Jahrgang X. 1904. Nr. 2.

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Tages-Ordnung der XIII. Hauptversammlung zu Halle a. S., Pfingsten 1904 (S. 25). — Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterrichte. Von Kurt Geissler, Schluss (S. 26). — Zur Frage des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung an den höheren Lehranstalten. Von K. Franz (S. 33). — Informations-Kurse und -Reisen für Mathematiker und Naturwissenschaftler. Von Dr. W. Brüsch (S. 36). — Elementare Behandlung der Maximum- und Minimum-Aufgaben. Von Ingenieur E. Puller (S. 37). — Kleinere Mitteilungen (S. 39). — Vereine und Versammlungen [III. Internationaler Mathematiker-Kongress zu Heidelberg; Hessischer Oberlehrertag und Verbandstag von Vereinen akademisch gebildeter Lehrer Deutschlands; Verein für Schulreform; 76. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu Breslau vom 18. bis 24. September 1904] (S. 40). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [Ratschläge für die Kandidaten des höheren Lehramts in Mathematik und Physik an der Universität Jena] (S. 41). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 41). — Bücher-Besprechungen (S. 41). — Zur Besprechung eingetroffene Bücher (S. 44). — Anzeigen.

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Tagesordnung der XIII. Hauptversammlung zu Halle a. S, Pfingsten 1904.

Montag, 23. Mai, abends 8 Uhr: Geselliges Beisammensein im „Goldenen Schiffchen", Grosse Ulrichstrasse.

Dienstag, 24. Mai, vormittags 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung.

Eröffnung und Begrüssung. — Geschäftliche Mitteilungen.
Vortrag von E. Grimsehl (Hamburg): Ueber den Betrieb der Physik als Naturwissenschaft.
Vortrag von M. Nath (Nordhausen): Ueber die Bildungsaufgabe der Mathematik innerhalb des Lehrplans der höheren Schulen.

$11\frac{1}{2}$—$12\frac{1}{2}$ Uhr: Frühstückspause.
$12\frac{1}{2}$—$2\frac{1}{2}$ Uhr: Abteilungssitzungen.
Nachmittags: $2\frac{1}{2}$ Uhr: Besichtigungen.
Abends 6 Uhr: Festmahl (mit Damen) im Hotel „Stadt Hamburg".
(Preis des trockenen Gedecks: 4 Mk.)

Mittwoch, 25. Mai, vormittags 9 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Diskussion über den Unterrichtsbetrieb in der Physik (im Anschluss an den Vortrag von Grimsehl).

$11\frac{1}{2}$—12 Uhr: Frühstückspause.
12—$2\frac{1}{2}$ Uhr: Abteilungssitzungen.
$2\frac{1}{2}$ Uhr: Einfaches Mittagessen im Goldenen Schiffchen.
$4\frac{1}{2}$ Uhr: Saalfahrt (mit Damen), Endziel: Zoologischer Garten.
Besichtigung unter sachkundiger Führung. — Geselliges Beisammensein.

Abends: Festkneipe des mathematischen Vereins zur Feier seines Stiftungsfestes (Hotel „Kaiser Wilhelm"), bei der die Versammlungsteilnehmer willkommen sind.

Donnerstag, 26. Mai, vormittags 8½ Uhr: Dritte allgemeine Sitzung.

Diskussion über die Bildungsaufgabe der Mathematik (im Anschluss an den Nathschen Vortrag).

11 Uhr: Geschäftliche Sitzung. Kassenbericht. — Wahl von 3 Vorstandsmitgliedern an Stelle von Hamdorff, Presler und Schotten. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Beschlussfassung über etwaige Vertretung des Vereins auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung. — Antrag von Presler (s. weiterhin). — Sonstige geschäftliche Anträge.

12 Uhr: Mittagessen im Bahnhofrestaurant.

1 Uhr 16 Min.: Abfahrt nach Naumburg. Spaziergang über den Knabenberg nach der Rudelsburg (2 Stunden Marsch), ev. Fahrt bis Kösen, von da Aufstieg zur Rudelsburg. — Abends: Geselliges Beisammensein im „Mutigen Ritter" in Kösen.

Angemeldete Abteilungsvorträge:

K. Geissler (Charlottenburg): Der anschauliche Zusammenhang der Kegelschnitte durch die unendliche Kegelschnittkugel.

E. Grimsehl (Hamburg): Physikalische Schulversuche.

(Weitere Vortragsanmeldungen sind erwünscht.)

Anträge für die Hauptversammlung:

Presler (Hannover): Es ist wünschenswert, dass an jeder technischen Hochschule ein Studienplan für die Studierenden der Mathematik aufgestellt wird.

An Besichtigungen sind in Aussicht genommen:

Elektrizitätswerk; Botanisches Institut; Landwirtschaftliches Institut; Moritzburg.

Alle Sitzungen finden im neuen Seminargebäude der Universität am Universitätsplatz statt. Dort befindet sich auch das Auskunftsbureau.

Als Frühstückslokäle werden empfohlen: Tulpe, Reichshof, Goldenes Schiffchen, sämtlich in der Nähe der Sitzungsräume.

Als Hotels empfehlen sich 1. in der Nähe des Bahnhofes: Goldene Kugel, Hotel Continental, Europäischer Hof, Hotel Bach; 2. in der Mitte der Stadt: Stadt Hamburg, Goldenes Schiffchen, Vereinshaus, Tulpe; 3. in grösserer Entfernung: Kaiser Wilhelm, Prinz Heinrich.

Wie alljährlich, wird sich der Vereinsvorstand auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der deutschen Staaten mit der Bitte wenden, den Leitungen der einzelnen Anstalten eine wohlwollende Berücksichtigung der behufs Teilnahme an unserer Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche zu empfehlen. Es ist zu hoffen, dass diese Bitte, wie es bisher regelmässig geschehen ist, auch in diesem Jahre Gewährung finden wird.

Der Hauptvorstand.
Pietzker.

Der Ortsausschuss.
Schotten.

Eine neue Behandlung des Unendlichen im mathematischen Unterrichte.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Breslau.*)

Von Kurt Geissler (Charlottenburg).

(Schluss.)

Es ist nicht verwehrt, sich neben endlichen Grössen auch eine unendlichkleine oder mehrere vorzustellen, eine Summe mit gemischter Weitenbehaftung zu bilden. Den Wert einer solchen kann man aber für beide Behaftungen nicht durch ein einziges Zeichen ausdrücken; das einzelne Unendlichkleine trägt zur endlichen Summe nichts bei, ist für sie Null, das Endliche trägt zur Veränderung von einer unendlichkleinen Summe nichts bei, ist für sie nicht verwendbar. Man sieht, dass schon in den Anfängen die Arithmetik sich mit der Geometrie verbindet. Ich möchte aber zuerst die Betrachtung des Unendlichen für letztere fortsetzen. Der Winkel, dieser unvermeidliche Begriff, veranlasst noch heute Meinungsdifferenzen. Er ist ohne das Untersinnlichvorstellbare kaum zu definieren. Ich habe mich darüber ausführlicher in unserer Zeitschrift ausgelassen. Die unendliche Winkelfläche erlaubt eine genaue Vergleichung nur durch Begrenzung. Man pflegt sie durch Kreisbogen zu begrenzen.

*) S. Unt.-Bl. X, 1, S. 3.

Die Schwierigkeit ist aber die Gleichheit von Kreisbogen nachzuweisen. Bestehen die Bogen aus unendlichkleinen geraden Strecken in derselben, durch irgend ein Dreieck bestimmten Ebene, so sind diese Streckenzüge gleich, wenn die betreffenden von je zwei Radien und der kleinen Sehne gebildeten Dreiecke (mit gemischter Weitenbehaftung) kongruent sind. Ich nehme darum den Kongruenzsatz bei Gleichheit aller Seiten als ein Axiom an. Ohne ein solches geht es nicht ab, entweder für Sektorengleichheit oder Dreiecksgleichheit.

Zwei Kongruenzsätze gestalten sich dann einfach. Wird der Winkel durch den gebrochenen Streckenzug definiert auf irgend einem Kreise als Anzahl von Graden, so folgt aus dem Kongruenzsatze bei drei Seiten sofort der von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Zum Weiteren ist freilich das berühmte Parallelenproblem nötig.

Es ist bekannt, dass der Satz von der Winkelsumme im Dreieck hinausläuft auf den Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel bei zwei von einer dritten geschnittenen Parallelen, und es steckt darin das Axiom von der einzigen Parallelen durch einen Punkt zu einer Geraden. Nach dem Vorgetragenen hat dies nur Giltigkeit für bestimmte Behaftungen, z. B. für endliche Gerade und endliche Parallele, (die sich im Endlichen niemals schneiden).

Setzt man voraus, dass die Wechselwinkel gleich sind oder die Ergänzungswinkel supplementar, so kann man nach der bisherigen Auffassung die Parallelität der Geraden beweisen durch die Kongruenz der beiden Halbstreifen, und zwar pflegt man, wie überhaupt für Kongruenz Deckungsbeweise zu machen. Dies erscheint zwar für den Unterricht sehr bequem, indem man z. B. Modelle fortbewegt und aufeinander legt, wirkliche Beweise sind es aber nicht. Denn es wird bei der Fortbewegung irgend einer Figur vorausgesetzt, dass sie unterwegs dieselbe bleibt oder dass die verschiedenen Lagen, die sie räumlich einnimmt, dieselbe, d. h. kongruente in jeder Beziehung, ausser der Lage, gleiche Figuren liefern. Man setzt also einfach schon voraus, dass die Lagen kongruent sind, und es hat genau genommen nun keinen Zweck mehr zu zeigen, dass die Endlage der bewegten Figur, d. h. die zweite Figur der ersten kongruent ist. Stellt man sich vor, die Figur bewege sich nur unendlichwenig fort, so haben wir hierbei unzweifelhaft eine unendlichkleine Ortsveränderung und es kommen alle die Schwierigkeiten und Grundsätze in Betracht, welche für dieses nötig sind. Obenein aber gehört auch noch die Zeitvorstellung mit unendlichkleinen Zeitabschnitten dazu, und auch darin stecken die Grundsätze des Unendlichen. Deswegen halte ich es für gründlicher, die Bewegung nur nachträglich als Hilfsmittel anzuwenden, niemals aber, um etwas Elementares wie die Kongruenz zu zeigen. Sie ist ein bequemes Wort für die Zusammenfassung einer grossen, vielleicht unendlichen Anzahl von kongruenten Lagen.

Die Kongruenz scheint mir ferner nur klar zu sein bei völliger Begrenzung. Die beiden Halbstreifen sind daher nur insoweit kongruent, als sie abgegrenzt werden, z. B. durch kongruente Dreiecke beiderseits. Von diesen wird Gleichheit der Seiten oder zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels benutzt. Unterscheiden sich aber die Wechselwinkel nur um Unendlichwenig, so würden die Dreiecke für das Endliche doch noch übereinstimmen; auch die Dreiecksseiten sind als Gerade für bestimmte Weitenbehaftungen zu definieren. Der Deckungsbeweis gilt darum immer nur für bestimmte Weitenbehaftungen. Das heisst die Kongruenz der beiden Halbstreifen ist z. B. für endliche Längen beweisbar oder auch für unendliche erster Ordnung usw., und dementsprechend sind die Parallelen zu definieren. Man kann in dem Unterrichte das Beispiel des Endlichen herausgreifen und beweisen, dass bei gleichen Wechselwinkeln die Geraden im Endlichen, aber bis auf beliebig endliche Entfernungen sich nicht schneiden, also endliche Parallele sind. Macht man den Beweis nur in der bisherigen Art, ohne Behaftungen, so bleiben die Schwierigkeiten des Unendlichen darin, und der denkende Schüler hat das Bewusstsein, dass etwas nicht stimmt oder unsicher ist.

Setzt man umgekehrt das Vorhandensein endlicher Parallelen voraus, so kann man die Gleichheit der Wechselwinkel und den Satz von der Winkelsumme für das Endliche beweisen, vorausgesetzt, dass es nur eine endliche Parallele gibt. Bei anderer Gelegenheit werde ich zeigen, dass die Lehre von den Behaftungen sehr wohl Geometrien erlaubt, die mehrere Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt zulassen, also nichteuklidische Geometrien oder besser die „übereuklidische“ und zwar für unsere tatsächliche, aber auf unendliche Gerade und unendlichkleine Winkel ausgedehnte Raumvorstellung. Das braucht man im Unterrichte nur anzudeuten. Es ist aber richtig, dies zu tun, denn nur dadurch kann der Schüler später verstehen, wie mittels des Unendlichen die Lehrsätze im Zusammenhange stehen, ich erinnere an den Satz von Ceva und Menelaus, dessen Zusammenhang ich in unserer Zeitschrift geschildert habe.

Es ist auch sehr wohl möglich, schon hier von dem Gegensatze der Geometrie auf einer Kugelfläche und der Ebene zu sprechen. Sind

die beiden endlichen Geraden unendlichste Teile von Kreisen auf einer Kugelfläche, so befinden sie sich für die Behaftung mit dem Endlichen auf einer endlichen Ebene, und schneiden sich doch als Krumme auf der Kugelfläche. Also könnte man sagen, diese endlichen Geraden wären Linien, die sich einmal schnitten, oder auch diese endlichen Geraden kehrten einmal in sich zurück (an einer Apfelsine vorzumachen, indem man, was sehr leicht ist, sich diese unendlichgross vorstellt, d. h. die sinnliche Welt nur in einem unendlichsten Teil derselben sich abspielen lässt).

Bei der Lehre von den Dreiecken und Parallelogrammen kommen Parallele bekanntlich ungemein viel vor, es ist demnach die ganze Geometrie durchsetzt mit den Schwierigkeiten des Unendlichen. Löst man dieselben etwa auf dem Wege, den ich vorschlage, so kann es nur nützlich sein, wenn man oft wieder an das Unendliche denkt, während man mit endlichen Figuren wie Dreiecken zu tun hat. Ich erinnere noch einmal an die Transversalen, will auch kurz die harmonische Teilung erwähnen, bei der für den inneren, in der Mitte liegenden Punkt, der äussere, wie man sagt, in das Unendliche rückt. Die Schwierigkeit, dass man nicht weiss, ob das Unendliche rechts oder links liegt, und etwa den unendlichfernen Punkt für einen blossen Ausdruck erklärt, der nichts Räumliches mehr betrifft, fällt für die Behaftungslehre hinweg. Der Mittelpunkt ist das Grenzenloskleine, er stelle nur eine Mitte für das Endliche vor, dann wird das Unendliche zum grenzenlos Grossen und es ist damit von einer Grenze, d. h. von einem fernen Teilpunkte aussen gar keine Rede mehr. Aber darum sind wir keineswegs genötigt, etwa das innere Hin- und Herrücken des Punktes mit einer Ausnahme zu versehen, bei der es keinen zugehörigen äusseren Punkt gibt. Diese Ausnahme ist mit Recht dem Mathematiker und auch dem Unterrichte unangenehm. Wir stellen uns nun die unendlichkleine Mitte je nach Bedürfnis wieder als eine irgend wie begrenzte unendlichkleine Strecke vor. Auf dieser kann der Punkt, der nun etwas Grenzenloskleines niederer Ordnung ist, wieder hin- und herrücken, es kann also für ihn entweder ein entsprechender Punkt links oder ein entsprechender Punkt rechts liegen, je nachdem, ob der kleinere Teil der unendlichkleinen Mittelstrecke links oder rechts liegt. Die äusseren Punkte liegen dann im Unendlichen erster Ordnung, aber insofern an bestimmter Stelle, als auch im Unendlichen bestimmte Verhältnisse der Grössen angenommen werden. Und so kann man fortfahren. Eine absolute Mitte und eine absolute Gleichheit gibt es natürlich nach dieser Lehre wieder nicht, d. h. nicht in der räumlichen Anschauung, welche sich stets in Behaftungen zerlegt, wohl aber logisch (Identität) oder bei Zahlengrössen.

Wenn ich hiermit vorläufig zum Unendlichen in der Arithmetik übergehe, so muss ich bemerken, dass man keineswegs berechtigt ist, eine stets passende Parallelität des Geometrischen und Arithmetischen anzunehmen. Ich wüsste wenigstens nicht, wie man so etwas beweisen wollte. Vielmehr müssen wir auch hier empirisch vorgehen, d. h. durch innere Empirie erst aufsuchen, was Zahlengrössen mit ihren Gesetzen sind und was Raumgrössen, und erst durch Vergleichung feststellen, inwiefern sich diese Mannigfaltigkeiten ähnlich sind oder unterscheiden. Die Zahlen hängen am innigsten mit den logischen Grundgesetzen, z. B. mit dem Satz der Identität zusammen. Man kann Schülern sehr wohl zur Erinnerung bringen, die vielbenutzte, nicht weiter erklärbar und uns darum selbstverständlich erscheinende Tatsache, dass wir uns Gleiches denken können. Ob man dabei etwa noch bestimmte Beziehungen berücksichtigen, z. B. in der Raumvorstellung, die gleichen Strecken durch Punkte begrenzen muss und auf die Punktschwierigkeit Rücksicht nehmen, das ist eine Frage weiteren Nachdenkens. Da zeigt es sich nun, dass rein logisch, d. h. ohne räumliche oder sogenannte äussere Anschauung ein Begriff ganz wieder ebenso wenigstens gedacht werden kann. Mögen wir auf die gleichen Grössen auf anderen psychischen Wegen, durch andere psychische Beziehungen gelangen, so viel ist gewiss, dass wir für Behaftung mit rein Logischem sagen können, man denke sich 5a und dies dann wieder fort. Das Wort „dies“ bedeutet schon die völlige logische Gleichheit. Darum gibt es eine Null, eine von Unendlichklein verschiedene Vorstellung. Trotzdem sind wir imstande, uns auch unendlichkleine Zahlen vorzustellen, etwa bei der Bruchrechnung. Das muss auf einem tatsächlichen Vermögen beruhen. Dies Vermögen nenne ich den Wechsel der Weitenbehaftungen auch für die Zahlen. Und es gilt auch hier der bereits genannte Grundsatz, dass der unendlichkleine Summand oder ein endliches Vielfaches davon neben dem endlichen gleich Null ist.

Man pflegt die Zahlen direkt auf Linien darzustellen, diese Lehre ist ja auch für die Schule von grosser Wichtigkeit, z. B. für die Grundlagen der Trigonometrie (Sinus, geometrische und trigonometrische Tangente usw.). Es ist wichtig, sich der Bedeutung dieser Uebertragung genau bewusst zu sein. Eine Strecke a, etwa von 5 cm, kann man in einer Richtung und dann wieder in der entgegengesetzten verfolgen, weil tatsächlich der Geist die Vorstellung einer Hin- und Herrichtung für jede Linie be-

sitzt. Wir werden das Zurückkehren zum Nullpunkt nicht als absolute Null, sondern anders auffassen. Man denkt sich einen Anfangspunkt als ausgedehnt, aber grenzenlos klein, daran die räumliche Grösse einer Strecke, z. B. die endliche Grösse, wenn der Punkt unendlichklein war. Kehrt man wieder um die endliche Strecke a zurück, so hat für diese ein unendlichkleiner Unterschied keine Bedeutung mehr; man kehrt also zu einem unendlichkleinen Gebiet zurück, welches der ursprüngliche Punkt sein, oder auch grösser als derselbe oder kleiner aufgefasst werden kann, sobald man ihn nicht mehr als grenzenlos klein nimmt, sondern in ihm begrenzt Kleines unterscheiden will. Man könnte dies andeuten durch $a - (a - \delta)$ oder auch durch $\delta + a - a$, wobei dann δ grenzenlos aufzufassen ist.

In der Raumvorstellung kann man ein Verhältnis ohne weiteres umkehren, z. B. das Verhältnis einer unendlichkleinen zu einer endlichen bilden δ cm : a cm. Dies gibt die reine Zahl δ oder $1 : \infty$.

Es ist aber sehr fraglich, ob wir auch in der Arithmetik jedes Verhältnis ohne weiteres umkehren können, ob z. B. $1 : 0$ einen Sinn hat, wenn $0 : 1$ möglich ist. Man kann durchaus nicht ohne weiteres aus der Umkehrbarkeit eines räumlichen Verhältnisses auf die Umkehrbarkeit jedes beliebigen arithmetischen schliessen. Das Verhältnis $0 : 1$ gibt es im Raume nicht in dem Sinne, dass diese Null eine absolute Null sei, sondern nur in dem Sinne, dass es eigentlich (für Berücksichtigung des Unendlichkleinen) $\delta : 1$ heisse und dieses Verhältnis als Summand nebengereiht wird neben eine endliche, durch 1 dividierte Grösse, also $\frac{\delta}{1} + \frac{a}{1}$. Dann ist nach den Grundsätzen des Unendlichen für dieses Endliche der erste Summand Null, also relativ $0 : 1$ gleich 0. In der Arithmetik aber kann 0 auch absolut gefasst werden und es bedeutet $0/1$ die Zahl, die mit 1 multipliziert 0 ergibt. In der Tat ist aber $0/1$ oder $(a - a)\ 1 = 1a - 1a = 0$. Oder umgekehrt ist die berühmte bekannte Form $0/0$ gleich 1 oder gleich irgend einer anderen Zahl; sie ist stets unbestimmt. Falsch geradezu ist aber die arithmetische Umkehrung $1 : 0$ zu bilden; es gibt keine Grösse, die mit 0 multipliziert 1 ergäbe. Gäbe es eine und hiesse sie $\infty = x$, so wäre $1 = 0 \cdot x = (a - a) \cdot x = a \cdot x - a x$ und da hier a genau dieselbe Grösse im Minuendus wie Subtrahendus ist, ebenso das x, welches ja nur eine zweimalige Schreibung von genau derselben Grösse x ist, so muss diese Differenz sicher 0 geben, aber nicht 1. Mithin entsteht Unsinn und x ist unmöglich. Sie kann nicht, wie man noch in vielen Büchern finden kann, gleich unendlich gesetzt werden.

Selbstverständlicherweise führt dies zur Trigonometrie hinüber. Man definiert sin α als Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse, d. h. als eine Zahl, die man aber aus dem Räumlichen nimmt und nicht etwa aus einem anderen Gebiete, z. B. nicht wie die Zahl 3 auch aus „drei Gedanken“. Also irgendwie vom Räumlichen muss die Rede sein, wenn man vom Sinus in ursprünglichem Sinne spricht. Nun wird der Begriff auf alle möglichen Winkel ausgedehnt, man spricht sogar einfach vom sin 0. Was ist ein Winkel von 0 Grad? Das ist doch nicht an sich verständlich. Ist es eine einzige Gerade, ein einziger Strahl, der aus zwei Schenkeln zusammenfällt? Wie gross ist der Kreisbogen, auf dem man 0 Grad abliest? Nach dem Gesagten wird hier von einer absoluten Null nicht die Rede sein, sondern nur von unendlichkleinen Gradbogen beliebiger Weitenbehaftung nach unten hin. Man kann auch kaum klar machen, dass sin 0 gleich 0 sein soll, wenn man nicht von kleinen, kleinerwerdenden, unendlichkleinen Winkeln spricht. Sin 0 hat geometrisch dadurch Sinn, dass man eigentlich sin δ denkt und dieses δ als Null rechnet gegenüber irgendwelchen endlichen Grössen. Also sin δ ist gleich Null für die endliche Weitenbehaftung, sin δ^2 gleich Null für alle höheren Behaftungen usw. Dann stellt man sich in der Tat das Lot, auf dem sin abgelesen wird, unendlichklein vor und kann es sich als grenzenlosklein und damit als Punkt denken. Wir hätten also vom Scheitelpunkte des Winkels aus, etwa einem grenzenlos Kleinen von der Behaftung δ^2, zwei Schenkel bis zu dem Endpunkte (Schnitt mit dem Einheitskreise); diese beiden Schnitte bilden für das endliche einen Punkt, seine Grösse ist relativ, für das Endliche Null, und insofern ist sin 0 gleich 0. Ich habe mehrfach auf den Fehler hingewiesen, den man begeht, indem man tan 90^0 bildet und dies als $1 : 0$ oder unendlich ansieht; es muss heissen tan $(90 - \delta)^0$; und dies ist in der Tat unendlich, während tan 90^0 in dem Sinne gar nicht existiert, dass 90^0 die absolute Hälfte von einem Halbkreise wäre. Man wird diesen durch einen Punkt halbieren und dieser ist grenzenlos klein, aber nicht Null.

Ich will damit keineswegs sagen, dass man nicht in der Arithmetik von einer Funktion sin α sprechen könne und dabei auch α als eine absolute Null fassen, sin als $0 : 1$ oder 0. Aber diese Funktion hat dann nicht mehr in ihrem ganzen Umfange einen eigentlich räumlichen, unserem uns bekannten Raume entsprechenden, sondern einen — wie ich sagen möchte — raumverwandten Sinn.

Gestatten Sie mir, dass ich mich wegen der Kürze der Zeit nur noch zu der wichtigen Vorstellung des Inhaltes in der Geometrie wende, z. B. des Pyramiden- und Kugelinhalts, die durchaus nicht ohne das Unendliche behandelt werden können, und zum Schlusse noch zu den Reihen und zu den Kegelschnitten!

Nachdem der Inhalt von Dreiecken durch Halbierung eines Parallelogrammes und dieses durch Gleichheit mit einem Rechtecke leicht gefunden worden ist, macht auch die Quadratur des Kreises keine besondere Schwierigkeit mehr, so bald die Rektifikation des Kreisumfanges geglückt ist. Diese freilich erfordert alle Kunst, welche überhaupt beim Unterschiede von Krumm und Gerade in Betracht kommt: sie ist nicht möglich ohne das Unendliche oder ohne den Grenzbegriff, der überhaupt immer da auftaucht, wo sich das Unendliche zeigt. Wenn wir nach dem Vorhergehenden über den Grenzbegriff hinausgehen und nach den Grundsätzen des Unendlichen feste Werte, nicht angenäherte bilden, so werden wir auch den Umfang des Kreises derartig finden, freilich auch auf die Tatsache geraten, dass es in dem Raume irrationale Strecken gibt, dass also ausser der Vorstellung von Verhältnissen zweier Strecken mit rationalen Zahlenwerten tatsächlich solche mit einer neuen Art von Werten besteht. Eine einzelne irrationale Zahl, für sich genommen, hat keinen Sinn; das Wort spricht ganz richtig bereits von ratio, Verhältnis, und stellt fest, dass sich im Vergleich mit anderen (rational genannten) Zahlen oder Strecken solche bilden lassen, die sich nicht durch die rationalen Zahlen 1, 2, 3 . . . oder Brüche ausdrücken lassen. Kurz, es besteht die Tatsache, dass wir in der Zahlenvorstellung oder im Räumlichen zwei Gruppen von Verhältnissen besitzen oder dass wir das Räumliche mit rationalen Verhältnissen, aber auch mit irrationalen behaften können. Wie man nicht imstande ist, für die Tatsache endlicher und unendlicher Behaftungen Gründe anzugeben, so auch nicht hierfür. Aber man entdeckte diese Tatsache und zwar für das Irrationale schon sehr früh. Haben die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleiche Länge, ich nenne sie 1 a oder 1, so hat nach dem Pythagoreischen Lehrsatze die Hypotenuse eine Länge, die zu den Katheten in irrationalem Verhältnisse steht, sie ist $\sqrt{2}$. Eine solche Hypotenuse an sich oder vielmehr mit anderen Strecken verglichen, die doppelt, dreifach usw. so gross sind, hat nichts Irrationales an sich, dies liegt nur in der Vergleichung mit der Kathete, je nachdem ich einen bestimmt ausdrückbaren Teil der Kathete oder auch der Hypotenuse als Einheit ansehe. So auch tritt in der Vergleichung des krummen Kreisumfanges mit dem Radius das Irrationale auf. So wenig man nun die Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks in endlichen Zahlen durch die Kathete genau ausdrücken kann, so wenig auch den Umfang durch den Radius. Damit ist aber keineswegs eine Ungenauigkeit in der Behaftung mit solchen Verhältnissen vorhanden. Man kann tatsächlich Katheten und Hypotenuse in anschauliches Verhältnis bringen. Wenn man auf die allbekannte Weise durch zweimalige Anwendung des Pythagoras oder durch Aehnlichkeit und Pythagoras die Seite des 2 n-Eckes durch die des endlichen n-Eckes ausdrückt, so hat man bereits irrationale Verhältnisse, aber durchaus noch nicht das irrationale Verhältnis von Umfang zu Durchmesser. Vorstellen kann man sich auch dieses räumlich als ein endlich-genaues und dies ausdrücken durch einen Buchstaben π, indem man den Umfang nennt $2r\pi$. Es ist auch sehr wohl möglich, sich von vornherein das Bestimmungsdreieck eines wirklichen Unendlichecks mit seiner Höhe vorzustellen und sich die Form $2r\pi$ so entstanden zu denken; ausdrücken aber kann man π nicht, sondern nur die Länge des Umfanges irgend eines endlichen n-Ecks durch den Radius, d. h. die Zahl π als Dezimalbruch bis zu irgend einer Stelle, z. B. 3,14159.

Leicht ist es nun, den Inhalt des Kreises durch ein genaues Verhältnis zum Umfange auszudrücken und zwar deshalb, weil man hierbei beim Dreiecke mit unendlichkleiner Seite verbleibt. Der Kreisinhalt besteht aus unendlichvielen solchen Dreiecken, der Inhalt eines jeden ist Grundlinie mal Höhe durch 2, also der Kreisinhalt-Umfang mal Radius durch 2; denn es ist in der Tat die Höhe als endliche Grösse gleich dem Radius und es ergibt sich für das Endliche genau $r^2\pi$ oder das Verhältnis $r^2\pi : 2r\pi$.

Bekanntlich ist der Kreis die Brücke zur Berechnung der Kugel und überhaupt anderer krummer Gebilde. Es taucht aber plötzlich in der Raumlehre beim Inhalte der Pyramide und der Kugel eine neue Schwierigkeit des Unendlichen auf, die man gewöhnlich durch ein Prinzip, d. h. mit einem nun plötzlich aufgestellten Grundsatze, den man nicht beweist, umgeht: das bekannte Prinzip des Cavalleri. Wie sonderbar muss es dem Schüler vorkommen, wenn er plötzlich wieder an einen Grundsatz glauben soll, während er glaubt, gleich im Anfange bei den Axiomen ein für allemal die Grundsätze abgemacht zu haben und nun nur logisch weiter zu schliessen!

Man wird ein starkes methodisches Interesse haben, dieses sogenannte Prinzip erstlich in Zusammenhang mit den früheren Inhaltsvorstellungen zu bringen und zweitens es nicht Prinzip sein zu lassen, sondern einen nicht angenähert, sondern genau beweisbaren Satz. Beides gelingt nach der neuen Darstellung des

Unendlichen, natürlich nur mit einer Umgestaltung des Satzes.

Es ist selbstverständlich, dass der Satz sofort als Satz und richtig angesehen wird, sobald die sämtlichen, zwischen je zwei Ebenen liegenden Schichten inhaltsgleich sind, die man nur zu addieren braucht, um die körperlichen Inhalte der ganzen Körper zu erhalten. Es liegt aber daran z. B. zu beweisen, dass für Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen die durch (zur Grundfläche) parallele Ebenen ausgeschnittenen Dreiecke, Vierecke usw. inhaltsgleich sind; und man führt diesen Nachweis nur für diese flächenhaften Schnitte, nicht für Körper. Nach unseren Betrachtungen sind die schneidenden Ebenen auch körperlich aufzufassen, sie haben eine Dicke, freilich eine nur grenzenlos geringe von niederer Weitenbehaftung. Es gelingt das Prinzip zu erweitern und zu beweisen, wenn man die grenzenlose Dünne in zwar auch unendlichkleine, aber begrenzbare verwandelt. Es ist dies eine ähnliche Vertauschung, wie wir vorher für einen Punkt eine unendlichkleine Strecke nahmen. Danach muss das Prinzip oder vielmehr dieser Hilfssatz lauten. Zwei zwischen zwei Ebenen liegende Gebilde sind inhaltsgleich, wenn die durch alle zu jenen Ebenen parallelen Ebenen herausgeschnittenen räumlichen Elemente inhaltsgleich sind und wenn die zur Inhaltsangabe nötige Grösse niedrigerer Weitenbehaftung nicht grenzenlos, sondern begrenzt klein genommen wird.

Der Satz wird dem Schüler ausserordentlich angenehm dadurch, dass er z. B. auch ohne Fehler auf zwei Linien angewendet werden kann, die zwischen zwei Parallelen liegen; er sieht sofort ein, dass die Gleichheit stimmt, wenn diese Geraden unter sich parallel liegen (Parallelogrammseiten) oder im selben Winkel zur Grundlinie geneigt sind (gleichschenkliges Trapez). Er sieht bald ein, weshalb ein Lot zwischen Parallelen und eine Halbkreislinie, die dieses Lot zum Durchmesser hat, nicht inhaltsgleich sind, wohl aber die Oberflächen einer Kugel und eines zwischen denselben Ebenen liegenden geraden Zylinders, dessen Seitenkante gleich dem Durchmesser des Zylinders ist und der die Kugel berührt ($4\,r^2\pi = 2\,r\pi \cdot 2\,r$). Auch die Inhaltsgleichheit der Pyramiden fügt sich ohne grosse Schwierigkeiten ein, die Ausführung im Einzelnen führt hier zu weit und ist an anderer Stelle (die Grundsätze des Unendlichen, Teubner) gegeben.

Bei allen diesen Summierungen, deren Methode sich der Integration sehr nähert, wenn es auch nicht ausgesprochen zu werden braucht, kommen Summen von unendlichvielen Gliedern vor. Ihre Resultate sind anschaulich leicht zu erkennen, weil die begrenzenden Umstände (die Grenzen der Integrale) vor Augen liegen. Dies ist auch bei anderen der Anschauung entnommenen Problemen der Fall, und doch haben sie seit Jahrtausenden sehr in Erstaunen gesetzt, ich meine die Probleme des Zeno, die scheinbare Unmöglichkeit, dass Achilles eine Schildkröte einholen kann, die vor ihm irgend welchen Vorsprung hat, oder aus der Tür zu gehen, da man erst die Hälfte des Weges und immer wieder die Hälfte des Restes zurücklegen muss. Die einfachen unendlichen geometrischen Reihen dieser Art lernt jeder Schüler summieren, aber schon bei diesem Beispiele einer konvergenten unendlichen Reihe, deren Summe er sofort überschaut, beschleicht jeden das Gefühl des Erstaunens, womit uns das Unendliche erfüllt. Und das hat nicht aufgehört, seitdem man auf die bekannte Art die Reihe auch arithmetisch summieren kann. Es soll sein

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

Man begnügt sich nicht damit, die Gleichsetzung in dieser Form mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren und von der vorigen abzuziehen, wobei auch natürlich sofort die richtige Gleichsetzung ergibt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dies wäre ebenso, als ob man von der ganzen Strecke die zweite Hälfte abziehen wollte, wobei natürlich die erste Hälfte übrig bleibt. In dem Ganzen hätte man dann die unendliche Halbierung entfernt durch die unendliche Halbierung der zweiten Hälfte. Man merkt, dass dies nur eine Verschiebung um $\frac{1}{2}$ ist. Man pflegt die Schwierigkeit nun auf eine andere Art fortzustreichen, indem man die gesetzmässige Aufeinanderfolge je zweier Glieder irgendwo noch mittels der unbestimmten Zahlen n—2, n—1 und n andeutet und erhält nicht $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, sondern

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nun kommt der für jeden Schüler sonderbare Gedanke, dieses n gleich unendlich zu setzen, weil ja die Reihe niemals aufhören sollte. Jeder sagt sich unwillkürlich: wenn sie niemals aufhören soll, so kann sie auch nicht bei irgend einem Werte mit n aufhören, selbst wenn man dies n unendlich nennt. Und es kommt nun noch hinzu, dass wir dies $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, für n gleich unendlich, als Null betrachten sollen, weil es kleiner wird, wenn n immer grösser wird. Das Zeitliche „immer“, welches ursprünglich hinein gebracht wurde, um das räumliche Unendlichklein zu ersetzen, ist nun doch wieder hinausgestrichen.

Nach der Lehre von den Weitenbehaftungen hat eine unendlichkleine Zahl wie überhaupt jede Zahl nur Sinn als Beziehungszahl, darum ist auch der Grundsatz wohl verständlich, dass eine unendlichkleine Zahl, als Summand neben endlichen, Null ist. Es wird dann in dieser Formel kein Fehler (auch kein „noch so kleiner") begangen, sondern es ist einzig und allein richtig, gleich Null zu setzen. Aber mit dem plötzlichen Abbrechen jener Reihe bei n oder nun bei Unendlich ist die Schwierigkeit des „Immerweitergehens" auch nicht genügend erledigt. Und auch hier hilft die neue Auffassung, indem sie den Satz aufstellt, dass die Weitenbehaftungen des Unendlichen nicht aufhören, dass aber für alle jener Beziehungsgrundsatz gilt. Die Erklärung der unendlichen Reihe ist aber auch damit nicht beendigt; denn es darf nicht verschwiegen werden, dass man bei jenem Subtrahieren beider Reihen immer gleiche Glieder von einander abzog. Es gehört noch der Grundsatz des Unendlichen dazu, dass in jeder Behaftung Verhältnisse bestimmter Art, also auch die Gleichheit unendlichkleiner Glieder bestimmter Ordnung vorstellbar ist; diese geben zu je zweien stets Null beim Abziehen der Reihen, und die einzelnen durch das Verschieben dadurch in den Behaftungen übrig gebliebenen sind gegenüber den endlichen, also dem entstehenden Anfangsgliede wirklich Null. Wir erhalten damit ohne Fehler das richtige endliche Resultat.

Das hier am Beispiel der geometrischen Reihe Gesagte lässt sich entsprechend an den übrigen auf der Schule zu behandelnden unendlichen Reihen ausführen, worauf ich hier natürlich nicht mehr eingehen kann. Es wird nach dem Gesagten gewiss vielen der Herren Kollegen möglich sein, im Unterrichte gute Gestaltungen zu erlangen. Sie werden gewiss ebenso wie ich eine sehr lebhafte Beteiligung der Schüler dabei wahrnehmen.

Nicht minder interessant ist es, in der analytischen Geometrie die Bestätigung der entsprechender Gleichheit unendlicher Vorstellungen im Räumlichen und Zahlengebiete zu finden. Besonders die Verwandtschaft der Kegelschnitte erscheint in einem neuen Lichte. Z. B. ist die für den unendlichen Leitkreis konstruierte Hyperbel für die Gegend des Endlichen tatsächlich eine Parabel. Es muss nach der Behaftungslehre nicht heissen: „angenähert", sondern genau, allerdings immer nur für bestimmte Behaftungen, hier für das Endliche.

Die Asymptote, dies wunderliche, die Schüler höchlichst befremdende Gebilde, lässt sich nach der neuen Art der Behandlung des Unendlichen mit ganz bestimmt mathematischen Ausdrücken präzisieren und wird dadurch dem Schüler weit klarer. Ein endliches Stück der Hyperbel in der Gegend des Unendlichen (unendlich entfernt vom Scheitel) fällt tatsächlich mit der Asymptote zusammen für die seitliche Behaftung mit dem Endlichen, hat also keinen endlichen Abstand von ihr.

Wenn man den Winkel, den die Asymptote mit der Hauptaxe bildet, unendlich klein wählt, so kann man leicht angeben, dass für bestimmte Behaftung der Zug der Hyperbel zur geraden Linie wird, für andere aber hyperbelartig gekrümmt blieb. (Nähere Ausführung in Schottens Zeitschr. für mathem. und naturw. Unterricht, Heft 5, 1903: Die Asymptote und die Weitenbehaftungen; B. G. Teubner).

Die Schule wird nicht gern auf die Behandlung des Maximum und Minimum verzichten. Dieses interessante Problem, das bekanntlich für die Erfindung der höheren Mathematik (Leibniz) eine so grosse Rolle gespielt hat und das so eng mit dem Unendlichkleinen verknüpft ist, gestaltet sich recht einfach, wenn man, wie ich es überhaupt bei der Untersuchung der Krümmung tat, das wesenswichtige Dreieck, das Dreieck dreier unendlichnaher Punkte betrachtet. Für die Stelle des Maximums einer Kurve liegt die Spitze des Dreiecks nach oben, für das Minimum nach unten. Die Höhe dieses Dreiecks ist unendlichklein von zweiter Ordnung, da die Seiten, ebenso die beiden kleinen Winkel, unendlichklein von erster Ordnung sind. An der negativen oder positiven Richtung dieser Höhe erkennt man den Unterschied von Maximum und Minimum.

Sehr geehrte Herren Kollegen, viele von Ihnen werden gewiss beim Unterrichte den Eindruck erhalten haben, dass eine strenge Scheidung der höheren von der niederen Mathematik sich nicht für immer wird festhalten lassen. Die neue Darstellung des Unendlichen erstreckt sich, wie aus dem Gesagten schon hervorgeht, ebenso wohl auf die Differential- und Integralrechnung, und es wird dadurch der enge Zusammenhang zwischen beiden Teilen der Mathematik hergestellt. Das Rechnen mit Differentialen schliesst sich bisher an den Grenzbegriff an, es lässt sich, wie ich an anderer Stelle zu zeigen versucht habe, einfacher und ausgiebiger mit den Weitenbehaftungen gestalten. Das Endliche ist nicht getrennt vom Unendlichen; das letztere ist nicht von der Rechnung und Vorstellung ausgeschlossen, beides weist fortwährend auf einander hin. Vielleicht darf ich mich der Hoffnung nicht verschliessen, dass Sie einverstanden sind, wenn ich sage: wir müssen dem Schüler von vornherein den Ausblick in das Unendliche erlauben und klären, gleichviel ob er später Mathematik studiert oder nicht.

Auch in dieser Beziehung schliesse ich mich auf das Wärmste an das gestrige Wort unseres Vorsitzenden an, dem Schüler weniger Stoffliches, mehr allgemein Interessantes, selbst scheinbar Kontroverses zu geben und ihn in der Ueberwindung der Schwierigkeiten kräftig zu machen für die künftigen Schwierigkeiten seines Lebens.

Zur Frage des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung an den höheren Lehranstalten.

Von K. Franz (Berlin).

Wohl die meisten Lehrer der Mathematik würden, wenn ihnen die Möglichkeit geboten würde, den Unterricht in der Analysis gern erteilen, einer Wissenschaft, in der sie früher mit jugendlichem Feuer und heissem Bemühen die Palme zu erringen bestrebt waren. Sie haben nicht vergessen, dass die Differential- und Integralrechnung gewissermassen das Handwerkszeug abgibt, um beispielsweise in die Flächen- und Kurventheorie, in die so elegante Funktionentheorie und in die Variationsrechnung einzudringen, dass ferner, um die Rechnungen in der mathematischen Physik und speziell in der hochinteressanten Mechanik bewältigen zu können, die höhere Analysis nicht zu entbehren ist. Mit welcher Eleganz wurde nicht die Rektifikation, die Quadratur und die Kubatur gewisser von der Schule her bekannter Figuren und Körper ausgeführt, wie schnell konnte ein Maximum oder Minimum einer Kurve oder einer Funktion mittels der Taylor'schen Reihe ermittelt werden, und wie sicher stellte der erste und zweite Differentialquotient nach der Zeit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer gegebenen Bewegung dar. Wie viel umständlicher und wie viel schwerfälliger gestalten sich alle diese Rechnungen auf Grund des Annäherungsverfahrens in der Schule! Wenn demnach kein Zweifel besteht, dass die Lehrer der Mathematik mit Freuden die Gelegenheit begrüssen würden, höheren mathematischen Unterricht erteilen zu dürfen, und wenn andererseits feststeht, dass die Hochschullehrer, an ihrer Spitze Herr Professor Klein in Göttingen*), die Einführung der Differential- und Integralrechnung in den mathematischen Unterricht der Mittelschule wünschen, weil eben diese Disciplinen vom Gesichtspunkte des Hochschulunterrichtes zu den Elementen gehören, und weil diese Elemente nirgends verständlicher und gründlicher als in der Schule, wo die Schüler sich bis zuletzt einem festen Willen unterzuordnen haben, gelernt und eingeprägt werden dürften, so steht doch sehr in Frage, ob es im Interesse der Schüler angebracht ist, den Anfangsunterricht in der Infinitesimalrechnung bereits in der Schule zu erteilen.

Das Verlangen nach der Einführung dieses Unterrichts in die Schule wäre doch nur dann begründet, wenn sich herausstellen würde, dass Kenntnisse in den Elementen der Analysis zur allgemeinen Bildung erforderlich wären, und wenn nicht etwa nur ein geringer Prozentsatz der Schüler aus diesem Unterrichte wirklichen und dauernden Nutzen zöge. Es ist sehr die Frage, ob für einen Mediziner, oder für einen Juristen und erst recht für einen Techniker der Begriff des Differentials durchaus unentbehrlich ist. Für den Mediciner und Juristen scheint mir das Verständnis dieses Begriffs durchaus entbehrlich, wenngleich zugegeben werden soll, dass die Kenntnis des Begriffs manche Schwierigkeiten auf einzelnen Gebieten, wie z. B. in der Anatomie und in der Versicherungswissenschaft leichter überwinden hilft. Das will aber wenig bedeuten, denn jede Erweiterung der Kenntnisse bringt Vorteil, und man könnte demnach mit demselben Recht wie die Analysis noch viele andere gute und nützliche und vielleicht wichtigere Dinge in das Schulpensum aufnehmen. Auch Techniker haben, wie Herr Direktor Holzmüller ausgeführt hat*), erklärt, in ihren Rechnungen mit der elementaren Mathematik auskommen zu können und nicht die Zeit zu haben, sich durch ein erneutes Studium den flüchtigen Infinitesimalbegriff von neuem anzueignen. Die grosse Menge der Studierenden würde wahrscheinlich sich damit begnügen, im Abiturientenexamen rein äusserliche Kenntnisse in der Analysis nachgewiesen zu haben, um recht bald und recht gründlich die ganze Sache zu vergessen, und die Kritiker würden mit gutem Grunde einen Gegenstand mehr für den Nachweis der Überbürdung der armen, geplagten Schüler aufzuzählen haben. So blieben denn nur die Studierenden der Mathematik und vielleicht der Naturwissenschaften übrig, für die die Behandlung des Themas auf der Schule von nicht zu unterschätzendem Vorteile sein würde. Aber soll man um dieser wenigen Gerechten willen auf der Schule ein neues Unterrichtselement einführen, während für das Maximum der Schüler eine Notwendigkeit für die Aufnahme einer schwierigen mathematischen Disziplin in den Unterricht nicht besteht? Denn dass der in Frage stehende Unterricht zur allgemeinen Bildung erforderlich ist, wird schon aus dem Grunde niemand behaupten, weil mit den Methoden der elementaren Mathematik ebenso gut und leichter logische Schärfe und klares Denken — das Ziel des mathematischen Unterrichtes — auf der Schule gefördert werden kann wie mit denen der höheren Mathematik. Vom Gesichtspunkte der allgemeinen Bildung aus erscheint also die introductio in analysin durchaus überflüssig.

Ferner gibt folgender Umstand zu starken Bedenken Anlass. Der mathematische Unterricht soll nicht bloss zur Aneignung einer gewissen rechnerischen Fertigkeit in der Arithmetik und Algebra dienen, sondern soll sich auch die Pflege der räumlichen Anschauung angelegen sein lassen. Diese wurde auf der Schule und zum Teil auch auf der Universität bisher arg vernachlässigt, während es jetzt nach Einführung der neuen Lehrpläne auf der Schule etwas besser geworden ist. Zwar wird auf der Universität analytische Geometrie und Flächentheorie doziert, indessen tritt in diesen Gebieten weniger die Raumanschauung als die Rechnung in den Vordergrund. Nur bei der synthetischen und projektiven Geometrie, die auch auf den meisten Universitäten und höheren Schulen recht stiefmütterlich behandelt wird, kommt die räumliche Vorstellung zu ihrem Recht, besonders dann, wenn in der ersteren nicht nur ebene Gebilde, wie auf der Schule, sondern auch räumliche in Betracht gezogen werden. Die einzige Stätte, wo die räumliche Anschauung wirklich ausgebildet wurde, waren bisher die Technischen Hoch- und Mittelschulen, wo die darstellende Geometrie in Verbindung mit der projektiven gelehrt wurde. Diese Disciplin eignet sich wie keine zweite zur Aus-

*) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11, Heft 3, 1902, Seite 128—141.

*) cf. 2. Jahrgang 9. und 10. Heft der Monatsschrift für höhere Schulen.

bildung, Kräftigung und Stärkung der räumlichen Anschauungsweise, weil durch die Zeichnung in den verschiedenen Projektionsebenen das vorgestellte räumliche Gebilde gewissermassen von allen Seiten beleuchtet wird und diese Zeichnung nicht ausgeführt werden kann, ohne dass vorher eine scharfe Fixierung und genaue Vorstellung des räumlichen Gegenstandes in bezug auf seine Lage und seine Dimensionen vorangegangen wäre. Die Zeichnung ist eben so sehr das Substrat für die darstellende Geometrie, wie die Rechnung es für die meisten anderen mathematischen Disziplinen ist. Die Erkenntnis von der hohen Wichtigkeit der darstellenden Geometrie für räumlichen Sinn und räumliche Vorstellung hat sich in jüngster Zeit Bahn gebrochen und wird durch ihre Einführung in den Unterrichtsbetrieb der höheren Schulen, durch ihre Aufnahme in die Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Schulamts, sowie durch die Einrichtung von besonderen Kursen auf verschiedenen Universitäten, z. B. Göttingen, zum Ausdruck gebracht. Wer wollte leugnen, dass diese interessante und die manuelle Geschicklichkeit fördernde Wissenschaft, die leider auf dem Gymnasium noch gar nicht zu ihrem Rechte kommt, für die Jugend von ungleich höherem Werte als die Kenntnis des Differentialquotienten ist? Während für die Differentialrechnung die Gefahr vorliegt, dass der Begriff des Differentials den meisten Schülern nichts als ein Schemen bleiben wird, sich dem Unterricht schlecht anpasst und vermutlich nur wenige dauernden Gewinn davon erzielen, wird durch die organisch sich an die Stereometrie anschliessende darstellende Geometrie und durch das mit ihr verbundene Zeichnen bei jedem Schüler die geometrische Anschauungsweise gefestigt, und damit ein wirklicher, allgemeiner Bildungswert gewonnen. Wenn nun die Infinitesimalrechnung in die Schule eingeführt würde, so dürfte sehr bald der Unterricht in der darstellenden Geometrie, zumal da alle Lehrer in der Differential- und Integralrechnung, aber bisher nur wenige in der darstellenden Geometrie über ausreichende Kenntnisse verfügen, darunter leiden, es würde dadurch die von der Regierung bezweckte Ausbildung im projektiven Denken und Zeichnen sowohl der Schüler als auch der Lehrer sehr bald ins Stocken kommen. Auch aus diesen Gründen dürfte sich demnach die Einführung der Infinitesimalrechnung auf den höheren Schulen nicht empfehlen.

Das Gebiet der Elementarmathematik ist von dem der höheren Mathematik scharf getrennt, der Unterschied besteht meist darin, dass in ersterer mit endlichen, in letzterer mit unendlich kleinen oder mit unendlich grossen Grössen, also mit Grenzübergängen operiert wird. Schon dieser Umstand müsste davon abschrecken, den Schritt von der niederen zur höheren Mathematik bereits auf der Schule zu vollziehen. Wenn auf der Schule im Französischen das Altfranzösische, im Englischen angelsächsische Idiome gelehrt und im Lateinischen und Griechischen gar Quellenstudien gemacht werden sollten, so würde man diesen Vorschlag belächeln und ihn für einen blossen Scherz halten. Warum ist man bei der Mathematik anderer Meinung, verhält es sich da mit der Einführung der Analysis etwa anders? In der Physik und Chemie ist eine solche natürliche Grenze zwischen elementarem und akademischem Unterricht nicht vorhanden, so dass der Studierende eine grosse Anzahl von Experimenten und Entwicklungen auf der Schule bereits gesehen und gehört hat. Damit hängt zusammen, dass in dem Masse der Anforderungen in diesen Fächern sich ganz erhebliche Schwankungen für die einzelnen höheren Lehranstalten ergeben, und dass z. T. diese Anforderungen sehr zum Nachteil der Schüler und zum Schaden für andere Lehrgegenstände gar zu stark in die Höhe geschraubt werden. Wenn nun für die Mathematik eine solche natürliche Grenze zwischen Elementarem und akademischem Wissen sich findet, so sollte man sie doch nicht ohne Zwang überschreiten und in ein Gebiet einzudringen versuchen, das für die meisten Schüler doch stets ein Buch mit sieben Siegeln bleiben wird. Der Uebertreibung auch in den mathematischen Kenntnissen würde mit dieser Grenzöffnung Tür und Tor geöffnet, und die Klagen über Ueberbürdung, besonders in den alten Sprachen und mathematischen Fächern, die erst kürzlich wieder auf der Naturforscherversammlung zu Cassel von Herrn Professor Griesbach erhoben sind, würden kein Ende nehmen.

Gerade in der Mathematik sollte das Wort „Non multa, sed multum“ so recht zur Geltung kommen. Diesem Prinzip würde zuwider gehandelt, wenn einerseits durch die Einführung der Analysis der Lehrstoff vermehrt, und dadurch andererseits der elementare Unterrichtsstoff nicht genügend durchgearbeitet würde. Dass aber der Unterricht in der elementaren Mathematik noch in vieler Hinsicht ergänzt und vertieft werden kann, lässt sich leicht nachweisen. In der Algebra würde die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf die Lebensversicherung, die Berechnung von Anuitäten, Prämien und Reserven in Frage kommen. Dadurch würden die Schüler einen Blick in hochinteressante, praktische Anwendungen der Mathematik auf das sich jetzt immer mehr entwickelnde Versicherungswesen erhalten. Die Geometrie könnte durch Einführung in die synthetische Geometrie und Steiner'sche Ideen, die Stereometrie durch die Methoden der darstellenden Geometrie ergänzt und vertieft werden. Um sich Erscheinungen und Figuren mathematisch erklären zu können, greift man doch stets auf die elementare Mathematik zurück, nur der in höherer Mathematik durchaus Erfahrene ist imstande, die letztere anzuwenden, eine Einführung in dieses Gebiet würde ihn nicht dazu befähigen. Selbst Besucher von Technischen Hochschulen, an denen die Differential- und Integralrechnung viel gründlicher betrieben wird, als sie an den Mittelschulen betrieben werden könnte, haben, wie bereits bemerkt, erklärt, dass sie in späteren Jahren stets sich der elementaren Mathematik bedienten. Aus eigener Erfahrung ist mir, der ich eine Technische Hochschule besuchte, bekannt, dass es daselbst im wesentlichen auf die schnelle Berechnung von Differentialen und Integralen, von Maximen und Minimen, von Umfängen, Oberflächen und Inhalten ankommt, während von einer wirklichen Einsicht auf Grund einer strengen Definition des Unendlichkleinen wohl kaum die Rede ist. Was alles mit der niederen Mathematik geleistet werden kann, das sieht man so recht aus den Büchern von Herrn Direktor Holzmüller — ich hebe besonders die Stereometrie, 4 Bände, und die Ingenieurmathematik hervor —, und es war mir sehr interessant von dem genannten Herrn brieflich zu erfahren, dass an der Königlichen Maschinenbauschule zu Hagen die verschiedensten Kurven und Flächen, wie Cykloiden, Epi- und Hypocykloiden, Evolventen, logarithmische Spiralen, elastische Linien, cyklische Kurven der Ellipsen und des

Drehungsellipsoides, Schraubenflächen, Krümmungslinien, ja auch Trägheitsmomente, Potentialtheorie und Kraftlinien in elementarer Weise erklärt wurden, und dass sich daselbst auf allen Gebieten ein sehr starkes Bedürfnis nach elementarer Erklärungsweise bemerkbar machte. In der Praxis scheinen demnach die elementaren Methoden vor denen der Analysis den Vorzug zu finden. Ueberhaupt hat es den Anschein, dass jeder Mensch, wie auf allen Gebieten, so auch in der Mathematik und auf dem weiten Gebiet der angewandten Mathematik nach einer möglichst einfachen Erklärung sucht, die natürlich nur auf Grund der elementaren Mathematik gewonnen werden kann, und dass ferner mit Hilfe der Elementarmathematik viel mehr geleistet werden kann, als bisher angenommen wurde. Vielleicht ist die Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz daran schuld gewesen, dass elementare Theorieen unterdrückt wurden, wo solche recht wohl möglich gewesen wären. Natürlich ergeben sich die Resultate mit Hilfe der Infinitesimalrechnung viel schneller, und die Rechnungen sind viel eleganter, so dass kein Mathematiker die zu so grossen Fortschritten und Entdeckungen führende Analysis entbehren möchte. Aber das darf doch kein Grund sein, sie auf den höheren Schulen einzuführen, zumal da dasselbe Ziel sich in sehr vielen Fällen mit Hilfe der Elementarmathematik in einer für die Jugend verständlicheren und natürlicheren Weise erreichen lässt. Vielmehr dürfte es aus den angegebenen Gründen empfehlenswert sein, mit aller Kraft auf der Schule die niedere Mathematik zu betreiben und auszubauen, die höhere aber der Universität zu überlassen.

Last not least soll auf eine ebenso schwierige wie wichtige Ergänzung des mathematischen Unterrichts hingewiesen werden, zu welcher Herr Direktor Schulte-Tigges die erste Anregung gegeben hat*), auf die Betonung des philosophischen und logischen Momentes und auf eine dementsprechende Durchbildung der Schüler. Die letzteren sollen, das ist das erstrebte Ziel, vor dem Verlassen der Schule in der philosophischen Propädeutik auf der Prima unterwiesen werden, und damit dies Ziel erreicht werden könne, durch dessen Verwirklichung der gesamte Unterricht einen harmonischen Abschluss finden würde, sollen auf allen Stufen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts logische und philosophische Betrachtungen angeschlossen werden. Auch jetzt, wo der Unterricht nicht durch eine Unterweisung in der philosophischen Propädeutik gekrönt wird, werden bereits eine grosse Anzahl von Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften den Unterricht in der Weise durchgeführt haben, dass logische Schulung erreicht und zu spekulativen Ueberlegungen Anregung gegeben wird. Vielleicht ist die Behauptung nicht zu gewagt, dass, wenn der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht überhaupt wirkungsvoll und interessant verlaufen soll, er des philosophischen Strebens nach einer Zurechtlegung der Gesamtheit aller Dinge, der logischen Schärfe und der Begeisterung für die Natur und ihre ewigen Gesetze nicht zu entraten vermag. Die Schüler sollen spüren, dass alle Gegenstände der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer in einander greifen, dass ihre Erklärung dazu dienen soll, uns ein Verständnis von allen Vorgängen in der gewaltigen und hehren Natur Gottes zu verschaffen, dass ihre Erkenntnis den Schlüssel für die Erkennung des Wahren in der realen Welt bildet, und wenn sie es nicht spüren, so sollen sie dazu hingeleitet werden, es zu empfinden, es soll ihnen erklärt werden. Hier hat eben die Tätigkeit des Lehrers einzusetzen, und je weiter sein Blick ist, je weiter und allumfassender seine allgemeinen, wie seine Einzelkenntnisse sind, desto mehr vermag er auf die Schüler einzuwirken. Wo aber in alter dogmatischer, starrer euklidischer Form die einzelnen Definitionen und Lehrsätze der Geometrie an einander gereiht werden ohne Rücksicht auf die in den Beweisen liegende Logik, die Zweckmässigkeit der Unterweisungen und ihren Zusammenhang mit praktischen Dingen, wo in der Anwendung der arithmetischen Lehrsätze auf recht viele und möglichst komplizierte Beispiele, die schliesslich den Schüler ermüden und ihn anöden, das Heil gesucht wird, während auf den wissenschaftlichen Aufbau der Arithmetik aus den natürlichen Zahlen heraus nicht hingewiesen wird, da ist das Bild einer Unterrichtsstunde dasselbe, wie es in früheren Jahren häufig gewesen sein soll, hüben und drüben Langeweile und Oede. Während in den Naturwissenschaften philosophische Gedanken Platz finden mögen, kommt für die Mathematik besonders die logische Schulung in Betracht — denn in der Schule den Begriff der Zahl philosophisch zu erläutern, dürfte wohl schwerlich angebracht sein —, und diese wird in der Arithmetik durch den streng logisch ausgeführten Aufbau aus den natürlichen Zahlen heraus erreicht, der die Einführung der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären Grössen rechtfertigt, sie als begriffliche, aber nicht reale Erweiterungen des ursprünglichen, natürlichen Zahlensystems erkennen lässt und den inneren Zusammenhang und die Abgeschlossenheit des Systems der 7 elementaren Rechenoperationen dartut. Auf die logische Entwicklung und Durchbildung kommt es in der Algebra und Arithmetik viel mehr an, als auf öde und zeitraubende Rechnungen, durch die nur eine mechanische Kunstfertigkeit erzeugt wird, und die häufig gerade die Schüler am besten auszuführen verstehen, die nur wenig oder gar kein Verständnis für die Mathematik besitzen. Leider ist in seiner jetzigen vorgeschriebenen Form bereits der Rechenunterricht in Sexta und Quinta, gewissermassen die Propädeutik für die Arithmetik, an vielen Stellen durchaus unlogisch und rein mechanisch; auch wird die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten meist rein mechanisch betrieben, weil die Sätze über gemeinsame Lösungen von verschiedenen Systemen von Gleichungen nicht bekannt sind. Hier tut Wandel dringend not. In demselben Masse wie in der Arithmetik kann in der Geometrie begriffliches, klares Denken dadurch erzielt werden, dass an die Spitze einer Gedankenreihe die Definition gestellt wird und aus dieser heraus auf dem Wege der Deduktion die Lehrsätze gewonnen werden. Der Schüler muss einsehen lernen, dass er mit der Definition schon das ganze Gebiet gedanklich beherrscht, dass er, wie ich manchmal im Unterricht zu sagen pflege, in der Mathematik wie ein König im Reiche seiner Gedanken herrscht. Die Geometrie bietet häufig Gelegenheit, die Syllogismen der Logik, die Zusammensetzung hypothetischer Urteile, auf denen nach Sigwart der Fortschritt des Denkens überhaupt beruht, einzuüben und besonders scharf nachzuweisen, dass aus der Prämisse „Wenn A ist, so folgt B“ sich durchaus nicht zu ergeben braucht: „Wenn A nicht

*) Monatsschrift für höhere Schulen. II. Jahrgang, 8. Heft Seite 451—458.

ist, so folgt B nicht", oder „Wenn B ist, so folgt A." Vorzüglich die geometrischen Oerter sind in logischer Beziehung sehr zu verwerten und didaktisch äusserst fruchtbar, weil eben bei ihnen für die Lage eines Punktes mit einer bestimmten Eigenschaft eine conditio sine qua non erfüllt sein muss, durch deren Bestehen der vielfach grosse Schwierigkeiten verursachende Begriff des geometrischen Ortes überhaupt erst erklärt wird. Diese kurzen Andeutungen mögen genügen, um nachzuweisen, wie der elementare mathematische Unterricht bei richtiger Behandlung dazu dienen kann, der für die Prima vorgeschlagenen philosophischen Propädeutik die Wege zu ebnen, oder aber in welcher Weise, falls das Ziel nicht erreicht werden sollte, der mathematische Unterricht auch abgesehen davon nach der logischen Richtung hin ergänzt und vertieft werden kann.

Fallen alle diese teils notwendigen, teils möglichen Ergänzungen so gar nicht ins Gewicht gegenüber der gewünschten Einführung der Analysis, die doch nur einer geringen Anzahl von Schülern von wirklichem Nutzen sein kann, während die weit grössere Menge durch den Ausbau der elementaren Mathematik, und nicht durch den Anbau einer ganz neuen, schwierigen mathematischen Disziplin gefördert würde? Soll der mathematische Unterricht, wie er durch die Lehrpläne von 1901 festgelegt ist, sich nicht ruhig entwickeln und innerlich auswachsen dürfen, wie es die alten Sprachen durften, die das Gymnasium zu so herrlicher Blüte brachten, um zu zeigen, was er vermag, ehe man in ein neues, schwieriges Gebiet einzudringen versucht?

Es gibt eine Lösung der Frage, die sowohl die Hochschullehrer als auch die Lehrer an den höheren Schulen befriedigen dürfte, welch' letztere aus wissenschaftlichen Gründen den Unterricht in der Analysis herzlich gern, wenn auch teilweise mit Bedenken hinsichtlich der Zweckmässigkeit übernehmen würden, und die schliesslich auch dann als die beste sich erweisen würde, wenn sich bei einer grösseren Zahl von Studierenden ein unabweisliches Bedürfnis herausstellen sollte, in der Analysis orientiert zu sein. Diese Lösung würde darin bestehen, dass man auf der Universität von einem Lehrer einer höheren Schule eine mit Uebungen verbundene Vorlesung über die Anfangsgründe der Analysis im Anschluss an das elementare Pensum der Schule halten liesse, und zwar würde es sehr wichtig sein, gerade von einem in der Pädagogik durchaus erfahrenen Schulmann den Unterricht erteilen zu lassen, da sonst der vielfach auf Universitäten sich bemerkbar machende Uebelstand wieder hervortreten wird, dass die Anfangsgründe der höheren Mathematik den meisten, auch solchen mit guten Abgangszeugnissen versehenen Hörern die grössten Schwierigkeiten bereiten und auf viele von ihnen abschreckend und entmutigend einwirken. Um dieser Schwierigkeiten Herr zu werden, dürfte niemand geeigneter als ein Schulmann sein, der die ihm von der Schule her geläufige Methodik auch im Universitätsunterrichte fortsetzen würde, während der Hochschullehrer mit der ganzen Wucht und Schärfe mathematischer Akribie und Beweisführung, den Blick auf höhere mathematische Gebiete gerichtet, an den Gegenstand herantreten würde und ihn ungleich schwieriger zur Darstellung bringen dürfte. Wenn diese Einrichtung getroffen würde, so könnten die Hochschullehrer sich nicht beklagen, denn die gewünschte, im Anschluss an den Schulunterricht gegebene Darstellung der Analysis wäre gewährleistet; die mathematischen Lehrer der höheren Schulen würden mit der für den einzelnen allerdings recht geringen Aussicht zufrieden sein, an der Universität dozieren zu dürfen und so für ihre von der Regierung so sehr gewünschte und empfohlene wissenschaftliche Tätigkeit ein Feld der Betätigung gewonnen zu haben, sie würden sich freuen, einen Gegenstand von der Schwelle der Schule zurückgewiesen zu haben, dessen Eintritt das Wissen nur verflachen, aber nicht vertiefen, die Jugend überladen und das Wort von der didaktischen Hyperbel*) in der Mathematik zur Wahrheit, dagegen das gerade für die Mathematik beherzigungswerte Wort „Non multa, sed multum" zu schanden machen würde. Schliesslich würde auch bei dem vorgeschlagenen Verfahren allen sich für den Gegenstand interessierenden Studierenden Gelegenheit gegeben, ihrem Wissensdrange zu folgen, und es würde sich dann bald zahlenmässig feststellen lassen, wie stark das Bedürfnis nach den Elementen der Infinitesimalrechnung in der Gesamtheit der Studierenden vorhanden ist.

Informations-Kurse und -Reisen für Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Von Dr. W. Brüsch, Oberlehrer am Reform-Realgymnasium und der Realschule zu Lübeck.

Die in Nr. 1 des laufenden Jahrganges dieser Blätter (S. 1 bis 3) von Herrn Latrille erörterte Frage, ob auch für Mathematiker und Naturwissenschaftler zur wissenschaftlichen und fachlichen Weiterbildung ein längerer Urlaub (wie für die Neuphilologen!) erforderlich sei, hat meine Aufmerksamkeit sowohl wegen der ihr beizulegenden grossen Bedeutung als auch wegen des Umstandes erregt, dass ich auf diesen Punkt bereits am Schlusse eines kleinen Aufsatzes: „Die Industrie im chemischen Unterrichte" in „Natur und Schule" 1902 S. 368 hingewiesen habe und auch Ebeling eine recht dankenswerte Veranstaltung des Berliner Magistrates in Nr. 4 desselben Jahrganges der genannten Zeitschrift besprochen hat.

Der von Herrn Latrille angeregte halbjährige Urlaub könnte sehr wohl dazu benutzt werden, umfangreichere Kenntnis von der Entwickelung der verschiedenen Industriezweige zu nehmen, um davon das Wichtigste auch in der Chemie und der Physik den Schülern vortragen bezw. darauf an geeigneten Stellen Bezug nehmen zu können. Mag die Kenntnis der technischen Anwendungen der chemischen und physikalischen Erscheinungen auch für den Schüler einer höheren Lehranstalt vielleicht keine so unmittelbare Notwendigkeit wie für den Fachschüler sein, so scheint es doch bei dem Zuge der Zeit und dem gewaltigen Aufschwunge der Technik durchaus erforderlich, ihn nicht völlig im Unklaren über die Verwendungsfähigkeit dessen, was er lernt, zu lassen, ganz abgesehen davon, dass der Unterricht sehr wesentlich durch solche eingeflochtenen Betrachtungen an Interesse und Lebendigkeit gewinnt. Soll das aber mit bestem Erfolge geschehen, so muss der Lehrende nicht nur in Bezug auf die wissenschaftliche Seite der Chemie und Physik, sondern teilweise auch in Bezug auf die Anwendungsgebiete aus dem Vollen schöpfen. Das Letztere kann er jedoch nur dann wirklich, wenn er nicht nur durch Bücher, sondern auch durch wiederholte Anschauung sich mit den Industrieanlagen bekannt gemacht hat.

*) E. Denicke, Korrespondenzblatt, 11. Jahrgang, Nr. 19, Seite 310.

Ebenso kann man sich nur auf diese Weise davor schützen, dass man zu viel Unwesentliches oder Veraltetes bringt.

Die grosse Frage würde nur sein, wie am besten solche erforderlichen Instruktionsreisen nach Hütten jeder Art, vielleicht auch Gruben, grösseren Gaswerken, Kokereien, elektrischen Zentralen und anderen Anlagen in den längeren Urlaub eingeschoben werden könnten, ohne doch einen zu grossen Teil der zur Verfügung stehenden Zeit in Anspruch zu nehmen. Ist ein halbjähriger Urlaub erlangt, so liegt die Sache ja ziemlich einfach: Da die Uebungs- und Vortragskurse, an die Herr Latrille dankt, doch zweifellos erst Ende Oktober (April) an der in Aussicht zu nehmenden Hochschule beginnen und Anfang März (August) beendigt sein würden, so können die ersten Wochen des Oktober (April) und die letzten Wochen des März, im Sommer — und aus diesem Grunde erscheint das Sommersemester als das günstigere — sogar der August und September für solche Reisen in verschiedene Industriegebiete ausgeführt werden. Es dürfte fast jedes Werk bereit sein, den mit einer Empfehlung seiner Behörde Versehenen zur Besichtigung nicht nur an einem Tage, sondern auch an mehreren Tagen zuzulassen, sofern es die Betriebsverhältnisse irgendwie zulassen. Eingehende literarische Vorbereitungen gehören freilich zum erfolgreichen Besuche solcher Anlagen.

Noch empfehlenswerter wäre es allerdings wohl, wenn solche Reisen zu gewissen Zeiten planmässig unter Leitung eines Hochschuldozenten oder eines sonst schon mit den nötigen Erfahrungen versehenen Herrn unternommen würden. Der Wert dieser Reisen könnte noch gesteigert werden, wenn die Auswahl der zu besichtigenden Anlagen im Anschluss an die später zu hörenden bezw. schon gehörten Vorträge an der Hochschule erfolgen könnten.

Elementare Behandlung der Maximum- und Minimum-Aufgaben.

Von Ingenieur E. Puller (Saarbrücken).

In manchen Fällen ist es bei Bestimmung der Maximum- und Minimum-Aufgaben nicht unzweckmässig, hierfür lediglich Sätze der niederen Mathematik in Anwendung zu bringen; dieses trifft namentlich dann zu, wenn in Lehrbüchern die Bekanntschaft mit der Differentialrechnung im allgemeinen nicht vorausgesetzt wird. Kommen nun genannte Aufgaben vor, so geht man wohl von diesem sonst streng durchgeführten Prinzip ab und erschwert dadurch dem mit den höheren Berechnungen nicht vertrauten Leser das Verständnis. Es erscheint uns daher nicht ganz ohne Nutzen zu sein, im Folgenden darzutun, wie man auch ohne Anwendung der Differentialrechnung solche Aufgaben lösen und diese damit einem grösseren Leserkreis zugänglich machen kann.

Nachstehendes Verfahren wird unseres Erachtens insbesondere für manche technische Lehrbücher, bei denen man aus naheliegenden Gründen von der höheren Mathematik keinen Gebrauch machen will, von Wert sein, zumal gerade die Technik zu einer Behandlung vorbenannter Aufgaben vielfach Gelegenheit bietet.

Soll eine Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle x_0 einen grössten bezw. kleinsten Wert y_0 aufweisen, so müssen die zu $(x_0 + \triangle x)$ und $(x_0 - \triangle x)$ gehörigen y kleiner bezw. grösser als y_0 ausfallen; aus diesem Grunde nennt man solche Punkte auch zutreffend Gipfel- bezw. Sohlpunkte.*) Anwendung von vorstehender Erklärung wollen wir zunächst bei der Funktion

(1) $$y = A + v^2 \cdot f(v)$$

machen. Wir finden leicht, dass y am grössten bezw. am kleinsten wird, wenn $v = 0$ und $f(0)$ negativ bezw. positiv ist. Denn setzen wir an Stelle von v die Grössen $+\triangle v$ und $-\triangle v$, so erhalten wir $y = A + (\triangle v)^2 \cdot f(\pm \triangle v)$; nehmen wir nun an, dass $f(\pm \triangle v)$ negativ ist und bezeichnen wir diesen Wert mit $(-B)$, so ergibt sich $y = A - B(\triangle v)^2$, aus welcher Gleichung ohne Weiteres folgt, dass y am grössten wird, wenn $\triangle v = 0$ ist. In gleicher Weise finden wir, dass y am kleinsten wird, wenn $v = o$ und $f(o)$ positiv ausfällt. Ist aber $f(o) = o$, so hat man es weder mit einem grössten noch mit einem kleinsten Wert von y zu tun.

In Gleichung (1) ist angenommen worden, dass dieselbe nur Ausdrücke der zweiten und höheren Potenz von v enthält; wollen wir also von vorstehender Entwickelung bei einer beliebigen Funktion $y = f(x)$ Gebrauch machen, so haben wir eine solche Umformung vorzunehmen, dass die erste Potenz der Veränderlichen in Fortfall kommt und demgemäss die Funktion die Form der Gleichung (1) annimmt.

Dieses Verfahren wollen wir im Folgenden für verschiedene Funktionsformen näher darlegen.

1. Es sei gegeben

(2) $$y = a + b x + c x^2 + d x^3;$$

wir setzen $x = u + v$ und erhalten durch Ordnen nach Potenzen von v die Gleichung

(3) $$y = (a + b u + c u^2 + d u^3) + v(b + 2 c u + 3 d u^2) + v^2(c + 3 d u + d v)$$

da in dieser Gleichung u und v beliebig sein können, so setzen wir

(4) $$b + 2 c u + 3 d u^2 = o,$$

womit in (3) die erste Potenz von v verschwindet, d. h. man erhält

(5) $$y = A + v^2(c + 3 d u + d v),$$

wenn

$$A = a + b u + c u^2 + d u^3$$

gesetzt wird. Nach obiger Entwickelung wird y in (5) am grössten bezw. kleinsten, wenn

(6) $$v = o \text{ und } c + 3 d u$$

negativ bezw. positiv ausfällt. Für $v = o$ wird aber $u = x$; demnach erhalten wir das Endergebnis: y wird am grössten bezw. kleinsten, wenn nach (4) $b + 2 c x + 3 d x^2 = 0$ und nach (6) $c + 3 d x$ negativ oder positiv ist.

2. Gegeben sei

(7) $$y = a + b x + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$$

wir setzen wiederum $x = u + v$ und erhalten

(8) $$y = a + b u + b v + \frac{c}{u + v} + \frac{d}{(u + v)^2}$$

durch Ausführung der Division in den beiden letzten Gliedern findet sich:

$$\frac{1}{u + v} = \frac{1}{u} - \frac{v}{u^2} + \frac{v^2}{u^2(u + v)}$$

und

$$\frac{1}{(u + v)^2} = \frac{1}{u^2} - \frac{2 v}{u^3} + \frac{v^2(3 u + 2 v)}{u^3 (u + v)^2},$$

womit Gleichung (8) sich verwandelt in:

(9) $$y = \left(a + b u + \frac{c}{u} + \frac{d}{u^2}\right) + v\left(b - \frac{c}{u^2} - \frac{2 d}{u^3}\right) +$$

*) Vergl. Fuhrmann, Aufgaben der Diff.-Rechnung.

$$+ v^2 \left\{ \frac{c}{u^2 (u+v)} + \frac{d\,(3u+2v)}{u^3 (u+v)^2} \right\}$$

damit das zweite Glied mit v verschwindet, setze man

$$b - \frac{c}{u^2} - \frac{2d}{u^3} = 0 \tag{10}$$

dann wird (9) zu

$$y = A + v^2 \left\{ \frac{c}{u^2 (u+v)} + \frac{d\,(3u+2v)}{u^3 (u+v)^2} \right\}$$

y nimmt demnach einen grössten bezw. kleinsten Wert an, wenn Gleichung (10) besteht, und

$$\frac{c}{u^3} + \frac{3d}{u^4} \tag{11}$$

negativ oder positiv ist; auch hier ist wieder $u = x$ zu setzen.

3. Gegeben sei die Funktion

$$y = x + \sqrt{1 - x^2};$$

für $x = u + v$ entsteht

$$y = u + v + \sqrt{1 - (u+v)^2} = u + v + \sqrt{(1 - u^2) - v\,(2u + v)} \tag{12}$$

durch Ausziehen der Wurzel des letzten Gliedes findet man

$$\sqrt{(1 - u^2) - v\,(2u + v)} = \sqrt{1 - u^2} - v \frac{2u + v}{2\sqrt{1 - u^2}} - v^2 \frac{(2u + v)^2}{8\,(1 - u^2)\sqrt{1 - u^2}} - \ldots\ldots$$

Die weiteren Glieder dieser Reihe sind für unsere Zwecke entbehrlich.

Folglich verwandelt sich Gleichung (12) in

$$y = (u + \sqrt{1 - u^2}) + v \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) - v^2 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1 - u^2}} + \frac{(2u + v)^2}{8\,(1 - u^2)\sqrt{1 - u^2}} \right\} \tag{13}$$

Setzt man wiederum

$$1 - \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} = 0, \tag{14}$$

so erhält man für (13)

$$y = u + \sqrt{1 - u^2} - v^2 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1 - u^2}} + \frac{(2u + v)^2}{8\,(1 - u^2)\sqrt{1 - u^2}} \right\}$$

Für $v = 0$ wird diese Funktion am grössten oder kleinsten, wenn der Faktor von v^2 positiv oder negativ ausfällt, oder, da $v = 0$ ist, wenn

$$\frac{1}{(1 - u^2)\sqrt{1 - u^2}}$$

positiv oder negativ wird.

Aus Vorstehendem entnehmen wir, dass unser Verfahren bei algebraischen Funktionen allgemein anwendbar ist, wobei es keinen Unterschied macht, wenn die Potenzen der Veränderlichen mit ganzen positiven oder negativen oder auch mit gebrochenen Exponenten erscheinen.

In manchen Fällen kann man auch durch Einführung einer neuen Veränderlichen und ferner durch Umwandlung der gegebenen Funktion zum Ziele gelangen. Wir wollen hierfür verschiedene Beispiele angeben, aus welchem das einzuschlagende Verfahren zu erkennen ist.

4. Es sei gegeben

$$y = a^2 x + \frac{b^2}{x}, \tag{15}$$

eine Funktion, welche in vielen praktischen Fällen zur Erledigung kommen muss.

Statt (15) kann man setzen

$$y = \frac{a^2 x^2 + b^2}{x};$$

führt man nun die neue Veränderliche φ gemäss der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{a^2 x^2}{b^2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a x}{b}$$

ein, so entsteht

$$y = ab \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2ab}{\sin 2\varphi},$$

welche Funktion für $\sin 2\varphi = 1$ oder für $\varphi = 45^0$ am kleinsten ausfällt. Folglich wird

$$\operatorname{tg} \varphi = 1 = \frac{a x}{b}, \text{ also } x = \frac{b}{a} \text{ und } y = 2ab.$$

5. Nehmen wir die Funktion (3) $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ nochmals vor und setzen $x = \sin \varphi$, also $\sqrt{1 - x^2} = \cos \varphi$, so entsteht $y = \sin \varphi + \cos \varphi$; statt dessen wählen wir allgemeiner

$$y = a \sin \varphi + b \cos \varphi. \tag{16}$$

Diese Funktion kann in zweifacher Weise behandelt werden.

a) Man setze $\varphi = u + v$, also $y = a \sin (u + v) + b \cos (u + v)$ oder nach bekannten Beziehungen

$y = a \sin u \cos v + a \cos u \sin v + b \cos u \cos v - b \sin u \sin v$

oder, wenn man nach $\sin v$ und $\cos v$ ordnet

$y = \sin v\,(a \cos u - b \sin u) + \cos v\,(a \sin u + b \cos u)$.

Setzt man nun

$$a \cos u - b \sin u = 0, \tag{17}$$

so entsteht $y = \cos v\,(a \sin u + b \cos u)$, welcher Wert y am grössten für $\cos v = 1$ oder $v = 0$ wird. Damit erhält man $\varphi = u$ und gemäss (17) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$.

b) Anderseits setze man

$$y = a \sin \varphi + b \cos \varphi = a \left(\sin \varphi + \frac{b}{a} \cos \varphi \right)$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \mu = \frac{b}{a}$ eingeführt wird $y = \frac{a \sin (\varphi + \mu)}{\cos \mu}$; diese Funktion erreicht ihren grössten Wert für $\sin (\varphi + \mu) = 1$ oder $\varphi + \mu = 90^0$, d. h. $\varphi = 90^0 - \mu$ und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$.

6. Ferner sei gegeben die Funktion $y = \frac{a - b \cos \varphi}{\sin \varphi}$; man soll für $a > b$ denjenigen Wert φ bestimmen, welcher y zu einem Minimum macht.

Auch hier sind verschiedene Wege möglich.

a) Für y_{min} wird auch y^2 zu einem Kleinstwert; wir setzen daher

$$y^2 = \frac{a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{a^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2ab \cos \varphi + b^2 (1 - \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \varphi}$$

$$\text{oder } y^2 = (a^2 - b^2) + \left(\frac{a \cos \varphi - b}{\sin \varphi} \right)^2 \tag{18}$$

welcher Ausdruck für $a \cos \varphi = b$ oder $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ am kleinsten wird; dann erhält man aus (18)

$$y = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

b) Führt man in $y = \frac{a - b \cos \varphi}{\sin \varphi}$ den halben Winkel $\frac{\varphi}{2}$ ein, so ergibt sich

$$y = \frac{a \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) - b \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$y = \frac{(a+b)\sin^2\frac{\varphi}{2} + (a-b)\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{a-b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

Setzt man für $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ das Zeichen z, so wird

$$y = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2z}; \tag{19}$$

die weitere Bearbeitung dieses Ausdruckes kann nach (2) oder auch nach (4) erfolgen.

c) Man setze $\sin\varphi = u$, $\cos\varphi = \sqrt{1-u^2}$ folglich

$$y = \frac{a-b\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{a}{u} - b\sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2 - 1}$$

oder, wenn $\frac{1}{u}$ mit v bezeichnet wird,

$$y = av - b\sqrt{v^2-1}, \tag{20}$$

aus welcher gemäss (3) der gesuchte Wert v und also auch y_{min} bestimmt werden kann.

7. Bei der Theorie des Erddruckes hat man bekanntlich den Wert $D = \frac{\operatorname{tg}(\Theta-\varphi)}{\operatorname{tg}\Theta}$ zu einem Maximum zu machen. Wie gross ist für diese Bedingung Θ und D?

Man erhält auf Grund bekannter trigonometrischer Beziehungen

$$D = \frac{\operatorname{tg}(\Theta-\varphi)}{\operatorname{tg}\Theta} = \frac{\sin(\Theta-\varphi)\cos\Theta}{\cos(\Theta-\varphi)\sin\Theta} = \frac{\sin(2\Theta-\varphi)-\sin\varphi}{\sin(2\Theta-\varphi)-\sin\varphi} \tag{21}$$

Soll D möglichst gross werden, so wird für

$$1 - D = \frac{2\sin\varphi}{\sin(2\Theta-\varphi)+\sin\varphi}$$

der kleinste Wert zu nehmen sein, der für $\sin(2\Theta-\varphi) = 1$ oder für

$$2\Theta - \varphi = 90^0, \text{ also für } \Theta = 45^0 - \frac{\varphi}{2} \tag{22}$$

eintritt. Dann erhält man ohne weiteres

$$D = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}. \tag{23}$$

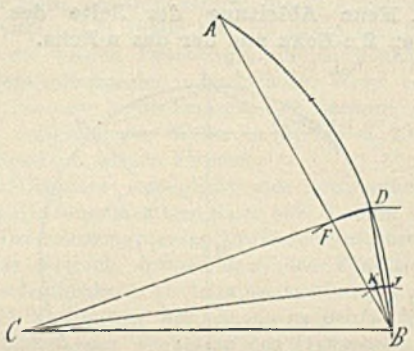
In ähnlicher Weise können viele praktische Aufgaben, welche trigonometrische Funktionen enthalten, zur Auffindung des Grössten- bezw. Kleinstwertes behandelt werden. Wir verweisen auf die Abhandlung in der Zeitschrift des Rh. Westf. Landmesservereins 1903, No. 4: „Ueber Minimumaufgaben bei zweifachem Korbbögen."

Die vorstehend behandelten Beispiele lassen erkennen, dass es viele Aufgaben genannter Arten gibt und insbesondere solche, welche bei technischen Berechnungen vorkommen, die ohne Anwendung der Differentialrechnung behandelt werden können.

Kleinere Mitteilungen.

I. Teilung einer Strecke ohne Verwendung von Parallelen.

1. In meinem in der vorhergehenden Nummer abgedruckten Artikel*) „Planimetrische Ableitung der kubischen Gleichung für die Winkel-Trisektion" benutzte ich ein gleichschenkliges Dreieck CBD, in welchem durch die Linie BF = BD das dem ganzen Dreieck ähnliche Dreieck BDF abgeschnitten wurde. Es galt dann, wie a. a. O. näher angegeben war, die Proportion FD : BD = BD : BC, es war also FD so oft in BD, wie BD in BC enthalten. Dieser Umstand gewährt die Möglichkeit, die Teilung einer Strecke auf ihre Vervielfachung zurückzuführen. Will ich den n. Teil der Strecke BD ermitteln, so mache ich BD zur Basis des gleichschenkligen Dreiecks CBD, dessen Schenkel CB und CD die Länge n · BD haben; schlage ich dann mit dem Radius BD um B einen Kreis, der CD in F trifft, so ist $DF = \frac{1}{n}\cdot BD$.



2. Unter Zuhilfenahme der Trisektionsgleichung lässt sich nun auch die Teilung durch n^2 leicht auf die Vervielfachung mit n zurückführen. In der vorstehenden Figur sei der Bogen AB das Dreifache vom Bogen DB, ferner sei BH = 3 · BF = 3 BD, dann ist $HA = \frac{BD}{n^2}$.

Setzt man nämlich CB = 1, $BD = BF = \frac{1}{n} = x$, AB = a, so gilt (vergl. den Artikel über die Winkeltrisektion) die Gleichung

$$x^3 = 3x - a.$$

Der Ausdruck 3x — a wird offenbar durch die Strecke AH dargestellt, es ist also $AH = x^3 = x \cdot x^2 = BD \cdot \frac{1}{n^2}$, wie behauptet worden war.

3. Will man die Strecke BD in n^3 Teile teilen, so schlage man mit der nach 1. gefundenen Strecke FD als Radius um B den Kreis, der den Kreis um C in J trifft, selbst aber von der Verbindungslinie CJ in K geschnitten wird. Dann ist $JK = \frac{BD}{n^3}$. Denn das Dreieck CBJ mit der Transversale BK entspricht den in Nr. 1 gemachten Voraussetzungen. Man hat also unter Benutzung der bisherigen Bezeichnungen die Gleichungen

$$JK = BJ^2 : CB = FD^2 : BC = \frac{BD^2}{n^2} : 1 = \frac{x^2}{n^2} : 1 = x\cdot\frac{x}{n^2}\cdot 1 = BD\cdot\frac{1}{n^3},$$

entsprechend der Behauptung.

O. Schneider (Langendreer).

* * *

II. Schnelle Auffindung von pythagoreischen Zahlen. Häufig wird sich im Unterricht das Bedürfnis herausstellen, an eine durch eine ganze Zahl ausgedrückte Strecke ein pythagoreisches Dreieck so anzulegen, dass diese Strecke Kathete des neuen Dreiecks wird. Eine zwar nicht alle Gruppen liefernde, aber

*) Hier seien zugleich einige ärgerliche Druckfehler in diesem Artikel nachträglich berichtigt. In Z. 7 v. o. muss es statt „∢ DFB" vielmehr „∢ FBD". in Z. 12 statt „über D hinaus" vielmehr „über C hinaus", in Z. 13 statt „FG · GD" vielmehr „FD · FG", endlich in Z. 18 statt „y (2x — y)" vielmehr „y (2r — y)" heissen.

für jeden Zahlenwert anwendbare Regel, die diesem Bedürfnis genügt, sei nachstehend angegeben. Die gegebene Strecke umfasse n Längeneinheiten, und zwar sei

1. n ungerade, dann gehören dazu die pythagor. Zahlen

$$q = \frac{n^2 - 1}{2}, \quad p = q + 1 = \frac{n^2 + 1}{2}$$

2. n gerade, dann gehören dazu die pythagor. Zahlen

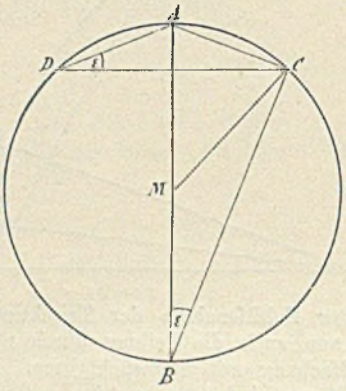
$$q = \frac{n^2 - 4}{4}, \quad p = q + 4 = \frac{n^2 + 4}{4}$$

Dieser Sachverhalt lässt sich bereits im Unterricht der Gymnasial-Tertia verwerten.

G. Holzmüller (Hagen i. W.)

* * *

III. **Neue Ableitung der Seite des regelmässigen 2 n-Ecks aus der des n-Ecks.**



In der vorstehenden Figur sei $CD = s$ die Seite des n-Ecks, $AC = AD = x$ die des 2 n-Ecks. Nun ist offenbar $\triangle DAC \sim BMC$, also, wenn noch $BC = y$ gesetzt und der Radius des beiden Polygonen umbeschriebenen Kreises mit r bezeichnet wird,

$$r : y = x : s; \quad 2xy = 2rs.$$

Kombiniert man diese Gleichung mit

$$x^2 + y^2 = 4r^2,$$

so erhält man, da $x < y$ sein muss,

$$x = \sqrt{r\left(r + \frac{s}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r - \frac{s}{2}\right)} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}},$$

also die in den Lehrbüchern übliche Formel.

J. Junker (Krefeld).

* * *

IV. **Kritik der Kant-Laplaceschen Theorie.** Im Bezirksverein an der Lenne des Vereins Deutscher Ingenieure hat im Januar d. J. Herr Prof. Holzmüller „über die Kant-Laplacesche Kosmogenie und ihre Kritik" einen Vortrag gehalten, der auch im „Sirius" abgedruckt werden soll. Die Kant-Laplacesche Hypothese hat bekanntlich neben vielfacher Zustimmung von jeher auch Bedenken wachgerufen, die durch die Beobachtung der mit den Ausgangspunkten dieser Theorie schwer vereinbaren Bahnen einzelner Planetenmonde noch an Kraft gewannen. Eine so einschneidende Kritik, wie sie Herr Holzmüller übt, hat aber diese Theorie wohl noch nicht erfahren. Er kommt zu dem Ergebnis, dass eine Zunahme der Drehungsenergie, wie sie bei der Kontraktion der Sonne erforderlich sei, um die Abschleuderung der Planeten zu erklären, ganz undenkbar sei, jeder Versuch, die Abschleuderungstheorie mit Hilfe des Flächensatzes oder des Satzes von der lebendigen Kraft zu retten, müsse notwendig scheitern. Darüber hinausgehend spricht er aber noch die Meinung aus, dass durch die Berücksichtigung der Molekular- und Intermolekular-Schwingungen eine durchgreifende Revision der Mechanik des Sonnensystems ganz unvermeidlich werde. In den Einzelheiten sei auf den Vortrag, der berechtigtes Aufsehen erregen wird, selbst verwiesen.

Vereine und Versammlungen.

III. Internationaler Mathematiker-Kongress zu Heidelberg (vergl. Unt.-Bl. IX, S. 110; X, S. 18). Für die pädagogische Sektion des Kongresses sind die nachbenannten Vorträge angemeldet: Fricke (Braunschweig): Ueber den mathematischen Unterricht an den technischen Hochschulen in Deutschland; Greenhill (London): Teaching of Mechanics by familiar applications on a large scale; Gutzmer (Jena): Ueber die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten; Lorin (Genua): Sur l'enseignement des mathématiques en Italie; Meyer (Königsberg): Ueber das Wesen mathematischer Beweise; Pietzker (Nordhausen): Logische Schulung durch den mathematischen Unterricht; Schotten (Halle): Welche Aufgabe hat der mathematische Unterricht auf den deutschen Schulen und wie passen die Lehrpläne zu dieser Aufgabe? Stäckel (Kiel): Ueber die Notwendigkeit regelmässiger Vorlesungen über elementare Mathematik an den Universitäten; Tannery (Paris): Sur la nécessité d'introduire dans l'enseignement élémentaire des mathématiques quelques notions de Calcul différentiel et intégral; Thieme (Posen): Wirkung der wissenschaftlichen Ergebnisse auf den Unterricht in der elementaren Mathematik — eventuell (falls Absagen kommen sollten); Schubert (Hamburg): Ueber die Notwendigkeit und die Möglichkeit, sofort an den Begriff der dekadischen Logarithmen deren Berechnung anzuschliessen, lediglich auf Grund der Formeln für $(a-b)^2$, $(a-b)^3$ und $(a-b)^4$.

* * *

Hessischer Oberlehrertag (am 8. April) und **Verbandstag von Vereinen akademisch gebildeter Lehrer Deutschlands** (am 9. April) in Darmstadt. Im Anschluss an diese Tagungen wird am 8. April von 10 Uhr an eine Besichtigung der Technischen Hochschule in Darmstadt stattfinden, bei der Herr Prof. Dr. Wiener das mathematische Institut mit seiner reichen, namentlich auch die darstellende Geometrie betreffenden Modellsammlung, Herr Geh. Rat Prof. Dr. Kittler das elektrotechnische Institut zeigen werden, über die Verwendung der Modelle im Unterricht wird Prof. Wiener eingehender sprechen. Mit dem Oberlehrertag selbst ist eine kleine Ausstellung von Lehrmitteln verbunden, in der die von Herrn Prof. Dr. Schmehl (an der Oberrealschule in Darmstadt) angegebenen Modelle für den Unterricht in der darstellenden Geometrie ausgestellt sein werden.

* * *

Verein für Schulreform. Auf der Tagesordnung der 15. Hauptversammlung am 27. März d. J. zu Berlin stand u. a. das Thema: „Die Lage des exaktwissenschaftlichen Unterrichts an den Reformschulen." An die Vorträge der beiden Referenten, Pietzker (Nordhausen) und Treutlein (Karlsruhe) knüpfte sich eine lebhafte Diskussion, über die in der nächsten Nummer kurz berichtet werden wird.

* * *

76. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu Breslau vom 18. bis 24. September 1904. Zu dieser Versammlung liegen nunmehr die ersten Einladungen vor, unterzeichnet von den Geschäftsführern Geh. Med.-Rat Prof. Dr. Uhthoff (eingetreten für den Geh. Med.-Rat Prof. Dr. Ponfick) und Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Ladenburg. Die allgemeinen Sitzungen der ganzen Versammlung fallen wie bisher auf den Anfang und den Schluss der Versammlung (19. und 23. September), am 22. September vormittags soll eine Gesamtsitzung der beiden wissenschaftlichen Hauptgruppen stattfinden, in der die Frage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auf den höheren Lehranstalten eingehend erörtert werden soll. Am Nachmittage desselben Tages wird jede der beiden Hauptgruppen eine gemeinsame Sitzung abhalten, in der gemeinsamen Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe sollen sich die Vorträge und die Verhandlungen auf die Eiszeit in den Gebirgen der Erde beziehen.

In der Bildung der einzelnen Abteilungen sind wesentliche Veränderungen nicht zu bemerken.

Die Abteilung 12 (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht; Einführende: Prof. Dr. H. Vogt; Prof. Dr. J. Schiff; Schriftführer: Oberlehrer Dr. A. Ahrendt, Oberlehrer Dr. G. Geipel) ersucht um Vortragsanmeldungen bis zum 15. Mai z. H. von Prof. Dr. H. Vogt, Breslau XVI, Tiergartenstrasse 22, III.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ratschläge für die Kandidaten des höheren Lehramts in Mathematik und Physik an der Universität Jena. Unter diesem Titel war bereits im Jahre 1900 ein Studienplan von den Dozenten der exakten Fächer an der Universität Jena veröffentlicht und in den Unt.-Bl. Jahrg. VI, S. 73 besprochen worden. Die jetzt vorliegende Neubearbeitung deckt sich natürlich vielfach mit dem älteren Plan, der indessen durch den den Schluss des Schriftchens bildenden Abschnitt VI „Mathematik und Physik im Doktor-Examen“ sowie durch die als Abschnitt III eingefügte Aufzählung der „wichtigsten mathematischen und physikalischen Unterrichtseinrichtungen an der Universität Jena“ eine äusserliche Erweiterung erfahren hat, während in dem einleitenden Abschnitt I. „Allgemeine Bemerkungen“ auf die inzwischen erfolgten Aenderungen der in allen wesentlichen Punkten mit der preussischen Ordnung übereinstimmende Prüfungsordnung der sachsen-ernestinischen Staaten Rücksicht genommen wird. Auch in den übrigen Abschnitten finden sich mannigfache Zusätze, die dazu mitwirken, dass der neue Studienplan fast den doppelten Umfang des früheren besitzt. Der Wert solchen Wegweisers, wie er in entsprechender Art ja auch an verschiedenen anderen Universitäten herausgegeben ist, bedarf keiner besonderen Hervorhebung, so sei nur noch bemerkt, dass er von der Direktion des mathematischen Instituts an Interessentenkreise kostenlos abgegeben wird.

Lehrmittel-Besprechungen.

Geometrische Dreiecke (Patentamtlich geschützt Nr. 180468) von Paul Kirchmann. Das neue Lehrmittel, welches hiermit den Fachlehrern geboten wird, besteht aus zwei Dreiecken von fester gleicher Basis (50 cm), von deren Enden zwei, 58 und 35 cm lange Stäbe ausgehen, die durch eine verschiebbare gelenkige Verbindung auf dem längeren von ihnen verschiedene Längen abzuschneiden erlauben. Um die Mitte der Basis des einen Dreiecks ist ein weiterer Stab drehbar, ein loser 35 cm langer Stab kann an verschiedenen Stellen der Dreiecksschenkel, insbesondere auch an der Dreiecksspitze drehbar befestigt werden. Beigegeben sind vier Transporteure von verschiedenem Radius und verschiedener Ausdehnung (zwei zu 90^0, je einer zu 180^0 und 360^0), die mittelst Zapfeneinsatz an verschiedenen Stellen, insbesondere auch an den Enden und der Mitte der Dreiecksgrundlinien angebracht werden können. Alle Stäbe sind in ganze und halbe cm geteilt, die beiden Dreiecksgrundlinien können durch Scharniere miteinander in mehrfacher Weise verknüpft werden, so dass beide Dreiecke zur Deckung gebracht und in verschiedener Weise in derselben Ebene zusammengestellt werden können.

Der Apparat ermöglicht eine anschauliche Darstellung der fundamentalen Sätze über Winkel, Parallellinien, Dreieckskongruenzen sowie der einfachsten Sätze über das Viereck, insbesondere das Parallelogramm. Die Anschaulichkeit ist teilweise evident, z. T. wird sie durch Nachmessen der Längen an den metrisch geteilten Stäben, der Winkel an den Transporteuren vermittelt.

Bei dem vielfach zu beobachtenden Mangel klarer räumlicher Vorstellungen, den insbesondere auch die Schüler der höheren Schulen zeigen, kann man den solide und fest gearbeiteten, in passenden Dimensionen gehaltenen Apparat als ein brauchbares Lehrmittel für den geometrischen Anfangsunterricht begrüssen, der ja allerdings — wie alle solche Veranschaulichungsmittel — mit verständiger Beschränkung zu gebrauchen ist, wenn man das Hauptziel, die Fähigkeit zur Bildung richtiger Vorstellungen ohne greifbare Unterlage nicht gefährden will.

Beigegeben ist dem Apparat eine kleine Druckschrift, in der der Gebrauch des Apparates für die Demonstration der einzelnen in seinen Bereich fallenden geometrischen Sätze näher angegeben und durch Figuren erläutert wird. Die Benutzung dieser Druckschrift wird durch die sehr weitgetriebene Kürze der wirklichen Angaben und durch einen vielfachen Buchstabenwechsel in den Figuren etwas erschwert.

Der Apparat ist zum Preise von 20 Mk. von seinem Erfinder (Berlin 55, Lippehnerstr. 8) zu beziehen.

P.

Bücher-Besprechungen.

Wunschmann, E., Geschichte der Physik im XIX. Jahrhundert. Preis Mk. 2,50.

Wilhelmj, A., Geschichte der Chemie im XIX. Jahrhundert. Preis Mk. 3,50. (Das Deutsche Jahrhundert in Einzelschriften, herausgegeben von G. Stockhausen, Abt. X und XI). Berlin, F. Schneider & Co. 1901.

Beide Schriften ähneln sich in der äusseren Form, indem sie den Stoff nach den einzelnen durch die Sache bedingten Stoffgebieten gliedern und überall an passender Stelle biographische Notizen über die Personen einfügen, denen der jeweils behandelte Fortschritt der Wissenschaft besonders zu danken ist, dabei werden auch deren Hauptwerke angeführt. Die Geschichte

der Chemie bringt ferner noch eine grosse Zahl anderweiter Literaturnachweise, die in der Geschichte der Physik vermisst werden. Es hängt dies eng mit dem innerlichen Unterschiede zusammen, den die Behandlung des Stoffes in beiden Büchern aufweist. Das Wunschmannsche Buch setzt bei seinen Lesern eine wesentlich geringere Vorbildung voraus, als das Wilhelmjsche, es verzichtet darum von vornherein auf Vollständigkeit und sieht von den schwierigeren Partien mehr oder weniger ab, was z. T. dahin führt, dass die Bezugnahmen auf die Geschichte der Physik in dem anderen Buche manchmal in der Luft stehen (z. B. Wilhelmj, S. 476, Gültigkeit des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes für die verdünnten Lösungen). Ganz besonders bezeichnend für diese Tendenz ist z. B. die Einzelheit, dass ein so gewaltiger Hebel des Fortschritts nicht nur in der Elektrizitätstheorie, sondern auch in der Elektrotechnik, wie die Ohm-Kirchhoffschen Gesetze, gar nicht einmal erwähnt sind. Dadurch leidet ja natürlich auch der Zusammenhang, denn die Definitionen der elektrischen Masseinheiten, die allerdings ganz am Schluss gegeben werden, sind unter diesen Umständen kaum verständlich. Die weitere Verfolgung der Klangfarbentheorie durch die mathematische Zusammensetzung der Schwingungen hätte dann, um ein anderes Beispiel zu erwähnen, auch ermöglicht, den Edisonschen Phonographen als Ergebnis der Entwickelung unserer akustischen Erkenntnis zu erfassen, statt dass er, wie es geschieht, als eine interessante Einzelheit ganz äusserlich angefügt wird. In den einzelnen Kapiteln wird fortwährend auf die ganze Vorentwickelung von den Uranfängen an zurückgegriffen, so dass sie den Charakter von Lektionen über das ganze jeweilig behandelte Thema annehmen, bei denen man die Hervorhebung der Rolle des 19. Jahrhunderts in der Entwickelung unseres Wissens leicht vergisst. Dementsprechend nimmt auch die Einleitung das, was als Ergebnis der Entwickelung in einem zusammenfassenden Schluss hingestellt werden sollte, vorweg, der Abschnitt „Mechanik" fängt gleich mit dem Energieprinzip an, an dessen allgemeine Darlegung einige vereinzelte technologische Errungenschaften angereiht werden. Anzuerkennen ist die gefällige Form der Darstellung, die zum Lesen des Buches reizt, selbstverständlich wird diese Lektüre bei einem Leser von geringen Vorkenntnissen auch nicht ohne Nutzen bleiben; hält man sich aber an die Erwartungen, die der Titel des Buches notwendig erweckt, rechnet man also auf eine von grossen Gesichtspunkten getragene zusammenfassende Darstellung des Werdegangs, den unsere physikalische Erkenntnis in dem abgelaufenen Jahrhundert genommen hat, so muss man sagen, dass diese Erwartungen nicht voll erfüllt werden.

Unter diesem Gesichtspunkte stehe ich nicht an, die Wilhelmjsche Geschichte der Chemie als das wertvollere der beiden Bücher zu erklären. Hier ist schon der Zweck der Einleitung richtiger erfasst worden, statt das Schlussergebnis vorwegzunehmen, enthält diese Einleitung vielmehr den — für das Verständnis des 19. Jahrhunderts natürlich unentbehrlichen — Rückblick auf die Vorzeit; so bleibt der Verfasser vor der Versuchung bewahrt, bei der eigentlich von ihm zu behandelnden Aufgabe aus dem Rahmen der darzustellenden Zeitperiode herauszugehen (die ja naturgemäss nicht haarscharf auf die Zeit von 1800—1900 zu begrenzen ist), ungehindert kann er sich daran machen, die Entwickelung der wissenschaftlichen wie der technischen Chemie im 19. Jahrhundert so zu schildern, dass in der Tat jeder neue Fortschritt als das naturgemässe Ergebnis des vorangehenden Zustandes erscheint. Der Stoff ist sehr wohlgegliedert und berücksichtigt beide eben genannten Seiten des Themas in ausgiebiger Weise, besonders hervorheben möchte ich im einzelnen die Kapitel „Physikalische Chemie" und „Agrikultur- und Physiologische Chemie". Einen sehr passenden Schluss gibt ein kurzer Hinweis auf die Entwickelung des „Chemischen Unterrichts". Wenn das Wilhelmjsche Buch, wie bereits bemerkt, auch sehr berechtigter Weise ein gewisses Mass von Vorkenntnissen voraussetzt, so geht dies doch nirgends über das hinaus, was noch innerhalb der Grenzen der allgemeinen Bildung liegt, auch dies Buch wendet sich in erster Linie an den gebildeten Laien, dem es die immer zunehmende Bedeutung der Chemie als eines wesentlichen Faktors in der allgemeinen Kulturentwickelung des vergangenen Jahrhunderts vor Augen stellen will. Und dieser Absicht entspricht auch die Durchführung. P.

* * *

Weiler, W., Physikbuch (1. Band, Magnetismus und Elektrizität, Preis Mk. 4,50; 2. Band, Mechanik, Preis Mk. 2,50; 3. Band, Schwingungen und Wellen Akustik, Preis Mk. 1,20; 4. Band, Kalorik. Lehre von der Wärme, Preis M. 1,50; 5. Band, Optik, Preis Mk. 2.50). (Kleine Bibliothek Schreiber Nr. 10 bis 14) Esslingen u. München, J. F. Schreiber 1902.

—, Physikalisches Experimentier- und Lese-Buch mit vielen Freihandversuchen (Kleine Bibliothek Schreiber Nr. 15). Preis Mk. 3,00.

Der durch seine Einzelarbeiten in den Fachkreisen weitbekannte Verfasser bietet in dem Physikbuch eine Gesamtdarstellung des physikalischen Stoffes, die eine ganze Reihe erheblicher Vorzüge aufweist. Der erste ist die grosse Vollständigkeit, der zweite die übersichtliche Stoffgruppierung, die dem Leser ein äusserst rasches Zurechtfinden ermöglicht, der dritte die bei aller Kürze vorhandene Klarheit der Auseinandersetzung, die durch die grosse Zahl der meist farbigen Figuren (an 1100) wirksam unterstützt wird. Insbesondere ist die Anwendung der Farben bei den schematischen Figuren sehr zu loben, die dadurch an Verständlichkeit ausserordentlich gewinnen. In der Anerkennung dieser Vorzüge machen mich auch die Einwendungen nicht irre, die ich gegen die Stoffbehandlung in mancher Hinsicht zu erheben habe. Mit der Stoffeinteilung bin ich z. T. nicht einverstanden, so scheint mir z. B. die Einteilung der Mechanik im 2. Band mehrfach anfechtbar; warum dieser Abschnitt in den 2. Band gebracht ist, da ihm doch der Verfasser selbst ersichtlich eine grundlegende Bedeutung zuweist, ist auch nicht recht einzusehen. Auch geht das Buch in den prinzipiellen Fragen mir nicht genug in die Tiefe, manche Momente in den physikalischen Theorien besitzen keineswegs die unanfechtbare Sicherheit, mit der sie hier vorgetragen werden. Auch habe ich in den Einzelheiten hier und da anfechtbare Angaben gefunden, so z. B. die, dass die Atome die letzten Teilchen seien, zu denen man durch Experimente vordringen konnte (2. Bd. S. 4), Vermischung (ebenda S. 136) des Bourdonschen Röhren-Barometers mit dem ja in der Regel auch Bourdon zugeschriebenen Röhren-Manometer, das aber doch auf wesentlich anderer Grundlage basiert u. a. m.

Trotzdem kann ich das Buch einem jeden, der sich über den Stand unseres heutigen physikalischen Wissens möglichst sicher informieren will, nur auf das wärmste empfehlen. Für den Schulgebrauch dürfte es zu teuer

sein, zum Selbststudium aber ist es vorzüglich — die Beschreibung der Experimente, wie die z. T. sehr eingehenden mathematischen Erörterungen, alles ist sehr klar und wird in einer dem Gedächtnis sich leicht einprägenden Form geboten, die ja allerdings insofern öfters etwas pedantisch ist, als dem physikalischen Satz ein förmlicher Beweis nach Art des bekannten mathematischen Schemas angefügt wird. Vielleicht sehr praktisch, wenn auch ebenfalls nicht nach meinem persönlichen Geschmack ist die Aufstellung von 9 Fallgesetzen, die z. T. eine selbständige Bedeutung nicht beanspruchen können. Es ist eben ein Buch, dem man die Entstehung aus der Unterrichtspraxis auf jeder Zeile anmerkt.

Dieselbe warme Empfehlung, wie das Physikbuch verdient das Experimentier- und Lese-Buch, das in seiner Darstellung einen ganz ähnlichen Charakter zeigt, auch seine 257 Figuren sind grösstenteils farbig. Das Buch soll als Vorschule dienen, demgemäss knüpft es vielfach an die ohne besondere Experimente wahrzunehmenden Vorgänge an und arbeitet grossenteils unter Benutzung von Versuchen, die mit einfachen, vom Leser leicht selbst herzustellenden Apparaten angestellt werden können. Alle mathematischen Erörterungen sind hier vermieden, dafür finden sich allgemeine Erörterungen, von denen man allerdings hie und da bezweifeln kann, ob sie genügend verständlich sind. So ist die Erklärung der verschiedenen Lichtbrechung bei konvexen und konkaven Linsen (S. 88) mittelst der Wellenverzögerung zwar an sich sehr schön, dürfte aber das Verständnis eines vollständig ungeschulten Laien wohl übersteigen. Zu solchen Einwendungen bieten sich aber, wie ausdrücklich bemerkt werden möge, nur wenig Anlässe. Im ganzen bietet das Büchlein das, was nach seinem Titel zu erwarten ist, in reichem Masse. P.

* * *

Prof. Dr. Reinhold Müller: Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der Herzogl. Technischen Hochschule zu Braunschweig. 2. Aufl. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. Preis Mk. 2.50.

Der vorliegende Leitfaden ist in erster Linie für die Zuhörer des Verfassers bestimmt und „soll von diesen bloss im Zusammenhange mit der Vorlesung zur Repetition des dort Gebotenen benutzt werden.“ Er zerfällt in zwei Hauptabschnitte: 1. die Parallelprojektionen, 2. die Zentralprojektion; in einem Anhange werden die Grundzüge der Reliefperspektive behandelt. Der Verfasser bietet hierbei „im wesentlichen den theoretischen Teil des Vortrages ohne die zahlreichen Anwendungen, die in der Vorlesung selbst eingehend berücksichtigt werden.“ Es ist selbstverständlich, dass der Leitfaden nach Inhalt und Umfang über das Ziel hinausgeht, welches den höheren Lehranstalten in diesem Unterrichtsfache gesteckt ist. Denn während es für die Schüler der letzteren im allgemeinen ausreicht, wenn sie „stereometrisches Zeichnen“ treiben, so muss für den Studierenden der Hochschule ein strengerer, systematischer Lehrgang befolgt werden, wobei auf eine möglichst erschöpfende Darstellung der unbegrenzten Gebilde in den verschiedensten Lagen besonderes Gewicht gelegt wird. Ferner enthält der Leitfaden eine grössere Anzahl von Kapiteln, deren Durchnahme schon an und für sich ausserhalb des Rahmens des auf den höheren Anstalten Erreichbaren und Notwendigen liegt (höhere Kurven, Schraubenflächen, windschiefe, topographische Flächen, weitergehende Schattenkonstruktionen, Reliefperspektive).

Wenn danach der Leitfaden dem Unterrichte in der darstellenden Geometrie an den höheren Schulen auch nicht unmittelbar zugrunde gelegt werden kann, so wird doch jeder Lehrer dieses Faches aus dem Studium des Buches grossen Nutzen ziehen. Er wird in ihm ein Muster finden für Klarheit der Darstellung bei grösster Knappheit des Ausdrucks, Konsequenz in der Bezeichnung und vollendete methodische Entwickelung. In allen diesen Punkten wird ihm der Leitfaden für seinen eigenen Unterricht vorbildlich sein können. (An den Anstalten, wo die Elemente der darstellenden Geometrie im mathematischen Unterrichte, also getrennt vom Zeichen-Unterrichte, besonders durchgenommen werden, wird er in den §§ 1—56 eine reiche Auswahl für diesen Zweck vorfinden).

Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, dass frühzeitig die schiefe Parallelprojektion (Parallelperspektive) eingeführt wird, um gleich von Anfang an anschauliche Skizzen zu ermöglichen. Was die Figuren anbetrifft, so sind sie mit Absicht zumeist in ihrem ersten Entwickelungsstadium gegeben. Ebenso ist die Lösung der meisten Aufgaben nur in ihren Grundzügen angedeutet. Das Buch soll eben ein vollständiges Lehrbuch durchaus nicht ersetzen; ferner soll es dem Studierenden zwar die Arbeit erleichtern, aber in ihm durchaus nicht das Gefühl aufkommen lassen, als ob er — im Besitze des Leitfadens — nun etwa des Besuches der Vorlesungen, der geistigen Verarbeitung des in ihnen Dargebotenen und des Studiums ausführlicher Werke enthoben sei.

Jeder Leser wird die Ueberzeugung gewinnen, dass das hierin ausgesprochene Ziel vom Verfasser in ausgezeichneter Weise erreicht worden ist.

C. Hildebrandt (Braunschweig).

* * *

Natur und Schule. Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, herausgegeben von B. Landsberg, O. Schmeil und B. Schmid. II. Band. Berlin und Leipzig 1903, B. G. Teubner. 507 S. 8°.

Von dieser Zeitschrift, deren Ziele und allgemeiner Charakter vor Jahresfrist hier besprochen wurden, liegt nunmehr der zweite Band abgeschlossen vor. Der Inhalt desselben ist ein recht mannigfaltiger; sowohl rein wissenschaftliche, wie methodologische und schultechnische Fragen verschiedenster Art gelangen zur Erörterung. Unter den ersteren seien namentlich hervorgehoben die von J. Reinke gegebene kurze Darstellung seiner Dominantenlehre, H. de Vries' Diskussion des Artbegriffes am Beispiel des Stiefmütterchens und G. Worgitzky's Arbeit über Blütenbiologie und Systematik. Eine Reihe von Aufsätzen geben kurz zusammenfassende Referate über die neueren Fortschritte auf einzelnen Forschungsgebieten. So berichtet H. Haselbach über tiefe Temperaturen, F. Kienitz-Gerloff über die Reiz- und Stoffleitung in den Pflanzen, R. Kolkwitz über nervenartige Strukturen im Pflanzenkörper, V. Kohlschütter über Fortschritte in der Chemie, W. Meigen über Fabrikation der Schwefelsäure, F. Noack über Fortschritte auf dem Gebiete der Botanik, P. Polis über Wetternachrichtendienst und Witterung, W. Schoenichen über Blattbiologie, B. Stange

über Becquerelstrahlen. Weitere Beiträge erörtern die Bedeutung einzelner Kapitel der Naturwissenschaften im Schulunterricht. E. Dennert behandelt die Entwickelungslehre als Lehrgegenstand der höheren Schulen, F. Höck die Pflanzengeographie im naturkundlichen Unterricht an preussischen Real-Gymnasien; F. Ludwig kritisiert die mangelhafte Behandlung der Algen in den Schullehrbüchern, während mehrere andere Aufsätze sich mit der Stellung der Geologie und Mineralogie im Lehrplan beschäftigen. Von wichtigen Hilfsmitteln des Unterrichts werden durch B. Landsberg die unterrichtlichen Ausflüge, durch L. Stelz die Schulgärten besprochen. R. Beyer bespricht die Schulfloren und knüpft daran allgemeine Bemerkungen über den botanischen Unterricht. Die Bedeutung der Provinzialmuseen als Volksbildungsstätten erörtert L. Reh. Zahlreiche kleine Beiträge berichten über gelegentliche Beobachtungen, über geeignete Schulversuche, über neue Lehrmittel und über wichtigere Erscheinungen der einschlägigen Literatur. Von Männern, die sich um die Ausgestaltung des naturwissenschaftlichen Unterrichtes besondere Verdienste erworben haben, werden H. Müller-Lippstadt und E. A. Rossmässler in besonderen Artikeln gewürdigt. Hierzu kommen Berichte über wissenschaftliche Versammlungen, sowie über den Fortgang der Bewegung zur Förderung des biologischen Unterrichtes. Ein „Sprechsaal" vermittelt den Meinungsaustausch über wissenschaftliche und unterrichtliche Tagesfragen.

R. v. Hanstein (Gross-Lichterfelde).

* * *

Gercken, Wilhelm, Grundzüge der darstellenden Geometrie für die oberen Klassen höherer Lehranstalten (Prof. Dr. Heinrich Borks Mathematische Hauptsätze, Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen, herausgegeben von M. Nath, zweiter Teil, zweite Abteilung). Leipzig, Dürr 1903. Preis geb. Mk. 2,00.

Das Buch bringt nach einer kurzen Einleitung vier Hauptabschnitte (I. Schräge Parallelprojektion; II. Orthogonale Projektion; III. Zentralprojektion oder Perspektive; IV. Schattenlehre, a) Schattenkonstruktion der orthogonalen Projektion, b) Schattenkonstruktion der freien Perspektive). Was die Abgrenzung des Stoffes betrifft, so bleibt die Körperdurchdringung gänzlich unberücksichtigt, die Kartenprojektion wird nur gelegentlich gestreift. Mit dieser Stoffbegrenzung möchte ich mich durchaus einverstanden erklären, ebenso wie mit der Stoffeinteilung. Die Voranstellung der schrägen Parallelprojektion rechtfertigt sich nicht nur durch die Einfachheit der Ausführung, sondern auch ganz besonders dadurch, dass für die Hauptgesichtspunkte bei den Konstruktionen der folgenden Abschnitte dadurch ein ausserordentlich brauchbares Erläuterungsmittel gewonnen wird; diesen wird nämlich überall eine in schräger Parallelprojektion ausgeführte Darstellung des zu projizierenden Gebildes vorangestellt. Das richtige Verständnis der weiteren Projektionsmethoden wird dadurch erleichtert, vielleicht bei vielen Schülern überhaupt erst ermöglicht, der Heranbildung der Fähigkeit zutreffender räumlicher Vorstellung ein grosser Dienst geleistet.

Als dritter Gesichtspunkt für die Beurteilung des Buches käme die Einzelbehandlung in Betracht, mit der ich gleichfalls sehr einverstanden bin, insbesondere auch damit, dass die übliche Gliederung des Stoffes nach Lehrsätzen mit ihren Beweisen durch eine methodische Folge von Aufgaben ersetzt worden ist. Sehr klar und deutlich sind die Figuren, bei denen ich indessen zwei Einzelheiten zu bemerken habe. Erstens müssten die kleinen Kreise, durch die in vielen Figuren einzelne Punkte markiert werden, bei allen perspektivisch aufzufassenden Figuren durch Ellipsen ersetzt werden oder ganz unbenutzt bleiben; so wie sie dastehen, stören sie den perspektivischen Eindruck, der doch bezweckt wird (z. B. in der unteren Hälfte der Fig. 8). Zweitens findet sich bei einigen Figuren (46, 47, 48, 50a) sowie in dem begleitenden Text ein Doppelgebrauch des Buchstabens O. Doch dies sind Kleinigkeiten, die kein Hindernis bilden, das Buch auf das Wärmste zu empfehlen als einen sehr glücklichen Versuch, die Schüler in das Wesen der Sache einzuführen, ohne diesen Zweck durch Ueberladung mit weniger wichtigen Einzelheiten direkt zu gefährden. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Haas, Hippolyt, Der Vulkan; die Natur und das Wesen der Feuerberge. Mit 63 Abbildungen auf 32 Tafeln. Berlin 1904, Schall. Mk. 4.—.

Hagen, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. 3. Band: Differential- und Integralrechnung. Lfrg. 3/4. Berlin 1903, Dames. à Mk. 5.—.

Haentzschel, Emil, Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Abb. Leipzig 1903, Teubner.

Hauber, W., Statik. 1. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Fig. (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

Hermes, O. u. Spies, P., Elementarphysik, unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann. Dritte, neu bearbeitete Aufl. Berlin 1903, Winckelmann & Söhne. Mk. 2.50 geb.

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 2. Aufl. mit 5 Anhängen. Mit zahlreichen Abb. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 5.60 geb.

Hildebrandt, H., Lehrbuch der anorganischen Chemie. Mit 103 Figuren im Text. Hannover 1903, Jänecke. Mk. 3.20.

Jochmann, E., Grundriss der Experimentalphysik nebst Elementen der Chemie sowie der Astronomie und mathematischen Geographie. Herausgegeben von O. Hermes und P. Spies. 15. vollständig neu bearbeitete Auflage. Berlin 1903, Winckelmann & Söhne. Mk. 5.50 geb.

Kienitz-Gerloff, F., Bakterien und Hefen, insbesondere in ihren Beziehungen zur Haus- und Landwirtschaft, zu den Gewerben, sowie zur Gesundheitspflege. Mit 65 Abb. Berlin 1904, Otto Salle. Mk. 1.50.

Klockmann, F., Lehrbuch der Mineralogie. 3. Aufl. Mit 522 Fig. Stuttgart 1903, Enke. Mk. 14.—.

Kollert, J., Katechismus der Physik. 6. Aufl. Mit 364 Abb. Leipzig 1903, Weber. Mk. 7.— geb.

Kommerell, V. u. Kommerell, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. I. Band. Mit 18 Fig. (Sammlung Schubert XXIX) Mk. 4.80 geb. II. Band. Mit 18 Fig. (Sammlung Schubert XLIV) Mk. 5.80 geb. Leipzig 1903, Göschen.

Lichtneckert, J., Die wissenschaftliche Lebenslehre des Welt-Alls. Der Ideal- oder Selbstzweckmaterialismus als die abstrakte Philosophie. Leipzig, Mutze.

Lorey, W., Die Mathematik und das klassische Altertum. Ztschr. f. Gymnasialwesen. XLII, Berlin 1903, Weidmann.

Loewy, A., Versicherungsmathematik. (Sammlung Goeschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80.

Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. Mit 65 Fig. 2. Aufl. (Sammlung Göschen). Ebenda. Mk. —.80 geb.

Matzdorff, C., Tierkunde für den Unterricht an höheren Lehranstalten. In 6 Teilen. 5. Teil: Lehrstoff der Ober-Tertia. Mit 49 Abb. und 1 Karte. Mk. 1.50 kart. 6. Teil: Lehrstoff der Untersekunda. Mit 85 Abb. und 3 Tafeln. Mk. 1.30 kart. Breslau 1903, Hirt.

Mitteilungen, mathematisch-naturwissensch., im Auftr. des mathem.-naturw. Vereins in Württemberg herausgeg. v. Schmidt, Haas u. Wölffing. Zweite Serie, V. Band, drittes Heft, Oktober 1903. Stuttgart 1903, Metzler.

Nippoldt, A. jun., Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. Mit 3 Tafeln und 14 Fig. (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

Pfeiffer, E., Physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 Abb. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 3.60 geb.

Pokorny, Naturgeschichte des Mineralreiches für höhere Lehranstalten, bearb. von Max Fischer. 18. verbesserte Aufl. Leipzig 1904, Freytag. Mk. 2.40. geb.

—,— Naturgeschichte des Tierreichs für höh. Lehranstalten, neu bearb. v. R. Latzel. 26., nach biologischen Gesichtspunkten umgearbeitete Aufl. Ebenda. Mk. 4.— geb.

Rehbein, E., Grundgesetze der Mechanik und ihre Anwendung in der Maschinen-Technik. Leipzig, Schäfer, Mk. 2.50 geb.

Ruge, S., Geographie, insbesondere für Handelsschulen und Realschulen. 14. Aufl. Leipzig, Dr. Seele & Co.

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 6. Aufl. 2. Teil. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 9.— geb.

Schillings Grundriss der Naturgeschichte. Teil I: Das Tierreich. 20. Bearbeitung von Prof. Dr. Reichenbach. Mit 550 Abb. Breslau 1903, Hirt. Mk. 4.20 geb.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik. 2. Aufl. Herausgeg. von Prof. Dr. Henke und Prof. Dr. R. Heger. 1. Band: Elementarmathematik. Mit 321 Fig. Mk. 20.—. 2. Band: Höhere Mathematik. 1. Teil. Mit 281 Fig. und 12 Tafeln. Mk. 20.—. Leipzig 1903, Barth.

Schönemann, Prof. Dr., Die Verwendung der einfachen Kamera zur Ermittelung von Höhen und Entfernungen. Bonn, Georgi, Univ.-Buchdruckerei 1903.

Schönichen, W., Die Abstammungslehre im Unterrichte der Schule. Mit 14 Fig. und 2 schemat. Darstellungen. Leipzig 1903, Teubner. Mk. —.20.

Schubert, H., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. 2. Aufl. Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

—„— Niedere Analysis. 2. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen. Mit 3 Fig. (Sammlung Schubert XLV). Ebenda. Mk. 3.80 geb.

—„— Mathematische Mussestunden. Kleine Ausgabe. 2. Aufl. Ebenda.

—„— Elementare Berechnung der Logarithmen, eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher. Ebenda. Mk. 1.60.

Schwartze, Th., Allgemeine Maschinenlehre. (Webers illustrierte Katechismen No. 214). Leipzig 1903, Weber. Mk. 6.— geh.

Seydlitzsche Geographie. Ausgabe D. Heft 5 (85 Pfg.) Heft 6/7 (je 80 Pfg.). Breslau 1904, Hirt.

Simon, M., Analytische Geometrie des Raumes. Mit 28 Abb. 2. Aufl. (Sammlung Göschen). Leipzig 1903, Göschen. Mk. —.80 geb.

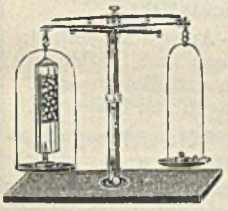
Smalian, K., Lehrbuch der Pflanzenkunde f. höhere Lehranstalten. A grosse Ausgabe. Leipzig 1903, Freytag. Mk. 8.— geb.

—„— Grundzüge der Pflanzenkunde f. höhere Lehranstalten. B. Schulausgabe. I. Teil: Die offen blühenden Sprosspflanzen oder Blütenpflanzen. Preis geb. Mk. 4.—. II. Teil: Verborgen blühende und blütenlose Pflanzen. Innerer Bau der Pflanzen und daran gebundene Lebensvorgänge. Mk. 1.— geb. Ebenda.

ANZEIGEN.

Normalverzeichnis
für die
physikalischen Sammlungen
der
höheren Lehranstalten.
Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.
Preis 30 Pfg.
Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert u. a.



sämtliche Apparate zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30.

Grundsätze und Schemata
für den
Rechen-Unterricht
an höheren Schulen.
Mit einem Anhange:
Die periodischen Dezimalbrüche
nebst Tabellen für dieselben.
Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer a. d. Realschule zu Magdeburg.
Preis 1.20 Mk.

Die Formeln
für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen abgeleitet an Figuren.
Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer in Magdeburg.
Preis 1 Mk.

Mineralien
Mineralpraeparate, mineralogische Apparate und Utensilien.
Gesteine
Geographische Lehrsammlungen.
Dünnschliffe von Gesteinen, petrographische Apparate und Utensilien.
Petrefacten
Sammlungen für allgemeine Geologie.
Gypsmodelle seltener Fossilien. Geotektonische Modelle.
Krystallmodelle
aus Holz, Glas und Pappe. Krystalloptische Modelle.
Preisverzeichnisse stehen portofrei zur Verfügung.
Meteoriten, Mineralien und Petrefacten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen
Dr. F. Krantz,
Rheinisches Mineralien-Contor
Gegründet 1833. **Bonn am Rhein.** Gegründet 1833.

Verlag von Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.
Die Geometrie der Lage.
Vorträge von Dr. Th. Reye,
ordentlicher Professor der Universität Strassburg i. E.
Abt. I. Mit 90 Textfig. Brosch. 8 Mk. Geb. 10 Mk.
Abt. II. Mit 26 Textfig. Brosch. 9 Mk. Geb. 11 Mk.
Abt. III. Brosch. 6 Mk. Geb. 8 Mk.

Aus einigen Beurteilungen dieses Werkes.
Die Vorzüge der Geometrie der Lage werden durch dies vortreffliche Lehrbuch in das deutlichste Licht gesetzt. **Die Anordnung und Reichhaltigkeit des darin behandelten Stoffes ist geradezu mustergiltig.** Der Inhalt bietet eine so grosse Fülle an Aufgaben und Lehrsätzen, dass jeder aufmerksame Leser zu aufrichtiger Bewunderung für den geistvollen Verfasser und zu warmem Interesse für den Gegenstand hingerissen wird. Im Vergleich zu dem v. Staudt'schen Werke über die Geometrie der Lage ist das Buch von Reye um Vieles leichter verständlich.
L. Kiepert in Zeitschr. für Archit. u. Ingenieurwesen. Hannover.

Man wird selten ein Buch finden, in welchem ein schwieriger Gegenstand so leicht und flüssig behandelt ist, wie hier. Gleich im Anfange werden Anregungen gegeben, welche sofort zeigen, wo das Ganze hinsteuert. Zahlreiche Figuren sind eingestreut, und stets wird der Leser ermahnt, selbst zu konstruieren, um sich durch Uebung und Anschauung zum Meister des Gegenstandes zu machen. **Mit einem Worte: es handelt sich um ein Meisterwerk.** **Dir. Dr. Holzmüller in Zeitschr. für lateinlose höh. Schulen.**

Die Gestaltung des Raumes.

Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Von **Prof. F. Pietzker.**

Mit 10 Figuren im Text. — Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30.

Hilfsbuch

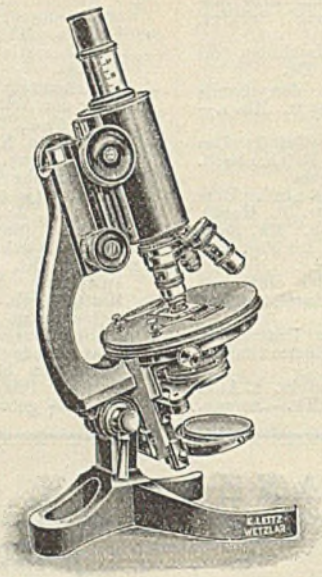
für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten.

Von **Oskar Lesser,**

Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.

Das Buch umfasst die Elemente der Planimetrie, soweit dieselben nach den Lehrplänen Behandlung finden sollen. Es ist ein Uebungsbuch und ein Lehrbuch zugleich. Im Vordergrunde stehen die Aufgaben; möglichstes Hinausschieben der strengen Beweisführung, Gewinnung der Sätze aus reichlich gegebenen Aufgaben auf der unteren und mittleren Stufe, sowie Einführung neuerer Gesichtspunkte sollen den Unterricht erleichtern und fördern.

Preis 2 Mark.



Neuestes Modell 1902.

E. Leitz,

Optische Werkstätte

Wetzlar

Filialen: Berlin NW., Luisenstr. 45

New-York 411 W. 59 Str.

Chicago 32—38 Clarke-Str.

Mikroskope

Mikrotome

Lupen-Mikroskope

Mikrophotographische Apparate.

Photographische Objektive. Projektions-Apparate.

Deutsche, englische und französische Kataloge kostenfrei.

Vertreter für München:

Dr. A. Schwalm, München, Sonnenstr. 10.

Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit.

Max Kaehler & Martini

Berlin W. Wilhelmstr. 50

empfehlen **Materialien** zu den

Goldschmidt'schen Versuchen

Einrichtung von chemischen Laboratorien. Preislisten 1903 frei.

M. Bornhäuser, Ilmenau

Hochspannungsbatterien — kleiner Akkumulatoren

für Unterrichtszwecke,

Kapazität 1 Amp.-Std. bei 10stündiger Entladung. D.-R.-G.-M.

Modell der physikalisch-technischen Reichsanstalt.

Präzisions-Reisszeuge

(Rundsystem)

für Schulen und Techniker.

Clem. Riefler, Nesselwang und München

(Nur die mit dem Namen Riefler gestempelten Zirkel sind echtes Riefler-Fabrikat.)

P. & M. Herre

Berlin S. 14

Neue Jakobstrasse 6.

Alle Sorten elektr. Röhren:

Geissler-, Tesla-, Röntgenröhren.

R. Brendel

Fabrikant botanischer Modelle

Grunewald b. Berlin

Bismarckallee 37.

Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Spezialität:

Polarisations-Apparate, sämtliche Prismen, Linsen und Platten aus Doppelspath und Bergkrystall. Turmalinzangen und Präparate.

C. A. Niendorf

Bernau i. M.

Klapptafel n. Rühlmann auf Wunsch mit Zubehör z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie d. i. Aufgab. vorkommenden Bewegungen. Kompl. Mk. 100 (S. U.-Bl. VIII 2. S. 44.). Dynamos m. Handbetrieb, Dampfmaschinen, Turbinen, Benzin- u. Wassermotoren.

— **Rob. Schulze,** Halle a. S. —

Moritzzwinger 6.

E. Leybold's Nachf., Köln

Mechanische und **optische Werkstätten.**

Physikalische Apparate

in erstklassiger Ausführung.

— Komplette Einrichtung — physikalischer Kabinette.

Elektrische Apparate

für den Physikunterricht.

Friedrich Bussenius

Berlin S. 42.

Projektions-Apparate Funkeninduktoren

Spezial-Fabrik:

Ed. Liesegang

Düsseldorf.

A. Krüss, Hamburg

Inhaber Dr. Hugo Krüss

Optisches Institut

Schul-Apparate nach Grimsehl

Spektral- u. Projektions-Apparate

Glasphotogramme.

Bestes galv. Element

für den physik. und chem. Unterricht.

Ausführl. Broschüre gratis.

Dynamomaschinen für Lehrzwecke.

Umbreit & Matthes

Leipzig-Pl. 1 b.

Projektions-Apparate

für Schulen

nebst allem Zubehör: **Lichtquellen, Laternbilder** in reichster Auswahl.

Kataloge und fachm. Auskunft steht zu Diensten.

Unger & Hoffmann, Dresden-A. 16.

Meiser & Mertig

Dresden-N. 6

Werkstätten für Präzisionsmechanik

Physikalische Apparate

◆ **Chemische Apparate** ◆

Preisverzeichnis kostenlos

Physikal. Apparate

Ferdinand Ernecke

Hoflieferant Sr. Maj. des deutschen Kaisers

Berlin SW. 46.

Reisszeuge
in allen Façons
E. H. Rost
Berlin, Dorotheenstrasse 22
Reparaturen

Max Kohl, Chemnitz i. S.
Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Elektrotechnik.
Einr. physikal. u. chem. Laboratorien. Fabr. physikal. Apparate u. mathemat. Instr. Kompl. Röntgen-Einrichtungen.
Gold. Med. Leipz. 1897, Weltausstell. Paris 1900 etc. — Spezial-Listen mit ausführl. Beschreib. etc. kostenfrei.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate. Demonstrationsapp. nach Behrendsen und Grimsehl.
Modelle von Dach- und Brückenkonstr. nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Krystallmodelle aus Holz- u. Glastafeln

Reiniger, Gebbert & Schall
Erlangen
liefern elektr. Lehrmittelgegenstände und physik. Apparate, Experimentiertableaux für Lehranstalten u. physik. Institute, elektrische Messinstrumente aller Art, Röntgen-Intrumentarien und alle elektromedizinischen Apparate.
Preislisten gratis und franko.

Physikalische Demonstrationsapparate
für
höhere Lehranstalten.
Leppin & Masche,
Berlin SO., Engelufer 17.

Ruhmer's
physikalisches Laboratorium
Berlin SW 48.
Selen-Zellen und Apparate.
— Prospekte gratis und franko. —

Günther & Tegetmeyer,
Werkstatt für wissenschaftliche u. technische
Präzisions-Instrumente
Braunschweig, Höfenstrasse 12.
Physikalische Instrumente spez. nach Elster und Geitel.

Elektrizitäts-Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen.
Schalttafeln u. Messinstrumente
für Lehr- und Projektionszwecke.
Widerstände auf Schiefer, beliebig verstellbar bis 250 Ohm M. 15 u. M. 17,50.
In kurzer Zeit Tausende für Lehr- und Versuchszwecke geliefert.

Schotte's Tellurien
in verschied. Grössen und Preislagen von 8 Mk. an. Ausgezeichnet mit der „Silbernen Staatsmedaille".
Ausführl. illustr. Preislisten unserer sämtlichen Lehrmittel gratis u. franko.
Ernst Schotte & Co.
Berlin W. 35, Potsdamerstr. 41 a.

Achromatische
Schul-Mikroskope
(30 bis 120 Mk.)
erster Güte hält stets am Lager.
F. W. Schieck
Berlin SW. 11, Halleschestrasse 14.
Illustrierte Preislisten kostenlos.

Projektions-Apparate
für Schulzwecke.
Carl Zeiss,
optische Werkstätte in Jena.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopir-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Alleiniger Fabrikant: Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstrasse 72/73.

Universalapparat Zepf
Aus einz. Teil. sind App. etc. aufzub. Dient z. Entw. d. ges. Lenre v. elektr. Strom. L. a. f. Schülerübungen vorzügl. Dienste. Dauerh. Ausführ. Jetzt auch gef. Aeussere. Billig. Amtl. empfohl. Preisgekrönt. Zahlr. Atteste. Der reichillustr., d. Lehrstoff biet. Prospekt gr.
Zepf. Grossherzgl. Reallehrer, Freiburg i. Br.

v. Poncet Glashütten-Werke
Berlin SO, Köpenickerstr. 54.
Fabrik und Lager
aller Gefässe und Glasutensilien
für alle Zweige der Chemie u. Technik
Preisverzeichnisse franko u. gratis.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Eigene Werkstätten.

Apparate u. Gerätschaften
für
chemische Laboratorien.
Vollständige Einrichtungen.
Leppin & Masche,
Berlin SO., Engelufer 17.

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Fabrik elektr. Apparate
Dr. Max Levy.
Berlin N., Chausseestrasse 2 a.
Demonstrations-Dynamos für Gleichstrom, Wechselstrom, Drehstrom.
Röntgenapparate, Widerstände all. Art.
Spezialität: Elektrizitätszentrale mit Explosionsmotor zur Erzeugung aller elektrischer Stromarten.

Dr. Benninghoven & Sommer
Berlin NW., Thurmstr. 19.
Anatomische Lehrmittelanstalt

Selen-Zellen und -Apparate
für
Telephonie ohne Draht
Clausen & v. Bronk
BERLIN N. 4.

Bopp, Neue Wandtafel
des metrischen Systems auf dunklem Grunde. Metz. Lehrapparat in
Bopp's Selbstverlag
Stuttgart.

A. Müller-Fröbelhaus, Dresden
Lehrmittel-Institut
liefert in tadelloser Ausführung
Unterrichtsmittel f. Mathematik, Naturwissenschaften und Physik.
Fachkataloge auf Wunsch.

Naturwissenschaftl. Institut
Wilhelm Schlüter, Halle a. S.
Lehrmittel-Anstalt.
Naturwissenschaftl. Lehrmittel für den Schulunterricht, in anerkannt vorzügl. Ausführung zu mässigen Preisen.
Seit 1890 in mehr als 900 Lehranstalten eingeführt. — Hauptkatalog kostenlos.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Verlag von O. Salle, Berlin W. 30.

Schriften des Nervenarztes
Dr. med. **Wichmann-Wiesbaden**
für

Neurastheniker

1. **Die Neurasthenie.** Ihre Behandlung u. Heilung. Ein Ratgeb. f. Nervenkranke. 2. Aufl. Preis 2 Mk.
2. **Lebensregeln für Neurastheniker.** 2. Aufl. Preis 1 Mk.
3. **Die Wasserkuren.** Innere u. äußere Wasseranwendung im Hause. 2. Aufl. Preis 1 Mk., geb. Mk. 1.25.

Für jeden Hausbesitz.

Der Bauherr
und
Hauswirt.

Ein praktischer Ratgeber für Jedermann in Bau- und Hausangelegenheiten.
Von
S. Müller, Architekt
Mit 8 Separatbildern u. 285 Textabbildungen.
Preis geheftet 5 Mk., gebunden 5 M. 60 Pf.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Ein Werk für Jedermann!
2. verbesserte Auflage.
Mit Karten u. Abbildungen

Die Erde
und die
Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Eine physische Erdbeschreibung nach
E. Reclus
von

Dr. Otto Ule.

Preis 10 Mk., geb. 12 Mk.

Verlag Otto Salle, Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme**, Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 2. Aufl. Preis 1.40 M.

Arithmetik.

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 4. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 2. Aufl. Preis 1 M. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 2. Aufl. geb. 2 M.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. **H. Servus** in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima). Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. **Heussi.** 15. verbesserte Aufl. Mit 172 Holzschnitten. Bearbeitet von **H. Weinert.** Preis 1 M. 60 Pf. — Mit Anhang „Grundbegriffe der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. **Heussi.** 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. **Leiber.** Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. **Wilh. Levin.** 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien, Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **H. Weinert.** 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 60 Pf.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Aug. Ritter,

Geh. Reg.-Rat u. Professor an der Königl. Technischen Hochschule Aachen.

Lehrbuch der Technischen Mechanik.

Achte Auflage. Mit 873 Textfig. Brosch. 20 Mk., geb. 22 Mk.

Lehrbuch der Analytischen Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 224 Textfig. Brosch. 8 Mk., geb. 10 Mk.

Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 612 Textfig. Brosch. 16 Mk., geb. 18 Mk.

Diese trefflichen Lehr- und Handbücher haben im Laufe der Jahre sich immer mehr eingebürgert und ihre Vorzüge, die **klare und durchsichtige Behandlung des Stoffes, die verständliche und präzise Ausdrucksweise,** ihnen immer neue Leser und Anhänger zugeführt. Prof. Dr. Holzmüller sagt in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht hierüber: „Ich selbst habe diese Ritterschen Bände häufig zu Rate gezogen und kann sie nur zum Studium empfehlen. **Dieselben gehören zum besten, was wir haben.**

Das Buch
der
physikal. Erscheinungen.

Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Neue Ausgabe. Mit 11 Buntdruckbildern, 9 gr. Abbildungen und 448 Holzschnitten. gr. 8°.
Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

Verlag
von
Otto Salle
in
Berlin W. 30
Maassenstrasse 19.

Die
physikalischen Kräfte

im Dienste der Gewerbe, Kunst und Wissenschaft. Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Zweite ergänzte Auflage. Mit 416 Holzschnitten, 15 Separatbildern und Buntdruckkarten. gr. 8°
Preis 13 Mk.; geb. 15 Mk.

Hierzu je eine Beilage der Firmen: **Fr. Ackermanns Verlag** in **Weinheim, Gebr. Borntraeger,** Verlag in **Berlin, Hermann Gesenius,** Verlag in **Halle a. S., Friedr. Vieweg & Sohn,** Verlag in **Braunschweig,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.