Jahrgang X. 1904. Nr. 1.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**, herausgegeben von **F. Pietzker**, Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt:

Vereins-Angelegenheiten.

Wie bereits in No. 3 des abgelaufenen Jahrgangs mitgeteilt worden ist, wird die diesjährige — dreizehnte — Hauptversammlung des Vereins in der Pfingstwoche d. J. in Halle a. S. abgehalten werden.

Die allgemeinen Sitzungen sollen für die Diskussion über besonders wichtige Fragen des exaktwissenschaftlichen Unterrichts offen gehalten werden, als solche sind „die Behandlung der Physik als Naturwissenschaft" und „die Bildungsaufgabe der Mathematik innerhalb des Unterrichts an den höheren Schulen" in Aussicht genommen, für beide Themata sind Berichterstatter bereits gewonnen worden. Dagegen sind Anmeldungen zu Vorträgen in den einzelnen Abteilungen noch sehr willkommen. Wir bitten diese an Direktor Dr. Schotten in Halle a. S., Sophienstrasse 37, oder an Professor Pietzker in Nordhausen zu richten.

Ferner werden die Vereinsmitglieder ersucht, den Jahresbeitrag für 1904, soweit dies noch nicht geschehen ist, unter Benutzung des dieser Nummer beiliegenden Postanweisungsformulars bis zum 1. April d. J. an den Vereins-Schatzmeister (Prof. Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47) einzusenden. Die bis dahin nicht eingegangenen Beiträge werden im Laufe des folgenden Vierteljahrs durch Postnachnahme eingezogen werden (§ 5 der Vereins-Satzungen).

Der Vereins-Vorstand.

Ist auch für Mathematiker und Naturwissenschafter ein längerer Urlaub zur wissenschaftlichen Weiterbildung wünschenswert?

Von M. Latrille, Oberlehrer am Reform-Realgymnasium in Kiel.

Mit dem Beginn des Wintersemesters sind wieder eine Anzahl unserer neuphilologischen Kollegen mit einem halbjährigen Urlaub und einer staatlichen Unterstützung ins Ausland gezogen, um sich in der französischen oder englischen Sprache zu vervollkommnen. Wir Mathematiker und Naturwissenschaftler gönnen ihnen diese Zeit des Studiums, frei von den Berufsgeschäften, herzlich. Aber es liegt nahe zu überlegen, ob nicht auch für uns eine solche

Zeit der Weiterbildung möglich und wünschenswert ist. Man könnte auf die Ferienkurse hinweisen, in denen wir Gelegenheit haben, uns mit den neuen Entdeckungen und Gedanken auf den verschiedenen Gebieten vertraut zu machen. Mir liegt es fern, diese Ferienkurse zu unterschätzen; ich habe selber an einem solchen in Berlin teilgenommen und denke noch gern an denselben zurück. Doch zweierlei Mängel wird wohl auch der eifrigste Verteidiger dieser Kurse einräumen. Der eine ist die Kürze der Zeit, die dazu zwingt, eine solche Fülle von Stoff und Anregungen zusammen zu häufen, dass der eine Eindruck den anderen stört. Der zweite liegt in der grossen Schwierigkeit — um nicht zu sagen Unmöglichkeit — für uns, die während des Kursus aufgenommenen Keime nachher weiter zu pflegen und zur Entfaltung zu bringen. Dazu fehlt uns die Zeit und den meisten von uns auch die experimentellen und literarischen Hilfsmittel. Es wäre also äusserst erwünscht, wenn neben diese Kurse — nicht statt derselben — eine andere Einrichtung träte, welche einer Anzahl von uns in ausgiebiger Weise Zeit und Gelegenheit böte, uns mit unseren Wissenschaften zu beschäftigen; existieren ja auch für die Neuphilologen diese Auslandsreisen neben den Ferienkursen.

Vielleicht herrscht hier und da die Ansicht, bei den Neuphilologen liege die Sache doch etwas anders. Dieses Fach sei durch die Entwickelung der Pädagogik vor ganz neue Aufgaben gestellt, die Anforderungen an seine Vertreter seien ungleich höher als früher, und besondere Aufgaben erfordern besondere Mittel. Bei uns Mathematikern und Naturwissenschaftlern herrsche dagegen eine Zeit grösserer Stetigkeit und Ruhe; wesentlich neue Aufgaben gebe es für uns nicht. Deshalb sei auch für uns das Bedürfnis nach einer zeitraubenden Weiterbildung nicht vorhanden. Ich glaube, man braucht diesen Gedanken nur auszusprechen, um von allen Seiten energischen Widerspruch zu erfahren. Die neuen Lehrpläne führten die darstellende Geometrie in unser Schulpensum ein, und man mag über die Art und Weise, wie sie jetzt dem Lehrplan eingeordnet ist, denken, wie man will, wir werden sie sicher in dem Schulpensum behalten. Da haben namentlich die nicht mehr ganz jungen mathematischen Lehrer, die während ihrer Studienzeit dazu keine Veranlassung hatten, den brennenden Wunsch, sich recht gründlich mit dieser Disziplin zu beschäftigen. In der Physik und Chemie haben die letzten Jahre eine Reihe ganz neuer Tatsachen und dementsprechend neuer Hypothesen ans Licht gebracht. Wir alle haben den dringenden Wunsch, nicht nur darüber etwas zu lesen, sondern von sachverständigster Seite an der Hand des Experimentes damit vertraut gemacht zu werden. Die sogenannten beschreibenden Naturwissenschaften fordern die Einführung der Biologie in unsere oberen Klassen. Auch mit dieser Frage haben wir alle uns, so gut es gehen wollte, beschäftigt. Aber die Zeit ist knapp, die Hilfsmittel gering. Wir haben wieder den dringenden Wunsch, auch auf diesem Gebiete gründlich heimisch zu werden. Endlich arbeiten manche von uns darauf hin, dass der gesamte Unterricht ausmünde in eine philosophische Propädeutik, die auf naturwissenschaftlicher Grundlage ruht und demnach auch von einem Vertreter unserer Fächer erteilt wird. Der W u n s c h i s t n i c h t u n b e r e c h t i g t, m a n m ö g e u n s Z e i t und Gelegenheit gewähren, dass wir uns in diesen Gedankenkreis vertiefen können, wenn es auch hier leichter ist als auf den anderen Gebieten, wo das Studium von Büchern keineswegs ausreicht. Also Aufgaben gibt es für uns genug, das Bedürfnis nach einer längeren Unterbrechung unserer Berufstätigkeit behufs wissenschaftlicher Weiterbildung ist zweifellos vorhanden. Wie aber eine Einrichtung treffen, die dieses Bedürfnis zu befriedigen geeignet ist?

Ich möchte mir erlauben, meinen Fachgenossen folgenden Vorschlag zur Begutachtung zu unterbreiten.

Wie für die Neuphilologen stellt der Staat auch für uns eine Anzahl Stipendien zur Verfügung. Die Inhaber eines solchen werden auf ein halbes Jahr beurlaubt; für die Vertretung sorgt der Patron der Anstalt, also je nachdem der Staat oder die Gemeinde. Soweit ist die Regelung der Angelegenheit ja sehr einfach, aber nun erhebt sich die Frage, wie wird das Semester am besten benutzt? Soll sich jeder, ähnlich wie die Neuphilologen, auf seine eigene Hand einen Ort aussuchen und dort gerade das studieren, wozu seine Neigung ihn treibt? Dagegen habe ich einmal das Bedenken, dass wir wohl kaum in einer Universitätsstadt das finden werden, was wir suchen; die gewöhnlichen Kollegien und Uebungen entsprechen doch unseren Zwecken zu wenig. Ferner soll ja dieser Urlaub in der Hauptsache dem Unterrichte zu gute kommen, das tut bei den Neuphilologen jeder Aufenthalt im Auslande, bei uns aber, wenigstens unmittelbar, nicht jede Beschäftigung mit unseren Wissenschaften. Es müsste also auf eine andere Weise für unsere Bestrebungen gesorgt werden, und da bleibt nichts anderes übrig, als eine gewisse Zentralisation. Alle Inhaber eines solchen Stipendiums begeben sich an denselben Ort, man könnte an Berlin denken wegen der Fülle der Hilfsmittel, auch an Göttingen, wo wir voraussichtlich in der Person des Herrn Professor K l e i n warme Unterstützung finden würden. Doch kommt die Wahl des Ortes erst in zweiter

Linie inbetracht. An diesem Orte werden besondere Kurse eingerichtet. Die Vormittage sind Vorlesungen gewidmet. Diese umfassen die Fortschritte in der Physik und Chemie, angewandte Mathematik, die neueren Ergebnisse in der Zoologie und Botanik, doch wäre hier das Hauptgewicht nicht auf die Systematik zu legen, sondern auf allgemeine, besonders biologische Fragen. An den Nachmittagen wird Gelegenheit zu Uebungen geboten, und hier wird der Individualität grösserer Spielraum gelassen, so dass der eine sich in der darstellenden Geometrie ausbilden kann, andere physikalische, chemische usw. Untersuchungen vornehmen können. Ich brauche wohl kaum zu sagen, dass nicht jeder Tag besetzt werden darf, damit Zeit zur gründlichen Verarbeitung bleibt.

Notwendig für das Gelingen dieser Einrichtung ist natürlich ein weitgehendes Entgegenkommen der Dozenten, die einmal die Vorlesungen ganz für unsere Bedürfnisse einrichten müssten, — mit den üblichen Kollegien über Experimentalphysik und Chemie, allgemeine Zoologie und Botanik dürften diese keine Aehnlichkeit haben - dann auch in den Uebungen wohl mehr Arbeit von uns haben würden als von anderen Praktikanten. Die Herren, die sich dieser Mühe unterzögen, wären vom Staate angemessen zu honorieren. Wegen der akademischen Ferien ist wohl nur das Wintersemester für solche Kurse geeignet.

Die betreffende Universitätsstadt ist auch der passende Ort für eine dauernde Ausstellung von Lehrmitteln auf allen Gebieten der Naturwissenschaften. Ich denke mir, die grösseren Firmen würden mit Freude die Gelegenheit ergreifen, uns auf diese Weise mit ihren neuen Apparaten usw. bekannt zu machen.

Diese Zentralisierung hat allerdings gewisse Schattenseiten, andererseits aber auch viele Vorteile; ich hebe noch den Umstand hervor, dass eine ganze Anzahl Vertreter unserer Fächer genauer bekannt werden, sich ihre bisherigen Erfahrungen mitteilen und gegenseitig anregen können. Ich verhehle mir nicht, dass noch manche Schwierigkeiten zu überwinden sind, ehe der ausgesprochene Gedanke in die Tat umgesetzt werden kann. Aber wenn ich mich nicht täusche, dass mein Vorschlag einem allgemein empfundenen Bedürfnis Ausdruck gibt, so wäre es wohl richtig, in dieser Zeitschrift Abänderungs- und Erweiterungsvorschläge zur Sprache zu bringen. Haben sich die Ansichten geklärt, so müsste der Vorstand unseres Vereins die Angelegenheit in die Hand nehmen, bestimmte Anträge formulieren, diese auf der nächsten Versammlung vorlegen und im Falle ihrer Annahme dem Herrn Minister unterbreiten. Bei dem grossen Wohlwollen, das das Unterrichtsministerium unbestreitbar allen Bestrebungen entgegenbringt, die auf eine Verbesserung des Unterrichtes und der Ausbildung der Lehrer hinzielen, dürfen auch wir auf die Erfüllung unserer Wünsche hoffen. Ich würde mich freuen, wenn diese Zeilen den Anstoss zu einer Einrichtung gäben, die unseren Fächern und ihren Vertretern noch mehr als bisher die ihnen gebührende Beachtung sichern würde.

Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterrichte.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Breslau *).

Von Kurt Geissler (Charlottenburg).

Wenn wir die Mathematik der Schule zu überschauen versuchen, so erscheint sie uns wohl als ein Gebäude von grosser Sicherheit, aufgebaut auf feste Grundsteine und emporgeführt mit verschiedenen Wandungen bis zu einer gewissen Höhe, bis zu einer Art von Abschluss, der ein unbeschränktes Weiterbauen gestattet. Aber wir merken doch auch, dass dieser Bau in gewissem Sinne luftig ist, es schliesst sich nicht alles eng aneinander; es bedarf zwar jeder Satz, jede Untersuchung nach unten hin sicherer, vorher gelegter Stützen, indessen bleiben viele absichtliche oder unabsichtliche Lücken zwischen den einzelnen Bausteinen. Da taucht z. B. ein Pythagoreischer Lehrsatz auf, er stützt sich auf andere, aber man sieht nicht etwa ein lückenloses Ganzes einer nicht mehr vermehrbaren Allheit von Sätzen.

Je weiter das Gebiet der Anwendungen wird, auf das Leben, auf die Natur, um so mehr bevorzugen wir Sätze von praktischer Brauchbarkeit; und um so mehr gewinnt das Bild der Mathematik den Eindruck eines sinnlichen Bildes, eines Bildes, in dem Grössen von endlicher Ausdehnung vorkommen. Zwar wissen wir, dass hier und da die Rede war vom Unendlichen, z. B. bei den Parallelen, bei der Geraden, die nie aufhört, bei der Verkleinerung in das Unendlichkleine, etwa wenn man die Seitenzahl eines dem Kreise einbeschriebenen Polygons in unendliche Anzahl hinein vermehrt. Das Unendliche erscheint zwar wie etwas nicht recht Entbehrliches, aber doch nur hier und da wieder Auftauchendes.

Wenn ich im Folgenden eine Behandlung des Unendlichen Ihnen mitzuteilen versuche, die das genannte Bild der Mathematik wesentlich verändert, so muss ich in mehrfacher Beziehung um Ihre Nachsicht bitten. Erstlich ist es nicht leicht, in der kurzen Zeit eines Vortrags das Thema einigermassen in einheitlich abgeschlossener Weise zu behandeln. Die Versuchung, in mathematische Einzelheiten einzugehen, ist

*) S. Unt.-Bl. IX, 3, S. 60.

gross. Doch muss ich mich dessen so viel wie möglich enthalten, um den allgemeinen Sinn des Ganzen deutlich hervortreten zu lassen. Ferner liegt die grosse Schwierigkeit vor, dass ich beträchtlich von gewohnten Vorstellungen abweichen muss, und dass ausgebildete Geister, die obenein ihre Lehrmethode vielfach erprobt haben, nicht so leicht auf neue Ideengänge eingehen, wie die gänzlich Unbefangenen oder Ungeübten, wie z. B. eine Generation von Schülern, welche eben erst anfängt zu lernen. Freilich würden diese ganz unfähig sein in einer einzigen Stunde während eines kurzen Vortrages das Gebiet der Schulmathematik zu durchfliegen, dazu gehört die Erfahrung des Geübten.

Ich bitte Sie deshalb freundlichst, die Art meines Vortrags nicht als den Versuch einer Rechtfertigung oder gar eines Beweises dieser Unendlichkeitslehren anzusehen, sondern nur als einen Abriss und eine Art von Referat über meine eigene Unterrichtstätigkeit in dieser Hinsicht.

Wenn man mit der Geometrie beginnt, wie vielfach üblich, so wird man zunächst die sinnliche Anschauung zu Hilfe nehmen, z. B. das Zeichnen. Man will versuchen, geometrische Gebilde zu zeichnen. Welchen Zweck hat eine Zeichnung, danach sollte man die Schüler zuerst fragen. Eine lebhafte Beteiligung bleibt nie aus. Man kommt dahin festzustellen, dass man mit irgend welchem Material etwas herstellt, welches irgend einen Beschauer zu derselben Vorstellung anregen soll, wie sie der Zeichnende hatte. Danach also kann man auch solche Dinge zeichnen, die es garnicht in der räumlichen Sinnen-Welt gibt, wenn es sie nur in der Vorstellung gibt. Das lässt sich leicht am Punkte zeigen. An der Tafel entsteht ein Fleck. Was ist der Fleck? Will man den Eindruck oder die Vorstellung von Kreide erwecken? Nein, man will, dass der Beschauer nicht an das Stoffliche denkt, sondern nur an das Räumliche. Sieht man das rein Räumliche? Sieht man einen Punkt? Nein, der Kreidefleck ist zu gross, er darf aber auch nicht so klein werden, dass man ihn nicht mehr sieht, sonst wird gar kein Eindruck erweckt. Das Zeichnen ist also eine mangelhafte Wiedergabe der geometrischen Vorstellung. Der Punkt soll kleiner sein als der Kreidefleck. Wie klein? Die unbefangenen Schüler pflegen nicht zu sagen, der Punkt solle gar keine Grösse mehr haben. Wer beweist uns auch, dass der Punkt keine Grösse hat? Sicher gelangt man zur Punktvorstellung leicht von Grössen aus, die man sich immer kleiner denkt. Zeichnet man zwei kleine, sehr nahe Flecke an die Tafel, so stellen sie keinen Punkt vor, auch die zwischen ihnen gezogene Linie tut dies nicht. Warum nicht? Man kann ja noch die Enden unterscheiden oder sie sich als etwas Unterschiedenes vorstellen. Die kleine Linie ist begrenzt. Der Punkt aber, wie soll er sein? Man bekommt leicht die Antwort: grenzenlos klein. Sie erinnert sehr an das Euklidische: ein Punkt ist, was keine Teile hat. Ich möchte hierbei bleiben und ihn nicht als Ausdehnungslos, sondern als grenzenlos klein fassen. Man hat hierdurch zum mindesten eine Schwierigkeit vermieden, nämlich, dass der Punkt zum ausgedehnten Raume gehören und doch keine Ausdehnung haben soll.

Er ist nicht sinnlichwahrnehmbar. Gibt es wohl in der Natur Stoffteilchen, die nicht mehr mit dem Auge wahrnehmbar sind? Man erinnert an Riechstoffe. Noch kleinere Teilchen als diese sind sinnlichvorstellbar, unsere Sinne versagen zwar, aber im übrigen sind es doch Teilchen, ebenso wie die sinnlichwahrgenommenen: man will aus einer endlichen Anzahl derselben das Sinnlichwahrnehmbare zusammensetzen. Der Punkt indessen hat keine sinnlichen Eigenschaften; seine Grösse geht nicht bloss unter das Sinnlichwahrgenommene, sondern auch unter das Sinnlichvorstellbare. Wir sagen, er gehöre zu Grössen, welche untersinnlichvorstellbar sind. Aber wir setzen auch hinzu, dass er keine Grenzen haben soll, also er ist untersinnlichvorstellbar und grenzenlos. Das kann man, wie ich oft erfuhr, sehr leicht jedem Kinde von 10 bis zu 12 Jahren klar machen.

Die Linie ist in einer Richtung ebenfalls grenzenlos klein, in anderer Richtung hat sie eine Ausdehnung. Sie wird aber begrenzt, wenn wir wollen, durch Punkte, also kann man den Punkt als eine Linie von untersinnlichvorstellbarer Kürze fassen. So ist auch die Fläche in einer Richtung, einer Dimension grenzenlos klein und untersinnlichvorstellbar, in zwei anderen aber endlich, ja sogar unendlich ausgedehnt vorstellbar. Wir haben hierbei eine eigentümliche Fähigkeit der Vorstellungskraft verwendet, nämlich die Begrenzung. Den Körper begrenzen wir durch etwas, in einer Richtung Grenzenloskleines, die Fläche, die also als Körper von grenzenlos kleiner Dünne aufgefasst werden kann, durch die Linie, die Linie durch den Punkt. Letzterer darf also auch als ein dreidimensionales Gebilde aufgefasst werden, als ein grenzenlos kleiner, untersinnlichvorstellbarer Körper. Es ist aber eine Tatsache, dass wir alle drei Ausdehnungen, Länge, Breite, Dicke nach Belieben in der Vorstellung erweitern können. Wie weit? Soweit, dass uns ein Schwindel erfasst. Was bedeutet das? Wir werden unsicher in unserer endlichen, in unserer Wahrnehmungswelt, die Grenzen verschwinden, alles Endliche erscheint gegenüber derartigen Grössen, wie wir sie schliesslich in der Vorstellung haben können, grenzenlos, verschwindend, vermag diese in ihrem unendlichen Wesen nicht zu vergrössern, ist für sie: grenzenlos klein. Ein endlicher Körper ist gegenüber der unendlichen, der übersinnlichvorstellbaren Ausdehnung klein wie ein Punkt. Danach also könnte das, was wir das eine Mal als einen Punkt, als etwas grenzenlos Kleines betrachten, das andere Mal, also in Beziehung auf noch viel kleinere Gebilde wieder begrenzbar erscheinen, und der begrenzte endliche Körper oder eine endliche Linienstrecke wäre für eine unendlichlange Ausdehnung geradezu ein Punkt. Sobald wir also eine Grösse nicht mehr mit Grenzen behaften, sondern sie selbst als eine Grenze für etwas unvergleichlich viel Grösseres ansehen, so ändert sich auch der Name, der bisherige Körper heisst ein Punkt. Es kommt also dabei immer darauf an, in welches Weitengebiet sich unser Geist versetzt, ein Punkt, der eine endliche Linie begrenzt, der grenzenlos klein ist gegenüber dem Sinnlichen, dieser könnte in der Welt des viel Kleineren, in der Welt des Unendlichkleinen oder Untersinnlichvorstellbaren mit einer Ausdehnung vorgestellt werden. Dann freilich ist er für dieses Weitengebiet keine Grenze mehr, sondern kann nun selbst wieder begrenzt werden durch noch viel Kleineres, durch ein auch für diese kleine Welt wieder Grenzenloskleines (zweiter Ordnung oder niederer Weitenbehaftung). Die Fähigkeit sich so verschiedene Weitengebiete vorzustellen, nennen wir die Weitenbehaftungen z. B. die Weitenbehaftungen des Endlichen oder Sinnlichvorstellbaren, und dazu noch Weitenbehaftungen nach dem Untersinnlichen und Uebersinnlichen hin.

In irgend einem Weitengebiete, z. B. im Sinnlichvorstellbaren, kann man nun wieder vielerlei Unterscheidungen machen. Es gibt z. B. mancherlei Arten von Linien. Man erwecke die Vorstellung durch Zeichnung von Kreisen, kleinen und grossen. Was wird schliesslich ein Kreis sein, der grenzenlos klein im Endlichen wird? Ein Punkt für das Endliche. Aber was denn ein Kreis, der immer grösser wird und schliesslich so gross, dass die endlichen damit gar nicht mehr zu vergleichen sind? Man gelangt zur Anschauung der Geraden. Man kann dieselbe als eine im Unendlichen Krumme betrachten. Nun schneide man aus einem endlichen Kreise immer kleinere Stücke heraus, sie sehen immer weniger krumm aus, d. h. für ein Auge, das sich absichtlich in das Kleine begibt. Wie werden sie von uns vorgestellt werden im Gebiete des Untersinnlichen? So lange wir sie noch begrenzen: als kleine gerade Strecken, wenn wir sie nicht mehr begrenzen und mit dem Endlichen vergleichen: als Punkte für das Endliche.

Was ist eine Gerade für das Endliche? Man kann sie so auffassen, dass es auf die kürzeste Entfernung ankommt. Ein Kind, welches unbefangen ist, wird nicht leicht sagen, es gebe nur eine kürzeste. Sobald es bereits seine Aufmerksamkeit auf Unendlichkleines gerichtet hat, so wird es leicht verstehen, dass wir den Unterschied zweier Wege immer kleiner machen können. Wir gelangen so auf die unendlichkleine Zahl oder Massgrösse. Und es ist recht leicht zu sagen: zwei Wege, die sich nur noch um Unendlichkleines unterscheiden, haben für das Sinnlichvorstellbare keinen Unterschied mehr. Daraus folgt, dass es beliebig viele, um unendlichwenig verschiedene Wege geben kann, die sich doch im Endlichen zu einem einzigen zusammenschliessen, z. B. zu der einzigen endlichen Geraden. Auf diesem Wege gelangt man zu dem relativen Begriffe der Geraden, den ich aufstellte, um dadurch auch die Schwierigkeit des unendlichgrossen und kleinen Kreises fortfallen zu lassen. (Jahresberichte der D. Math. Vereinigung 1903, Heft 5). Sie werden erkennen, dass in der Tat alsdann der unendlichkleine Kreisbogen für das Untersinnlichvorstellbare noch krumm sein kann, während er für gewisse Behaftungen gerade ist.

Aus dem Gesagten folgt ganz einfach, ohne besondere Axiome, dass sich Körper in Flächen, Flächen in Linien, Linien in Punkten schneiden. Man kann sich nun auf irgend einer endlichen Linienstrecke, die mithin durch zwei Endpunkte begrenzt sein soll, beliebig viele Punkte vorstellen, sie mit beliebig vielen Punkten behaften, z. B. kann man sie durch ein Büschel von Strahlen schneiden lassen. Kann man sie auch in unendlichkleine Strecken zerlegen? Allerdings, natürlich nur in unendlichviele, und die Grenzen zwischen je zwei von solchen unendlichkleinen Strecken sind wieder Punkte, nämlich „Grenzenloskleines zweiter Ordnung“. Kann man auch eine endliche Strecke in Punkte zerlegen oder eine solche aus Punkten zusammensetzen, ein Versuch, der oft gemacht worden ist und gemacht wird, aber auch sehr angestritten wird? Da der Punkt grenzenlos klein sein soll, so kann man die einzelnen Punkte nicht aneinandergrenzen lassen, folglich entsteht aus unendlichvielen Punkten keine endliche Strecke, auch dann nicht, wenn es endliche Punkte sind. Kann man einen Kreis aus Punkten zusammensetzen, kann man sagen, der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem Punkte in der Ebene gleiche Entfernung haben, sei der Kreis? Gewiss, wenn man nicht etwa unter dem geometrischen Orte die Gesamtheit aller Punkte versteht. Der Ausdruck Gesamtheit hat eine endliche Summe, also den Kreis doch nur, wenn das Einzelne sich aneinanderfügen lässt, also Grenzen hat.

Die gerade Linie schneidet als Sekante den Kreis in zwei Punkten. Legt man nun beliebig viele Sekanten, so liegen auch einige immer näher an der Peripherie und es erhebt sich die berühmte Frage, wann die Sekante zur Tangente wird. Die beiden Schnittpunkte mit dem Kreise begrenzen eine endliche Sehne und sind selbst als solche Grenzen unendlichklein von erster Ordnung und grenzenlos. Die unendlichkleine Sehne aber hat eine etwas geringere Länge als der zwischen ihren Endpunkten befindliche Kreisbogen, aber beide unterscheiden sich nur um ungemein wenig, sie fallen für das Endlichgleiche zweifellos zusammen, auch noch für unendlichkleine Abstände erster Ordnung, nur wenn es sich um Unterschiede oder Differenzen von der Ordnung δ^2 handelt, sind sie noch als krumm und gerade zu unterscheiden. Die Tangente hat also mit dem endlichen Kreise eine unendlichkleine gerade Strecke gemeinsam, sobald man Abstände in der Richtung des Radius vom Grade δ^2 nicht mehr hineinzieht. Daraus folgt, dass ein Vielseit aus unendlichviel unendlichkleinen Seiten wirklich ein Kreis ist, freilich immer nur für die Berücksichtigung bestimmter Weitenbehaftungen.

Wie wir also den Punkt definierten für bestimmte Behaftungen, wie wir nicht von einer absoluten Geraden sprachen, sondern nur von Geraden für bestimmte Behaftungen, so auch für den Kreis. Fasst man so Gebilde stets relativ, stets nur für bestimmte Behaftungen, so verschwinden die Schwierigkeiten des Unendlichen.

Man könnte fragen, was für eine Begrenzung denn nun die unendlichkleine Strecke habe, die eine Kurve mit der Tangente gemeinsam hat? Grenzenlos klein, ein Punkt darf sie nicht sein. Denn einem Punkte fehlt die Richtung. Hat eine unendlichkleine Strecke zwei Grenzpunkte, so hat sie auch eine Richtung. Die gemeinsame unendlichkleine Strecke kann begrenzt vorgestellt werden, aber darum ist es noch nicht nötig, dass diese Grenzen bestimmte sind. Die bestimmte Begrenzung bekommt erst einen Sinn, wenn man Strecken verschiedener Grösse vergleicht, z. B. zwei endliche oder unendlichkleine untereinander.

Als Grundsatz der Weitenbehaftungen muss aufgestellt werden: Die Grösse einer höheren Weitenbehaftung kann in ihrem Wesen, z. B. die endliche Strecke in ihrer endlichen Grösse, nicht durch eine zugesetzte unendlichkleine vermehrt werden, oder ein unendlichkleiner Summand neben endlichen ist Null. Aber freilich, unendlichviele, unendlichkleine Summanden ergeben etwas Endliches. Dies folgt einfach aus der strengen Sonderung der verschiedenen Weitenbehaftungen, die zwar für jede Behaftung bestimmte Verhältnisse aufweisen, aber nicht einfach durcheinander gemengt werden können. Die Grössen verschiedener Weitenbehaftung sind durch die Sondergesetze der Behaftungen deutlich geschieden, aber ebenso unzweifelhaft durch Beziehungsgesetze zwischen den Behaftungen verbunden. (Fortsetzung folgt.)

Die Schubkurbel

ein Kapitel aus der angewandten Mathematik.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Breslau *)

Von F. Ebner (Breslau).

Von berufener Seite ist schon oft darauf hingewiesen, den mathematischen Unterricht durch die Einführung gewisser technischer Anwendungen der Mathematik zu beleben. Gewöhnlich werden als solche Anwendungen der logarithmische Rechenschieber und das Amslersche Polarplanimeter genannt. Es gibt jedoch noch ein drittes Instrument, das für den Maschinentechniker von grösster Bedeutung ist und auch das Interesse des Mathematikers beanspruchen darf. Wir meinen den Indikator, jenen von James Watt zur Arbeitsmessung erfundenen Apparat, der ihm „für die Vervollkommnung seiner Dampfmaschine so wesentliche Dienste geleistet hat.“ Das mathematische Interesse konzentriert sich bei dem Indikator vor allem auf die sogen. Gradführung des Schreibstiftes. Auf dieses Problem die Aufmerksamkeit der Mathematiker zu lenken und es in seiner allgemeinsten Form zu diskutieren, ist der Zweck der folgenden Zeilen. Allerdings zeigt dieses Problem eine Eigentümlichkeit, die fast alle Aufgaben auszeichnet, welche die Technik der Mathematik stellt: so leicht und einfach sich die Aufgabe für den konstruierenden Ingenieur erweist, so schwierig und mühsam gestaltet sie sich für den rechnenden Mathematiker, der mit dem schwerfälligen Gerüst des Cartesischen Koordinatensystems arbeiten muss. Man wird es deshalb verstehen, wenn wir uns bei der Behandlung der Indikatoraufgabe gewisse Beschränkungen auferlegen und nur das mathematisch Interessante hervorheben.

Demgemäss behandeln wir in §§ 1—4 die Bahnkurven der allgemeinen exzentrischen Schubkurbelbewegung und ihre wichtigsten Eigenschaften; in § 5 werden die Ergebnisse der allgemeinen Untersuchung für die eigentliche, sogen. zentrische Schubkurbel spezialisiert. Der letzte Paragraph (§ 6) bespricht dann kurz die Gradführung der verschiedenen Indikatorkonstruktionen. **)

---

*) S. Unt.-Bl. IX, 3, S. 60.

**) Zur mathematischen Literatur über unseren Gegenstand ist zu erwähnen:

S. Roberts, Proceedings of the London mathemat. Society, vol. II und III.

R. Müller, Ueber die Gestaltung der Koppelkurven für besondere Fälle des Kurbelbetriebes. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 36. 1891, S. 11.

Vom rein kinematischen Standpunkt aus findet man die Schubkurbel als Spezialfall des allgemeinen Kurbelmechanismus in allen Lehrbüchern der Kinematik und theoret. Maschinenlehre, z. B. in Burmester, Kinematik, I. S. 325—328, ferner in Grashoff, Theoret. Maschinenlehre, Bd. II, S. 124 ff. Bemerkt sei noch, dass sich eine gewisse Bahnkurve der Schubkurbelbewegung in dem Loriaschen Sammelwerk über ebene Kurven unter den „Polyzomalkurven“ S. 131 flüchtig erwähnt findet

§ 1.

Die Aufgabe der Schubkurbelbewegung.

Aufgabe: Eine Gerade werde so bewegt, dass ein gegebener Punkt auf ihr immer auf einem gegebenen Kreise, ein anderer immer auf einer gegebenen Geraden bleibt; die Bahnkurve irgend eines dritten Punktes auf der bewegten Geraden zu bestimmen.*)

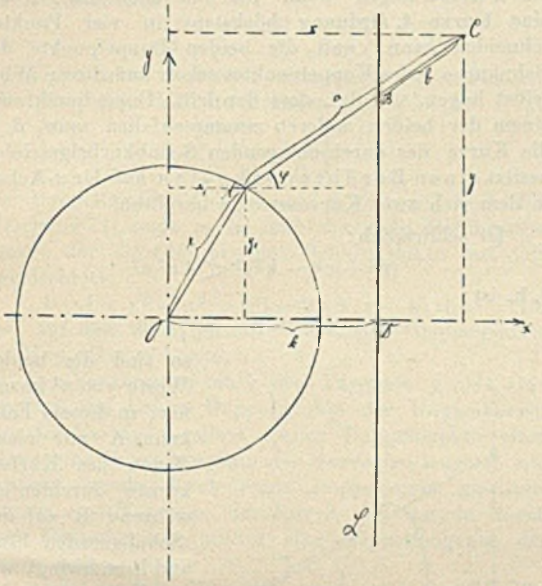


Fig. 1.

Der Mittelpunkt O des gegebenen Kreises, des sog. Kurbelkreises, werde als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes gewählt, dessen x-Achse in die Richtung des von O auf die feste Gerade, der sogen. Schubgeraden, gefällten Lotes falle.

Die Koordinaten irgend eines Punktes C auf der bewegten Geraden, der sogen. Koppel, seien x und y; der Abstand dieses Punktes von dem gegebenen Punkte A sei a, von dem gegebenen Punkte B sei b. Liegt C zwischen A und B, so soll b negativ, liegt er auf der Verlängerung von A B über A hinaus, so sollen a und b negativ gerechnet werden.

Bezeichnet r den Kurbelradius, k den Abstand des Kurbelmittelpunktes von der Schubgeraden, und sind (x_1, y_1) die Koordinaten von A, so folgt aus Fig. 1:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - a\cos\varphi \\ y_1 &= y - a\sin\varphi \\ k &= x - b\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aus der dritten Gleichung folgt

$$\cos\varphi = \frac{x-k}{b}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{b^2-(x-k)^2}}{b}$$

Setzt man diese Werte für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in die Kreisgleichung:

$$x_1^2 + y_1^2 = (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 = r^2$$

ein, so folgt nach einigen Umformungen:

$$\frac{x^2+y^2+a^2-r^2}{2a} = \frac{x(x-k)}{b} + \frac{y\sqrt{b^2-(x-k)^2}}{b}$$

oder

$$\text{(I)} \qquad [b(x^2+y^2+a^2-r^2) - 2ax(x-k)]^2 = 4a^2y^2[b^2-(x-k)^2].$$

Die Gleichung (I) der gesuchten Bahnkurve kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\text{(II)} \qquad [b(x^2+y^2+a^2-r^2) - 2ax(x-k)]^2 + [2ay(x-k)]^2 = 4a^2b^2y^2$$

oder auch nach y aufgelöst und $a - b = c$ gesetzt:

$$\text{(III)} \quad y = \frac{1}{b}\left[\pm a\sqrt{b^2-(x-k)^2} \pm \sqrt{b^2r^2-(cx-ak)^2}\right]$$

Die Gleichungen (I bis III) der Bahnkurve, deren jede ihre besonderen Vorzüge hat, zeigen, dass die Bahnkurve eines beliebigen Koppelpunktes vom 4. Grade ist und zur x-Achse symmetrisch liegt.

§ 2.

Die Doppelpunkte der Bahnkurve eines Koppelpunktes.

Um die Bahnkurve weiter zu diskutieren, sollen zunächst die singulären Punkte bestimmt werden, im Besonderen die Doppelpunkte, deren eine Kurve 4. Ordnung höchstens drei haben kann.

Aus der Gleichung (II) der Bahnkurve folgt sofort, dass die Koordinaten aller Punkte, die gleichzeitig den drei Gleichungen:

$$[b(x^2+y^2+a^2-r^2) - 2ax(x-k)]^2 = 0,$$
$$[2ay(x-k)]^2 = 0, \quad (2aby)^2 = 0$$

genügen, Doppelpunkte der Bahnkurve sein müssen.

Diesen drei Gleichungen wird nun zugleich genügt durch die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kurven:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ b(x^2+y^2+a^2-r^2) - 2ax(x-k) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d. h. die beiden Doppelpunkte sind die Schnittpunkte der x-Achse mit einem Kegelschnitt; ihre Koordinaten sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{a+c}\left[ak \pm \sqrt{a^2k^2+(a^2-r^2)(a^2-c^2)}\right] \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Die beiden Doppelpunkte fallen in einen zusammen für:

$$a^2k^2 + (a^2-r^2)(a^2-c^2) = 0$$

oder nach a^2 aufgelöst, für:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[(r^2+c^2-k^2) \pm \sqrt{(r^2+c^2-k^2)^2 - 4r^2c^2}\right]$$

Die diesen vier Werten von a entsprechenden Koppelpunkte beschreiben also im allgemeinen Bahnkurven mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten; diese vier Koppelpunkte, die zu A symmetrisch liegen, sind jedoch nur reell und verschieden für:

$$(r^2+c^2-k^2)^2 > 4r^2c^2$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} c &> r+k \\ c &< r-k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Im ersten Falle kann die Kurbel O A volle Umdrehungen machen und während einer Umdrehung schwingt der Punkt B auf der Schubgeraden hin und her; das Getriebe ist ein rotierendes Schubkurbelgetriebe. Dabei kann die Strecke der Schubgeraden, die B durchläuft, auf der einen oder anderen Seite von D liegen (vergl. Fig. 2), d. h. die Bahnkurve besteht aus zwei getrennten Teilen.*)

Im anderen Falle ($c < r - k$), der nur Sinn hat, wenn die Schubgerade den Kurbelkreis schneidet, kann der Punkt A nur einen bestimmten Bogen des Kurbelkreises beziehentlich den zu O D symmetrischen beschreiben, während B wieder auf der Schubgeraden hin- und herschwingt; das Getriebe ist ein schwingendes Schubkurbelgetriebe, und die Bahnkurve besteht wieder aus zwei getrennten Teilen.

Die beiden Punktepaare der Koppel, die Bahnkurven mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten erzeugen, fallen in ein Paar zusammen, wenn:

*) Die Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der bekannten Aufgabe der Bewegung einer gegebenen Strecke in einem gegebenen Winkel; bei dieser „Kreuzschieberkette" (Ellipsenzirkel) sind die Bahnkurven Ellipsen.

*) Die Bahnkurven sind hier wie in allen anderen Figuren ausgezogen.

$$(r^2 + c^2 - k^2)^2 = 4 r^2 c^2$$

ist, d. h. für

$$\left.\begin{array}{l} c = r + k \\ c = r - k \end{array}\right\} \quad (2)$$

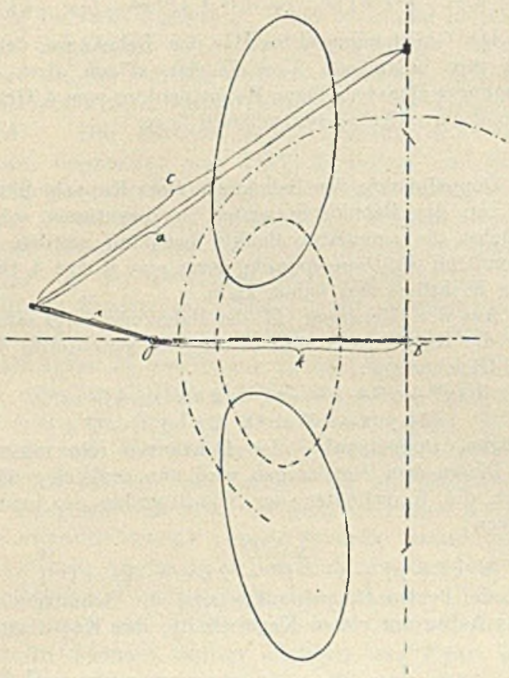


Fig. 2.

In diesem Falle passieren A und B gleichzeitig die x-Achse; sorgt man also durch Beharrungsschluss dafür, dass B den Punkt D überschreitet, so wird bei zweimaliger Umdrehung der Kurbel der Punkt B auf der Schubgeraden eine Hin- und Herschwingung machen, die zu D symmetrisch liegt; das Getriebe ist ein durchschlagendes Schubkurbelgetriebe (vergl. Fig. 3).

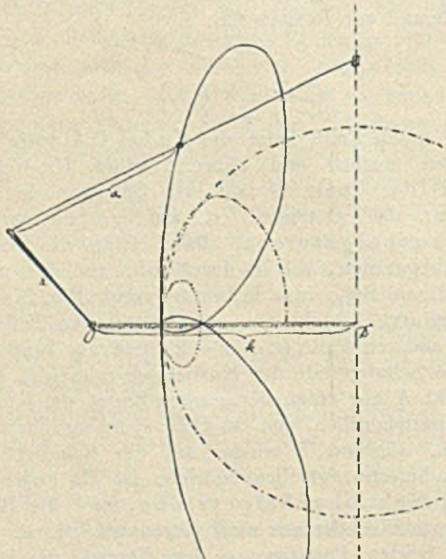


Fig. 3.

Da in dieser Durchschlagslage die beiden Kurventeile des Falles (1) für jeden Koppelpunkt ineinander übergehen, so ergibt sich in dieser Durchschlagslage für jeden Koppelpunkt (und ebenso für jeden mit der Koppel fest verbundenen Punkt) ein dritter Doppelpunkt, der in dem Falle, dass man sich auf die Bahnkurven der Koppelpunkte selbst beschränkt, auch auf der x-Achse liegen muss. Da nun aber die x-Achse eine Kurve 4. Ordnung höchstens in vier Punkten schneiden kann, und die beiden Doppelpunkte der Bahnkurve jedes Koppelpunktes schon auf dieser Achse selbst liegen, so folgt, dass der dritte Doppelpunkt mit einem der beiden anderen zusammenfallen muss, d. h. die Kurve des durchschlagenden Schubkurbelgetriebes besitzt einen Berührungsknoten auf der x-Achse, in dem sich zwei Kurvenzweige berühren.

Ist schliesslich:

$$(r^2 + c^2 - k^2)^2 < 4 r^2 c^2$$

d. h. ist:

$$r + k > c > r - k, \Big\} \quad (3)$$

so sind die beiden Werte von a^2 imaginär; in diesem Falle kann A nur einen Bogen des Kurbelkreises durchlaufen, während B auf der Schubgeraden hin- und herschwingt wie im Falle (2); das Getriebe ist ein schwingendes Schubkurbelgetriebe mit nur einteiligen Bahnkurven; die beiden Doppelpunkte sind immer reell (vergl. Fig. 4).

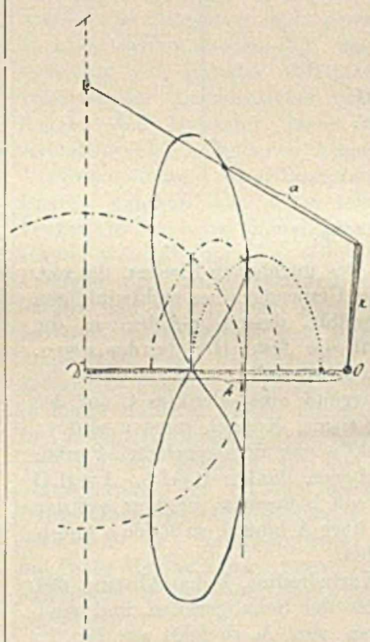


Fig. 4.

Das Resultat der Untersuchung der Doppelpunkte lautet mithin:

Die Bahnkurve irgend eines Koppelpunktes besitzt im allgemeinen 2 Doppelpunkte auf einer Geraden durch den Kurbelmittelpunkt, ist demnach eine sogen. elliptische Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht 1. Im Falle des durchschlagenden Schubkurbelbetriebes erhöht sich die Zahl der Doppelpunkte auf drei; die Kurve 4. Ordnung ist dann vom Geschlecht 0. Bei den zweiteiligen Koppelkurven können die beiden Doppelpunkte zusammenfallen oder imaginär werden; bei den einteiligen Koppelkurven des schwingenden Schubkurbelbetriebes sind sie immer reell.

§ 3.

Die Doppeltangenten der Koppelkurve.

Statt die Doppelpunkte zur Grundlage der Klassifikation der Bahnkurven des Schubkurbelgetriebes zu machen, kann man auch nach dem Vorgange von

Plücker und Zeuthen*) die reellen Doppeltangenten der Bahnkurve benutzen.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung diene die Gleichung (I) des § 1, nämlich:

$$\text{(I)}\qquad [b(x^2 + y^2 + a^2 - r^2) - 2ax(x-k)]^2 = 4a^2y^2[b^2 - (x-k)^2].$$

Diese Gleichung zeigt durch ihre Form sofort, dass die Kegelschnitte:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 0 \\ b^2 - (x-k)^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

die Koppelkurve in je zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, d. h. dass die Geraden:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ b + (x-k) &= 0 \\ c - (x-k) &= 0 \end{aligned}\right\}\quad (4)$$

drei Doppeltangenten der Kurve 4. Ordnung sind. Die Gleichung (I) zeigt auch, dass die sechs Berührungspunkte der Geraden (4) ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt:

$$b(x^2 + y^2 + a^2 - r^2) - 2ax(x-k) = 0 \qquad (5)$$

sind, auf dem nach § 2 auch die beiden Doppelpunkte der Koppelkurve liegen.

Die Berührungspunkte der Tangente $y = 0$ sind demnach die beiden Doppelpunkte der Koppelkurve; dass die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte einer Kurve eine Doppeltangente der Kurve ist, leuchtet ein, da jede Gerade durch einen Doppelpunkt gewissermassen eine Tangente der Kurve, die Gerade durch zwei Doppelpunkte mithin eine Doppeltangente der Kurve sein muss.

Als eigentliche Doppeltangenten der Koppelkurve bleiben also nur die beiden Parallelen zur Schubgeraden:

$$\left.\begin{aligned} b + (x-k) &= 0 \\ b - (x-k) &= 0 \end{aligned}\right\}\quad (4')$$

Um ihre Berührungspunkte mit der Kurve 4. Ordnung zu finden, hat man ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt (5) zu bestimmen. Die Gleichung dieses Kegelschnitts kann mit Hilfe der Koordinatenverschiebung:

$$\xi = x - \frac{ak}{a+c}$$

$$\eta = y$$

auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + 1, \qquad (6)$$

wo gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{a^2k^2 + (a^2 - r^2)(a^2 - c^2)}{(a+c)^2} \\ b_1^2 &= \frac{a^2k^2 + (a^2 - c^2)(a^2 - r^2)}{c^2 - a^2} \end{aligned}\right\}\qquad (6).$$

Die Gleichung (6) zeigt, dass dieser Kegelschnitt eine Ellipse für $c > a$, eine Hyperbel für $a > c$ ist; der Uebergang von der Ellipse zur Hyperbel wird vermittelt durch das Linienpaar (für $c = a$):

$$\xi = \pm \frac{ak}{a+c} = \pm \frac{k}{2} \qquad (7)$$

oder

$$x = \frac{k}{2} \pm \frac{k}{2}. \qquad (7)$$

Der Kegelschnitt (6) ist reell, solange der Ausdruck:

$$\sqrt{a^2k^2 + (a^2 - r^2)(a^2 - c^2)}$$

reell ist, das heisst nach § 2: solange die beiden Doppelpunkte (die Scheitelpunkte des Kegelschnitts auf der x-Achse) reell sind. Diese Bedingung ist aber nach § 2 erfüllt für alle zweiteiligen Koppelkurven, solange:

$$a^2 < \frac{1}{2}\left[(r^2 + c^2 - k^2) - \sqrt{(r^2 + c^2 - k^2)^2 - 4r^2c^2}\right] = a'^2$$

und:

$$a^2 > \frac{1}{2}\left[r^2 + c^2 - k^2 + \sqrt{(r^2 + c^2 - k^2)^2 - 4r^2c^2}\right] = a''^2$$

Ist dagegen:

$$a'^2 < a^2 < a''^2,$$

so wird für die zweiteiligen Koppelkurven der Kegelschnitt (6) imaginär (imaginäre Ellipse); der Uebergang von einer reellen zu einer imaginären Ellipse und umgekehrt tritt ein für $a = a'$ bezw. $a = a''$; der Uebergangskegelschnitt ist dabei das imaginäre Gradenpaar:

$$(c + a)\xi^2 + (c - a)\eta^2 = 0$$

mit reellem Schnittpunkt (nämlich $x = \frac{ak}{a+c}$).

Für das durchschlagende und das schwingende einteilige Schubkurbelgetriebe ist dagegen der Kegelschnitt (6) immer reell. Im Falle des durchschlagenden Kurbelgetriebes fallen nämlich die beiden Werte von a'^2 und a''^2 zusammen in den Wert:

$$a^2 = \pm rc$$

ohne dass dieser Wert den Uebergang in das Imaginäre vermittelt; vielmehr schliessen sich an das imaginäre Gradenpaar mit reellem Schnittpunkt wieder Ellipsen, die durch das reelle Linienpaar (7) in Hyperbeln übergehen.*)

Für das schwingende einteilige Kurbelgetriebe werden sowohl a'^2 wie a''^2 imaginär; es tritt überhaupt kein Punkt als Grenzfall einer Ellipse ein.

Sucht man nun die Schnittpunkte der beiden Graden (4′) mit dem Kegelschnitt (5), so erhält man als Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Doppeltangenten (4′) mit der Kurve 4. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} x &= k - b \\ y &= \pm\sqrt{r^2 - (k+c)^2} \end{aligned}\right\}\quad (8)$$

bezw.

$$\left.\begin{aligned} x &= k + b \\ y &= \pm\sqrt{r^2 - (k-c)^2} \end{aligned}\right\}\quad (8')$$

Diese Berührungspunkte sind also nur reell für:

$c < r - k$ (zweiteiliges schwingendes Getriebe) (8)

bz. $c < r + k$ (einteiliges schwingendes Getriebe) (8′)

Für die Punkte $o < a < c$ ist dabei b negativ zu nehmen. Für das durchschlagende Getriebe $c = r \pm k$ ist ebenfalls nur die eine der beiden Doppeltangenten eine solche mit reellem Berührungspunkt; es ist das stets die Doppeltangente im Berührungsknoten.

Die bisher besprochenen Doppeltangenten (4) sind sog. Doppeltangenten erster Art nach **Plücker**, d. h. sie berühren nur einen und denselben Teil der Kurve 4. Ordnung zweimal oder ihre Berührungspunkte sind imaginär; ihre Zahl beträgt allgemein vier.

Daneben besitzt aber jede Kurve 4. Ordnung, die aus zwei einander nicht umschliessenden Teilen besteht, noch 4 gemeinsame andere Tangenten, sog. Tangenten zweiter Art, genau so wie zwei Kegelschnitte im allgemeinen 4 gemeinsame Tangenten besitzen, die im besonderen natürlich imaginär werden können; ihre Zahl beträgt für die Koppelkurve höchstens vier.

Man erhält also das Resultat:

Die Bahnkurve eines Koppelpunktes besitzt im allgemeinen acht Doppeltangenten, von denen vier solche erster Art, vier solche zweiter Art sind. Die Berührungspunkte der eigentlichen Doppeltangenten

*) Die Kurve, an der Plücker zeigte, dass die 28 Doppeltangenten einer Kurve vierten Grades alle reell sein können, ist eine Bahnkurve der allgemeinen Schubkurbelbewegung, bei welcher der beschreibende Punkt mit der Koppel fest verbunden ist; vergl. Crelles Journ. Bd. 49.

*) In Fig. 3 und 4 ist dieser Kegelschnitt punktiert eingezeichnet.

erster Art können nur bei den schwingenden und dem durchschlagenden Schubkurbelbetriebe einmal reell werden; die Berührungspunkte der Doppeltangenten zweiter Art können bei jedem Schubkurbelgetriebe reell werden.

§ 4.

Die Konstruktion der Koppelkurve.

Es erübrigt sich noch die Untersuchung der Gleichung (III) der Koppelkurve in § 1:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}(x-k)^2} \pm \sqrt{r^2 - \frac{(cx - ak)^2}{b^2}} \qquad \text{(III')}$$

wo alle vier Vorzeichenkombinationen giltig sind, da bei einer Kurve 4. Ordnung zu jeder Graden $x = \text{konst.}$ im allgemeinen vier Werte von y gehören. Die Gleichung (III') kann in der Form geschrieben werden:

$$y = \pm y_1 \pm y_2 \qquad \text{(III'')}$$

wo gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}(x-k)^2} \\ y_2 &= \sqrt{r^2 - \frac{(cx - ak)^2}{b^2}} \end{aligned}\right\}$$

Setzt man noch:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - k \\ x_2 &= x - \frac{ak}{c} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

so wird:

$$y_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} x_1^2$$

$$y_2^2 = r^2 - \frac{c^2 x_2^2}{b^2}$$

und man erhält y_1 und y_2 als die Ordinaten der beiden Ellipsen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{y_1^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{x_2^2}{\left(\frac{br}{c}\right)^2} + \frac{y_2^2}{r^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

Der Mittelpunkt der ersten Ellipse (9') ist stets der Punkt D der Schubgeraden; der Mittelpunkt der zweiten Ellipse (9') wandert mit a von $-\infty$ bis $+\infty$ auf der x-Achse.

Vermittelst der beiden Gleichungen (III'') und (9') kann die Koppelkurve leicht konstruiert werden; sie liegt stets innerhalb eines Flächenstreifens parallel zur y-Achse, der sowohl y_1 wie y_2 enthält, also den beiden Ellipsen (9') zugleich zukommt. Soll die Koppelkurve demnach reell sein, so können die beiden Ellipsen (9') niemals ganz auseinander liegen.*)

Schneidet die eine Ellipse die andere, so fallen für den Schnittpunkt zwei der vier Werte von y in Null zusammen, d. h. dem Schnittpunkt entspricht ein Doppelpunkt der Koppelkurve auf der x-Achse. Die Diskussion der Doppelpunkte kann also auch geführt werden durch die Diskussion der Schnittpunkte der beiden Ellipsen (9').

Sind z. B. alle vier Schnittpunkte, die zur x-Achse stets symmetrisch liegen, reell, so besitzt die Koppelkurve zwei reelle Doppelpunkte, die die Schnittpunkte ihrer zwei Teile sind; berührt die eine Ellipse die andere, so fallen zwei Doppelpunkte in einen zusammen, der der Berührungspunkt der zwei Teile ist.

*) Die beiden Ellipsen, deren eine für den Koppelmittelpunkt zum Kreis um D wird, sind in allen Figuren gestrichelt eingetragen.

Liegt die eine Ellipse ganz innerhalb der anderen, so sind die Schnittpunkte der beiden Teile der Koppelkurve imaginär; da aber das x des Doppelpunktes in § 2 doch reell bleiben kann, so besitzt die Koppelkurve eventuell noch zwei isolierte Punkte auf der x-Achse; derartige isolierte Punkte können aber nur auftreten, wenn die Hauptachse $2b$ der einen Ellipse (9') stets grösser oder kleiner als die Hauptachse $2b\frac{r}{c}$ der anderen Ellipse (9') ist, also nur für das rotierende Schubkurbelgetriebe $c > r + k$ oder das schwingende zweiteilige Schubkurbelgetriebe $c < r - k$.

Sind von den vier Schnittpunkten der beiden Ellipsen (9') nur zwei reell, liegen die beiden Ellipsen also nur teilweise in einander, so entspricht diesem Schnittpunkt der eine Doppelpunkt, der andere ist dann ein isolierter Punkt. Es ist dies der Fall bei dem schwingenden einteiligen Schubkurbelgetriebe $r + k > c > r - k$.

Bei dem durchschlagenden Kurbelgetriebe berühren sich die beiden Ellipsen stets in einem Punkte der x-Achse, dem der Berührungsknoten der Koppelkurve entspricht, der andere Doppelpunkt kann reell und isoliert sein.

Ist speziell y_1 oder y_2 gleich Null, so fallen ebenfalls die vier Werte von y in zwei zur x-Achse symmetrische zusammen; ist mithin dieser übrigbleibende Wert reell, so schneidet die Tangente in dem einen Scheitelpunkt der grossen Achse der einen Ellipse die andere Ellipse in einem Punkte, der zugleich ein Berührungspunkt einer Doppeltangente der Koppelkurve sein muss.

Dabei sind die Scheiteltangenten der ersten Ellipse (9') in den Endpunkten der grossen Achse, wie man leicht sieht, die zwei eigentlichen Tangenten erster Art des § 3, die Scheiteltangenten der zweiten Ellipse sind dagegen immer Doppeltangenten zweiter Art.

Mit Hilfe der beiden Ellipsen kann also die Koppelkurve sehr übersichtlich diskutiert und konstruiert werden.

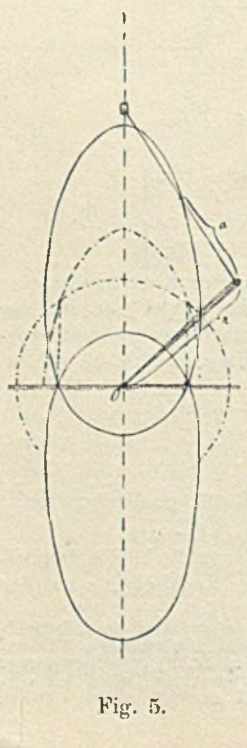


Fig. 5.

§ 5.

Das zentrische Schubkurbelgetriebe.

Die vorhergehenden Untersuchungen sollen nun spezialisiert werden für den in der Technik wichtigen Fall:

$$k = 0$$

Die Schubgerade geht dann durch den Kurbelmittelpunkt, und das Getriebe heisst *zentrisch*; die Bahnkurve ist nach § 1 auch symmetrisch zur y-Achse. In diesem Spezialfall reduzieren sich die vier Getriebearten des § 2 auf folgende drei: (vergl. hierzu Fig. 5—7).

(1') $c > r$: das rotierende zentrische Schubkurbelgetriebe (in der Praxis kurz Schubkurbel genannt).

(2') $c = r$: das gleichschenkl. zentrischeGetriebe

(3′) $c < r$: das schwingende (zweiteilige) zentrische Schubkurbelgetriebe.

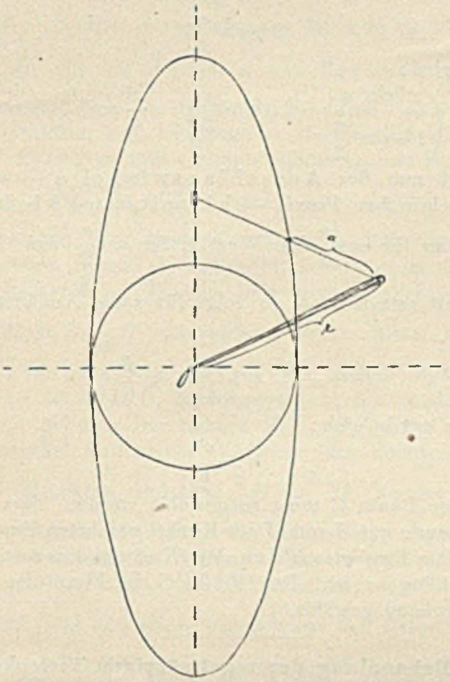


Fig. 6.

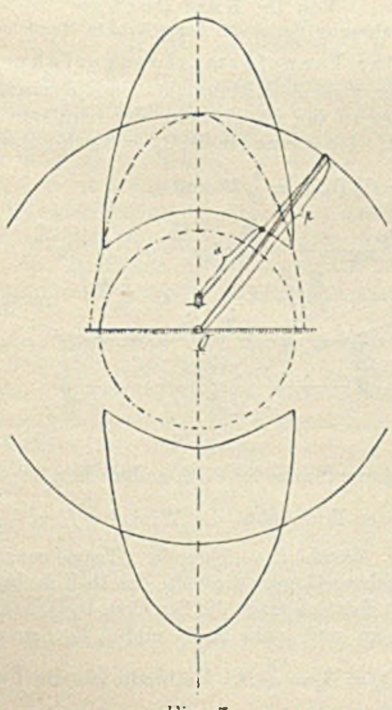


Fig. 7.

Das schwingende einteilige Schubkurbelgetriebe fällt hier fort. Die Koordinaten der Doppelpunkte werden jetzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(a^2 - c^2)}}{a + c} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sie liegen also symmetrisch zum Kurbelmittelpunkt; sie fallen in ihn zusammen für:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[r^2 + c^2 \pm (r^2 - c^2)\right]$$

oder: $\left.\begin{aligned} a' &= \pm c \\ a'' &= \pm r \end{aligned}\right\}$

Ist also $c > r$ (rotierendes Getriebe), so folgt für:

$0 < a < r$: zwei reelle Doppelpunkte (Knotenpunkte).

$a = r$: zwei zusammenfallende Knotenpunkte (im Kurbelzentrum).

$r < a < c$: zwei imaginäre Knotenpunkte.

$a = c$: zwei zusammenfallende isolierte Punkte (im Kurbelzentrum).

$c < a < \infty$: zwei isolierte Punkte (auf der x-Achse).

Ist dagegen: $c < r$ (schwingendes Getriebe), so beginnt bei ähnlicher Veränderung von a die Reihe mit den zwei isolierten Punkten und schliesst umgekehrt mit den zwei reellen Knotenpunkten; die Bahnkurven des schwingenden Getriebes sind also die umgekehrten des rotierenden.

Ist endlich: $c = r$ (gleichschenkliges oder durchschlagendes Getriebe), so folgt aus Gleichung (I) der Koppelkurve in § 1 für $k = 0$, $r = c$:

$$(a + c)\,x^2 - (a - c)\,y^2 - (a - c)^2 (a + c) = \mp 2\,a\,y\sqrt{b^2 - x^2}$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\left[y \pm \sqrt{b^2 - x^2}\right] \cdot \left[y \pm \sqrt{b^2 - x^2} - \frac{c}{a}\left(y \pm \sqrt{b^2 - y^2}\right)\right] = 0$$

Die Koppelkurve zerfällt also in die beiden Kurven:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a + c)^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

d. i. in einen Kreis vom Radius b um O und in eine Ellipse, die den Kreis in seinen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt; die Berührungspunkte der beiden Kurven (10) sind die beiden Doppelpunkte, die eigentlich aus vier Doppelpunkten, den Schnittpunkten von Kreis und Ellipse, entstanden zu denken sind.

Sorgt man durch Beharrungsschluss dafür, dass die Koppel des gleichschenkligen Getriebes ihre Totlage — die Durchschlagslage durch die x-Achse — überschreiten kann, so erhält man als Bahnkurve eine Ellipse; das Getriebe kann dann als Ellipsograph bezeichnet werden. Unter den Bahnellipsen sind zwei ausgezeichnete: die Strecke $4\,r = 4\,c$ auf der x-Achse (für $a = c$, $b = 0$) und die gleiche Strecke auf der x-Achse (für $a = -c$, $b = -2\,c$).

Die Doppeltangenten erster Art des zentrischen Getriebes sind zwei Parallele zur y-Achse im Abstande $x = \pm b$; sie sind gemäss den beiden Gleichungen (9′) in § 4 Doppeltangenten mit reellem Berührungspunkt für $b < b\frac{r}{c}$, d. i. für $c < r$ (schwingendes Getriebe) dagegen Doppeltangenten mit imaginären Berührungspunkten für $b > b\frac{r}{c}$, d. i. für $c > r$ (rotierendes Getriebe). Für $c = r$ sind die Berührungspunkte der Doppeltangenten natürlich die beiden Doppelpunkte (Berührungspunkte) von Kreis und Ellipse.

Für die Doppeltangenten zweiter Art folgt aus den Gleichungen (9') leicht Entsprechendes.

§ 6.
Anwendung auf den Indikator.

Die folgende Skizze erläutert kurz die Geradführung eines der gebräuchlichsten Indikatoren, des sogen. Thompson-Indikators.

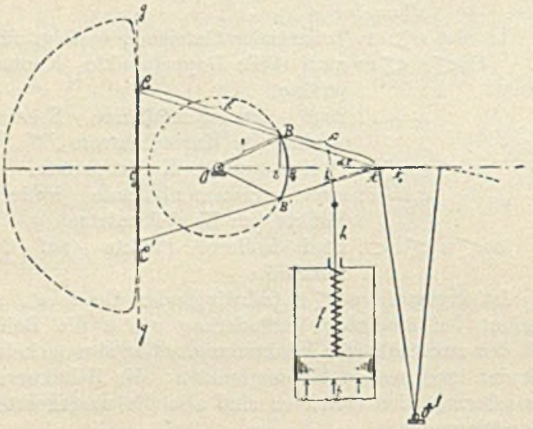


Fig. 8.

f ist die durch den Dampfdruck p zusammengedrückte Schraubenfeder des Indikators, k die Verbindungsstange der Kolbenstange h mit dem sogen. Hauptlenker AC. B ist der auf der Kurbel um O geführte Punkt, A der auf der Schubgeraden durch O geführte Punkt*), dessen Führung aus praktischen Gründen durch die Führung auf flachem Kreisbogen um O' mit grossem Radius O' A ersetzt wird. Der Schreibstift C beschreibt dann bei vollem Umlauf der Kurbel die eingezeichnete Bahnkurve $C C'_0 C'$ deren inbezug auf Oy symmetrischer Teil weggelassen wird. Beschränkt man sich also auf kleine Ausschläge α, so bewegt sich der Schreibstift C angenähert auf der Geraden gg parallel zur Kolbenstange h und zeichnet auf einem proportional zu der Kolbenbewegung drehbaren Zylinder eine Kurve auf, das sogen. Indikatordiagramm, dessen Abscissen der Kolbenbewegung, dessen Ordinaten dem Dampfdruck p proportional sind. Die Auswertung der Fläche dieses Diagramms liefert dann bekanntlich die indizierte Arbeit der Maschine.

Wählt man spec. $c = r$ statt wie bei Thompson $c > r$, so wird nach § 5 das rotierende Schubkurbelgetriebe gleichschenklig. und der Punkt C, der von B um r absteht, beschreibt dann eine exakte Gerade. In diesem Falle wird die Geradführung des Schreibstiftes C eine genaue; der so beschaffene Indikator ist der meist angewandte Rosenkranz-Indikator der Firma Dreyer, Rosenkranz und Droop in Hannover.

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, wie man elementar bei gegebenem c und r in Fig. 8 denjenigen Punkt C auf der Verlängerung von AB über B hinaus finden kann, der ein möglichst gradliniges Bahnstück beschreibt, dessen Bahnkurve sich also soviel wie möglich einer Geraden parallel zur Kolbenstange h anschmiegt. Aus Fig. 8 folgt nämlich nach dem Sehnensatz:

$$\overline{BD}^2 = \widehat{B_0 D}\left(2r - \overline{B_0 D}\right)$$

also:

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BD}^2}{B_0 D} + B_0 D\right)$$

*) Die Buchstaben A und B sind hier gegen § 5 vertauscht.

Nun ist aber in der abgekürzten Bezeichnungsweise von Fig. 8:

$$BD = c \cdot \sin\alpha,\ B_0 D = B_0 C_0 - C_0 D = b - b\cos\alpha = 2b\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Also wird:

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2\sin^2\alpha}{2b\sin^2\frac{\alpha}{2}} + 2b\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c^2}{b}\cos^2\frac{\alpha}{2} + b\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ist nun der Ausschlagswinkel α — wie in der technischen Praxis — hinreichend klein, sodass man für $\cos\frac{\alpha}{2}$ den Wert 1, für $\sin\frac{\alpha}{2}$ den Bogen $\frac{\alpha}{2}$ selbst setzen kann, so folgt für r die Annäherungsformel:

$$r = \frac{c^2}{b} + b\frac{\alpha^2}{4} = \sim \frac{c^2}{b}$$

Daraus ergibt sich:

$$b = \frac{c^2}{r}$$

d. h. der Punkt C muss so gewählt werden, dass seine Entfernung von dem auf der Kurbel geführten Punkte B die dritte Proportionale zu dem Kurbelradius r und der Koppellänge c ist. Der Punkt C in Fig. 8 ist dementsprechend gewählt.*)

Zur Behandlung der regelmässigen Vielecke.**)

(Fortsetzung).

Das reguläre Achtzehneck als Beispiel für ein Näherungsverfahren zur Konstruktion und zur Berechnung von regelmässigen Vielecken und von Winkelfunktionen.

Von Dr. Karl Bochow
Oberlehrer an der städt. Realschule in Magdeburg.

I. Das Transformationsverfahren.

In Fig. 8 ist A Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius r ist, in ihn ist die Seite des regulären 18-Ecks gezeichnet. Ich nenne sie $B_4 C_4$, weil die Basiswinkel $B_4 C_4 A = C_4 B_4 A = \frac{4}{9} \Pi$ sind.

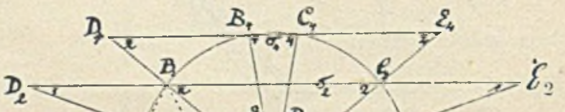


Fig. 8.

Aus dieser Sehne leite ich andere her, die mit den Radien ihrer Endpunkte die Winkel $\frac{2}{9}\Pi$ und $\frac{1}{9}\Pi$ einschliessen, durch das folgende „Transformationsverfahren“: ich verlängere die Seite des 18-Ecks beiderseits um den Radius, ich trage die Strecken $B_4 D_4 = C_4 E_4 = r$ an $B_4 C_4$ an und ziehe $A D_4$ und $A E_4$; so sind die Winkel $D_4 = E_4 = \frac{2}{9}\Pi$. Verbinde ich die Punkte, in welchen AD und AE den Kreis schneiden, mit ein-

*) Ueber das Konstruktive vergl. man „des Ingenieurs Taschenbuch Hütte“, Abschnitt Ellipsenlenker, ein für alle technischen Anwendungen der Mathematik höchst schätzenswertes Buch.

**) S. Unt.-Bl. VIII, 1902, S. 109.

ander, so entsteht ein neues gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln $\frac{2}{9}\Pi$, ich nenne die Schnittpunkte deshalb B_2 und C_2, es ist $A B_2 C_2 = A C_2 B_2 = \frac{2}{9}\Pi$. An der durch diese Transformation gewonnenen neuen Sehne $B_2 C_2$ führe ich dieselbe Konstruktion aus, ich trage an sie die Strecken $B_2 D_2 = C_2 E_2 = r$ an und verbinde wieder D_2 und E_2 mit A; so ist $\sphericalangle D_2 = E_2 = \frac{1}{9}\Pi$, und nenne ich die Punkte, in welchen die Strahlen $A D_2$ und $A E_2$ den Kreis schneiden, B_1 und C_1 und verbinde sie; so ist ein neues gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln $A B_1 C_1 = A C_1 B_1 = \frac{1}{9}\Pi$ entstanden. durch diese zweite Transformation ist aus der Sehne $B_2 C_2$ eine weitere Sehne $B_1 C_1$ hervorgegangen, die zu derselben Gruppe gehört. Den Sehnen $B_4 C_4$, $B_2 C_2$, $B_1 C_1$ liegen Basiswinkel an, welche Vielfache des neunten Teiles des Gestreckten sind (nur $\frac{3}{9}\Pi = \frac{1}{3}\Pi$ kommt nicht vor). Würde ich nun an die dritte Sehne $B_1 C_1$ abermals den Radius als $B_1 D_1 = C_1 E_1 = r$ nach aussen antragen und $A D_1$ und $A E_1$ ziehen: so würde der Winkel $\frac{1}{18}\Pi$ entstehen, welcher aus der Reihe herausfällt. Um in der Reihe der Winkel $\frac{1}{9}\Pi$ zu bleiben, betrachten wir die Punkte, in welchen $B_1 C_1$ von den Radien der allerersten Sehne, also von $A B_4$ und $A C_4$, geschnitten wird. Der erste Schnittpunkt heisse E_1, der zweite D_1; so ist $\sphericalangle A E_1 C_1 = A B_4 C_4 = \frac{4}{9}\Pi$, also da $\sphericalangle C_1 = \frac{1}{9}\Pi$ ist, ist auch $\sphericalangle C_1 A E_1 = \frac{4}{9}\Pi$, d. h. das Dreieck $A C_1 E_1$ ist gleichschenklig, es ist $C_1 E_1 = r$, und ebenso $B_1 D_1 = r$. — Tragen wir also jetzt den Radius nicht an $B_1 C_1$ nach aussen an, sondern auf $B_1 C_1$ nach innen ab, als $B_1 D_1 = C_1 E_1 = r$, und ziehen $A D_1$ und $A E_1$: so geht jener Strahl durch C_4, dieser durch B_4; die Sehne, von der wir ausgegangen waren, kehrt wieder, die Seite des 18-Ecks, die dritte, nach innen gerichtete Transformation liefert die Ausgangssehne. —

Beginnt man mit der Seite des 18-Ecks und wendet drei Transformationen an — die beiden ersten nach aussen, die dritte nach innen — so erscheint die Seite des 18-Ecks wieder, die Folge von Transformationen kehrt in sich selbst zurück, die Seite des regulären 18-Ecks gehört einem geschlossenen Transformationscyklus an.

II. Die Näherungs-Konstruktion.

Die für das 18-Eck charakteristische Folge von Transformationen — zwei nach aussen, eine nach innen — wenden wir nun auf eine beliebige Sehne an. In Fig. 9 ist BC nicht gleich s_{18}, $\sphericalangle ABC$ nicht gleich $\frac{4}{9}\Pi$ (BC ist grösser als s_{18}, der Winkel kleiner als $\frac{4}{9}\Pi$ gewählt). Ich bezeichne den Winkel mit β.

Wir transformieren nun zweimal nach aussen, einmal nach innen. Zuerst tragen wir an BC Strecke $BD = CE = r$ nach aussen an, ziehen AD und AE, so ist $\sphericalangle D = E = \frac{1}{2}\beta$, und nennen wir die Punkte, in welchen diese Strahlen den Kreis schneiden, B' und C' und verbinden sie, so ist auch $\sphericalangle AB'C' = AC'B' = \frac{1}{2}\beta$. Die Sehne $B'C'$ transformieren wir abermals

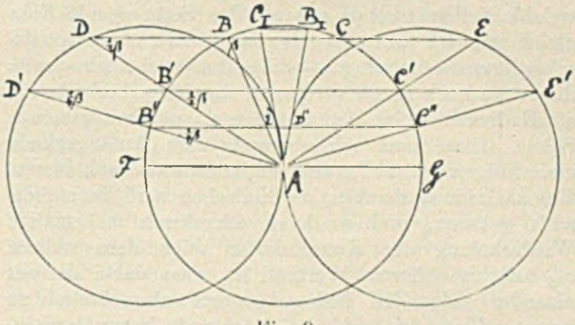


Fig. 9.

nach aussen, d. h. wir tragen $B'D' = C'E' = r$ an dieselbe an, ziehen die Strahlen AD' und AE' und nennen die Sehne, welche sie ausschneiden, $B''C''$; so ist $\sphericalangle AB''C'' = AC''B'' = D' = \frac{1}{4}\beta$. Die Sehne $B''C''$ transformieren wir nun nicht nach aussen — das würde den Winkel $\frac{1}{8}\beta$ liefern — sondern nach innen, d. h. wir tragen auf $B''C''$ Strecke $B''D'' = C''E'' = r$ ab und ziehen die Strahlen AD'' und AE'', welche den Kreis in B_I und C_I schneiden. Dann ist das Dreieck $AB''D''$ gleichschenklig, der Winkel an der Spitze ist $\frac{1}{4}\beta$, der Basiswinkel also $AD''B'' = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{8}\beta$, und ebenso gross sind die Basiswinkel des Dreiecks $A B_I C_I$.

Also: Wende ich auf eine Sehne, deren Basiswinkel β ist, die für das 18-Eck charakteristische Transformationenfolge — zwei nach aussen, eine nach innen — an, so erscheint als Resultat eine Sehne $B_I C_I$ mit dem Basiswinkel

$$\beta_I = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{8}\beta. \quad (1.$$

Wir fragen: Wann schliesst sich der Transformationscyklus? — Dann, wenn $\beta_I = \beta$ wird, d. h. wenn $\beta = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{8}\beta$; $\frac{9}{8}\beta = \frac{1}{2}\Pi$, $\beta = \frac{4}{9}\Pi$ ist, sonst nicht. Dann ist $BC = s_{18}$. — Nun sei aber BC von s_{18}, β von $\frac{4}{9}\Pi$ verschieden, es sei $\beta = \frac{4}{9}\Pi + \delta$, wo δ, der „Fehler“ des Winkels β, positiv oder negativ sein kann; dann ist $\beta_I = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{8}\beta = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{9}\Pi + \delta\right) = \frac{1}{2}\Pi - \frac{1}{18}\Pi - \frac{1}{8}\delta = \frac{4}{9}\Pi - \frac{1}{8}\delta$.

Also der Fehler derjenigen Endsehne $B_I C_I$, welche durch einmalige Durchführung der für das 18-Eck charakteristischen Transformationen gewonnen wird, ist dem absoluten Werte nach der achte Teil vom Fehler der Ausgangssehne, dem Vorzeichen nach ihm entgegengesetzt. War $\beta < \frac{4}{9}\Pi$, so ist $\beta_I > \frac{4}{9}\Pi$, und umgekehrt. War also BC grösser als s_{18}, so ist $B_I C_I$

kleiner; war BC zu klein, so ist $B_I C_I$ zu gross. Also liegt die wahre Seite des 18-Ecks immer zwischen BC und $B_I C_I$, und zwar (da der Fehler der letzteren geringer ist) näher an $B_I C_I$ als an BC. Die Transformationenfolge schliesst sich jetzt nicht, doch kommt die Endsehne der wahren Seite des 18-Ecks näher.

Gehe ich also von einer beliebigen Sehne aus, welche vielleicht schon nahezu der Seite des 18-Ecks gleich ist, und führe die für das 18-Eck charakteristischen Transformationen — die ersten zwei nach aussen, die letzte nach innen — einmal durch: so erhalte ich als Endresultat eine dem wahren s_{18} näher kommende Sehne. Diese kann ich abermals zum Anfangsgliede einer Folge von drei Transformationen, zwei nach aussen, eine nach innen, machen, die Endsehne wird dann abermals genauer, und so kann ich durch mehrmalige Wiederholung der Konstruktion mich dem wahren s_{18} beliebig nähern. Wertvoll ist, dass dabei die auf einander folgenden Näherungswerte abwechselnd zu gross und zu klein sind, jeder folgende kommt ausserdem dem wahren Werte immer näher, ich erhalte also einschliessende Grenzen, die einander immer näher rücken.

Gehe ich z. B. von der Seite des 16-Ecks aus, nehme ich sie als Ausgangssehne; so ist ihr Basiswinkel $\frac{7}{16}\Pi$, der Fehler desselben ist $\delta = \frac{7}{16}\Pi - \frac{4}{9}\Pi$ $= -\frac{1}{144}\Pi$, er ist negativ. Die Fehler der Basiswinkel, welche den Endsehnen der nach einander ausgeführten Transformationsfolgen angehören, sind der Reihe nach $+\frac{1}{1152}\Pi, -\frac{1}{9216}\Pi, +\frac{1}{73728}\Pi$, u. s. f.

Eine geometrische Beziehung ist noch beachtenswert. Bezeichne ich in Fig. 9 den zu unseren Sehnen parallelen Durchmesser mit FG, so ist leicht einzusehen, dass die Vierecke $ABDF$, $AB'D'F$, $AB''D''G$, und ebenso die anderen, $ACEG$ u. s. f., sämtlich Rhomben werden. Daraus folgt, dass alle Punkte D und E auf zwei Kreisen liegen, deren Radien gleich r, deren Mittelpunkte eben die Punkte F und G sind. Benutzt man diese Hilfskreise, so vereinfacht sich die Konstruktion. Man braucht dann zum Zwecke der Transformation gar nicht den Radius an- und abzutragen, man braucht nur die Schnittpunkte der Sehnen oder ihrer Verlängerungen mit diesen Hilfskreisen zu benutzen.

III. Der Gleichungscyklus und die periodische Kettenwurzel.

Die Sehnen von Fig. 8 bezeichne ich mit σ, einer jeden als Index die Zahl beisetzend, welche angibt, das wievielfache von $\frac{1}{9}\Pi$ der ihr anliegende Basiswinkel ist; also $B_4 C_4 = \sigma_4$ u. s. f.

Die Figur enthält aber Paare gleichschenkliger Dreiecke, die einander kongruent sind, weil sie im Schenkel r und im Basiswinkel $\frac{p}{9}\Pi$ übereinstimmen:

$\triangle AD_4B_4 \cong B_2C_2A$, also ist $AD_4 = B_2C_2 = \sigma_2$;
$\triangle AD_2B_2 \cong B_1C_1A$, also ist $AD_2 = B_1C_1 = \sigma_1$;
$\triangle AD_1B_1 \cong B_4AC_4$, also ist $AD_1 = B_4C_4 = \sigma_4$.

Die drei σ kehren also wieder in Gestalt der Strecken AD resp. AE.

Die Strecken DE hingegen erscheinen als Summe oder Differenz von $2r$ und je einem σ, nämlich:

$$D_4E_4 = r + B_4C_4 + r = 2r + B_4C_4,$$
$$D_2E_2 = 2r + \sigma_2,$$
aber $D_1E_1 = D_1B_1 - B_1E_1 = r - (B_1C_1 - r)$
$$= 2r - B_1C_1 = 2r - \sigma_1.$$

Nun beachten wir ferner die ähnlichen Dreiecke $\triangle AD_4E_4 \sim AB_2C_2$, also
$$D_4E_4 : AD_4 = B_2C_2 : AB_2,$$
d. i. $\quad 2r + \sigma_4 : \sigma_2 = \sigma_2 : r.$

Ebenso $\triangle AD_2E_2 \sim AB_1C_1$, also
$$D_2E_2 : AD_2 = B_1C_1 : AB_1,$$
d. i. $\quad 2r + \sigma_2 : \sigma_1 = \sigma_1 : r,$

und $\triangle AD_1E_1 \sim AB_4C_4$, also
$$D_1E_1 : AD_1 = B_4C_4 : AB_4,$$
d. i. $\quad 2r - \sigma_1 : \sigma_4 = \sigma_4 : r.$

In Produktform lauten die Gleichungen, anders angeordnet:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1^2 = 2r^2 + r\sigma_2, \\ \sigma_2^2 = 2r^2 + r\sigma_4, \\ \sigma_4^2 = 2r^2 - r\sigma_1. \end{array}\right| \qquad (2.$$

Also werden die drei Sehnen unseres geschlossenen Transformationscyklus zusammengehalten durch ein System von drei Gleichungen zweiten Grades.

Schreiben wir statt dessen drei Wurzeln, so lauten diese, nachdem wir noch durch r dividiert haben,

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\sigma_1}{r} = \sqrt{2 + 2\frac{\sigma_2}{r}}, \\ \frac{\sigma_2}{r} = \sqrt{2 + 2\frac{\sigma_4}{r}}, \\ \frac{\sigma_4}{r} = \sqrt{2 + 2\frac{\sigma_1}{r}}. \end{array}\right| \qquad (3.$$

Es ist leicht zu sehen, dass
$$\frac{\sigma_p}{r} = 2\cos\frac{p}{9}\Pi \qquad (4.$$
ist; wir setzen
$$2\cos\frac{p}{9}\Pi = C_p, \qquad (5.$$
so ist also
$$C_1 = \sqrt{2 + C_2},\ C_2 = \sqrt{2 + C_4},\ C_4 = \sqrt{2 - C_1}. \qquad (6.$$

Also diese goniometrischen Ausdrücke — das Doppelte des Cosinus des neunten Teiles des Gestreckten und seiner Vielfachen (soweit der Zähler zum Nenner 9 teilerfremd ist) — sind durch drei Gleichungen zweiten Grades oder durch drei Quadratwurzeln „cyklisch“ oder „periodisch“ mit einander verbunden. Setzen wir nämlich die Wurzeln in einander ein, so erscheint

$$\left.\begin{array}{c} C_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + C_4}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - C_1}}} \\ \text{und ebenso} \\ C_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + C_2}}},\ C_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + C_4}}}; \end{array}\right| \qquad (7$$

unter dem dritten, innersten, Wurzelzeichen kehrt dasselbe C wieder. Setzen wir anstatt seiner dieselbe Wurzelfolge ein und wiederholen das, so erscheinen „periodische Kettenwurzeln“, die ich, analog der bei den periodischen Dezimalbrüchen üblichen Schreibweise, so schreiben möchte, dass ich (ohne das Wurzelzeichen zu wiederholen) über die Vorzeichenperiode den Periodenstrich setze:

$$\left|\begin{array}{c} \text{Ist } C_p = 2\cos\frac{p}{9}\Pi, \text{ so ist} \\ C_1 = \sqrt{2\overline{++-}},\ C_2 = \sqrt{2\overline{+-+}}, \\ C_4 = \sqrt{2\overline{-++}}; \end{array}\right| \qquad (8.$$

und das heisst z. B.: es ist

$$C_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \cdots \text{ per.} -++ \text{ in inf.}}}}}}}}$$

Es ist nun wichtig, dass die *Kenntnis der Vorzeichenperiode einer solchen „dyadischen Kettenwurzel“ ausreicht*, um ihren *numerischen Wert* mit beliebiger Annäherung zu berechnen. Das soll eben an diesem Beispiel des 18-Ecks gezeigt werden. Vorher jedoch müssen wir einige weitere Beziehungen zwischen den drei Sehnen betrachten.

IV. Weitere innere Beziehungen.

Die Gleichungen Nr. 2,

$$\sigma_1^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_2,\ \sigma_2^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_4,\ \sigma_4^2 = 2\,r^2 - r\,\sigma_1,$$

subtrahieren wir der Reihe nach von $4\,r^2 = 4\,r^2$ und multiplizieren sie mit einander, rechterhand r absondernd:

$$(4\,r^2 - \sigma_1^2)\ (4\,r^2 - \sigma_2^2)\ (4\,r^2 - \sigma_4^2)$$
$$= r\,(2\,r - \sigma_2)\,r\,(2\,r - \sigma_4)\,r\,(2\,r + \sigma_1).$$

Wir dürfen heben:

$$(2\,r - \sigma_1)\ (2\,r + \sigma_2)\ (2\,r + \sigma_4) = r^3,$$

und nun multiplizieren wir mit $r \cdot r \cdot r = r^3$:

$$(2\,r^2 - r\,\sigma_1)\ (2\,r^2 + r\,\sigma_2)\ (2\,r^2 + r\,\sigma_4) = r^6,$$

d. h. nichts anderes als $\sigma_4^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 = r^6$, also auch

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4 = r^3, \qquad (9.$$

in Worten: *Der Kreisradius ist das geometrische Mittel der drei zum Nenner 9 gehörigen Kreissehnen.*

Setzen wir speziell $r = 1$, so kommt:

$$Cp = 2 \cos \frac{p}{9}\,\Pi,\ C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 = 1. \qquad (10.$$

Eine weitere Beziehung leiten wir geometrisch einfach ab. In Fig. 1 ziehen wir $B_1 B_2$, so ist es gleich $B_4 C_4 = \sigma_4$, denn der zugehörige Zentriwinkel ist $\frac{1}{9}\,\Pi$. Deshalb ist ferner der zugehörige Basiswinkel $A\,B_1\,B_2 = \frac{4}{9}\,\Pi$. Da aber $\sphericalangle\,A\,B_1\,C_1 = \frac{1}{9}\,\Pi$, so ist $\sphericalangle\,B_2\,B_1\,C_1 = \frac{3}{9}\,\Pi = \frac{1}{3}\,\Pi = 60^0$. Ebensogross ist $\sphericalangle\,C_2\,C_1\,B_1$. Wir bekommen daher mit Leichtigkeit ein gleichseitiges Dreieck in die Figur, wenn wir auf $C_1\,B_1$ die Strecke $C_1\,H = C_2\,B_2 = \sigma_2$ abtragen und $B_2\,H$ ziehen. Dann ist $B_1\,H = B_1\,B_2 = \sigma_4$ und $B_1\,C_1 = B_1\,B_2 + B_2\,C_2$ oder $\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_4$,

$$\sigma_p = 2\,r \cos \frac{p}{9}\,\Pi,\ \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_4 = 0. \qquad (11.$$

Haben wir somit das Produkt und die algebraische Summe der drei Sehnen, so können wir nun auch die algebraische Summe der Produkte von je zweien darstellen. Wir quadrieren zu dem Zwecke Nr. 11:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_4^2 - 2\,\sigma_1\,\sigma_2 - 2\,\sigma_1\,\sigma_4 + 2\,\sigma_2\,\sigma_4 = 0,$$

also

$$-2\,\sigma_1\,\sigma_2 - 2\,\sigma_1\,\sigma_4 + 2\,\sigma_2\,\sigma_4 = -(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_4^2)$$

Nach Nr. 2 ist aber die Summe der Quadrate gleich $6\,r^2 - r\ (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_4)$, und nach Nr. 11 gleich $6\,r^2$; also auch

$$-\sigma_1\,\sigma_2 - \sigma_1\,\sigma_4 + \sigma_2\,\sigma_4 = -3\,r^2 \qquad (12.$$

Die Gleichungen Nr. 9, 11, 12 gestatten die *kubische Gleichung* anzusetzen, deren Wurzeln die σ sind.

V. Numerische Berechnung ohne Schätzung des Fehlers.

Wir nehmen $r = 1$, oder wir rechnen mit den goniometrischen Funktionen, Nr. 6 etwas anders anordnend:

$$Cp = 2 \cos \frac{p}{9}\,\Pi = 2 \cos (20\,p)^0$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2 + C_4} = C_2 \\ \sqrt{2 + C_2} = C_1 \\ \sqrt{2 - C_1} = C_4. \end{array}\right\} \qquad (13.$$

Besässen wir den *genauen* Wert von C_4 und setzten ihn in die erste Wurzel ein: so würden wir auch den *genauen* Wert von C_2 erhalten; dieser, in die zweite Gleichung eingesetzt, würde den *genauen* Wert von C_1 geben; und setzten wir diesen endlich in die dritte Wurzel ein: so müsste der *Anfangswert*, derjenige, mit welchem wir in die erste Wurzel hineingingen, für C_4 wiedererscheinen.

Haben wir noch nicht den genauen Wert, sondern nur einen *Näherungswert* für eines der C, z. B. für C_4, die Seite des 18-Ecks im Einheitskreise, so bietet die Wurzelreihe Nr. 13 ein Mittel, die *Genauigkeit* dieses Näherungswertes zu *prüfen*. Gehen wir nämlich mit einem *angenäherten* Werte für C_4 in die Wurzelreihe hinein, so erhalten wir auch für die übrigen C nur angenäherte Werte, und die dritte Wurzel liefert für C_4 einen *neuen Näherungswert*. Nach unseren geometrischen Betrachtungen erwarten wir, dass *dieser dem wahren Werte näher kommen* wird als der erste. Zudem ist zu bemerken: war der erste Wert für C_4 zu gross, so erhält man auch für C_2 und C_1 zu grosse Werte; und setzt man den letzteren dann in die dritte Wurzel ein, so bekommt man, da ja nun C_1 subtrahiert wird, für C_4 einen zu kleinen zweiten Näherungswert. Umgekehrt, war der erste Wert zu klein, so wird der zweite zu gross. Unsere Wurzelreihe bietet also ein Mittel, für die C Grenzen zu finden, *zwischen denen sie eingeschlossen sind*.

Machen wir mit einem *geeigneten* Näherungswert einen Versuch. Wir wollen die Näherungswerte, um sie als solche zu kennzeichnen, durch n bezeichnen, die zuletzt herausspringenden durch n′.

C_4 ist Seite des 18-Ecks im Kreise, dessen Radius $r = 1$ ist. Die Seite des 16-Ecks und die des 20-Ecks in demselben Kreise sind, auf zwei Stellen, 0,39 und 0,31. Sehen wir einmal zu, was sich ergibt, wenn wir für C_4 den Näherungswert

$$n_4 = 0{,}35$$

nehmen, das arithmetische Mittel jener beiden.

Es erscheint: $\quad n_4 = 0{,}35$

$$\left.\begin{array}{lllll} n_2 & = \sqrt{2 + n_4} & = \sqrt{2{,}35} & & = 1{,}53297097 \\ n_1 & = \sqrt{2 + n_2} & = \sqrt{3{,}53297097} & & = 1{,}87961990 \\ n_4' & = \sqrt{2 - n_1} & = \sqrt{0{,}12038001} & & = 0{,}34695823. \end{array}\right| \qquad (14.$$

Da $n_4' < n_4$, so folgt, dass der erste Wert, 0,35, zu gross war, während der Endwert zu klein ist. Doch muss letzterem der wahre Wert näher liegen. Wollen wir ihn genauer ermitteln, so gehen wir entweder mit dem Werte n_4' in die Wurzelreihe hinein, rechnen sie noch einmal durch und bekommen einen neuen Näherungswert n_4'', welcher zwischen n_4' und n_4 liegt, mit diesem beginnen wir abermals und fahren so fort, um oscillierende, dem wahren Werte sich immer enger anschmiegende Grenzwerte zu erhalten; oder wir bedenken, dass der wahre Wert der letzten Grenze näher liegt, und probieren mit einem *neuen* Werte, der zwischen n und n′, aber näher an n′ liegt. Diesen schicklich zu wählen ist nicht schwer, er muss unterhalb des arithmetischen Mittels der ersten Grenzen bleiben. Doch gestattet eine einfache Ueberlegung, das Gebiet, in welchem er liegen muss, noch enger einzuschränken.

VI. Beschleunigung der Konvergenz durch Schätzung des Fehlers.

Der erste Näherungswert n sei mit dem Fehler ε behaftet. Dieser sei so klein (positiv oder negativ), dass bei den folgenden Wurzel-Entwickelungen nur die ersten Glieder der binomischen Reihe berücksichtigt zu werden brauchen. Es sei also

$$n_4 = C_4 + \varepsilon,$$

wo C den wahren Wert bedeutet. Wir bilden

$$n_2 = \sqrt{2 + n_4} = \sqrt{(2 + C_4) + \varepsilon}$$

und beachten, dass nach No. 6 die Summe $(2 + C_4)$ ersetzt werden kann durch C_2^2. Wir entwickeln die Wurzel

$$n_2 = \sqrt{C_2^2 + \varepsilon} = C_2 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{C_2^2}} = C_2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{C_2^2}\right),$$

$$n_2 = C_2 + \frac{\varepsilon}{2\,C_2}.$$

So verfahren wir weiter:

$$n_1 = \sqrt{2 + n_2} = \sqrt{(2 + C_2) + \frac{\varepsilon}{2\,C_2}} = \sqrt{C_1^2 + \frac{\varepsilon}{2\,C_2}}$$

und erhalten durch die ersten zwei Glieder der Reihe

$n_1 = C_1 + \frac{\varepsilon}{4\,C_1\,C_2}$, und endlich aus

$$n_4' = \sqrt{2 - n_1} = \sqrt{(2 - C_1) - \frac{\varepsilon}{4\,C_1\,C_2}} = \sqrt{C_4^2 - \frac{\varepsilon}{4\,C_1\,C_2}}$$

den neuen Näherungswert

$$n_4' = C_4 - \frac{\varepsilon}{8\,C_1\,C_2\,C_4}.$$

Nun ist aber nach No. 10 das Produkt der drei C gleich 1, also: war der erste Näherungswert

$$n_4 = C_4 + \varepsilon,$$

so ist der zweite angenähert

$$n_4' = C_4 - \frac{1}{8}\,\varepsilon. \tag{15}$$

Subtraktion gibt

$$n_4 - n_4' = \frac{9}{8}\,\varepsilon, \quad \frac{1}{8}\,\varepsilon = \frac{n_4 - n_4'}{9} \tag{16}$$

und wenn wir das in die zweite der Gleichungen 15 einsetzen, erhalten wir aus derselben

$$C_4 = n_4' + \frac{n_4 - n_4'}{9} \tag{17}$$

Also: Ist man mit einem Werte n_4 in die Wurzelreihe hineingegangen und hat man nach einmaligem Durchrechnen als zweiten Näherungswert n_4' erhalten, so kommt man dem wahren Werte erheblich näher, wenn man zum zweiten Näherungswerte den neunten Teil der Differenz beider addiert.

Die Differenz der in No. 14 angegebenen Werte ist 0,00304177, ihr neunter Teil 0,00033797, und wenn wir dies zu n_4' addieren, erhalten wir als wahrscheinlicheren Wert

$$C_4 = 0{,}34729620, \text{ also}$$

$$\cos 80^0 = \cos \frac{4}{9}\,\Pi = \frac{1}{2}\,C_4 = 0{,}1736481. \tag{18}$$

Das ist auf sechs Stellen richtig. — Die anderen C findet man durch zwei weitere Radicierungen.

VII. Halbierung der Winkel.

So hat man die Cosinus von 20^0, 40^0, 80^0. Will man diejenigen von 10^0, 50^0, 70^0 haben, so beachte man, dass $10^0 = \frac{1}{18}\,\Pi$, $50^0 = \frac{5}{18}\,\Pi$, $70^0 = \frac{7}{18}\,\Pi$. Die doppelten Cosinus dieser Winkel resp. die Kreissehnen $2\,r \cos \frac{p}{18}\,\Pi$ erhält man, indem man in Fig. 1 die entgegengesetzten Transformationen anwendet, nämlich $B_4\,C_4$ und $B_2\,C_2$ nach innen, $B_1\,C_1$ aber nach aussen transformiert. So findet man

$$\left.\begin{aligned} 2 \cos \frac{1}{18}\,\Pi &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{1}{9}\,\Pi}, \\ 2 \cos \frac{5}{18}\,\Pi &= \sqrt{2 - 2 \cos \frac{4}{9}\,\Pi}, \\ 2 \cos \frac{7}{18}\,\Pi &= \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2}{9}\,\Pi}. \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Transformiert man alsdann die so gewonnenen, zum Nenner 18 gehörenden, Sehnen weiter nach innen und aussen, so erscheinen die sechs Sehnen des Nenners 36 durch

$$\left.\begin{aligned} 2 \cos \frac{p}{36}\,\Pi &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{p}{18}\,\Pi} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos \frac{18 - p}{18}\,\Pi}, \end{aligned}\right| \tag{20}$$

aus ihnen durch dasselbe Mittel die Sehnen des Nenners 72, 144, u. s. f.

VIII. Ueber die allgemeine Geltung des Verfahrens.

Das Transformationsverfahren, welches oben geschildert ist, lässt sich auf beliebige Kreissehnen anwenden und liefert, wenn man Seiten und Diagonalen regulärer Vielecke demselben unterwirft, teils Recursionsformeln, welche die abgeleiteten Sehnen auf die Grundfälle zurückzuführen gestatten, teils Gleichungscyklen, welche die Grundfälle zu behandeln gestatten. Speziell Kreissehnen, deren Centriwinkel ungerade Vielfache eines ungeraden Teiles von Π sind, ordnen sich in Gleichungscyklen, welche periodische Kettenwurzeln liefern. Bei Herstellung der Transformationsfigur beachte man: bei geradem Zähler ist nach aussen, bei ungeradem nach innen zu transformieren (der Zähler gibt an, das wievielfache von $\frac{1}{2\,n + 1}\,\Pi$ der Basiswinkel ist, der der Sehne anliegt). So erhält man z. B. für den Nenner 17 folgende zwei Cyklen:

$$\text{Nenner } 17; \ \sigma_p = 2\,r \cos \frac{p}{17}\,\Pi$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I.} & \sigma_1^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_2 & \text{II.} & \sigma_3^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_6 \\ & \sigma_2^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_4 & & \sigma_6^2 = 2\,r^2 - r\,\sigma_5 \\ & \sigma_4^2 = 2\,r^2 + r\,\sigma_8 & & \sigma_5^2 = 2\,r^2 - r\,\sigma_7 \\ & \sigma_8^2 = 2\,r^2 - r\,\sigma_1 & & \sigma_7^2 = 2\,r^2 - r\,\sigma_3 \end{array}\right| \tag{21}$$

Für $r = 1$ erhalten wir hieraus folgende Kettenwurzeln:

$$C\,p = 2 \cos \frac{p}{17}\,\Pi$$

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = \sqrt{2\,\overline{+ + + -}} & C_3 = \sqrt{2\,\overline{+ - - -}} \\ C_2 = \sqrt{2\,\overline{+ + - +}} & C_6 = \sqrt{2\,\overline{- - - +}} \\ C_4 = \sqrt{2\,\overline{+ - + +}} & C_5 = \sqrt{2\,\overline{- - + -}} \\ C_8 = \sqrt{2\,\overline{- + + +}} & C_7 = \sqrt{2\,\overline{- + - -}} \end{array}\right| \tag{22}$$

Es ist klar, dass sich hieraus die Cosinus der Vielfachen von $\frac{1}{17}\,\Pi$ ebenfalls nach dem oben geschilderten Verfahren numerisch berechnen lassen. Und für alle anderen Nenner gilt dasselbe, das Verfahren ist — mit einigen Modifikationen — auf alle Fälle anwendbar.

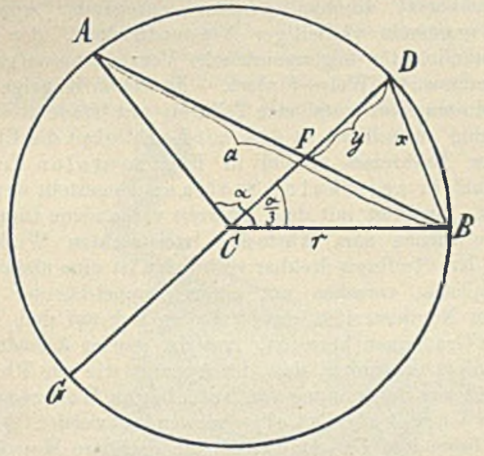
In meiner Programmarbeit 1895/96 „Eine einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke“ findet sich über die Cyklen zahlreicher Nenner näheres.

(Fortsetzung folgt.)

Planimetrische Ableitung der kubischen Gleichung für die Winkel-Trisektion.

Von Otto Schneider (Langendreer).

Man trage den zu teilenden Winkel, $ACB = \alpha$, als Zentriwinkel in einen Kreis mit dem Radius r ein und nenne die zu α und $\frac{\alpha}{3}$ gehörenden Sehnen a resp. x.



Nun hat $\sphericalangle$ DFB, der auf dem doppelten Bogen steht, wie der Zentriwinkel DCB, demgemäss ebenfalls die Grösse $\frac{\alpha}{3}$, es ist also $\triangle BDF \sim CDB$ und folglich $BD : FD = CB : BD$, oder, wenn man FD mit y bezeichnet: $x : y = r : x$ oder $x^2 = ry$ und $y = \frac{x^2}{r}$.

Man verlängere nunmehr CD über D hinaus bis G, so ist nach bekanntem Satze $FD \cdot GD = FA \cdot FB$.

Dreieck DFB, welches dem Dreieck BDC ähnlich war, ist — ebenso wie das letztere — gleichschenklig, also hat auch die Strecke FB die Grösse x, und die eben aufgestellte Gleichung lässt sich mithin in der Form schreiben: $y\,(2x - y) = (a - x)\,x$ oder $2ry - y^2 = ax - x^2$. Da aber $ry = x^2$ und $y = \frac{x^2}{r}$ ist, so folgt: $2x^2 - \frac{x^4}{r^2} = ax - x^2$ oder für $r = 1$:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x^4 &= ax - x^2 \\ 2x - x^3 &= a - x \\ 3x - x^3 - a &= 0 \\ x^3 - 3x + a &= 0. \end{aligned}$$

Vereine und Versammlungen.

75. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Cassel vom 20. bis 26. September 1903.

Von sonnigstem Herbstwetter begünstigt, wurde am Vormittag des 21. September in der grossen Fasshalle der Aktien-Brauerei zu Cassel die 75. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte durch Herrn Prof. Hornstein (Cassel) eröffnet. Nach einer Reihe von Begrüssungsansprachen folgte der Vortrag Ladenburgs (Breslau) „Ueber den Einfluss der Naturwissenschaften auf die Weltanschauung", der leider wegen der leisen Sprache des Redners für den grössten Teil des Publikums unverständlich blieb. Einen erfrischenden Gegensatz zu dem vorhergehenden bildete Th. Ziehens (Utrecht) Vortrag „Physiologische Psychologie der Gefühle und Affekte" gleich ausgezeichnet durch Lebendigkeit der Sprache, wie durch Klarheit der Disposition.

Der Nachmittag des 21. und der ganze 22. September war den Abteilungssitzungen gewidmet. In der Abteilung für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sprach zunächst W. Krebs (Grossflottbeck bei Hamburg) über „Pädagogik als Experimentalwissenschaft." An Stelle des nicht erschienenen Herrn Adamczik erstattete Völler (Cassel) Referate über die „Tierkreiszone" und über „Koordinatensysteme". Von grösstem Interesse war der Vortrag von Grimsehl (Hamburg) über „Neue physikalische Unterrichtsapparate". Der Redner zeigte und erläuterte eine leicht herzustellende elektrische Polwage und im Anschluss daran eine einfache Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Einige Fundamentalversuche der geometrischen Optik wurden mit Hilfe einer zweckmässig eingerichteten Nernstlampe und einer Anzahl gewöhnlicher Brillengläser vorgeführt. Zum Schluss führte Grimsehl mittelst einer höchst einfachen Versuchsanordnung eine vorzügliche Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents aus. Damit war das Arbeitspensum dieser Abteilung erledigt.

Die Gesamtsitzung der beiden Hauptgruppen am Mittwoch Vormittag wurde begonnen mit einem Vortrage G. Schwalbes (Strassburg i. E.) „Ueber die Vorgeschichte des Menschen". Dann sprach Alsberg (Cassel) über „erbliche Entartung infolge sozialer Einflüsse". Als Ersatzmann für Penck (Wien), den Gesundheitsrücksichten am Erscheinen verhinderten, war im letzten Augenblick Conwentz (Danzig) eingetreten, dessen Vortrag über „Erhaltung der Naturdenkmäler" den Abschluss der Sitzung bildete.

Einige weitere allgemeine Vorträge fielen auf den letzten Tag der Versammlung, Freitag, den 25. September. Nach einem mit ausserordentlichem Beifall aufgenommenen Vortrage von Ramsay (London) über das periodische System der Elemente berichtete H. Griesbach (Mühlhausen) an Hand zahlreicher Tabellen und graphischer Darstellungen über den Stand der Schulhygiene. Es folgte E. v. Behring (Marburg), dem es gelang, durch seine ganz neue Anschauungen enthaltenden Darlegungen über Tuberkulosebekämpfung das Interesse der Zuhörer bis zum letzten Augenblick zu fesseln. Vor Beginn dieser Vorträge hatte die Versammlung in einstündiger Sitzung zu einem auf der vorigen Naturforscher- und Aerzte-Versammlung eingebrachten Antrag über den biologischen Unterricht an höheren Schulen zustimmend Stellung genommen.

In der zweiten Geschäftssitzung, die sich hieran anschloss, wurde als Ort der nächsten Zusammenkunft Breslau und als Geschäftsführer Ladenburg (Breslau) gewählt.

In den Abteilungssitzungen fand eine Reihe von Vorträgen statt, die für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, wenigstens indirekt, von Bedeutung sind. Vorläufig mögen ihre Titel hier Platz finden, eventuell wird später eingehender über sie berichtet werden.

In der I. Abteilung (Mathematik, Astronomie und Geodäsie):

Juel (Kopenhagen): Volumen der Pyramide.

Hefftcr (Bonn): Ueber das Lehrgebäude der Geometrie, insbesondere bei analytischer Behandlung.

Manno (Dortmund): Das Prinzip der Gegenwirkung (actio par reactioni) als Grundlage der Krafttheorie.

Prandtl (Hannover): Ueber einheitliche Schreibweise der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterrichte.

Fricke (Braunschweig): Ueber neuere englische Lehrpläne und Lehrbücher der Elementarmathematik.

II. Abteilung (Physik einschliesslich Instrumentenkunde und wissenschaftliche Photographie).

Rubens (Charlottenburg): Demonstration einiger Versuche mit Reststrahlen von Quarz und Flussspath.

Rubens (Charlottenburg): Ueber die optischen und elektrischen Eigenschaften der Metalle.

Drude (Giessen): Demonstration einiger Messapparate für elektrische Schwingungen.

Classen (Hamburg): Fresnelsche Interferenzen mittelst planparalleler Platten als Vorlesungsversuch.

Grimsehl (Hamburg): Analyse und Synthese von Schwingungen.

Zschimmer (Jena): Ueber neue Glasarten von gesteigerter Ultraviolettdurchlässigkeit.

Siedentopf (Jena): Ueber die Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen.

IV. Abteilung (Chemie und Elektrochemie).

Runge (Kirchrode): Ueber spektrometrische Atomgewichtsbestimmungen.

VI. Abteilung (Geophysik, Meteorologie und Erdmagnetismus).

Krebs (Münster): Beziehungen des Meeres zum Vulkanismus.

VIII. Abteilung (Mineralogie, Geologie und Paläontologie).

Deckert (Steglitz bei Berlin): Ueber die westindischen Vulkanausbrüche.

IX. Abteilung (Botanik).

Drude (Dresden): Kulturversuche über Variation und Mutation (Rassenbildung).

Ausserdem fand am 24. September eine gemeinschaftliche Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe statt, deren Verhandlungsgegenstand die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und Ziele der neueren Mechanik bildeten. Es berichteten: Schwarzschild (Göttingen) über astronomische Mechanik, Sommerfeld (Aachen) über technische Mechanik und Fischer (Leipzig) über physiologische Mechanik.

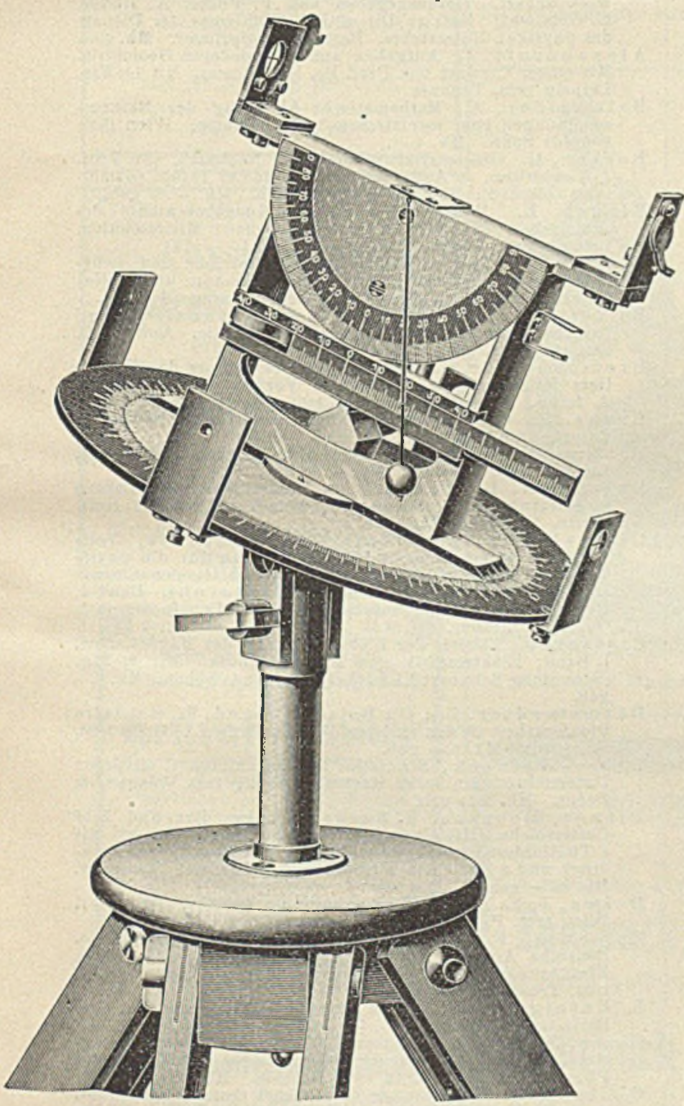
Erich C. Müller (Cassel).

* * *

III. Internationaler Mathematiker-Kongress zu Heidelberg. Zu der in Nr. 5 des abgelaufenen Jahrgangs (Unt.-Bl. IX, S. 110) enthaltenen Nachricht über diesen vom 8. bis 13. August tagenden Kongress sei ergänzend bemerkt, dass Professor Dr. H. Schubert in Hamburg (Domstrasse 8) das Amt des Einführenden für die pädagogische Sektion übernommen hat. Anmeldungen zu Vorträgen in dieser Sektion sind an ihn zu richten.

Lehrmittel-Besprechungen.

Universal-Winkelmessapparat, konstruiert von Professor Dr. Kreuschmer (Barmen) (D. R. G. M. No. 183791). Der in der mechanischen Werkstatt für wissenschaftliche Instrumente von der Firma Dörffel und Faerber, Inhaber Julius Faerber Berlin, Friedrichstrasse 105a, hergestellte Winkelmessapparat dient beim Unterricht in der Mathematik als Lehrmittel und Demonstrationsapparat für die Zwecke des propädeutischen Unterrichts und findet praktische Verwendung bei Winkelbestimmungen jeder Art (beliebigen Horizontal- und Vertikalwinkeln), bei Höhen-, Tiefen- und Längenermittelungen, Dreiecksausmessungen und Berechnungen etc., bei einfachen Feldmessungen auf dem Schulhofe, auf freien Plätzen, in flachen oder bergigen Geländen und erweist sich dabei als ein recht praktisch brauchbarer, anschaulicher und anregender Apparat von ungemein vielseitiger Verwendbarkeit, der das Verständnis für trigonometrische Vermessungsaufgaben in umfassender Weise fördert. — In einem Kugelgelenk ist ein massiver metallener Teilkreis mit Gradeinteilung beliebig verstellbar, so dass mit Leichtigkeit die Ebene dieses Teilkreises sowohl in horizontaler Lage als auch in vertikaler Stellung eingestellt werden kann. Zwei fest mit dem Teilkreis verbundene Diopterpaare dienen zum Abstecken von rechten Winkeln. Mit dem Teilkreis drehbar verbunden ist eine metallene Messplatte, versehen mit einem Doppel-Diopter und einem Noniusstreifen, dessen Enden sich auf dem Teilkreis-Gradbogen bewegen. Aus der ganzen Anordnung ist sofort erkennbar, dass der Apparat wie ein Theodolit zur Bestimmung von beliebigen Horizontal- und Vertikalwinkeln verwendet werden kann. Für besondere Zwecke enthält die drehbare Messplatte eine Halbkreisgradeinteilung, eine verschiebbare Millimeterskala und ein Fadenpendel. Dadurch ist man imstande, für die Zwecke von Dreiecks-Berechnungen mit Ausschluss der Hilfsmittel der Trigonometrie, am Apparat ein kleines rechtwinkliges Messplatten-Dreieck zu erzeugen, welches einem anderen grossen rechtwinkligen Gelände-Dreieck ähnlich ist, woraus man dann mit Hilfe von Proportionen zur Lösung der Aufgabe gelangt. Es kann also der Messapparat zur Bestimmung von Horizontal- und Vertikalwinkeln das eine mal wie ein Theodolit verwendet werden, wobei logarithmisch-trigonometrische Rechnungen mit den Winkelfunktionen sin α, cos α, tang α und cotg α erforderlich sind; bei Benutzung von Fadenpendel und Millimeterskala kann man aber ausserdem das andere mal, unter zugrundelegung jener ähnlichen Dreiecke, Längenermittelungen etc. ohne den Gebrauch logarithmisch-trigonometrischer Rechnungen vornehmen. In diesem Falle hat man nur Proportionsansätze und das Ausziehen von Quadratwurzeln nötig. Das grosse rechtwinklige Geländedreieck kann aber auch der horizontalen Feldebene angehören, sodass man nicht nur allein Höhen- und Tiefenermittelungen, sondern auch Dreiecksberechnungen etc., ganz allgemein von geometrischen Figuren anstellen kann, die der horizontalen Feldebene angehören. (Näheres darüber findet sich ganz ausführlich in der Broschüre: der Universal-Winkelmessapparat im Dienste der Schule und Praxis, bearbeitet von Prof. Dr. Kreuschmer, Verlag von Ferdinand Hirt-Breslau). Mit dem Winkelmessapparat können nun folgende Operationen vorgenommen werden: 1. Das Abstecken von rechten Winkeln, 2. Nivellementsbestimmungen, 3. Messungen von beliebigen Horizontalwinkeln, 4. Messungen von beliebigen Vertikalwinkeln nach zwei ganz von einander verschiedenen Methoden, 5. Ermittelung von Höhen- und Tiefendimensionen, als auch von solchen Dimensionen, die dem horizontalen Gelände angehören, nach zwei verschiedenen Methoden und zwar: a) mit Benutzung der Winkel und Winkelfunktionen sin α, cos α, tang α und cotg α, als auch b) unter Benutzung von ähnlichen Dreiecken mit Ausschluss logarithmisch-trigonometrischer Rechnungen durch Ansetzen von einfachen Proportionen, aus denen die unbekannte Grösse leicht berechnet werden kann. 6. Ablesen der Winkelfunktionswerte tang α und cotg α für gegebene Winkelgrade zwischen 0° und 90° mittels Fadenpendel an der Millimeterskala der Messplatte. Die Anfertigung und Lieferung des Universalwinkelmessapparates übernimmt die obige Firma. Alle Teile des Grundkreises mit dem Kugelgelenk und der Messplatte sind in Metall hergestellt und vernickelt. Für alle Horizontal- und Vertikalwinkel können mittels Nonius die Winkel auf Zehntelgrade genau vom Grundteilkreis abgelesen werden. Die Millimeterskala an der Messplatte lässt sich nach



beiden Richtungen beliebig verschieben, ganz herausnehmen und durch eine längere Millimeterskala ersetzen; die Länge des Fadenpendels kann durch eine Stellschraube beliebig vergrössert werden. Der Apparat ist auf einem dreibeinigen Stativ drehbar befestigt. Etwaige Anfragen und das Versenden gedruckter Prospekte mit Abbildung erledigt die genannte Firma. Preis des Apparates in guter Vernickelung 60 Mark. Diesen billigen, solide und gut gearbeiteten Apparat kann ich im Interesse der guten Sache nur bestens empfehlen. Dr. Ronte (Barmen).

Bücher-Besprechungen.

Direktor Prof. Dr. Thomé's Flora von Deutschland, Oesterreich und der Schweiz in Wort und Bild. 2. Auflage. Gera, F. von Zezschwitz.

Die dem Referenten vorliegenden zwei ersten Lieferungen (zu 2 Druckbogen mit 11 Farbendrucktafeln) stimmen im Wesentlichen mit der 1. Auflage überein, doch machen sich einige verbessernde Aenderungen am Text und an den schönen Tafeln bemerkbar. Neu ist Fig. 3 der Tafel 10, die Farnsporangien bei stärkerer Vergrösserung zeigt und die Art ihres Aufspringens veranschaulicht. Dieser kurze Hinweis genüge zur Empfehlung der in zweiter Auflage erscheinenden ersten 4 Bände, die in 56 derartigen Lieferungen (à 1,25 M.), innerhalb 14 Tagen aufeinander folgend, erscheinen sollen.

Die in erster Auflage erscheinenden, apart käuflichen Bände V—VII sollen das beliebte Werk durch die Kryptogamen, von den Moosen an abwärts, ergänzen. Dieses Unternehmen, das in den Händen des Monographen der Characeen, Herrn Professor Dr. W. Migula, liegt, ist mit aufrichtiger Freude zu begrüssen. Denn wenn Referent bisher nach einer guten, mittleren deutschen Moos-Flora gefragt wurde, so war es sehr schwer, eine befriedigende Antwort zu erteilen. Carl Müller's vortreffliche „Deutschlands Moose“ sind durchaus veraltet, Mildes' Bryologia Silesiaca“ umfasst nur einen Teil des Gebietes. Schimper's „Synopsis“ ist lateinisch geschrieben und nur für den Fachmann zu brauchen, Limpricht's gross angelegtes, jetzt eben fertig erscheinendes Werk ist wegen seines hohen Preises nur verhältnismässig Wenigen zugänglich. Auf den anderen Gebieten der Kryptogamie sind diese Verhältnisse womöglich noch ungünstiger. — Diese 3 Bände sollen etwa 45 Lieferungen umfassen, von denen ca. alle 5 Wochen eine ausgegeben wird. Der Subskriptionspreis für die einzelne Lieferung beträgt 1 Mk. und erscheint dem Referenten sehr preiswert. Die 13 dem Referenten vorliegenden, Laubmoose behandelnden Lieferungen des 5. Bandes, der den Laub- und Lebermoosen gewidmet ist, sind ohne weiteres als im allgemeinen schön gelungen zu betrachten. Nach kurzer Charakteristik der Moose als solcher folgt auf 18 Seiten eine eingehendere allgemeine Behandlung der Laubmoose in 2 Kapiteln: 1. Aufbau der Moospflanze, 2. Aufsuchen, Sammeln und Bestimmen der Moose. Drei Tafeln mit zahlreichen nicht schematischen Figuren dienen zur Veranschaulichung des Aufbaues der Moospflanze. Wie alle übrigen Abbildungen sind sie von Naturtreue, nach Originalen des Verfassers.

Der spezielle Teil, der sich eng an Limprichts Darstellung der Laubmoose in Rabenhorsts Kryptogamenflora anschliesst, beginnt mit der Einteilung der Laubmoose in 4 Ordnungen, welche einzeln charakterisiert werden. Zur Bestimmung innerhalb der grossen Gruppe der akrokarpischen Bryinae dient ein Familien-Schlüssel, bei dem die Beschaffenheit des Peristoms an erster Stelle zur Unterscheidung Verwendung findet. Der Bearbeitung jeder Familie ist eine Uebersicht der Gattungen vorausgeschickt. Grösseren Gattungen ist überdies zur Erleichterung der Uebersicht und der Bestimmung ein Artenschlüssel beigegeben. Die Artenbeschreibungen heben kurz das Charakteristische hervor. Zahlreiche Formen werden erwähnt. Die Standortsangaben sind recht genau.

Ueberall wird auf die zahlreichen Figuren der 51 Tafeln verwiesen. Auf 21 derselben finden sich kolorierte Habitusbilder von 240 charakteristischen Arten, ausserdem Bilder einiger Blatt- und Stammquerschnitte sowie einzelner Sporogone und Peristome. Die Figuren der 30 Schwarzdrucktafeln erläutern vorwiegend anatomische Einzelheiten, geben aber ebenfalls Habitusbilder sowie Blatt-Ansichten.

Die Tafeln zu betrachten ist ein Genuss. Die Kolorierung ist eine feine und zarte. Ueberall tritt das Bestreben hervor, Naturtreue in den Farben zu erzielen. Einen ähnlichen erfreulichen Eindruck gewinnt man aus den 17 zur Erläuterung der Lebermoose bestimmten Tafeln. 5 von diesen zeigen bunte Habitusbilder von 70 Arten dieser Gruppe auf, auch einiges aus der Histologie der Marchantiaceen. Die schwarzen Figuren bringen vorwiegend vergrösserte Habitusbilder, abgelöste Blätter, auch Elateren zur Darstellung.

Ebenso schön sind einige auf Algen bezügliche Tafeln, soweit sie deren Lieferungen beigegeben sind.

Einige Bemerkungen, die dem Ruhme des ganzen keinen Abbruch tun sollen, seien zum Schluss gestattet: Der Ausdruck „Brutzellen“ für die Brutkörper von Georgia pellucida (S. 12) erscheint dem Referenten unpassend, ja geradezu irreführend; auch ist die dazu gehörige Figur (Taf. II, Fig. 8) schlecht ausgefallen; gar mancher wird in den Kreisen Zellen, in den Punkten Zellkerne sehen wollen. Fig. 18a der Tafel 32 wird niemand nach der eiförmigen Kapsel für Polytrichum commune halten, das diese Figur darstellen soll. Nach der doppelten Fiederung gehört Fig. 8 der Tafel 36 kaum zu Thuidium tamariscinum, dieses ist ja dreifach gefiedert. Die Kapseln der Fig. 3 auf Tafel 39 sind entschieden zu kurz ausgefallen.

Alles in allem ist auch Band V—VII weiteste Verbreitung zu wünschen, denn dem Anfänger werden sie sichere Führung in die reizvolle Welt der niederen Pflanzen gewähren, der Lehrer findet darin reiches Anschauungsmaterial, woran biologische Gesichtspunkte anknüpfen können.

F. Quelle (Göttingen).

* * *

Physikalisch-chemisches Zentralblatt (Physico-chemical Review — Revue physico-chimique) — Berlin, Gebrüder Bornträger. — 24 Hefte im Jahre zu je 2 Bogen Gross-Oktav. Preis des Jahrganges 30 Mk.

Die vorgenannte, im Verein mit einer grossen Zahl hervorragender Fachmänner aus allen Kulturländern von Dr. Max Rudolphi, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Darmstadt herausgegebene Zeitschrift bezeichnet sich selbst auf ihrem Titel als ein „vollständiges internationales Referaten-Organ für die physikalische Chemie und die angrenzenden Gebiete der Physik und Chemie“; nach dem dem ersten Hefte (15. Dezember 1903) vorgehefteten Prospekt will sie ihre Aufgabe möglichst durch die Veröffentlichung von Selbstreferaten erfüllen.

Ueber das Bedürfnis eines solchen Organs für das an Umfang und Bedeutung immer gewaltiger anwachsende Gebiet der physikalischen Chemie kann nicht wohl ein Zweifel bestehen; nach dem dem Ref. vorliegenden ersten Heft scheint auch die Ausführung in sehr zweckmässiger Weise zu erfolgen. Dieses Heft bringt in fortlaufender Numerierung 79 Artikel, geordnet nach den Kapiteln Physik, Stöchiometrie, Thermochemie, Chemische Mechanik, Elektrochemie, Photochemie, Chemische Verwandtschaft, Chemie, Varia, Bücherbesprechungen. Die Mehrzahl der Referate sind Autoreferate, auch die von anderer Stelle ausgehenden Referate beschränken sich auf tatsächliche Angaben, nur die Bücherbesprechungen (No. 73 bis 79) bringen auch Urteile über die besprochenen Werke. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. Herausgegeben von F. Poske, A. Höfler, E. Grimsehl. Heft 1: Die elektr. Glühlampe im Dienste des physikal. Unterrichts. Berlin 1904, Springer. Mk. 2.—.

Alexandroff, J., Aufgaben aus der niederen Geometrie. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. M. Schuster. Mit 100 Fig. Leipzig 1903, Teubner.

Balawelder, A., Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen vom empirischen reinen Raume. Wien 1903, Gerolds Sohn. Mk. 4.—.

Becker, H., Geometrisches Zeichnen. Neubearb. von Prof. J. Vonderlinn. 3. Aufl. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

Binder, E., Beiträge zur Entwickelungsgeschichte des chemischen Unterrichts an deutschen Mittelschulen. Leipzig 1903, Teubner. Mk. —.80.

Blätter, Periodische f. Realienunterricht und Lehrmittelwesen, herausgeg. von Rob. Neumann und Julius Fischer. IX. Jahrg. Heft 2. Tetschen 1903/04, Henckel.

Bollettino della Associazione „Mathesis“ fra gl' Insegnanti di Matematica delle scuole medie. Anno VIII 1903/04. Num. 2, 3. Torino 1903.

Bretschneider, K., Anleitung zum Bestimmen der Wirbeltiere Mitteleuropas. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. A. Lang. Mit 71 Fig. Zürich 1904, Raustein. Mk. 2.60.

Bruns, H., Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 3.40.

Bruhns, W., Petrographie. Mit 15 Abb. (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

Busemann, L., Bilder aus der Chemie des tägl. Lebens in gemeinverst. Darstellung für Freunde der Natur. 1. Heft. Berlin, Wunder. Mk. —.80.

Centralblatt, physikalisch-chemisches, Vollständiges internationales Referaten-Organ für die physikalische Chemie u. d. angrenzenden Gebiete der Chemie und Physik, herausgeg. von Max Rudolphi. Band I, Heft 1. (Dez. 1903). Preis per Band 30 Mk. Berlin 1903. Gebr. Bornträger.

Classen, J., Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 1. Band: Elektrostatik und Elektrotechnik. Mit 21 Fig. (Sammlung Schubert XLI). Leipzig 1903, Göschen. Mk. 5.— geb.

Darmstaedter, L. u. Du Bois-Reymond, R., 4000 Jahre Pionierarbeit in den exakten Wissenschaften. Berlin 1904, Stargardt. Mk. 5.— geb.

Debes-Weineck, Schulatlas für die unteren u. mittleren Unterrichtsstufen in 60 Karten. Leipzig 1903, Wagner & Debes. Mk. 3.50 geb.

Diener, Hoernes, F. Suess, Uhlig, Bau und Bild Oesterreichs. Mit einem Vorwort von Eduard Suess. Mit 4 Titelbildern, 250 Textabbildungen, 5 Karten in Schwarzdruck und 3 Karten in Farbendruck. Wien 1903, Tempsky. Mk. 65.— geb.

Doiwa, Joh., Rechen-Taschenbuch des Lehrers. Heft 1—4. Wien 1903, Pichlers Ww. u. Sohn.

Enriques, F., Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. Herm. Fleischer. Mit einem Einführungswort von Felix Klein. Mit 187 Fig. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 8.—.

L'Enseignement mathématique V Année, No. 5, 6. Paris 1903, C. Naud.

Esser, P., Das Pflanzenmaterial für den botanischen Unterricht. I. Teil: Die Anzucht, Vermehrung und Kultur der Pflanzen. 2. Aufl. Köln 1903, Bachem. Mk. 3.20 geb.

Gibbs, J. W., Diagrammes et Surfaces thermodynamiques. (Scientia No. 22). Paris 1903, Naud. Mk. 1.60.

Féaux, B., Buchstabenrechnung und Algebra verbunden mit Aufgabensammlung. 10. Aufl. besorgt durch Prof. Busch. Paderborn 1903, Schöningh. Mk. 2.60.

Ferchland, P., Grundriss der reinen und angewandten Elektrochemie. Mit 59 Fig. Halle 1903, Knapp. Mk. 5.—.

Fortschritte der Physik, Halbmonatliches Literaturverzeichnis, herausgeg. v. d. Deutschen Physik. Gesellschaft, redigiert von Karl Scheel und Rich. Assmann. Jahrg. II, No. 20—24.

Glaser, R., Stereometrie. 2. Aufl. Mit 66 Fig. (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

Gruber, Ch., Geographie als Bildungsfach. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 2.80.

Günthart, A., Die Aufgaben des naturkundlichen Unterrichts vom Standpunkte Herbarts. Mit 3 Skizzen. Ebenda. Mk. 1.40.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.