gymnasium, zu Gebote stehen. Ausser der Entwickelung der algebraischen Funktion $\frac{1}{1+x}$ in eine Reihe, welche durch Division erfolgen kann, ist die Bestimmung der Quadratwurzel aus dem Binom $1 + x$ mittels des binomischen Lehrsatzes erforderlich, für den Fall, dass $x < 1$ ist, ein Verfahren, welches auch auf dem Gymnasium eingeschlagen wird, um die grosse Bedeutung des binomischen Lehrsatzes für die Lösung einer für die Schule wichtigen Aufgabe zu zeigen, obwohl die Giltigkeit des genannten Satzes an jener Anstalt nicht für gebrochene Exchonenten bewiesen

wird, weil dieser Fall nicht zum Pensum des Gymnasiums gehört.

Ableitung der Formel $\pi = \frac{2e_n + u_n}{3}$.

Es seien $a = e_n$ und $b = u_n$ die Umfänge der einem Kreise mit dem Durchmesser 1 ein- und umbeschriebenen regelmässigen n-Ecke, $c = e_{2n}$ und $d = u_{2n}$ die analogen Grössen für das 2n-Eck. Dann existieren, wenn der Centriwinkel im n-Eck $\frac{360^0}{n} = 2\alpha$ gesetzt wird, folgende Gleichungen:

$$a = n \cdot \sin\alpha = 2n \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2};\quad b = n\,tg\,\alpha = n\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$c = 2n \sin\frac{\alpha}{2};\qquad d = 2n\,tg\frac{\alpha}{2} = 2n\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Man erkennt sofort, dass die Verhältnisse $\frac{a}{c} = \cos\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{c}{d} = \cos\frac{\alpha}{2}$; einander gleich sind, und erhält daher die Proportion

$a : c = c : d$, also $c^2 = a\,d$ . . . . . (1)

Ferner stelle man das Verhältnis $a : b$ auf. Es lautet:

$$\frac{a}{b} = \cos\alpha = \cos\frac{2\alpha}{2} - \sin\frac{2\alpha}{2} = 2\cos\frac{2\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{c^2}{d^2} - 1$$

Mit Benutzung von Gleichung (1) ergibt sich:

$\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a}{d} - 1$, also $d = \frac{2ab}{a+b}$ . . . . . (2) *)

Setzt man schliesslich den in Gleichung (2) für d gefundenen Wert in Gleichung (1) so erhält man

$c^2 = \frac{2a^2b}{a+b}$ . . . . . (3)

Um nun von den soeben entwickelten Gleichungen zu der Adrianschen Näherungsformel für π zu gelangen, ist es nötig zu zeigen, dass die Differenz zwischen den Umfängen jedes um- und einbeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl eine Grösse ist, welche kleiner als 1 ist, in der Vielecksreihe rasch abnimmt und sich der Null mehr und mehr nähert, je weiter die Vielecksreihe fortschreitet.

*) Zu dieser Formel ist von Dr. J. Schröder (Hamburg) im 2. Heft des 34. Jahrgangs der Zeitschrift für mathem. und naturwiss. Unterricht ein geometrischer Beweis geliefert. (Anm. d. Verf.)

Zu Formeln von ganz ähnlicher Gestalt gelangt man, wenn man zur Berechnung von π nicht die Umfänge, sondern die Flächen der demselben Kreise ein- und umbeschriebenen Polygone von den Eckenzahlen n und 2n benutzt. Vgl. hierzu den für die nächste Nummer angekündigten Artikel über dasselbe Thema. (Anm. d. Red.)

Die Berechnung der Perimeter geschieht am leichtesten mittels der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen, wie sie z. B. in den fünfstelligen Logarithmentafeln von Dr. O. Schlömilch stehen, wo sie für Winkel angegeben sind, welche von 10 zu 10 Minuten wachsen. Folgende Tabelle enthält die so gefundenen Werte für die Reihe des 6-Ecks und des 15-Ecks.

Reihe des 6-Ecks.

$a = e_6 = 3$	$b = u_6 = 3{,}46410$
$e_{12} = 3{,}10584$	$u_{12} = 3{,}21540$
$e_{24} = 3{,}13272$	$u_{24} = 3{,}15960$

Reihe des 15-Ecks.

$a = e_{15} = 3{,}11865$	$b = u_{15} = 3{,}18840$
$e_{30} = 3{,}13590$	$u_{30} = 3{,}15300$

Bezeichnet man die Differenz $b - a$ mit ε, so erkennt man, dass ε zwischen folgenden abgerundeten Grenzen liegt:

6-Eck: $0{,}4 > \varepsilon > 0{,}5$	15-Eck: $0{,}06 > 0{,}07$
12-Eck: $0{,}10 > \varepsilon > 0{,}11$	30-Eck: $0{,}01 > 0{,}02$.
24-Eck: $0{,}02 > \varepsilon > 0{,}03$	

Die Grösse ε erfüllt also die oben geforderte Bedingung.

Setzt man in Gleichung (2) $a + \varepsilon$ für b ein, so ergibt sich

$$d = \frac{2a(a+\varepsilon)}{2a+\varepsilon} = 2a \cdot \frac{1+\frac{\varepsilon}{a}}{2+\frac{\varepsilon}{a}} = 2a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

$$= a + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Nach Gleichung (1) ist mit Benutzung von Gleichung (4)

$$c^2 = a\,d = a\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) = a^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2a}\right)$$

$$\text{also } c = a\left(1 + \frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2a}\right) = a + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \cdot \cdot (5)$$

Führt man nun $b - a$ statt ε in Gleichung (4) und (5) ein, so erhält man für c und d die Näherungsformeln

$c = \frac{3a+b}{4}$ . . . . . (6)

und $d = \frac{a+b}{2}$ . . . . . (7)

Jetzt möge aus den Polygonen mit beliebiger Seitenzahl die Entwickelung der Polygone mit doppelter Seitenzahl nach den beiden letzten Formeln erfolgen, wobei wegen der besseren Uebersichtlichkeit die am Anfang dieser Entwickelung stehenden Symbole e und u statt a, b, c und d gewählt werden sollen.

$$e_n$$

$$e_{2n} = \frac{1}{4}(3e_n + u_n)$$

$$= \frac{1}{4}(4e_n + \varepsilon) = e_n + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$e_{4n} = \frac{1}{4}(3e_{2n} + u_{2n})$$

$$= \frac{1}{4}\left(4e_n + \frac{5}{4}\varepsilon\right)$$

$$= e_n + \frac{5}{16}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{16}$$

$$e_{8n} = \frac{1}{4}(3e_{4n} + u_{4n})$$

$$= \frac{1}{4}\left(4e_n + \frac{21}{16}\varepsilon\right)$$

$$u_n = e_n + \varepsilon$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2}(e_n + u_n)$$

$$= \frac{1}{2}(2e_n + \varepsilon) = e_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$u_{4n} = \frac{1}{2}(e_{2n} + u_{2n})$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e_n + \frac{3}{4}\varepsilon\right)$$

$$= e_n + \frac{3}{8}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8}$$

$$u_{8n} = \frac{1}{2}(e_{4n} + u_{4n})$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e_n + \frac{11}{16}\varepsilon\right)$$

$$e_{8n} = e_n + \frac{21}{64}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{64}$$

$$e_{16n} = \frac{1}{4}(3\,e_{8n} + u_{8n})$$
$$= \frac{1}{4}(4\,e_n + \frac{85}{64}\varepsilon)$$
$$= e_n + \frac{85}{256}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{64} + \frac{\varepsilon}{256}$$

$$u_{8n} = e_n + \frac{11}{32}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{32}$$

$$u_{16n} = \frac{1}{2}(e_{8n} + u_{8n})$$
$$= \frac{1}{2}(2\,e_n + \frac{43}{64}\varepsilon)$$
$$= e_n + \frac{43}{128}\varepsilon = e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{32} - \frac{\varepsilon}{128}$$

Setzt man beide Reihen bis ins Unendliche fort, so findet man

$$\pi = e_n + \frac{\varepsilon}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots)$$
$$= e_n + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{4}{3}$$
$$= e_n + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$= e_n + \frac{1}{3}(u_n - e_n)$$
$$= \frac{2\,e_n + u_n}{3}$$

$$\pi = e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots)$$
$$= e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{4}{3}$$
$$= e_n + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6}$$
$$= e_n + \frac{\varepsilon}{3}$$, also dieselbe Formel wie links.

Nach dieser Formel ergeben sich unter Zugrundelegung der oben hergeleiteten Werte für die Perimeter der Reihe des 6-Ecks und des 15-Ecks für π die Näherungswerte:

6-Eck: 3,15470
12-Eck: 3,14236
24-Eck: 3,14168

15-Eck: 3,1419
30-Eck: 3,1416.

Konstitutions- und Strukturformeln für geometrische Konstruktionen.

Von S. Leisen, Dülken.

(Schluss.)

Zwei geometrische Konstruktionen sind offenbar absolut gleich inbezug auf Einfachheit und Genauigkeit, d. h. Schwierigkeit genauer Ausführung, wenn ihre Strukturformeln oder wenigstens ihre Konstitutionsformeln übereinstimmen; denn sie setzen sich dann aus den nämlichen Elementaroperationen zusammen. Das ist aber nicht notwendigerweise der Fall, wenn ihre (Lemoineschen) Operationsformeln gleichlauten. Daher giebt die Uebereinstimmung dieser Operationsformeln für zwei Konstruktionen noch nicht das Recht, beide als gleicheinfach und gleichgenau zu bezeichnen.

Da das Hinzutreten irgend einer der oben durch ein besonderes Symbol bezeichneten Operationen zu einer bestimmten Konstruktion die Einfachheit der letzteren vermindert, so hat von zwei Konstruktionen, deren Konstitutionsformeln K_1 und K_2 mit der Konstitutionsformel K_3 irgend einer dritten Konstruktion durch die Gleichung: $K_1 = K_2 + K_3$ zusammenhängen, die zweite offenbar vor der ersten den Vorzug der grössern Einfachheit. Enthält K_3 auch nur ein einziges Zeichen für eine leicht ungenau ausfallende Elementaroperation (s. u.), so ist sicherlich auch die Genauigkeit der zweiten Konstruktion grösser als die der ersten, d. h. die Gefahr (oder Wahrscheinlichkeit) ungenauer Ausführung bei der ersten grösser als bei der zweiten.

Kommt bei einer Konstruktion eine Elementaroperation nicht so oft vor wie bei einer gewissen andern, dafür aber eine der übrigen durch Zeichen ausgedrückten Operationen häufiger, so können beide Konstruktionen nur unter bestimmten (entweder ganz willkürlich oder auf ein unbestimmtes Gefühl hin oder auf Grund vorheriger Versuche gemachten) Annahmen als gleicheinfach beziehungsweise gleichgenau oder die eine von ihnen als einfachere, leichter genau auszuführende erklärt werden.

Herr Lemoine betrachtet die Operationen R_1, R_2, C_1, C_2, C_3, also die Operationen a_1, L, p, l, vp, vl (nl?) und O als gleicheinfach; denn bei Berechnung seines sogenannten Einfachheitskoeffizienten legt er jeder der genannten Operationen den Wert 1 bei. Die Operation a_2 dagegen setzt er gleich $2a_1$, bezeichnet er nämlich durch $2R_1$ und gibt ihr den Wert 2. Bei Berechnung des sogenannten Genauigkeitskoeffizienten erteilt er den Operationen R_2 und C_3, d. i. den Operationen L und O den Wert 0; die übrigen Operationen erhalten bei dieser Berechnung den nämlichen Wert (1 beziehungsweise 2) beigelegt wie bei Berechnung des Einfachheitskoeffizienten.

Dass die diesen Berechnungen zu Grunde liegenden Annahmen willkürlich sind und der Wahrheit nicht entsprechen, ist klar. Verschiedenartige Operationen sind nicht gleicheinfach; die Gefahr ungenauer Ausführung ist sicher auch verschiedengross.

Diese Verschiedenheit lässt sich indessen kaum durch kleine Zahlen richtig zum Ausdruck bringen. Da ist es denn freilich das einfachste, alle durch Zeichen ausgedrückten Elementaroperationen ohne Ausnahme für gleicheinfach zu erklären (d. i. zu definieren); man dürfte wohl auch, so lange keine oder nicht genügend übereinstimmende Ergebnisse genauer und ausgedehnter Untersuchungen von gleich sorgfältig ausgeführten Zeichnungen vorliegen, die Hypothese der Gleichwertigkeit schon deshalb gelten lassen müssen, weil sich die auf dem blossen unbestimmten Gefühl beruhenden Ansichten über die relative Schwierigkeit der genauen Ausführung verschiedener Operationen in manchen Fällen widersprechen werden.

Aber dann muss notwendigerweise auch die Elementaroperation a_2 den Zahlenwert 1, nicht, wie bei Herrn Lemoine und früher auch bei mir, den Wert 2 erhalten. (Diese Forderung stelle ich auf, trotzdem ich persönlich das Gefühl habe,*) dass die genaue Einstellung des Lineals auf zwei vorher bestimmte Punkte zugleich noch mehr wie doppelt soviel Mühe macht als eine

*) Vgl. meinen o. a. Artikel über „Relative Einfachheit usw."

solche auf einen einzigen bestimmten Punkt.) Herr Lemoine setzt $a_2 = 2R_1$, also gleich $2a_1$ (was ich auch früher getan habe), indem er sich analog der Einstellung beider Zirkelspitzen auf bestimmte Punkte die Manipulation a_2 so vorgenommen denkt, dass das Lineal zuerst an den einen Punkt angelegt und dann um diesen gedreht werde, bis es (d. h. der betreffende Rand) auch dem zweiten anliegt. So aber geschieht das Anlegen des Lineals an zwei bestimmte Punkte in Wirklichkeit nicht. Die Bewegung, durch die der Linealrand zur Berührung mit zwei bestimmten Punkten gebracht wird, ist mehr (d. h. annähernd) eine Parallelverschiebung; keiner der Punkte wird früher als der andere vom Linealrande erreicht.

Bei Berechnung des sogenannten Genauigkeitskoeffizienten nimmt Herr Lemoine u. a. offenbar an, dass die Operationen des Ziehens einer geraden und einer Kreislinie keiner Gefahr des Missratens unterliegen.

Hinsichtlich des Kreisziehens lasse ich seine Annahme gelten. Mit einem guten Zirkel werden ohne Schwierigkeit genaue Kreislinien gezeichnet; die Gefahr damit eine andere als eine Kreislinie zu zeichnen, ist — die nötige Aufmerksamkeit und Sorgfalt vorausgesetzt — sozusagen gleich Null.

Anders aber liegt die Sache beim Ziehen einer Geraden. Auch bei einem guten Lineal ist stets grosse Gefahr vorhanden, damit eine krumme Linie zu ziehen, nämlich trotz angestrengter Aufmerksamkeit die Reissfeder nicht richtig zu dirigieren, sondern unwillkürlich und ohne es zu merken an der einen oder anderen Stelle vom Rand des Lineals mehr oder weniger zu entfernen. Der genaue Konstrukteur zieht ja eben deshalb (nach Mascheroni) einer einfachen Konstruktion mit dem Lineal oft eine viel kompliziertere mit dem Zirkel vor.

Meine Ansicht über die relative Schwierigkeit, welche die genaue Ausführung der einzelnen Elementaroperationen in Wirklichkeit macht, bringt nachstehende Reihe der Operationssymbole [die Erklärung von a_3 und C s. u.] zum Ausdruck: 1) O, 2) l, 3) p, 4) nl, 5) vl, 6) vp, 7) a_1, 8) a_2, 9) a_3, 10) L, 11) C.

Diese Reihe bezeichne ich als die Schwierigkeitsreihe oder -skala der bei geometrischen Zeichnungen vorkommenden Manipulationen d. h. Elementaroperationen. Sie besagt, dass meiner Meinung nach die Schwierigkeit der genauen Ausführung, also die Gefahr der ungenauen Ausführung einer Operation, sowie die Grösse der wahrscheinlichen Abweichung um so bedeutender ist, je höher die Nummer des sie bezeichnenden Symbols in dieser Skala ist. Diese Nummer sehe ich dementsprechend als eine Art Schwierigkeits-, Ungenauigkeits- oder Aberrationsgrad an.

Auf Grund aller dieser Erwägungen stelle ich nun den Lemoineschen sogenannten Einfachheits- und Genauigkeitskoeffizienten für eine Konstruktion 1) eine Positionszahl, 2) eine Direktionszahl, 3) eine Manipulationszahl und endlich 4) einen Aberrations- oder Schwierigkeitsgrad gegenüber, die ich durch P, D, M und A bezeichne und folgendermassen definiere:

1) **P** bedeutet die **Positionszahl** (oder vielleicht besser **Positionenzahl**) d. h. die Anzahl der verschiedenen bestimmten Positionen oder Lagen, in die das Lineal und der Zirkel nach einander zu bringen sind, also die Anzahl der verschiedenen Einrichtungen oder Einstellungen des Lineals und des Zirkels auf bestimmte vorher gezeichnete Punkte oder Linien. P ist zugleich die Anzahl der das eigentliche Zeichnen der Linien präparierenden Manipulationen.

2) **D** bedeutet die **Direktionszahl** (oder **Direktionenzahl**) für die betreffende Konstruktion, d. h. die Anzahl der ein scharfes Auge und eine sichere Hand erfordernden Direktionen oder Einrichtungen (Richtgebungen) der drei beim Zeichnen gebrauchten Instrumente, also die Summe aus den Positionen des Lineals und des Zirkels und den Führungen der Reissfeder längs des Linealrandes. D kann daher auch als die Anzahl der difficilen d. h. leicht ungenau ausfallenden Manipulationen bezeichnet werden.

3) **M** bedeutet die **Manipulationszahl** (oder **Manipulationenzahl**), d. h. die Gesamtzahl der einzelnen der Reihe nach mit Sorgfalt vorzunehmenden Manipulationen, also die Summe aller in der Konstitutionsformel aufgeführten Elementaroperationen.

4) **A** bedeutet den **Aberrations- oder Schwierigkeitsgrad** der betreffenden Konstruktion, d. h. den Grad der Aberrations- oder Abweichungsgefahr (Fehlgriffsmöglichkeit), den Grad der zur genauen Zeichnung nötigen Aufmerksamkeit und Sorgfalt (accuratio). A ergiebt sich aus der Konstitutionsformel, wenn deren Operationszeichen durch ihren Aberrations- oder Schwierigkeitsgrad ersetzt werden (und in ähnlicher Weise aus den Strukturformeln).

[Die Lemoineschen Genauigkeits- und Einfachheitskoeffizienten E und S sind nach diesen Erklärungen um die Zahl der in der Konstruktion vorkommenden Operationen a_2 (beziehungsweise l_2) d. h. Einstellungen des Lineals auf zwei bestimmte Punkte grösser als beziehungsweise P und M.]

Obgleich die Versuchung nahe liegt, diese Gelegenheit zur Mitteilung von interessanten neuen Konstruktionen zu benutzen, beschränke ich mich darauf, die Anwendung meiner Methode an denselben Konstruktionen zu zeigen, auf die Herr Güntsche in dem o. a. Artikel das von ihm als „klar, wohldurchdacht und wohlerprobt" gerühmte Lemoinesche Verfahren angewandt hat. Der Leser kann dann um so leichter beide Methoden mit einander vergleichen.

Während ich nun aber in meinem ersten Artikel mich auf den von Herrn Prof. Pietzker gegebenen Text der betreffenden Konstruktionen bezog (deshalb auch von einer mir wohl bekannten Vereinfachung keinen Gebrauch machen konnte und wollte — es handelte sich damals wie dieses Mal um die symbolische Darstellung einer Konstruktion durch meine Zeichen, nicht um Mitteilung von einfacheren Konstruktionen!) füge ich jetzt den Text der Konstruktionen bei, um dem Leser zugleich ein Bild von meiner ganzen Art und Weise der Darstellung zu geben.

Die drei von Herrn Güntsche angeführten (mir längst bekannten und geläufigen) Konstruktionen „der beiden Tangenten an einen bestimmten vorgezeichneten Kreis C, die durch einen bestimmten ausserhalb des Kreises gelegenen Punkt A gehen", stelle ich in folgender Weise dar, indem ich ihre Strukturformeln der Reihe nach durch St_1, St_2, St_3, ihre Konstitutionsformeln durch K_1, K_2, K_3, ihre [Lemoineschen] Operationsformeln durch Op_1, Op_2, Op_3, ihre Positionszahlen durch P_1, P_2, P_3, ihre Direktionszahlen durch D_1, D_2, D_3 usw. bezeichne.

1. Konstruktion. Man verbinde A mit C durch eine Gerade (l_2), halbiere die Strecke AC ($2o_1 + l_2$), nenne den Halbierungspunkt M und beschreibe um ihn durch C einen Kreis (o_2). Letzterer trifft den vorgezeichneten Kreis in zwei Punkten; diese nenne man B_1 und B_2 und verbinde sie mit A durch Gerade ($2l_2$). — Hiernach ist

$St_1 = 4l_2 + 2o_1 + o_2 = 4(a_2 + L) + 2(p + O) + (p + vp + O)$.

$K_1 = 4a_2 + 3p + vp + 4L + 3O$.

[$Op_1 = 8R_1 + 4C_1 + 4R_2 + 3C_3$ (oder in Lemoine's Ordnung:) $= 8R_1 + 4R_2 + 4C_1 + 3C_3$].

$P_1 = 4 + 3 + 1 = 8, D_1 = 8 + 4 = 12, M_1 = 12 + 3 = 15$

$A_1 = 4.8 + 3.3 + 6 + 4.10 + 3.1$ (= *) $4.18 + 2.4 + 10) = 90$.

[$E_1 = 8 + 4 = 12$ (**) $4.2 + 3 + 1), S_1 = 15 + 4 = 19$].

2. Konstruktion. Man ziehe durch C eine Gerade (l_1); ihre Schnittpunkte mit dem vorgezeichneten Kreise nenne man D_1 und D_2. Hierauf beschreibe man mit D_1D_2 als Halbmesser um C als Zentrum einen Kreis (o_3), sodann um A durch C einen solchen (o_2). Diese beiden Kreise treffen einander in zwei Punkten, E_1 und E_2. Nunmehr ziehe man die Strecken CE_1 und CE_2 ($2l_2$), nenne deren Schnittpunkte mit dem vorgezeichneten Kreise B_1 und B_2 und verbinde endlich B_1 und B_2 mit A ($2l_2$). — Hiernach ist

$St_2 = l_1 + 4l_2 + o_2 + o_3 = (a_1 + L) + 4(a_2 + L) + (p + vp + O) + (p + vp + p + O)$.

$K_2 = a_1 + 4a_2 + 3p + 2vp + 5L + 2O$.

[$Op_2 = 9R_1 + 5C_1 + 5R_2 + 2C_3 = 9R_1 + 5R_2 + 5C_1 + 2C_3$].

$P_2 = 1 + 4 + 3 + 2 = 10, D_2 = 10 + 5 = 15, M_2 = 15 + 2 = 17$.

$A_2 = 1.7 + 4.8 + 3.3 + 2.6 + 5.10 + 2.1 = 112$.

[$E_2 = 10 + 4 = 14, S_2 = 17 + 4 = 21$].

3. Konstruktion. Man ziehe durch C eine Gerade (l_1); die trifft den vorgezeichneten Kreis in zwei Punkten, D_1 und D_2. Hierauf beschreibe man mit AC als Halbmesser um D_1 als Mittelpunkt einen Kreis (o_3) und sodann einen solchen (o_1) mit demselben Halbmesser um D_2 als Mittelpunkt. Die beiden letztgenannten Kreise treffen einander. Einen ihrer Schnittpunkte nenne man E und schlage mit CE um A einen Kreis (o_3). Dessen Schnittpunkte mit dem vorgezeichneten Kreise nenne man B_1 und B_2 und verbinde sie mit A ($2l_2$). — Hiernach ist

$St_3 = l_1 + 2l_2 + o_1 + 2o_3 = (a_1 + L) + 2(a_2 + L) + (p + O) + 2(p + vp + p + O)$.

$K_3 = a_1 + 2a_2 + 5p + 2vp + 3L + 3O$.

[$Op_3 = 5R_1 + 7C_1 + 3R_2 + 3C_3 = 5R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 3C_3$].

$P_3 = 1 + 2 + 5 + 2 = 10, D_3 = 10 + 3 = 13, M_3 = 13 + 3 = 16$.

$A_3 = 1.7 + 2.8 + 5.3 + 2.6 + 3.10 + 3.1 = 83$.

[$E_3 = 10 + 2 = 12, S_3 = 16 + 2 = 18$]

Da $K_2 = K_1 + a_1 + vp + L - O = K_3 + 2a_2 - 2p + 2L - O$ ist, so dürfte die Behauptung wohl kaum auf Widerspruch stossen, dass von den drei angeführten Konstruktionen die zweite am kompliziertesten (wenigsten einfach) und am schwierigsten genau auszuführen ist. Ob aber die erste oder die dritte die einfachste beziehungsweise am leichtesten genau auszuführende ist, darüber lässt sich streiten. Während nämlich der Lemoinesche sogenannte Einfachheitskoeffizient der dritten Konstruktion kleiner ist als der der ersten, ist die Manipulationszahl für diese (die 1.) kleiner als für jene. Nach Herrn Lemoine's Anschauung ist die dritte die einfachste, nach meiner die erste. Da die sogenannten Genauigkeitskoeffizienten für beide Konstruktionen gleich sind, so werden beide von Herrn Lemoine für gleichgenau erklärt. Für die erste ist aber die Zahl der difficilen, d. h leicht ungenau ausfallenden Manipulationen (der Direktionen) kleiner als für die dritte; daher ist die Zahl der Stellen, an denen leicht ein Fehlgriff gemacht wird, bei der ersten Konstruktion kleiner als bei der dritten. Auf der anderen Seite jedoch ist der Aberrationsgrad, d. h. die Grösse der Gefahr ungenau zu zeichnen und die Grösse der wahrscheinlichen Abweichung selbst für die dritte kleiner als für die erste, weshalb ich die dritte als die (genauere d. i.) leichter genau auszuführende ansehe.

Ist nur eine Tangente zu zeichnen, so bekommen die Operationszahlen $P'_1, D'_1, M'_1 \ldots P'_2, D'_2 \ldots$ usw. der drei den obigen entsprechenden Konstruktionen (da bei der ersten und dritten je eine, bei der zweiten zwei Gerade l_2 wegfallen) folgende Werte:

$P'_1 = 7, D'_1 = 10, M'_1 = 13, A'_1 = 72$; [$E'_1 = 10, S'_1 = 16$].

$P'_2 = 8, D'_2 = 11, M'_2 = 13, A'_2 = 76$; [$E'_2 = 10, S'_1 = 15$].

$P'_3 = 9, D'_3 = 11, M'_3 = 14, A'_3 = 65$; [$E'_3 = 10, S'_3 = 15$].

Auch hier wieder kann man verschiedener Meinung darüber sein, welcher Konstruktion der Vorzug zu geben sei.

Deshalb bin ich überhaupt dafür, dass nur in ganz zweifellosen Fällen (vgl. o.) eine geometrische Konstruktion für „die einfachste" ohne jeden weiteren Zusatz erklärt werde. Im allgemeinen soll man sagen: „Konstruktion mit dem kleinsten sogenannten Einfachheits- beziehungsweise Genauigkeitskoeffizienten", „Konstruktion mit der kleinsten Positions- beziehungsweise Direktions- oder Manipulationszahl", „Konstruktion vom kleinsten sogenannten Aberrationsgrad" usw. Solche Ausdrücke sind durchaus korrekt, nicht irreführend.

Der Ausdruck „geometrographische Konstrukion" im Sinne von „einfachste unter den bis jetzt veröffentlichten Konstruktionen" scheint mir ganz und gar unpassend. Das Wort „Geometrographie" halte ich nur für zulässig in der Bedeutung: „Symbolische Darstellung der bei einer geometrischen Konstruktion vorzunehmenden Operationen" (durch Operations- oder Konstitutions- oder Strukturformeln). Diese Bedeutung hat der Urheber des Wortes ihm offenbar auch ursprünglich gegeben.

Was nun weiter das Lob anbetrifft, das Herr Güntsche der in den geometrischen Lehr- und Uebungsbüchern beliebten Wortkargkeit bei der sprachlichen Darstellung, der „Oekonomie im Aussprechen der Konstruktionen", wie er sie nennt, spendet, so bin ich zwar auch sehr für möglichste Kürze des Textes; ich verlange aber dabei, dass der Ausdruck korrekt, durchaus klar und eindeutig sei. Kürze auf Kosten der Klarheit und Schärfe halte ich für durchaus verwerflich. Auf keinen Fall kann „Oekonomie im Aussprechen" als Ersatz für „Oekonomie in der Ausführung" der Konstruktionen angesehen werden. Beide sind zu fordern. Beide sind von Anfang an (bereits in Quarta!) soweit zu üben, als sie von den Schülern leicht verstanden werden können, und von den Schülern zu fordern, soweit diese imstande sind, auf Grund der ihnen bekannten Lehrsätze durch eigenes Nachdenken der Forderung zu genügen. Das

*) Nach der Strukturformel.

**) Nach der Konstitutionsformel.

sollte als selbstverständlich angesehen werden und hoffentlich ist die Zeit auch nicht mehr fern, wo es als selbstverständlich angesehen wird.

Herr Güntsche führt in seinem o. a. Artikel als Grund für eine von ihm vorgeschlagene Abänderung der Bedeutung meiner Klassensymbole und Verminderung ihrer Zahl an, es sei nicht gebräuchlich, die schreibende Zirkelspitze vor der andern einzustellen. Dass das „Nichtgebräuchlichsein" an sich kein stichhaltiger Grund für die „Nichtzulassung" ist, brauche ich wohl nicht hervorzuheben. Was für ein stichhaltiger Grund kann denn aber gegen die Zulassung des gedachten Verfahrens angeführt werden? Höchstens könnte jemand sagen, es sei etwas schwieriger, die schreibende Spitze auf einen bestimmten Punkt einzustellen als die nichtschreibende, und ich will zugeben, dass zum genauen Einsetzen der schreibenden Spitze eine gute, nicht zu stumpfe Reissfeder am Zirkel und eine sichere Hand erforderlich sind. Gute Instrumente werden aber vorausgesetzt und durch Uebung wird eine sichere Hand erworben.

Uebrigens meine ich, man brauche ja eventuell das Einsetzen der schreibenden Zirkelspitze vor der andern nicht gerade den Schülern zu empfehlen, könne (und müsse) es aber zulassen, wofern es gut ausgeführt wird.

Sollte indessen die Mehrzahl der Mathematiker für gänzliches Unterlassen dieser Manipulation in den Schülerarbeiten [nur auf diese kann sich ein Verbot erstrecken!] sein, so habe ich auch nichts dagegen. (Ich lasse überhaupt [wie schon in meinem früheren Artikel durch ein Beispiel angedeutet] jeder Konstruktion, in der die schreibende Spitze als erste verwandt wird, die entsprechende gegenüber stellen, bei der diese Manipulation vermieden ist.) Die Bedeutung meiner Symbole braucht darum nicht geändert zu werden, darf auch nicht geändert werden. Es wird nur (in den Schülerarbeiten!) von dem Operationszeichen nl und von den Klassenzeichen o'_1, o'_3, o'_{3-1}, $o'_{1,1}$ und $o'_{,1}$ kein Gebrauch gemacht und ein neues Klassensymbol eingeführt.

Als solches empfiehlt sich o*), das ich folgendermassen definiere:

16) $o; = l + vp + O$ $[= O^{lvp}]$: Zunächst ist die nichtschreibende Zirkelspitze auf einen beliebigen Punkt einer früher gezeichneten Linie einzustellen, dann in ihrer Lage festzuhalten, bis die andere Spitze in einen bestimmten vorgezeichneten Punkt gebracht ist, und endlich um den von der ersten Spitze berührten Punkt ein Kreis zu beschreiben.

Es kann in diesem Falle auch meinetwegen l^2 statt vl und p^2 statt vp geschrieben werden; doch möchte ich das nicht empfehlen.

Muss die in Rede stehende Manipulation vermieden werden, so sind zu ersetzen: 1) die Kreise der Klassen o'_3, o'_{3-1}, $o'_{1,1}$, $o'_{,1}$ stets durch zwei Kreise, nämlich beziehungsweise durch $o_3 + o_1$, $o_{3-1} + o_1$, $o_{1,1} + o_1$, $o_{,1} + o_1$, 2) o'_1 stets entweder durch o; oder durch $o_l + o_1$, 3) o'_1 in einzelnen Fällen durch $o_1 + o'$ (nämlich dann, wenn [mit der vorhandenen Zirkelöffnung] durch einen bestimmten Punkt ein Kreis zu schlagen ist), 4) o_1, in einzelnen Fällen durch o; (dann nämlich, wenn um einen beliebigen Punkt eines früher gezeichneten Kreises durch dessen Mittelpunkt ein Kreis zu schlagen ist).

*) Gelesen: „o Strichpunkt" [die 1. Einst. auf eine Linie (Strich), die 2. auf einen Punkt].

Sollte jemand, was ich nicht glaube, der zusammengesetzten Operation $l + vp$ den Vorzug vor der zusammengesetzten Operation $p + vl$ geben, (d. h. behufs Abmessung des Halbmessers eines früher gezeichneten Kreises die erste (die nichtschreibende) Zirkelspitze auf die Kreislinie und dann die zweite in den Kreismittelpunkt einsetzen wollen, statt umgekehrt, wie es gewöhnlich geschieht und leichter sein dürfte, die erste Zirkelspitze in den Kreismittelpunkt und sodann die zweite auf die Kreislinie einzustellen,) so mag er das tun und überall die letztere durch erstere ersetzen; die Positions- und die anderen Zahlen und der Aberrationsgrad bleiben dieselben. Dann wären noch zwei neue Klassenzeichen nötig, etwa:

17) $o;_1 = l + vp + p + O$ $[= O^{lvp + p}]$ zum Ersatz für 11a) $o_{1,1} = p + vl + p + O$, und

18) $o'; = l + vp + l + O$ $[= O^{lvp + l}]$ zum Ersatz für 13a) $o'_1, = p + vl + l + O$.

Wird anderseits der Gebrauch des Winkelmasses (Richtscheits) bei den geometrischen Zeichnungen gestattet und das freihändige Verbinden mehrerer nahe beisammen liegender Punkte durch eine Kurve verlangt (wie dies bei stereometrischen Zeichnungen geschieht), so sind den obigen Zeichen noch ein paar Symbole beizufügen. Die folgenden dürften ausreichen: a_3 (beziehungsweise $\bar{a}$, $\bar{a}^1$, $\bar{a}_1$) und C als (10. und 11.) Zeichen für Elementaroperationen, l_3 und c als Klassensymbole.

a_3 bedeutet: Der eine Schenkel des Winkelmasses ist an zwei bestimmte Punkte (beziehungsweise an eine bestimmte vorgezeichnete Gerade oder den Rand des Reissbretts) so anzulegen, dass zugleich der andere Schenkel einen (dritten) bestimmten Punkt berührt

[Die Symbole $\bar{a}$, $\bar{a}^1$, $\bar{a}_1$ mögen folgende besondere Bedeutungen haben: Der eine Schenkel des Winkelmasses (Richtscheits) ist an eine bereits gezeichnete Gerade oder an den Rand des Reissbretts 1) an beliebiger Stelle anzulegen ($\bar{a}$), bezw. 2) so anzulegen, dass ein bestimmter Punkt jener Geraden von dem anderen Schenkel berührt wird ($\bar{a}^1$), bezw. 3) so anzulegen, dass ein bestimmter ausserhalb der Geraden gelegener Punkt von dem zweiten Schenkel berührt wird ($\bar{a}_1$). Da indessen $\bar{a}$ im Wesentlichen mit a_2 übereinstimmt, $\bar{a}^1$ und $\bar{a}_1$ ebenfalls unwichtige Unterabteilungen von a_3 bilden, so sind die Symbole $\bar{a}$, $\bar{a}^1$, $\bar{a}_2$ entbehrlich.)

C bedeutet: Mehrere nahe beisammen liegende Punkte sind aus freier Hand durch eine gleichmässige Kurve zu verbinden.

Die Gleichungen 19) $l_3 = a_3 + L$ und 20) $c = C$ genügen wohl nach dem Gesagten zur Erklärung der Bedeutung von l_3 und von c.

Endlich möchte ich noch erwähnen, dass ich zuweilen von den Schülern fordere, vor oder in das Symbol für eine Linie einen Punkt zu setzen, wenn theoretisch nur die Zeichnung eines Schnittpunktes mit einer früher gezeichneten Linie (oder auch beider) erforderlich ist. $\cdot L$ oder $\cdot l_2$ bedeutet demnach: Von der betreffenden Geraden ist nur ein Punkt oder zwei Punkte (d. h. ein sehr kleines Stück) zu zeichnen. Die Struktur- bezw. Konstitutionsformel der oben angeführten ersten Konstruktion sind dann z. B. so zu schreiben:

$St_1 = l_2 + o_1 + \cdot o_1 + \cdot l_2 + \cdot o_2 + 2 l_2 = 3 l_2 + o_1 + \cdot (l_2 + o_1 + o_2)$

$K_1 = 4 a_2 + 3 p + vp + 3 L + O + \cdot (L + 2 O)$.

Ich bezwecke damit hauptsächlich, die Schüler in

wirksamer Weise von dem gedankenlosen Zeichnen eines übermässig grossen Stücks der Linien abzuhalten. Doch halte ich dabei streng an meiner altbewährten, dem Verständnis der Figuren dienenden Forderung (S. m. Artikel in No. 2 d. vor. Jahrg. der Unt.-Bl.) fest, von einer solchen Linie immerhin ein so grosses Stück zu ziehen, dass dieses als ein Teil eines Kreises um einen bestimmten Punkt oder als ein Stück der Verbindungsgeraden zweier bestimmter Punkte deutlich zu erkennen ist.

Zum Schlusse sei mir gestattet, die wichtigsten Unterschiede zwischen meinen Konstitutions- und Strukturformeln einerseits und den Lemoineschen Operationsformeln anderseits hier zusammenzustellen:

1) Für wesentlich verschiedene Operationen gebraucht Herr Lemoine das nämliche Symbol, in meinen beiden Zeichensystemen sind alle wesentlichen Unterschiede berücksichtigt. Daher sind die Lemoineschen Formeln mehrdeutig, die meinigen eindeutig.

2) Die Lemoineschen Operationsformeln sagen weniger aus als meine Konstitutions- und Strukturformeln; aus letzteren lassen sich erstere ableiten, nicht umgekehrt.

3) Die Lemoineschen Zeichen können leicht verwechselt werden, weil ihre Bedeutung ebensowenig für Franzosen wie für Nichtfranzosen (Nichtkenner des Französischen) leicht behältlich ist; die Bedeutung meiner Symbole ist für Nichtdeutsche wie für Deutsche leicht behältlich.

4) Den Bezeichnungen Simplicité und Exactitude liegen willkürliche Annahmen zu Grunde; meine Positions-, Direktions- und Manipulationszahlen stützen sich nicht auf Hypothesen.

Bericht über die zwölfte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Zu Breslau in der Pfingstwoche 1903.

Im Auftrage des Vorstandes.

Der in Düsseldorf erteilten Ermächtigung entsprechend, knüpfte der Vereinsvorstand mit den in Breslau ansässigen Vereinsmitgliedern Verhandlungen an, die durch das bereitwillige Entgegenkommen dieser Herren es ermöglichten, die zwölfte Hauptversammlung des Vereins in der gastlichen Hauptstadt Schlesiens abzuhalten. Ein besonders glückliches Omen für die Versammlung war ein bereits vorher erfolgender sehr erheblicher Zuwachs an neuen Vereinsmitgliedern, und im Zusammenhange damit die Bildung einer Ortsgruppe Breslau, deren Mitglieder sich der Vorbereitungen für die Versammlung in regster Weise annahmen. In dieser Ortsgruppe waren auch die dem Lehrkörper der Universität angehörenden Vertreter der exakten Wissenschaften in höchst erfreulicher Zahl vertreten.

Den Vorsitz des Ortsausschusses übernahm endgiltig Herr Oberlehrer Dr. Maschke vom Wilhelmsgymnasium, die Räume für die Versammlung stellte in dankenswerter Weise der Direktor des Gymnasiums und Realgymnasiums zum Heiligen Geist, Herr Dr. Richter zur Verfügung. Die Tagesordnung, die in der Nummer 2 veröffentlicht war, erfuhr nachträglich noch einige Erweiterungen durch neu hinzugekommene Vorträge, sowie einige anderweite Veränderungen, durch welche verschiedenen, dem Vorstande kundgegebenen Wünschen entsprochen wurde. Es waren dies insbesondere die Verlegung der Diskussion über die Einzelgestaltung des Unterrichts in der Biologie, die ursprünglich in einer Abteilungssitzung erfolgen sollte, auf eine allgemeine Sitzung, und die Ansetzung des anfänglich für die zweite allgemeine Sitzung in Aussicht genommenen Vortrags über den exaktwissenschaftlichen Unterricht in der Schulreformbewegung für die erste Sitzung.

So war alles wohl vorbereitet, als am Abend des Pfingstmontages eine stattliche Zahl von einheimischen und fremden Vereinsmitgliedern in Böttchers Festsälen zur ersten Begrüssung zusammentraf. Leider waren einige, sonst an den Vereinsversammlungen regelmässig und tätig teilnehmende Herren am Erscheinen verhindert. Vom Vorstande fehlte Prof. Hansen (Giessen), der die Pfingstzeit zur Erholung von einer kurz zuvor überstandenen Krankheit benutzte; Direktor Schotten (Halle a. S.) musste schon am Ende des ersten Verhandlungstages wieder abreisen, um an der Direktorenversammlung der Provinz Sachsen teilzunehmen; Herr Wetekamp, der an den Vorbereitungen für die Versammlung besonders lebhaften Anteil genommen hatte, hatte inzwischen infolge seiner Berufung zum Direktor des neugegründeten Realgymnasiums in Steglitz bei Berlin Breslau verlassen und war durch umfangreiche Amtsgeschäfte am Erscheinen verhindert.

Beide Herren wünschten der Versammlung in warm gehaltenen Grussdepeschen besten Erfolg, ausserdem traf noch ein brieflicher Gruss von den in Serbien ansässigen Vereinsmitgliedern, Direktor Prof. Kosta Iwkowits, Prof. Demeter Martschits, Prof. Milan Banits, und Prof. Alexander Krstits in Nisch ein. Die treue Anhänglichkeit dieser in weiter Ferne wohnenden, durch das gemeinsame wissenschaftliche Interesse mit ihren deutschen Fachgenossen verbundenen Herren fand auch diesmal wieder ein lebhaftes Echo in dem Herzen der Versammlungsteilnehmer.

Die zur Teilnahme an der Versammlung eingeladenen Provinzial-Schul-Kollegien zu Breslau und Posen bedauerten, durch anderweite starke Inanspruchnahme an der Entsendung von Vertretern zur Versammlung verhindert zu sein, der sie übrigens in warmen Worten besten Erfolg wünschten. Dagegen war aus dem Reichslande das Mitglied des elsass-lothringischen Oberschulrats, Herr Geh. Regierungsrat Dr. Stolte aus Strassburg (Els.) erschienen, um besonders den Verhandlungen über die weitere Gestaltung des biologischen Unterrichts beizuwohnen.

Dem Begrüssungsabend folgte am 2. Juni, vormittags 9 Uhr, in der Aula des Gymnasiums und Realgymnasiums zum Heiligen Geist die erste allgemeine Sitzung, in der der Verein durch den Vorsitzenden des Ortsausschusses, Herrn Dr. Maschke, den Rector Magnificus der Universität Herrn Geh. Justizrat Prof. Dr. Leonhard, den Stadtschulrat Herrn Dr. Pfundtner, und den Direktor der die Versammlung in ihren Räumen aufnehmenden Anstalt, Herrn Dr. Richter, begrüsst wurde. Die guten Wünsche für einen erspriesslichen Verlauf der Versammlung, die hier in schönen und gehaltvollen Worten dem Verein ausgedrückt wurden, erwiderte mit lebhaftem Danke der zeitige Vorsitzende des Vereins, Prof. Pietzker (Nordhausen). Er gedachte dann der dem Vereine seit

der letzten Versammlung durch den Tod entrissenen Mitglieder Arendt (Leipzig), Budde (Duisburg), Caspar (Oberlahnstein), Dobriner (Frankfurt a. M.), Heller (Darmstadt), Loos (Wörrstadt), Maier (Schaufling), Most (Koblenz), Särchinger (Plauen), Seeger (Güstrow), zu deren Ehren die Versammelten sich von ihren Plätzen erhoben, und gab der Zuversicht Ausdruck, dass auch die neue Versammlung, wie ihre Vorgängerinnen, der Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, die der Verein auf seine Fahne geschrieben habe, gute Dienste leisten werde.

Dann übernahm der Vorsitzende des Ortsausschusses, Herr Dr. Maschke, den Vorsitz für die erste wissenschaftliche Sitzung, die durch den Vortrag von Pietzker (Nordhausen) über das Thema: „Der exaktwissenschaftliche Unterricht in der Schulreformbewegung" und eine sehr lebhafte daran anknüpfende Diskussion völlig ausgefüllt wurde. Vortrag und Diskussion werden Gegenstand eines Sonderberichts sein.

Der allgemeinen Sitzung folgten zwei parallele Abteilungssitzungen; eine der mathematischen Abteilung unter Vorsitz von Prof. Dr. Hager (Breslau) und eine der vereinigten Abteilungen für Chemie und Physik, die Direktor Prof. Dr. Schmidt (Breslau) leitete. In der ersteren sprachen H. Vogt (Breslau) über endlichgleiche Prismen und Pyramiden und F. Edler (Halle a. S.) über anschauliche Einführung in die astronomische Geographie und sphärische Trigonometrie; in der zweiten H. Hahn-Machenheimer (Berlin) über physikalische Schülerübungen und W. Krebs (Münster i. O.-Els.) über die Regelation im Sinne Faradays und als Gegenstand des Schulunterrichts. An alle diese Vorträge knüpften sich kurze Diskussionen.

Die Nachmittagsstunden wurden auf Besichtigungen einiger Universitäts-Institute (des physikalischen, ferner des chemischen und mineralogisch-geologischen Instituts und des botanischen Gartens) verwendet, am Abend fand sich dann eine stattliche Zahl zu dem Festmahl in Hansens Weinstuben zusammen, wo eine Reihe von Trinksprüchen, gemeinsam gesungene Festlieder und Gesangsvorträge eines besonders stimmbegabten Fachgenossen, Herrn Dr. Staritz vom Magdalenengymnasium, dem an dieser Stelle noch ein besonderer Dank ausgesprochen werden möge, die Anwesenden lange in lebhaft angeregter Stimmung zusammenhielten.

Die zweite allgemeine Sitzung am Mittwoch, 3. Juni, vormittags 9 Uhr, der Dr. Bastian Schmid (Bautzen) vorsass, brachte zuerst den Vortrag von K. Geissler (Charlottenburg): Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterricht, dann einen Vortrag von W. Krebs (Münster i. O.-Els.): Der naturgeschichtliche Unterricht an den Realanstalten Elsass-Lothringens. An den ersteren Vortrag schloss sich eine kürzere, an den letzteren eine etwas längere Diskussion an, die insbesondere die Frage, inwieweit Schülerausflüge für den naturgeschichtlichen Unterricht nutzbar gemacht werden können, behandelte.

Dann fand im physikalischen Lehrzimmer des Wilhelmsgymnasiums unter Vorsitz von Prof. Zopf (Breslau) eine Fachsitzung statt, in der E. Grimsehl (Hamburg) eine Reihe neuer, von ihm angegebener Lehrmittel für den mechanischen und physikalischen Unterricht vorführte. An diesen Vortrag knüpfte sich wieder eine kurze Diskussion.

Den Nachmittag füllte eine Oderfahrt auf dem Dampfer „Oberbürgermeister Dr. Bender" aus, zu der sich eine sehr grosse Zahl von Teilnehmern, auch eine Reihe von Damen zusammenfand. Diese äusserst interessante Fahrt führte von der Königsbrücke oderabwärts nach den neuen Hafenanlagen, die eingehend besichtigt wurden und dann weiter über Oswitz bis zu der Werft von Cäsar Wollheim, wo die Fahrtteilnehmer nach einem eingehenden, unter Führung des Direktors und der leitenden Ingenieure erfolgten Rundgange durch die verschiedenen Werkstätten in liebenswürdigster Weise bewirtet wurden. Den Schluss des Abends bildete eine gemütliche Zusammenkunft im Pschorrbräu.

Der dritte Versammlungstag begann um 9 Uhr mit einer vom Direktor Hamdorff (Guben) geleiteten allgemeinen Sitzung, in der die Herren Landsberg (Allenstein), Fricke (Bremen) und B. Schmid (Zwickau) über die Durchführung der seinerzeit in Düsseldorf gefassten den biologischen Unterricht betreffenden Beschlüsse an den humanistischen Gymnasien, den neunklassigen Realanstalten und den Realschulen referierten, an diese Referate schloss sich eine rege Diskussion. Der allgemeinen Sitzung folgten zwei parallele Fachsitzungen der mathematischen und der chemischen Abteilung. In der letzteren sprach Privatdozent Dr. Hertz (Breslau) über die Bedeutung der Katalyse bei chemischen Vorgängen, die erstere brachte zwei Vorträge, von Prof. Dr. Frantz (Breslau) über das Dreikörper-Problem und von Dr. Ebner (Breslau) über die Schubkurbel, ein Kapitel aus der angewandten Mathematik.

Um 12 Uhr begann dann unter Vorsitz von Pietzker (Nordhausen) die Geschäftssitzung, in dieser erstattete zunächst der Kassenführer Prof. Presler (Hannover) den Kassenbericht, aus dem hier Folgendes mitgeteilt sein möge:

Die Mitgliederzahl, die am Ende des Jahres 1902 sich auf 1054 stellte, hat sich inzwischen bis zum Beginn der Versammlung auf 1095 erhöht, im Anschluss daran mögen die Mitgliederzahlen der früheren Jahre aufgeführt werden:

1.	Vereinsjahr	146	7.	Vereinsjahr	617
2.	„	182	8.	„	708
3.	„	216	9.	„	775
4.	„	285	10.	„	929
5.	„	348	11.	„	988
6.	„	527	12.	„	1054

Die Einnahmen des Jahres 1902 setzten sich aus folgenden Posten zusammen:

1. Ueberschuss vom Vorjahre .	314,52	M.
2. Zinsen	8,15	„
3. Mitgliederbeiträge 1054 · 3 =	3162,00	„
Summa .	3484,67	M.

Die Ausgaben stellten sich auf:

1. Zahlung an den Verleger des Vereinsorgans 1054 · 1,75 =	1844,50	M.
2. Kosten der Versammlung in Düsseldorf	676,40	„
3. Druckkosten	295,75	„
4. Porti und Schreibhilfe . .	133,08	„
5. Remuneration für den Kassenführer	100,00	„
Summa .	3049,73	M.

Es bleibt demnach ein für das neue Vereinsjahr 1903 vorzutragender Bestand von 3484,67 – 3049,73 = 434,94 M., zu dem noch der Betrag eines für die Dauermitgliedszahlungen angelegten Sparkassenbuchs mit 127,13 M. tritt. (Von der Befugnis, durch eine einmalige Zahlung von 45 M. die dauernde Mitgliedschaft zu erwerben,

haben bis jetzt drei Herren Gebrauch gemacht, diese Zahlungen sind auf das erwähnte Sparkassenbuch eingezahlt, von dem dann für jedes der drei Mitglieder alljährlich 3 M. zu den laufenden Vereinseinnahmen abgeführt werden.)

Demnach bezifferte sich das gesamte Vereinsvermögen am 1. Januar 1903 auf 434,94 + 127,13 = 562,07 M.

Nach diesem Bericht machten die beiden von der Versammlung zu Kassenrevisoren bestellten Herren Dr. Türk und Dr. Ebner die Mitteilung, dass bei der von ihnen vorgenommenen Prüfung der Kasse alles in guter Ordnung befunden worden sei, worauf die Versammlung die Entlastung des Kassenführers aussprach.

Die Neuwahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle der satzungsgemäss ausscheidenden Herren Hansen, Pietzker und B. Schmid führte zur Wiederwahl mittels Zurufs, gegen die ein Widerspruch nicht laut wurde. Hinsichtlich der Bestimmung des Ortes für die nächstjährige Versammlung lag eine Einladung des (inzwischen bereits abgereisten) Direktors Schotten nach Halle a. S. vor. Der Vorsitzende bemerkte hierzu, dass die erfreuliche Ausbreitung, die der Verein inzwischen in Bayern gefunden hat, die Hoffnung begünstigt habe, die nächste Versammlung in einer bayerischen Stadt abhalten zu können, doch sei es nach den Mitteilungen der bayerischen Vereinsmitglieder selbst als richtig erschienen, von diesem Plane für jetzt Abstand zu nehmen und zunächst die weitere Entwickelung der Dinge in Bayern abzuwarten.

Gegen die Wahl von Halle wurde eingewendet, dass daselbst im Herbste die Philologenversammlung stattfinde, der vermutlich eine Reihe von Vereinsmitgliedern beiwohnen werde. Doch schloss sich die Versammlung in ihrer Mehrheit der Meinung an, dass dieser Umstand als ein wesentliches Hindernis für die Annahme der vorliegenden Einladung nach Halle nicht gelten könne; so wurde denn förmlich beschlossen, die nächste Pfingstversammlung daselbst abzuhalten.

Für Einrichtung einer Vertretung des Vereins auf der bevorstehenden Kasseler Naturforscher-Versammlung wurde geltend gemacht, dass dort auf Anregung von Prof. Kraepelin (Hamburg) voraussichtlich eine Beschlussfassung des Plenums der Versammlung über die bereits auf der Hamburger Versammlung von den vereinigten naturwissenschaftlichen Sektionen erhobene Forderung auf Wiedereinführung des biologischen Unterrichts in die oberen Klassen der höheren Schulen herbeigeführt werden würde. Es überwog indessen die Meinung, dass nach der unzweideutigen Stellungnahme des Vereins zu dieser Frage, wie sie in Düsseldorf erfolgt war, eine besondere Kundgebung nicht weiter nötig sei, sodass von der — nicht unerhebliche Kosten verursachenden — Entsendung eines Vereinsvertreters Abstand genommen wurde. Der Vorstand wurde beauftragt, für Berichterstattung über die den exaktwissenschaftlichen Unterricht betreffenden Verhandlungen sowohl der Naturforscher-Versammlung als auch der bald nachher in Halle tagenden Versammlung der Philologen und Schulmänner nach Möglichkeit Sorge zu tragen.

Ein weiterer Verhandlungsgegenstand war die Neuregelung der „dauernden geschäftlichen Vereinsausgaben“, worunter die Remuneration für den Vereins-Kassenführer und die Zahlung an den Verleger des Vereins-Organs für kostenfreie Abgabe desselben an die Vereinsmitglieder zu verstehen waren. Der Vorsitzende stellte fest, dass die an der Entscheidung interessierten beiden Herren nicht anwesend seien, indem er hinzufügte, dass er selbst keinerlei persönliches Interesse an der vorliegenden Beschlussfassung habe, wohl aber mehr als sonst jemand in der Lage sei, die Angemessenheit der der Versammlung zu unterbreitenden Vorstandsanträge zu beurteilen. Er erinnerte dann daran, dass auf der 8. Hauptversammlung zu Hannover 1899 beschlossen worden sei, dem Kassenführer eine Entschädigung von 100 M. zu gewähren, dass inzwischen die Mitgliederzahl sich von dem damaligen Stande von ungefähr 750 auf den Stand von gegen 1100 erhoben und eine entsprechende Vermehrung der Arbeit des Kassenführers zur Folge gehabt habe. Der Vorstand schlage vor, in Anlehnung an den früheren Beschluss dem Kassenführer für je 75 Mitglieder eine Remuneration von 10 M. zu gewähren, wobei eine überschiessende Zahl von Mitgliedern bis zu 37 ausser betracht gelassen, eine solche von 38 und mehr Mitgliedern für voll gerechnet werden solle.

Was die Zahlung an den Verleger angeht, so war mit diesem bei Gründung des Vereinsorgans für die kostenlose Lieferung eines Jahrgangs an jedes Mitglied in der Höhe von 6 Nummern zu 2 Bogen ein Satz von 1.75 Mk. vereinbart worden. Tatsächlich ist diese Nummerstärke seit mehreren Jahren immer überschritten worden, die Nummer ist nie unter $2^1/_2$ Bogen, in letzter Zeit meist 3 Bogen stark gewesen. Der Vorstand hält, wie der Vorsitzende mitteilt, den ursprünglich vereinbarten Satz für nicht mehr den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend, er schlägt der Versammlung demgemäss eine Erhöhung dieses Satzes auf den Betrag von 2 Mark mit der Massgabe vor, dass die volle Durchführung dieses Beschlusses für das laufende Jahr von den Kassenverhältnissen abhängig gemacht werden solle. Der Kassenführer, der die Leistungsfähigkeit der Vereinskasse zu übersehen am ersten in der Lage sei, habe sein Einverständnis zu diesem Vorschlage ausdrücklich ausgesprochen.

Die Versammlung nahm beide Vorstandsanträge ohne Debatte einstimmig an.

Zum Schlusse der Versammlung wurde — wie auch in früheren Fällen — beklagt, dass einzelne Redner die für ihre Vorträge in Aussicht genommene Zeit mehrfach nicht innegehalten und dadurch unliebsame Störungen in der Durchführung der Tagesordnung verursacht hätten, dadurch sei namentlich die Diskussion verschiedenfach zu kurz gekommen. Auch wurde bemerkt, dass in einzelnen Fällen die Verhandlungen sich zu sehr auf Gebiete verloren hätten, die ein allgemeines Interesse nicht in Anspruch nehmen könnten. Der Vorsitzende erkannte eine gewisse Berechtigung dieser Beschwerden an, glaubte indessen — unter Zustimmung aus der Versammlung selbst — die Schwierigkeiten betonen zu müssen, die die Beseitigung dieser Beschwerden mit sich bringe. Jedenfalls werde der Vereinsvorstand die erfolgten Beanstandungen zum erneuten Anlass nehmen, zu überlegen, auf welche Weise die erwähnten Uebelstände am besten zu vermeiden seien.

Immerhin dürfe man trotz einzelner Störungen der bemängelten Art mit Genugtuung einen wohlbefriedigenden, dem Vereinszweck förderlichen Verlauf der Versammlung feststellen. Der Dank dafür gebühre dem so unermüdlich tätig gewesenen Ortsausschuss, der Teilnahme der Universität, den Vortragenden und den Sprechern in den einzelnen Diskussionen, der Stadt und dem Leiter der Anstalt, die den Verein in ihren

Räumen so freundlich aufgenommen habe. Mit dem wiederholten Ausdrucke warmen Dankes an alle diese Instanzen, denen der Vorsitzende des Ortsausschusses, Herr Dr. Maschke, noch ein sehr freundliches Dankeswort für den Vorstand hinzufügte, schloss der Vorsitzende den offiziellen Teil der Versammlung.

Der Nachmittag führte einen Teil der Versammlungsteilnehmer in den Zoologischen Garten, während ein anderer Teil der sehr verbindlichen Einladung des Herrn Kommerzienrats Haase folgend, die grossartigen Einrichtungen seiner Brauerei, eines der grössten Etablissements seiner Art in Deutschland, unter sachverständiger Führung mit nachfolgender liebenswürdiger Bewirtung besichtigte; am Freitag vereinigten sich dann noch eine Reihe von Herren zu einem vom Wetter begünstigten Ausflug nach dem Zobten.

In der Hoffnung des Wiederzusammentreffens auf der 13. Hauptversammlung 1904 zu Halle trennten sich so die Teilnehmer der Breslauer Versammlung, die in der Fülle und Mannigfaltigkeit der von ihr gebotenen Anregungen sich ihren Vorgängerinnen rühmlichst anschloss.

Vereine und Versammlungen.

Naturforscher-Versammlung zu Cassel.*) Für die beiden allgemeinen Sitzungen am 21. und 25. September sind an Vorträgen in Aussicht genommen: Ladenburg (Breslau): Ueber den Einfluss der Naturwissenschaften auf die Weltanschauung; Ziehen (Utrecht): Ueber physiologische Psychologie der Gefühle und Affekte; Ramsay (London): Ueber das periodische System der Elemente; Griesbach (Mühlhausen i. E.): Ueber den Stand der Schulhygiene; v. Behring (Marburg): Ueber die Tuberkulosebekämpfung. In der Gesamtsitzung der beiden wissenschaftlichen Hauptgruppen am 23. September werden Penck (Wien) über die geologische Zeit, Schwalbe (Strassburg i. E) über die Vorgeschichte des Menschen, Alsberg (Cassel) über erbliche Entartung infolge sozialer Einflüsse sprechen.

* * *

Deutsche Rosenausstellung zu Sangerhausen. Diese Ausstellung, die am 26. Juni d. J. eröffnet werden soll, wird das Interesse der Lehrer der Botanik um so mehr erregen, als sie Gelegenheit zur Besichtigung einer grossen Sammlung von Wildrosen bietet. An die Ausstellung schliesst sich vom 3. bis 5. Juli der im Rosarium zu Sangerhausen stattfindende Kongress des Vereins deutscher Rosenfreunde.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkursus zu Giessen. Vom 31. März bis 3. April fand in Giessen der erste wissenschaftliche Fortbildungskursus statt. Seiner Eröffnung wohnte Herr Ministerialrat Dr. Eisenhut aus Darmstadt bei. Die Leitung des Kursus lag in den Händen des Herrn Direktors Dr. Rausch. Vorträge hielten:

Herr Prof. Dr. Elbs: Ueber elektrolytische Dissoziationstheorie (2 St.), über Akkumulatoren (1 St.) und über ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie (Farbstoffe) (3 St.).

Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. Naumann: Ueber Siedepunkts- und Gefrierpunktsverfahren zur Bestimmung von Molekulargewichten. Molekül und Atom, Molvolumen und einfache Ableitung der Gaskonstanten. Anwendung der Gasgleichung auf elektrolytische Dissoziation. Anwendung der Ionentheorie auf chemische Erscheinungen (3 St.) und über Anwendung der Thermochemie auf Heizung und Beleuchtung (2 St.)

Herr Prof. Dr. Drude: Ueber elektrische Schwingungen (dreimal 4stündig), über Elektronentheorie (3 St.) und über Wechselströme (3 St.).

Herr Prof. Dr. Noack: Ueber Demonstrationsmittel für den physikalischen Unterricht (2 St.).

Praktische Uebungen hielten ab: Herr Prof. Dr. Elbs viermal, Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. Naumann zweimal, Herr Prof. Dr. Drude viermal und Herr Prof. Dr. Noack ebenfalls viermal.

Die Einrichtung der naturwissenschaftlichen Fortbildungskurse für Hessen ist den Bemühungen des Herrn Prof. Dr. Noack zu verdanken. Der nächste soll 1904 in Darmstadt abgehalten werden.

Lehrmittel-Besprechungen.

Wandtafeln für den Unterricht in Anthropologie, Ethnographie und Geographie. Herausgegeben von Dr. Rudolf Martin, Professor an der Universität Zürich. Verlag: Art. Institut Orell, Füssli in Zürich.

Das unter diesem Titel herausgegebene Anschauungsmittel soll die wichtigsten menschlichen Völkertypen in polychromer, lebenswahrer Darstellung zur Ausführung bringen. Es sind zwei Ausgaben erschienen:

1. Kleine Ausgabe, aus acht Tafeln resp. Typen bestehend, für den erdkundlichen Unterricht in den Volks-Schulen.
2. Grosse Ausgabe, aus 24 Tafeln resp. Typen zusammengesetzt, für den Unterricht auf den höheren Schulen.

Alle Typen sind nach Originalaufnahmen von Fachleuten und Forschungsreisenden hergestellt worden. Jeder Tafel ist eine kurze Beschreibung des betreffenden auf der Tafel zur Anschauung gebrachten Volkes beigegeben, welche am Schlusse noch ein Verzeichnis der wichtigsten Literatur enthält. Dem Referenten liegt zur Zeit nur Tafel 5 vor, Melanesier aus Neu-Guinea, nach photographischer Aufnahme von Prof. Dr. A. C. Haddon. Format 88 × 62 cm. Wenn die übrigen Tafeln in gleich vortrefflicher Weise zur Ausführung gelangt sind, so kann das Werk nur angelegentlich allen Schulen zur Anschaffung empfohlen werden.

Petry (Nordhausen).

Bücher-Besprechungen.

K. Hensel u. G. Landsberg: Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Flächen. Leipzig bei B. G. Teubner.

Das mehr als 700 Seiten umfassende Werk sucht nicht nur einem gewissen Bedürfnis zu genügen, es dürfte vielmehr zu den epochemachenden gehören. Daher soll seine Stellung in der mathematischen Wissenschaft kurz angedeutet werden.

Bekanntlich sind die goniometrischen Funktionen $\sin \xi$, $\cos \xi$ usw. leichter und eleganter zu behandeln, als die cyklometrischen, arcsinx, arccisx usw. deren Umkehrung sie sind. Aehnlich verhält es sich mit den elliptischen Funktionen und Integralen. Mit den letzteren mühte sich Legendre fünfzig Jahre lang

*) S. Unt.-Bl. IX, 2, S. 38.

ab, während Jacobi durch den Umkehrungsgedanken sofort den Eingang in die „theoria nova functionum ellipticarum“ fand. Als Abel nachgewiesen hatte, dass auch beliebige Integrale algebraischer Funktionen ein Additionstheorem besitzen, formulierte Jacobi auf Grund eines Analogieschlusses wiederum das Umkehrungsproblem, und bald gelang dessen Lösung für hyperelliptische Integrale vom Geschlechte zwei, den Mathematikern Göpel und Rosenhain.

Cauchy und Puiseux hatten inzwischen die periodischen Wertveränderungen untersucht, die eine algebraische Funktion verbindet, wenn die Variabele einen oder mehrere „Umläufe“ macht. Aber erst Riemann gelang es, in dieser Angelegenheit volle Klarheit zu schaffen, indem er die nach ihm benannten Flächen einführte, welche die Ebenen oder die Kegel mehrfach bedecken und nur in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Die Umkreisung eines solchen führt in ein anderes „Blatt“, d. h. in eine andere Schicht. Nach n-fachem Umgange (je nach Anzahl der dort zusammenhängenden Schichten) wird fingiert, dass das erste Blatt wieder erreicht wird. Die Vieldeutigkeit wird damit in eine Eindeutigkeit des Ortes verwandelt, mit anderen Worten: Die algebraischen Funktionen verhalten sich auf der Riemann'schen Fläche ebenso, wie die rationalen auf der Ebene. Auf der Riemann'schen Fläche liegt der ganze Wertvorrat der Funktion übersichtlich angeordnet. Bei jenen Umkreisungen eines Windungspunktes also ändert sich der Wert der Funktion naturgemäss periodisch. Damit gelang auch die von Cauchy erstrebte Aufgabe, eine algebraische Funktion aus ihren Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen zu bestimmen.

Allerdings wandte Riemann dabei das Dirichlet'sche Prinzip in nicht hinreichend strenger Weise an. Erst neuerdings ist es gelungen, durch neue, allerdings auch kompliziertere Formulierung die betreffende Methode von dem Mangel an Strenge zu befreien. Ein anderer Mangel bestand bei Riemann darin, dass seine Theorie einen transscendenten Ausgangspunkt hatte und daher als etwas künstliches erschien und auch bei der Ableitung algebraischer Gesetze und Formulierungen schwerfällig wurde. So gelang es Riemann auch nicht, mit Hilfe algebraischer Methoden die drei Gattungen von Integralen, deren Existenz er mit Hilfe des Dirichlet'schen Prinzips festgestellt hatte, wirklich aufzustellen.

Aus diesen und anderen Gründen verliess Weierstrass den Riemann'schen Weg vollständig und sah grundsätzlich von jeder geometrischen Veranschaulichung ab. Er entwickelte die gegebene Funktion komplexen Arguments in einer Reihe, die einen gewissen Konvergenzbereich hatte. Ueber diesen Bereich hinaus setzte er die Funktion fort, indem er z. B. für z eine neue Variabele $z_1 = z - (a + bi)$ einführte, für die ein anderer Konvergenzbereich galt. Dieses Verfahren setzte er über die ganze Ebene fort, wobei die etwaigen Unstetigkeitspunkte gewissermassen eingeschränkt wurden. So wurde die betreffende Funktion auf vielfache Art in Reihen entwickelt. Die Gesamtheit dieser Reihen wurde als die entsprechende analytische Funktion bezeichnet. Die Idee der Fortsetzbarkeit war der Grundgedanke von Weierstrass, der im übrigen die gründlichste Strenge walten liess. Sein Weg wird als der funktionentheoretische bezeichnet. Die Verfasser halten mit ihren Urteilen über diese Methode zurück, weil die betreffenden Vorlesungen noch nicht authentisch veröffentlicht sind.

Im Gegensatz zu W. fuhren Clebsch und Gordan auf geometrischem Wege mit dem Ausbau der Riemann'schen Theorie fort, wobei sie die Lehre von den algebraischen Kurven und den Schnittpunktssätzen der letzteren zugrunde legten. Im Anschluss daran gelang es Brill und Nöther, die Lehre von den algebraischen Funktionen von allem transscendenten Beiwerk zu befreien und sie mit algebraischen Hilfsmitteln darzustellen. Diese Methode kritisieren die Verfasser in verschiedener Hinsicht.

Eine dritte Methode war die rein arithmetische, die von dem Begriffe des Körpers ausgeht. In der Arithmetik ist man imstande, durch endliche Reihen ganzer und gebrochener Zahlen (z. B. Dezimalbrüche) oder durch unendliche, aber dabei periodische Reihen von Zahlen das ganze Gebiet der rationalen Zahlen zu bilden, durch unendliche nicht periodische Reihen die (irrationalen) algebraischen Zahlen, die sich z. B. als Wurzeln aus rationalen deuten lassen; durch andere unendliche Reihen die transscendenten Zahlen, die sich nicht mit Hilfe von Wurzeln erklären lassen. Dem entspricht ein vollständiger Parallelismus in der Funktionentheorie. Es giebt zunächst rationale Funktionen, sagen wir Potenzreihen, die durch die Verknüpfungsgesetze der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division untereinander verbunden, bei endlicher Anzahl rationale Funktionen geben. Sind die Reihen dieser Funktionen unendliche, aber dabei periodische, so ergeben sich ebenfalls rationale Funktionen. Handelt es sich dagegen um Summen unendlich vieler Potenzreihen, bei denen die Periodizität ausgeschlossen ist, so entstehen algebraische oder transscendente Funktionen, was von der Zahl der Unstetigkeitsstellen abhängt. Auf die Notwendigkeit gemeinsamer Konvergenzbereiche bei den Verknüpfungsoperationen sei besonders hingewiesen.

Während es sich nun in der reinen Arithmetik um den Körper der Rationalzahlen, der algebraischen Zahlen, der transscendenten Zahlen handelt, tritt hier der Körper der rationalen Funktionen, der algebraischen Funktionen, der transscendenten Funktionen auf. Der erste umfasst die Gesamtheit aller rationalen Funktionen der komplexen Variabeln z, diese bilden einen abgeschlossenen Bereich, in dem Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mehrerer verschiedener Elemente stets eine Funktion desselben Bereiches gibt. Diese Funktionengruppe wird in den beiden ersten Vorlesungen behandelt. Alle Funktionen dieses Körpers sind eindeutige Funktionen, besitzen also auf der Riemann'schen Fläche nur polare Unstetigkeiten.

Der zweite Körper umfasst in entsprechender Weise die algebraischen Funktionen. Eine solche wird z. B. nicht explizite gegeben, sondern durch eine Gleichung n^{tm}-Grades von u, welches Funktion von z ist, definiert z. B. durch $F(u, z) = A_n(z)\, u^n + A_{n-1}(z)\, u^{n-1} + \ldots + A_0(z) = 0$, wobei die Koeffizienten A selbst rationale Funktionen von z sind. Betrachtet man diese Funktion nur als solche von u, so lässt sie sich in ein Produkt von n linearen Faktoren zerlegen. Die Gesamtheit aller so definierten Funktionen, die, unter sich beliebig durch dieselben Operationen verknüpft, nichts Neues geben, bedeutet den Körper der algebraischen Funktionen. Die Funktionen dieses

Körpers besitzen nun in bezug auf die entsprechenden Riemann'schen Flächen dieselben Eigenschaften, wie die des rationalen in bezug auf die einfache Ebene oder Kugelfläche. — (Mit dem Körper der transscendenten Funktionen beschäftigt sich das Buch nicht.)

Jetzt folgen die algebraischen Divisoren und der Riemann-Roch'sche Satz, die algebraischen Kurven und Gebilde, die Klassen algebraischer Gebilde und algebraische Relationen zwischen Abel'schen Integralen.

Die Verfasser lehnen sich grundsätzlich an den oben skizzierten arithmetischen Gang an, wie er von Kummer, Kronecker, Dedekind und Weber zum Ausbau gelangt ist, schliessen aber die Funktionentheorie von Weierstrass und die ausgebaute Riemann'sche Theorie derart in die Betrachtung ein, dass sowohl jener abstrakte, als auch der anschauliche geometrische Weg zur Geltung kommt und ein Verschmelzungsprozess entstanden ist, der ganz dem Warnrufe Klein's vor allzustarker Arithmetisierung der Mathematik entspricht. Jede Einseitigkeit ist in dem Werke vermieden.

Das Buch sei jedem Mathematiker empfohlen, der sich über den augenblicklichen Stand der Funktionentheorie auf dem grossen Gebiete der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale informieren will.

Holzmüller (Hagen i. W.).

* * *

Periodische Blätter für Realienunterricht und Lehrmittelwesen. Herausgegeben von der Gesellschaft Lehrmittel-Zentrale in Wien, Organ des Lehrerklubs für Naturkunde in Brünn, geleitet von Rob. Neumann, Professor a. d. k. k. deutschen Lehrerbildungsanstalt in Brünn.

Diese, im Verlag von Otto Henckel in Tetschen a. E. erscheinende, jährlich 6 Nummern zu je 3 Bogen bringende und für 5 Mk. zu beziehende Zeitschrift ist zwar zunächst für österreichische Leser bestimmt, hat aber auch für reichsdeutsche Leser mannigfaches Interesse, wie sie denn auch eine Reihe wohlbekannter Fachmänner im deutschen Reiche zu ihren Mitarbeitern zählt. Sie trägt den Bedürfnissen aller Zweige des naturwissenschaftlichen Schulunterrichts Rechnung, namentlich durch die besondere Berücksichtigung von Winken für die Praxis des Unterrichts, sei es in experimenteller, sei es in methodischer Beziehung.

Auf dieses gegenwärtig im VII. Jahrgang stehende Organ des naturwissenschaftlichen Unterrichts die Aufmerksamkeit auch der deutschen Fachgenossen zu lenken, rechtfertigt sich um so mehr, als es durch sein Bestehen und durch die Art seiner Leitung wohl geeignet ist, das geistige Band, das die Deutschen im Reiche mit ihren Stammesgenossen in Oesterreich verbindet, zu stärken und zu befestigen; so wirkt es in demselben Sinne, wie die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, deren letzte Versammlung in Karlsbad diese innere Zusammengehörigkeit ja wieder so deutlich zu Tage treten liess. P.

* * *

Plank, J., Lehrbuch der politischen Arithmetik für den Gebrauch an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 172 u. II S. Preis geb. Mk. 2.75. Leipzig. Verlegt von Dr. jur. L. Huberti (Hubertis moderne kaufmänn. Bibliothek).

Unter dem — wie es scheint, von M. Cantors Büchlein übernommenen — Titel der politischen Arithmetik gibt das vorliegende Buch eine gedrängte, im allgemeinen gut verständliche Darlegung der wichtigsten dahin gehörenden Theorien, im ersten Teil die allgemeine Zinseszins- und Renten-Rechnung einschliesslich der Aufstellung von Tilgungsplänen, im zweiten Teil die Grundlagen der Lebensversicherungs-Rechnung. Den Schluss bilden neun Tabellen, von denen die vier letzten zum zweiten Teile des Buches gehören. Merkwürdigerweise haben hier die Sterblichkeitstafeln der 23 deutschen Versicherungsgesellschaften keinerlei Berücksichtigung gefunden, obwohl nicht nur deren Wert, sondern auch deren Verbreitung in Deutschland im Buche selbst hervorgehoben werden, während die Tabellen von Deparcieux und Süssmilch-Baumann trotz des ihnen gegenwärtig nur noch in theoretischer Hinsicht beiwohnenden Wertes aufgeführt sind. Bei einem in Leipzig verlegten, also doch auf einen deutschen Leserkreis rechnenden Buche ist dies einigermassen auffallend. Auch in anderer Beziehung trägt der Verfasser, der Professor an der Prager Handelsakademie ist, vorzugsweise den österreichischen Verhältnissen Rechnung, nämlich in der Münzwährung und in den technischen, den österreichischen Kurialstil zeigenden Ausdrücken, sowie in den gewählten, für den deutschen Fachmann ungewohnten Buchstabenbezeichnungen. Trotzdem ist es für einen Leser, der sich über die Hauptsachen rasch unterrichten will, ein brauchbares, auch für den Allgemeinunterricht verwendbares Buch. P.

* * *

Sellenthin, B., Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. Mit 324 Figuren im Text. XI u. 450 S. Leipzig u. Berlin, Teubner 1902. Preis geb. Mk. 8.40.

Das Buch ist für den Unterricht in den Steuermannsklassen der Deckoffizierschule, auf der Kaiserlichen Marineschule und an Bord der Seekadetten-Schulschiffe bestimmt. Diesem Zweck entsprechend nimmt es überall auf die in der Marine eingeführten Tabellen und Dienstvorschriften bezug, auch in der Bemessung des Stoffes deckt es sich nicht ganz mit dem, was für den Unterricht in den der Allgemeinbildung dienenden Schulen in Betracht kommt. Die Behandlung des Stoffes ist im allgemeinen die herkömmliche, doch ist es interessant, zu sehen, wie der Verfasser in seinem für Männer des praktischen Lebens bestimmten Buche die bei der Erweiterung der Rechenoperationen auf neue Gebiete auftretenden begrifflichen Schwierigkeiten zu überwinden sucht. Z. B. die Herleitung der Multiplikationsregel für den Fall des negativen Multiplikators durch die Erwägung, dass die fortwährend gleichmässige Abnahme dieses Multiplikators auch eine entsprechend gleichmässige Abnahme des Produktwertes zur Folge hat, wird manchen Lesern neu sein und vielen als nachahmenswert erscheinen. Auch sonst ist die durch das Bedürfnis gebotene, an den gesunden Menschenverstand appellierende Fassung der Herleitungen für die einzelnen Lehrsätze vielfach lehrreich, ganz besonders aber empfiehlt sich das Buch als ein sehr zweckmässiges Hilfsmittel für den Lehrer durch die grosse Zahl der der Nautik unmittelbar entnommenen Uebungs-Beispiele. Für den Unterricht in der mathematischen Geographie ist die hier gebotene Einführung in die Art, wie die Praxis die mathematischen Methoden zur annähernden Bestimmung der für sie wichtigen Ortselemente benutzt, sehr wertvoll. Es ist zu wünschen, dass von dieser Gelegenheit, den Unterricht zu beleben, recht vielfach Gebrauch gemacht werden möge. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Arendt, R., Grundzüge der Chemie und Mineralogie. 8. Aufl. Mit 279 Abb. Hamburg 1903, Voss. Mk. 4.—.

Baade, F., Naturgeschichte in Einzelbildern, Gruppenbildern und Lebensbildern. 4. Teil: Der menschliche Körper nach Bau, Leben, Pflege. 2. Aufl. Mit 63 Abbild. Halle a. S. 1902, Schrödel. Mk. 1.60.

Beck v. Mannagetta, R., Hilfsbuch für Pflanzensammler. Mit 12 Abb. Leipzig 1902, Engelmann. Mk. 1.40 geb.

Becker, A., Kristalloptik. Mit 106 Fig. Stuttgart 1903, Enke. Mk. 8.—.

Bergmeister, H., Geometr. Formenlehre für Mädchen-Lyzeen. 1. Teil. Mit 116 Fig. Wien 1902, Deuticke. Mk. 1.50.

Berichte der Deutschen Physikal. Gesellschaft, herausgeg. v. Karl Scheel und Halbmonatliches Literaturverzeichnis der Fortschritte der Physik, redig. von Karl Scheel und Rich. Assmann. Preis per Jahrg. Mk. 8. 1903, Heft 1, 2. Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn.

Biel, B., Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten. Ausgabe für Realanstalten. 1. Teil: Die Unterstufe. Leipzig 1903, Freytag. Mk. 2.50 geb.

Biscan, W., Was ist Elektrizität? Leipzig 1902, Hachmeister & Thal. Mk. 1.50.

Braess, M., Das heimische Tier- und Pflanzenleben im Kreislauf des Jahres. 1. Teil: Das heimische Vogelleben. Lfg. 1—4. Dresden 1903, Schultze.

Braunmühl, A. v., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2. Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Fig. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 10.—.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Hälfte. Ebenda. Mk. 12.—.

Dannemann, Eine Osterreise nach dem Pharaonenlande. Beilage z. Programm der Realschule zu Barmen 1903. B. Wiemann.

Décombe, L., La Compressibilité des Gaz réels. (Scientia No. 21) Paris 1903, Naud. Mk. 1.60.

Detmer, W., Das kleine pflanzenphysiologische Praktikum. Mit 163 Abb. Jena 1903, Fischer. Mk. 5.50.

Dupont, J. B., Lehrbuch der Arithmetik für die 1. Klasse der Mädchen-Lyzeen. Wien 1902, Deuticke. Mk. 1.20.

Effert, H., Grundriss der mathem. und physikal. Geographie. 5. Aufl. Mit 14 Fig. Würzburg 1902, Stahel. Mk. 1.25 geb.

Eneström, G., Bibliotheca mathematica. 3. Folge. 3. Bd. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 20.—.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie für den mathemat. Unterricht an höh. Lehranstalten. Mit einem Vorworte von Direktor Dr. W. Krumme. In 2 Teilen. 1. Teil: Ebene Geometrie. 4. Aufl. Berlin 1903, Salle. Mk. 2.20.

Fiedler, A. und Hoelemann, E., Der Bau des menschl. Körpers. 8. Aufl. Mit 81 Abb. u. 5 Tafeln. Ausgabe A: Für die Hand des Lehrers. Dresden 1903, Meinhold & Söhn Mk. 1.75 geb.

Fortschritte der Physik, Halbmonatl. Literaturverzeichnis, dargestellt von der Deutschen Physikal. Gesellschaft, redig. v. Scheel u. Assmann. II. 3, 4, 5, 6, 7, Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn.

Frankenbach, F. W., Die den merkwürdigen Punkten des Dreiecks entsprechenden einbeschriebenen und umbeschriebenen Kegelschnitte. Liegnitz 1903. Wagner.

Friedrich, G. A., Mathematische Reifeprüfungsaufgabe des Königlichen Gymnasiums zu Tilsit. Wissensch. Beilage z. Programm der Anstalt. Tilsit 1903, Reyländer & Sohn.

Gajdeczka, J., Maturitätsprüfungsfragen aus der Mathematik. Wien 1903, Deuticke. Mk. 1.20.

Geschöser, O., Die Theorie des Elektrophors. Beilage zum Programm d. Kgl. Gymnasiums zu Oels 1903, No. 235. (Druck von A. Ludwig).

Grimsehl, Unterrichtsräume f. Physik; Beil. z. Progr. d. O.-R.-S. auf der Uhlenhorst zu Hamburg 1903, Lütcke & Wulff).

Haag, C., Versuch einer graphischen Sprache auf logischer Grundlage. Stuttgart 1902, Kohlhammer. Mk. 1.50.

Heimerl, A., Schulflora von Oesterreich. Mit 1597 Abb. Wien 1903, Pichler.

Hertwig, R., Lehrbuch der Zoologie. Mit 579 Abb. 6. Aufl. Jena 1903, Fischer. Mk. 11.50.

Königsberger, L., Hermann v. Helmholtz, II. Band. Mit 2 Bildnissen. III. Band. Mit 4 Bildnissen u. einem Brieffacsimile. Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn. Mk. 8.—.

Koppe-Dickmann, Geometrie zum Gebrauch an höh. Unterrichtsanstalten. III. Teil. (2. Aufl.) Ausgabe für Reallehranstalten. Mit 187 Fig. Essen 1903, Baedeker. Mk. 3.20 geb.

Kraepelin, K., Exkursionsflora für Nord- und Mitteldeutschland. Mit 566 Holzschn. 5. Aufl. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 4.— geb.

Kreuschmer, Die Elemente der Geometrie. 1. Teil: Planimetrie. 6. Aufl. 2. Teil: Trigonometrie und Stereometrie. 4. Aufl. Bearb. von Dr. C. Lackemann. Breslau 1903, Hirt. 1. Teil: Mk. 1.25; 2. Teil: Mk. 1.—

—,—, Der Universal-Winkelapparat im Dienste der Schule u. der Praxis. Mit 18 Fig. Ebenda. Mk. —.40.

Kundt, A., Vorlesungen über Experimental-Physik, herausgeg. v. Karl Scheel. Mit dem Bildnis Kundt's, 534 Abbild. u. einer farb. Spektraltafel. Pr. Mk. 15.—, geb. Mk. 17.50 Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn.

Lampe, E., Meyer, W. Fr. u. Jahnke, E., Archiv der Mathematik und Physik. 3. Reihe mit Anhang. 4. Bd. Mit 27 Textfig. u. 2 Tafeln. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 14.—

Langer, H., Grundriss der Physik. Mit 495 Abb. Leipzig 1903, Freytag. Mk. 4.50 geb.

Lassar-Cohn, Arbeitsmethoden für organisch-chemische Laboratorien. 3. Aufl. Hamburg 1903, Voss. Mk. 7.—

ANZEIGEN.

Grössere Zahl
Leuckartscher zoologischer Wandtafeln
so gut wie neu, einzeln oder im Ganzen zu verkaufen. Offerten an den Verlag dieser Zeitschrift unter Chiffre B 20.

Verlag von O. Salle, Berlin W. 30.
Schriften des Nervenarztes
Dr. med. **Wichmann-Wiesbaden**
für
Neurasthenikker
1. **Die Neurasthenie.** Ihre Behandlung u. Heilung. Ein Rathgeb. f. Nervenkranke. 2. Aufl. Preis 2 Mk.
2. **Lebensregeln für Neurasthenikker.** 2. Aufl. Preis 1 Mk.
3. **Die Wasserkuren.** Innere u. äußere Wasseranwendung im Hause. 2. Aufl. Preis 1 Mk., geb. Mk. 1.25.

Uebernehme die
Präparation von Vögeln etc.
in natürlicher Ausführung.
Kaufe
Reh- u. Hirschgeweihe.
J. Haider
* in Tuttlingen. *

Verlag von Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.
Die Geometrie der Lage.
Vorträge von Dr. Th. Reye,
ordentlicher Professor der Universität Strassburg i. E.
Abt. I. Mit 90 Textfig. Brosch. 8 Mk. Geb. 10 Mk.
Abt. II. Mit 26 Textfig. Brosch. 9 Mk. Geb. 11 Mk.
Abt. III. Brosch. 6 Mk. Geb. 8 Mk.

Aus einigen Beurteilungen dieses Werkes.

Die Vorzüge der Geometrie der Lage werden durch dies vortreffliche Lehrbuch in das deutlichste Licht gesetzt. Die Anordnung und Reichhaltigkeit des darin behandelten Stoffes ist geradezu mustergiltig. Der Inhalt bietet eine so grosse Fülle an Aufgaben und Lehrsätzen, dass jeder aufmerksame Leser zu aufrichtiger Bewunderung für den geistvollen Verfasser und zu warmem Interesse für den Gegenstand hingerissen wird. Im Vergleich zu dem v. Staudt'schen Werke über die Geometrie der Lage ist das Buch von Reye um Vieles leichter verständlich.
L. Klepert in Zeitschr. für Archit. u. Ingenieurwesen, Hannover.

Man wird selten ein Buch finden, in welchem ein schwieriger Gegenstand so leicht und flüssig behandelt ist, wie hier. Gleich im Anfange werden Anregungen gegeben, welche sofort zeigen, wo das Ganze hinsteuert. Zahlreiche Figuren sind eingestreut, und stets wird der Leser ermahnt, selbst zu konstruieren, um sich durch Uebung und Anschauung zum Meister des Gegenstandes zu machen. Mit einem Worte: es handelt sich um ein Meisterwerk. Dir. Dr. Holzmüller in Zeitschr. für lateinlose höh. Schulen.

Die Gestaltung des Raumes.

Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Von **Prof. F. Pietzker.**

Mit 10 Figuren im Text. — Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Normalverzeichnis

für die

physikalischen Sammlungen

der

höheren Lehranstalten.

Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.

Preis 30 Pfg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30.

Grundsätze und Schemata

für den

Rechen-Unterricht

an höheren Schulen.

Mit einem Anhange:

Die periodischen Dezimalbrüche

nebst Tabellen für dieselben.

Von

Dr. Karl Bochow

Oberlehrer a. d. Realschule zu Magdeburg.

Preis 1.20 Mk.

Die Formeln

für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen abgeleitet an Figuren.

Von

Dr. Karl Bochow

Oberlehrer in Magdeburg.

Preis 1 Mk.

Verlag von Gustav Fischer in Jena.

Soeben erschien:

Das kleine pflanzenphysiologische Praktikum.

Anleitung zu pflanzenphysiologischen Experimenten.

Für Studierende und Lehrer der Naturwissenschaften.

Von

Dr. W. Detmer,

Professor an der Universität Jena.

Mit 103 Abbildungen.

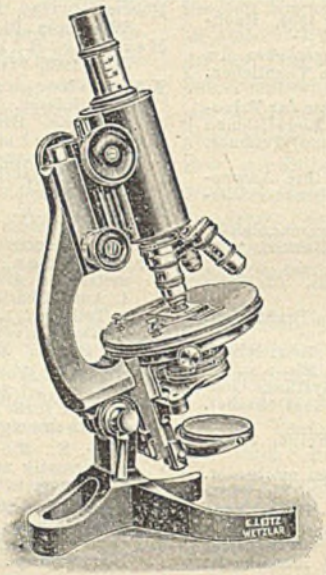
Preis: 5 Mk. 50 Pfg., geb. 6 Mk. 50 Pfg.

Kostenfrei

versenden wir auf Verlangen unsern **neuen illustrierten Katalog** über **Wandtafeln** für den naturwissenschaftlichen **Anschauungsunterricht** an Universitäten und Schulen.

Th. G. Fisher & Co.

Verlag. Cassel.



Neuestes Modell 1902.

E. Leitz,

Optische Werkstätte

Wetzlar

Filialen: Berlin NW., Luisenstr. 45

New-York 411 W. 59 Str.

Chicago 32—38 Clarke-Str.

Mikroskope

Mikrotome

Lupen-Mikroskope

Mikrophotographische Apparate.

Photographische Objektive. Projektions-Apparate.

Deutsche, englische und französische Kataloge kostenfrei.

Vertreter für München:

Dr. A. Schwalm, München, Sonnenstr. 10.

Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit.

Max Kaehler & Martini

Berlin W. Wilhelmstr. 50

empfehlen **Materialien** zu den

Goldschmidt'schen Versuchen

Einrichtung von chemischen Laboratorien. Preislisten 1903 frei.

M. Bornhäuser, Ilmenau

Hochspannungsbatterien — kleiner Akkumulatoren für Unterrichtszwecke, Kapazität 1 Amp.-Std. bei 10stündiger Entladung. D.-R.-G.-M.

Modell der physikalisch-technischen Reichsanstalt.

Präzisions-Reisszeuge

(Rundsystem)

für Schulen und Techniker.

Clem Riefler, Nesselwang und München

(Nur die mit dem Namen Riefler gestempelten Zirkel sind echtes Riefler-Fabrikat.)

P. & M. Herre

Berlin S. 14

Neue Jakobstrasse 6.

Alle Sorten elektr. Röhren:

Geissler-, Tesla-, Röntgenröhren.

R. Brendel

Fabrikant botanischer Modelle

Grunewald b. Berlin

Bismarckallee 37.

Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Spezialität:

Polarisations-Apparate, sämtliche Prismen, Linsen und Platten aus Doppelspath und Bergkrystall. Turmalinzangen und Präparate.

C. A. Niendorf

Bernau i. M.

Klapptafel n. Rühlmann auf Wunsch mit Zubehör z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie d. i. Aufgab. vorkommenden Bewegungen. Kompl. Mk. 100 (S. U.-Bl. VIII 2. S. 14.). Dynamos m. Handbetrieb, Dampfmaschinen, Turbinen, Benzin- u. Wassermotoren.

— **Rob. Schulze,** Halle a. S. —

Moritzzwinger 6.

E. Leybold's Nachf., Köln

Mechanische und **optische Werkstätten.**

Physikalische Apparate in erstklassiger Ausführung.

— **Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette.** —

Elektrische Apparate

für den Physikunterricht.

Friedrich Bussenius

Berlin S. 42.

Reisszeuge
in allen Façons
E. H. Rost
Berlin, Dorotheenstrasse 22
Reparaturen

Max Kohl, Chemnitz i. S.
Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Elektrotechnik.
Einr. physikal. u. chem. Laboratorien. Fabr. physikal. Apparate u. mathemat. Instr. Kompl. Röntgen-Einrichtungen.
Gold. Med. Leipz. 1897, Weltausstell. Paris 1900 etc. — Spezial-Listen mit ausführl. Beschreib. etc. kostenfrei.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus
Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate. Demonstrationsapp. nach Behrendsen und Grimsehl.
Modelle von Dach- und Brückenkonstr. nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Krystallmodelle aus Holz- u. Glastafeln.

Reiniger, Gebbert & Schall
Erlangen
liefern elektr. Lehrmittelgegenstände und physik. Apparate, Experimentiertableaux für Lehranstalten u. physik. Institute, elektrische Messinstrumente aller Art, Röntgen-Intrumentarien und alle elektromedizinischen Apparate.
Preislisten gratis und franko.

Physikalische Demonstrationsapparate
für
höhere Lehranstalten.
Leppin & Masche,
Berlin SO., Engelufer 17.

Ruhmer's
physikalisches Laboratorium
Berlin SW 48.
Selen-Zellen und Apparate.
— Prospekte gratis und franko. —

Günther & Tegetmeyer,
Werkstatt für wissenschaftliche u. technische
Präzisions-Instrumente.
Braunschweig, Höfenstrasse 12.
Physikalische Instrumente spez. nach Elster und Geitel.

Elektrizitäts-Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen.
Schalttafeln u. Messinstrumente
für Lehr- und Projektionszwecke.
Widerstände auf Schiefer, beliebig verstellbar bis 250 Ohm M. 15 u. M. 17.50.
In kurzer Zeit Tausende für Lehr- und Versuchszwecke geliefert.

Wettersäulen, Normal-Quecksilber-Barometer, Polymeter (Haarhygrometer) für hygienische, technische und meteorolog. Zwecke, Wettertelegraph (Thermohygroskop u. Holosterie-Barometer), Taupunktzeiger, Mod. 1902.
Wilh. Lambrecht,
Fabrik meteorologischer Instrumente,
Göttingen.

Achromatische
Schul-Mikroskope
(30 bis 120 Mk.)
erster Güte hält stets am Lager.
F. W. Schieck
Berlin SW. 11, Halleschestrasse 14.
Illustrierte Preislisten kostenlos.

Projektions-Apparate
für Schulzwecke.
Carl Zeiss,
optische Werkstätte in Jena.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome u. Mikroskopir-Instr.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Extrapreise!!
für billige u. gute Mikroskope f. Schulen u. Schüler.
I. Vergrösser.: 30, 70 Mk. 15.00
II. Vergrösser.: 50, 150, 300 Mk. 25,00. Illustrierte Katal. (1, 2, 3, 4) gratis. Ueberall grösste Anerkennungen.
Dr. Ed. Kaisers Institut
Berlin SW. 47

Dr. H. Geissler Nachf.
Franz Müller, Bonn a. Rh.
Wissenschaftl. Glasapparate
und Präzisionsinstrumente.
Elektrische Röhren. — Luftpumpen. Thermometer.
Einrichtung chem. Laboratorien.

v. Poncet Glashütten-Werke * *
Berlin SO, Köpenickerstr. 54.
Fabrik und Lager
aller Gefässe und Glasutensilien
für alle Zweige der Chemie u. Technik
Preisverzeichnisse franko u. gratis.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Eigene Werkstätten.

Apparate u. Gerätschaften
für
chemische Laboratorien.
Vollständige Einrichtungen.
Leppin & Masche,
Berlin SO., Engelufer 17.

Kohlensäure-Werke
C. G. Rommenhöller Akt.-Ges.
Abteilung Sauerstoff.
Berlin NW. 5.
Komprimierter Sauerstoff, Leuchtgas, Wasserstoff in Stahlflaschen jed. Grösse, Reduzierventile, Kalklichtbrenner, Projektionsapparate.

Zoologisches Institut
Wilh. Haferlandt & Co.,
Charlottenburg, Potsdamerstrasse 37.
Alleinige Selbstpräparatoren d. rühml. bekannten 3- u. 4-fachen Injektionen, mit Nervenpräparaten unübertroffen, Tierausstopferei u. Skelettir-Anstalt, Handlung aller naturhist. Lehrmittel.

Dr. Benninghoven & Sommer
Berlin NW., Thurmstr. 19.
Anatomische Lehrmittelanstalt

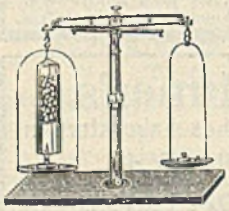
TELLURIEN
u. andere astron. Lehrmittel, zerleg- u. verstellbar, als „beste u. billigste" allgemein anerkannt, in über 4000 Schulen bewährt, liefert Gr. Reallehrer
A. Mang, Selbstverlag, Heidelberg.
Preisliste gratis.

Bopp's Selbstverlag
Stuttgart.
Farbige Wandtafeln für Physik, Chemie, metrisches System.
Verzeichnisse verlangen.

A. Müller-Fröbelhaus, Dresden
Lehrmittel-Institut
liefert in tadelloser Ausführung
Unterrichtsmittel f. Mathematik, Naturwissenschaften und Physik.
Fachkataloge auf Wunsch.

Naturwissenschaftl. Institut
Wilhelm Schlüter, Halle a. S.
Lehrmittel-Anstalt.
Naturwissenschaftl. Lehrmittel für den Schulunterricht, in anerkannt vorzügl. Ausführung zu mässigen Preisen.
Seit 1890 in mehr als 800 Lehranstalten eingeführt. — Hauptkatalog kostenlos.

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert u. a.



sämtliche Apparate zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst.

Für jeden Hausbesitzer:

Der Bauherr
und
Hauswirt.

Ein praktischer Ratgeber für Jedermann in Bau- und Hausangelegenheiten.
Von
S. Müller, Architekt
Mit 8 Separatbildern u. 265 Textabbildungen.
Preis geheftet 5 M., gebunden 5 M. 60 Pf.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der
Grosse Stieler
für 30 Mark!

Hand-Atlas
in 100 Karten.
50 Lieferungen
zu je 60 Pfg.

Gotha: Justus Perthes.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

In der Herderschen Verlagshandlung zu Freiburg i. Br. ist soeben erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Jahrbuch der Naturwissenschaften 1902—1903.

Enthaltend die hervorragendsten Fortschritte auf den Gebieten: **Physik; Chemie und chemische Technologie; Astronomie und mathematische Geographie; Meteorologie und physikalische Geographie; Zoologie; Botanik; Mineralogie und Geologie; Forst- und Landwirtschaft; Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte; Gesundheitspflege, Medizin und Physiologie; Länder- und Völkerkunde; angewandte Mechanik; Industrie und industrielle Technik.**

Achtzehnter Jahrgang. Unter Mitwirkung von Fachmännern herausgegeben von **Dr. Max Wildermann.** Mit 46 in den Text gedruckten Abbildungen und 2 Kärtchen. gr. 8⁰ (XIV u. 508) *M* 6.—; geb. in Leinwand *M* 7.—

Frühere Jahrgänge des „Jahrbuches der Naturwissenschaften" (mit Ausnahme des ersten, der vergriffen ist) können zum Preise von je *M* 6.—, geb. *M* 7— nachbezogen werden.

Mineralien
Mineralpraeparate, mineralogische Apparate und Utensilien.
Gesteine
Geographische Lehrsammlungen.
Dünnschliffe von Gesteinen, petrographische Apparate und Utensilien.
Petrefacten
Sammlungen für allgemeine Geologie.
Gypsmodelle seltener Fossilien. Geotektonische Modelle.
Krystallmodelle
aus Holz, Glas und Pappe. Krystalloptische Modelle.
Preisverzeichnisse stehen portofrei zur Verfügung.
Meteoriten, Mineralien und Petrefacten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen.
Dr. F. Krantz,
Rheinisches Mineralien-Contor
Gegründet 1833. **Bonn am Rhein.** Gegründet 1833.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Aug. Ritter,
Geh. Reg.-Rat u. Professor an der Königl. Technischen Hochschule Aachen.

Lehrbuch der Technischen Mechanik.
Achte Auflage. Mit 873 Textfig. Brosch. 20 Mk., geb. 22 Mk.

Lehrbuch der Analytischen Mechanik.
Dritte Auflage. Mit 224 Textfig. Brosch. 8 Mk., geb. 10 Mk.

Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.
Dritte Auflage. Mit 612 Textfig. Brosch. 16 Mk., geb. 18 Mk.

Diese trefflichen Lehr- und Handbücher haben im Laufe der Jahre sich immer mehr eingebürgert und ihre Vorzüge, die **klare und durchsichtige Behandlung des Stoffes, die verständliche und präzise Ausdrucksweise,** ihnen immer neue Leser und Anhänger zugeführt. Prof. Dr. Holzmüller sagt in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht hierüber: „Ich selbst habe diese Ritterschen Bände häufig zu Rate gezogen und kann sie nur zum Studium empfehlen. **Dieselben gehören zum besten, was wir haben.**

☞ Hierzu je eine Beilage der Firmen **Karl Block in Breslau** (betreffend Weltall und Menschheit) und **Camera-Grossvertrieb „Union", Hugo Stöckig & Co. in Dresden-A.** (betreffend Photographische Apparate), welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.