Jahrgang X. 1904. Nr. 5.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle (Saale).

Von Max Nath (Nordhausen).

(Schluss).

Aber, woher die Zeit nehmen, um auch nur auf einem der bearbeiteten Gebiete dem Schüler die notwendige Fachkenntnis zu vermitteln? Und entspricht es wirklich dem eigentlichen Ziele der höheren Schulen auf den verschiedenartigsten Gebieten der mathematischen Anwendungen detaillierteste Fachkenntnisse zu übermitteln? Sollen wir Bankiers, Lebensversicherungsbeamte, Astronomen, Steuerleute heranbilden oder sollen wir allen diesen die gemeinsame wissenschaftliche Grundlage geben, auf der nachher jeder je nach seinem Beruf weiterbauen kann?"[39])

Um es noch einmal zusammenzufassen, — Mangel an Zeit zu sachgemässer Behandlung derartiger Aufgaben, der den Erwartungen nicht entsprechende Erfolg, der mit ihrer Häufung verbunden ist, die Gefahr, die Hauptsache darüber aus den Augen zu verlieren, das sind die Bedenken, die gegen eine übermässige Betonung der Anwendungen sprechen, und die natürlich noch stärker ins Gewicht fallen, wenn geradezu die Bereitschaft ausgesprochen wird, die Mathematik als zusammenhängenden Wissensstoff, als selbstständigen Unterrichtszweig, daran zu geben.

Natürlich aber, — abusus non tollit usum. Wenn ich mich gegen die Uebertreibung einer Bestrebung gewendet habe, so ist damit doch nicht gesagt, dass ich nicht dem berechtigten Kern derselben aus voller Ueberzeugung mich anschliesse. Uebungen sind nötig, Anwendungen sind es nicht minder. Diese Uebungen und

[39]) H. Schotten in der Anzeige von: A. Schülke, Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie, nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre für die oberen Klassen höherer Schulen. Leipzig, B. G. Teubner. 1902, in: Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht. XXXIV. S. 138. — Aehnlich auch K. Schwering in einem Vortrage „zur Methodik des mathematischen Unterrichts am Gymnasium" auf der mathematischen Sektion der 46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Strassburg (1—4. X. 1901): „ich meine, über all der Physik, Chemie, Feldmesskunst usw. dürfen wir nicht vergessen, dass wir Mathematiker sind." (Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht. XXXIII. S. 138) und Max Simon, a. a. O. S. 23: „Ueber allen Anwendungen bleibt doch der Wert der reinen Mathematik als des gemeinsamen Bandes aller gesetzmässigen Erkenntnis, ja das Vorbild jeder Wissenschaft."

Anwendungen brauchen auch keineswegs im Gebiete der Mathematik selbst zu bleiben. Es ist vom höchsten Werte, dass „die Anwendbarkeit der Wissenschaft auf anderen Gebieten, sei es des Lebens, sei es besonders der physikalischen Wissenschaften aufgezeigt und die Gelegenheit geboten werde, den mathematischen Sinn durch die Anwendung auf diese Gebiete zu üben.[40]) „Die andauernde Uebung in der Umsetzung von Sachverhältnissen in Zahlenverhältnisse gibt den Schülern allmählich die Gewohnheit, jeden Gedanken in seiner vollen Klarheit zu erfassen, bis zu Ende zu durchdenken, beseitigt die dem Ungebildeten anhaftende Verschwommenheit des Denkens."[41]) Und ich habe ja vorhin schon erwähnt, welche Vorteile dem mathematischen Unterricht selbst aus diesem Brückenschlagen zu den übrigen Fächern der Schule und zum Leben selbst erwachsen. Nur müssen eben die Klippen vermieden werden, die dem Gesamterfolg des Unterrichts drohen.

Eine besondere Aufgabe hat die Mathematik im physikalischen Unterricht zu erfüllen und auf sie muss ich wenigstens andeutungsweise zu sprechen kommen. Wenn bisher von Anwendungen die Rede war, so handelte es sich darum, die physikalischen Gesetze auf Verhältnisse anzuwenden, unter denen sich ihre Wirksamkeit vollzieht. Etwas anders ist es um die Aufgabe, die der Mathematik zufällt, wenn man sie bezeichnet als ein „ausgezeichnetes und unentbehrliches Hilfsmittel des Physikers zur letzten Vollendung seiner Arbeit und zur Formulierung der gefundenen Zusammenhänge."[42]) In der Tat ist es ja erst das in der mathematischen Formel dargestellte physikalische Gesetz, das eine für seine Ausnutzung brauchbare Gestalt darbietet, indem in ihr die der Messung fähigen Momente hervorgehoben und auf gewisse Einheiten zurückgeführt sind. Die mathematische Formel bietet ferner die Möglichkeit, von ganz allgemeinen Voraussetzungen zu ganz speziell verfolgbaren Resultaten zu gelangen. Die Bedeutung der Mathematik greift hier noch weiter, sofern sie auch für die Gewinnung des Ausgangspunktes einer experimentellen Untersuchung oft unentbehrlich ist, indem sie den Rahmen schafft, innerhalb dessen ein Versuch ausgeführt wird, indem sie der experimentellen Untersuchung von vornherein die Richtung vorschreibt.[43]) Doch mit diesem Gedanken glaube ich mich schon von dem Gegenstande meines Themas zu entfernen.

Die Ergebnisse meiner Ausführungen weichen in einigen Punkten ab von der Wirklichkeit, von dem, was die Lehrpläne vorschreiben. Aber wenn ich aus der, durch den Allerhöchsten Erlass vom 26. November 1900, geschaffenen Sachlage meine Forderungen begründet habe, so ist es erklärlich, dass die als unmittelbare Folge dieses Erlasses neu formulierten Vorschriften noch nicht alle Folgerungen gezogen haben. Doch sie lassen dem Lehrer „vielfache Freiheit, mehr nach der einen oder nach der anderen Seite auszugreifen". Und in dieser Freiheit „liegt die Gewähr für das Gedeihen der neuen Entwickelung, die durch die neue Regelung der Berechtigungsfragen für die verschiedenen Schularten verlangt zu werden scheint."[44]) Es wird gewiss möglich sein, durch Versuche die Erfahrungen zu sammeln, die den Weg zeigen, auf dem, und das Mass, in dem das von der Natur der Sache Geforderte ins Leben geführt werden kann.

Wenn ich mich nun der zweiten Aufgabe des mathematischen Unterrichts zuwende, die ich als die formale bezeichnet habe, derjenigen, die er für die geistige Entwickelung des Schülers im allgemeinen zu leisten hat, ganz abgesehen von der Befestigung eines Wissensschatzes und der Uebung in dessen Verwendung, so wird von mir vielleicht zunächst eine Stellungnahme zu der Frage erwartet werden, ob man mit Recht oder Unrecht von einer formalen Bildung spricht, ob es Lehrfächer gibt, die in besonderer Weise die Verstandeskräfte der Schüler zu steigern geeignet sind, sodass diese in der Schule wie im Leben von dieser Steigerung Vorteil zögen auch einem ganz anderen Material gegenüber, als das war, an dem sie ihre Bildung erworben haben. Die Existenz der formalen Bildung ist vielfach geleugnet worden. Man hat, fussend auf den Lehren gewisser philosophischer Schulen, aus der Natur der psychischen Vorgänge ihre Unmöglichkeit herzuleiten gesucht.[45]) Man hat von der „Hypothese der formalen Bildung"[46]) gesprochen, und man hat,

[40]) Lehrpläne und Lehraufgaben 1901. Methodische Bemerkungen zur Mathematik. Abs. 11.

[41]) H. Thieme. Die Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer für die allgemeine Bildung, in: Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. XXI. S. 91.

[42]) K. Noack, Bemerkungen zum physikalischen Gymnasialunterricht, in: Ztschr. f. phys. u. chem. Unt. IV. S. 161 ff.

[43]) F. Pietzker, Ueber die Beziehungen zwischen dem mathematischen und physikalischen Unterricht. Ebenda III. S. 105 ff.

[44]) F. Klein bei W. Lexis, die Reform der höh. Schulen in Preussen. S. 264.

[45]) Zusammenfassend wohl am bedeutsamsten F. Schmeding, Zur Frage der formalen Bildung. 2. Aufl. 1882. Auch H. Thieme, Der Bildungswert der Mathematik, in: Pädagogisches Archiv. XXXIX. S. 441 ff.

[46]) A. Richter, Der Einfluss, welchen der lateinische Gymnasialunterricht auf den mathematischen vermittelst der Hypothese von der formalen Bildung ausgeübt hat. Beilage z. Jahresber. d. Gymnasiums zu Wandsbeck. 1894. — Drsb., die Entwickelung des

wenn man ihr Vorhandensein nicht völlig negieren konnte, doch wenigstens die Behauptung zu erweisen gesucht, dass zwar aus der Beschäftigung mit einem Wissenszweige eine gewisse formale Bildung resultiere, dass aber deren Wert beschränkt bleibe auf den Bereich des Wissens, an dem sie erworben sei.[47])

Der Streit ist doch zwischen den Sprachen und der Mathematik. Es ist gesagt worden: „Wer zu klarem Denken überhaupt erziehbar ist, der ist auch für Mathematik veranlagt. Es wird doch derselbe Verstand, dieselbe Logik und Abstraktion hier beansprucht, wie sie verlangt wird bei der Auffassung grammatischer Gesetze und so vieler anderer Begriffe, die wir im Schulunterricht verwenden."[48]) Gibt man nun für die Sprachen die Möglichkeit zu, dass sie formale Bildung mit sich führen, so wird man für die Mathematik das Gleiche nicht gut leugnen können. Es wäre möglich, dass die Ergebnisse nicht dieselben sind, dass sie ganz oder teilweise sich ausschliessen, dass die durch das eine Fach gewonnene Bildung wertlos ist bei dem Betriebe des anderen. Also lassen sie uns, ohne die sehr schwierige Frage auch der Möglichkeit formaler Bildung zunächst prinzipiell zu beantworten, zusehen, was für die allgemeine Bildung des Geistes der mathematische Unterricht leisten kann, daher auch leisten soll.

„Das Anschauen ist das wichtigste unter den bildenden Beschäftigungen des Kindes und des Knabens" sagt Herbart,[49]) und unmittelbar an dieses Wort können wir einen Satz von Th. Waitz schliessen: „Demgemäss ist das sinnlich Anschauliche der notwendige Ausgangspunkt des mathematischen Unterrichts. Es erfordert dies die Fasslichkeit der Lehre für den Schüler. Denn auf allen Gebieten des Wissens muss die positive Kenntnis einer Summe zusammenhängender Tatsachen der Begriffsbildung und der Einsicht in den Zusammenhang derselben vorausgehen. Die Tatsachen aber, die dem mathematischen Unterricht zur Grundlage dienen, sind diejenigen, die der (mathematische) Anschauungsunterricht zu lehren hat."[50]) Undeutlich, verworren und unübersichtlich liegt vor dem Sinne des Kindes zunächst die Fülle der Eindrücke, — Deutlichkeit und Ordnung in sie zu bringen ist das Bestreben des erstarkenden Geistes, ist die Aufgabe des Unterrichtes, der diesem Bestreben entgegenkommt. Die Deutlichkeit des Angeschauten besteht in der möglichst vollständigen Sonderung der unterscheidbaren Einzelheiten, aus denen ein anfangs verworrener Totaleindruck hervorgeht, richtige Abstufung des Angeschauten findet statt, wenn diese Einzelheiten innerhalb der Totalvorstellung zu grösseren und kleineren Gruppen in der Art kombiniert sind, dass eine jede von ihnen in die Beziehungen der Neben-, Unter- und Ueberordnung tritt, welche das angeschaute Ganze als solches leicht übersehen lassen. Zur Deutlichkeit und richtigen Abstufung muss der Reichtum der sinnlichen Vorstellungen kommen, welcher auf dem genauen Erfassen und treuen Behalten der Nüancen beruht, und die freie Beweglichkeit der Elemente und elementaren Gruppierungen.

Die gebildete Anschauung zeigt sich also namentlich in der Schnelligkeit und Sicherheit, mit welcher sie ein verwickeltes Mannigfaltige übersieht und sogleich die wesentlichen Gesichtspunkte für dasselbe herausfindet, dann in der willkürlichen Lebendigkeit, mit der sie selbsttätig Bilder von voller sinnlicher Bestimmtheit schafft und Fehlendes ergänzt. Sofern sie die aus früheren Wahrnehmungen gewonnenen Gesichtspunkte mit Leichtigkeit auf analoge Erscheinungen anwendet, ist sie rein rezeptiv und reproduktiv, sofern sie über Reichtum und freie Beweglichkeit der Vorstellungen verfügt, mehr produktiv und frei kombinatorisch.[51])

Nun sind dem Kinde auch eine Reihe geometrischer Gestalten bekannt, bekannt in ihrem Gesamteindruck, aber ohne Klarheit bezüglich des Inhaltes und dessen Anordnung. Es kann wohl einen Würfel von einer Pyramide unterscheiden. Aber erst der geordnete Unterricht lehrt es, eine deutliche Vorstellung von beiden sich zu bilden, indem er das Ganze in seine Teile und Elemente zergliedert und jedes besonders benennt, indem er sie zu kleineren Gruppen zusammenfasst und deren Verhältnis zu einander und zu dem Ganzen bemerkt. Mannigfaltige

mathematischen Unterrichts auf den preussischen Gymnasien während des 19. Jahrhunderts, in: Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. XXXI. S. 253 ff.

[47]) Joh. K. Becker, a. a. O. S. 18: „Wer diesen Kursus elementarer Geometrie mit Erfolg durchgemacht und nicht bloss eine Anzahl komplizierter geometrischer Beweise verstanden und behalten, sondern auch mit Erfolg versucht hat, selbständig neue Beweise für bekannte oder neue Sätze ausfindig zu machen, wird hinreichend befähigt sein — um seine weiteren geometrischen Studien mit gleichem Erfolge fortzusetzen. Wagt er sich aber auf irgend ein anderes, der Geometrie fremdes Gebiet, so wird er ebensowenig ausrichten können, als einer, der von Geometrie garnichts versteht."

[48]) Adolf Matthias, Die Gleichwertigkeit der Oberrealschul- und d. Gymnasialbildung, in: Aus Schule, Unterricht und Erziehung. München, C. H. Beck. 1901. S. 92. — Vergl. auch die eingehenden Untersuchungen von C. Völcker, Formal-sprachliche Bildung durch den Unterricht in der Muttersprache, formal-logische Bildung durch den Unterricht in der Mathematik, in: Zentral-Organ für die Interessen des Realschulwesens. XXI.

[49]) J. Fr. Herbarts pädagogische Schriften, herausgeg. von Otto Willmann. Leipzig, Voss. 1880. I. S. 113.

[50]) Th. Waitz, Allgemeine Pädagogik. Braunschweig. Vieweg. 1875. S. 407.

[51]) Th. Waitz, a. a. O. S. 106 ff.

Uebungen dieser Art bewirken zuletzt eine grosse Leichtigkeit, die einmal gewonnenen Gesichtspunkte selbständig anzuwenden. Allmählich wird der Schüler auch dahin gebracht, jene andere, freie, kombinatorische Tätigkeit der Raumanschauung zu üben, indem man ihn anleitet, durch Zusammenstellung und durch Veränderung der Zusammenstellung der ursprünglichen Gestalten neue hervorzubringen und an ihnen die vorher erworbene Fertigkeit wiederum zu üben.

So findet der geometrische Unterricht, wenn er systematisch einsetzt, im Geiste des Schülers eine Menge von Anschauungen vor, die er als Material für seine Zwecke zu verwerten hat. Eine ähnliche Vorstufe bietet für die Arithmetik der Rechenunterricht. Indem er das Zählen und die Zahl, die Vorstellungen der Gleichheit und Ungleichheit, die Rechnungsarten des Vermehrens und Verminderns, des Vervielfachens, Teilens und Messens zur Anschauung bringt, bereitet er für die späteren Begriffsbildungen und Operationen vor.

Ehe mathematischer Unterricht einsetzen kann, muss die mathematische Anschauung eine gewisse Uebung erlangt haben.[52]) Aber dann trägt der mathematische Unterricht das Seine dazu bei, die Uebung zu pflegen und zu stärken, die Kraft der Vorstellung noch zu heben, die Raumanschauung noch zu entwickeln und auszubilden.

Dem Schüler, der mit Erfolg Unterricht in der Planimetrie genossen hat, stehen zugleich mit einer planimetrischen Figur eine grosse Zahl an und in ihr gezogener Hilfslinien vor der Seele, Beziehungen dieser Linien zu der Figur selbst und zu einander, zu ihren Seiten und zu den von ihnen gebildeten Winkeln. Er vermag die allmählichen Aenderungen zu verfolgen, die die einzelnen Stücke erfahren, wenn die ganze Figur sich wandelt. Das alles hat er nicht nur als Wissensstoff bereit, es steht vor seinem innern Auge, er „liest es von der Figur ab.“ Der Verlauf des trigonometrischen Unterrichts führt dahin, dass die Schüler über Wachsen und Fallen der Funktionen, Aenderung ihrer Vorzeichen u. dgl. m. alles aus der bekannten, von ihnen reproduzierten Figur ablesen, ohne es auswendig zu lernen. Noch grösser ist der Erfolg des stereometrischen Unterrichts. Nicht nur die Körper selbst, auch ihre Teile und deren Lage zu einander, Schnittflächen und Schnittlinien, die Lage von Ebenen und Geraden zu anderen Ebenen und Geraden, die Lage eines Körpers in einem anderen, vermag die gebildete Raumerscheinung deutlich vorzustellen. Sie sieht, wie die Höhen des regelmässigen Tetraeders sich in einem Punkte schneiden, wie die Kanten der Ecke auf den Flächen der Polarecke senkrecht stehen, wie der eingeschriebene Würfel im Oktaeder liegt, usw. Sie hat nicht mehr nötig, die Zeichnung zu Hilfe zu nehmen.

Freilich, im Laufe der Entwickelung war die Zeichnung sehr wichtig. Der geometrische Unterricht leistet um so mehr für die Ausbildung der Raumanschauung, je mehr er anschaulich ist, je mehr er in genetischer Entwickelung die Selbsttätigkeit des Schülers in Anspruch nimmt. Gewiss soll die Hinleitung zu reiner Vorstellung der abstrakten Grössen und Gebilde von ihm nicht fern gehalten werden, aber Zeichnen und wieder Zeichnen muss die Losung sein, je mehr sich der Unterricht auf den ersten Stufen befindet.[53]) Soweit freilich möchte ich nicht gehen, dass ich vollständige Verschmelzung des Zeichenunterrichts mit dem mathematischen, die Beschränkung des ersten auf geometrisches Zeichnen befürwortete.[54]) Aber mit vollem Recht fordert und pflegt man das Projektionszeichnen auf der Oberstufe. Während die reine Mathematik die geometrischen Formen und Beziehungen mehr unserem geistigen Auge vorführt, „projiziert sie die darstellende Geometrie von innen nach aussen und stellt sie mathematisch genau unserem leiblichen Auge dar. Dadurch zwingt sie uns, nicht allein das Gedachte uns räumlich klar vorzustellen, sondern auch die in einer Ebene entworfene Zeichnung wieder plastisch zu sehen.“[55]) Und dies eignet sie ganz besonders für die Entwickelung des Anschauungsvermögens.

Auf das engste verknüpft mit der Ausbildung der räumlichen Anschauung sind dann ferner die Konstruktionsaufgaben. Hier betätigt sich jene zweite, freie kombinatorische Fähigkeit der gebildeten Anschauung, und andererseits, — vielfache Uebung auf diesem Gebiete ist imstande, der Anschauung diese produktive Richtung zu geben. Die „Konstruktionsaufgabe ist das bildendste

[52]) Th. Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts. Hannover. 1879. S. 83: „Zuerst sollen dem Schüler die mathematischen Objekte vorgeführt werden, damit er sie anschaue, vergleiche und so zu einem klaren Begriff derselben gelange; nachher erst soll er diese Objekte denjenigen Operationen unterwerfen, welche die Natur dieser Objekte selbst fordert. Letzteres ist nun aber das eigentliche Geschäft der Mathematik, mithin wird die zuerst genannte Tätigkeit dem vorbereitenden mathematischen Unterricht anheimfallen müssen.“

[53]) Vergl. Fr. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin, Grote. 1886. S. 62. „Der Lehrer gebrauche im Unterricht, namentlich der unteren und mittleren Klassen, so viel als möglich die Wandtafel.“

[54]) A. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. S. 33 u. 34.

[55]) C. Hildebrandt, Ueber die Ausbildung des Kunstsinnes auf den höheren Lehranstalten durch Geometrie und Zeichnen. Beilage z. Jahresber. des Herzoglichen Realgymnasiums zu Braunschweig. S. 9.

Element in der Geometrie." [56]) Die Zeiten sind wohl für immer vorüber, wo man die Auflösung von Konstruktionsaufgaben als eine Art Rätselraten betrachtete, welches nur einzelnen, von der Natur besonders begünstigten gelänge. Freilich bedarf es einer sorgfältigen, genau erwogenen Auswahl, einer geduldigen, klaren Anleitung, um den Anschein zu vermeiden, als ob in jener Ansicht Wahrheit sei. Zugegeben auch, dass zunächst ein gewisser mechanischer Schematismus leicht Platz greift. Fortdauernde, nie ausgesetzte Uebung führt mit der Zeit darüber hinweg und lässt die Früchte der Bemühung klar erkennen. Kein Gegenstand fesselt in der Tat so sehr das Interesse des Schülers, weil er, sobald er über die ersten streng bewachten Schritte hinaus ist, seiner Selbsttätigkeit, seiner Erfindungskunst, seiner Phantasie die Zügel schiessen lassen kann und muss. „Denn nur die Phantasie führt ihm die verschiedenartigsten Hilfsmittel vor die Seele." [57]) Und Phantasie, was ist sie anderes als jene Fähigkeit, Kombinationen zu finden und zu prüfen, die fruchtbaren und zeugenden Verbindungen herauszuheben, die Erkenntnis, welche sie versprechen, abzuschätzen, kurz die produktive, frei kombinierende Anschauungskraft?

Allerdings, die Anschauung ist hier schon mit anderer Geistestätigkeit verbunden. Die Abschätzung der möglichen Erkenntnis ist ein Betrachten der Abfolge von weiteren und weiteren Verbindungen, die sich aus den gewählten ergeben, damit zugleich ein Begleiten und Lenken der ablaufenden Schlussketten, ist ein Fortschreiten zum Ziel mit vollem Bewusstsein der Stelle, an der man sich befindet, gehört schon nicht mehr der Phantasie, sondern dem Verstande an. Die Probleme der Mathematik bieten dem Geiste ein reiches Material zum eigenen und selbständigen Nachdenken. Der mathematische Unterricht ist eine Schule der Logik sowohl dadurch, dass er zur Kenntnis der wichtigsten logischen Gesetze führt, als auch dadurch, dass er in ihrer Anwendung übt. „Sehen wir auf die einzelnen logischen Operationen und Methoden, welche die Mathematik zur Anwendung bringt, so wird zunächst die Abstraktion von ihr in vorzüglich hohem Grade in Anspruch genommen, nicht allein in dem Sinne, dass sie ein Aufsteigen vom Besonderen und Einzelnen zum Allgemeinen verlangt, indem sie z. B. unter einem bestimmten anschaulichen Dreiecke ein Dreieck überhaupt, oder unter einem Buchstaben eine Zahlengrösse überhaupt zu denken fordert, die zu anderen in einer gewissen Beziehung steht, sondern auch in dem Sinne, dass sie Grössen- und Gestaltvorstellungen isoliert betrachtet wissen will, abgesondert von allen übrigen physikalischen Merkmalen, die in der Natur überall verbunden mit ihnen vorkommen. Ferner übt sie im genauen Erklären und Einteilen, bei welchem letzteren sie stets nach scharf bestimmten Einteilungsgründen verfährt und die Vollständigkeit der Glieder durch Unterscheidung der verschiedenen möglichen Fälle genau nachweist. Endlich exemplifiziert sie die verschiedenen Formen der Schlüsse und Beweisarten, namentlich den Unterschied der direkten und indirekten, und zwar sind ihre Beweise durchgängig von strenger Allgemeingültigkeit und begrifflicher Notwendigkeit, lassen nicht die Möglichkeit einer Ausnahme übrig, wenn nicht eine Voreiligkeit im Beweise selbst begangen und eine nötige Beschränkung übersehen wurde, und treten durch die Absurdität der Annahme des Gegenteils ihrer Lehren in Gegensatz zu den aus empirischen Tatsachen abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsschlüssen, zur Induktion der Naturwissenschaften." [58]) Aehnlich, wie in diesen Worten Th. Waitz, äussert sich auch W. Schrader: „Mag man (den mathematischen Unterricht) in synthetischer oder analytischer Weise erteilen, immer erheischt und verschafft derselbe genaue Begriffsbestimmungen und führt durch die Analyse der gefundenen Begriffe nach ihrem Umfange wie nach ihrem Inhalte zu einer Reihe von Urteilen, welche sich sodann zu der strengen Form des Schlusses und des Beweises verbinden. Um so augenfälliger ist die Einwirkung der Mathematik auf die Bildung des Begriffsvermögens, als jene logischen Formen hier unverhüllt und in völliger Klarheit hervortreten und eben deswegen jeder Fehler gegen dieselben auch dem Schüler leicht erkennbar wird. Ebenso bietet der theoretische Unterricht in der Mathematik hinlänglich Anlass zur Uebung in der Einteilung und der Subsumtion, besonders finden aber diese beiden Formen bei der Lösung mathematischer Aufgaben ihre Anwendung." [59]) Indem also der Unterricht ein nützliches Material liefert, an dem der Schüler lernen kann, selbständig Begriffe zu bilden, Beobachtungen zu machen und aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahieren, indem er an den Beweisen die Fähigkeit übt, Voraussetzung und Behauptung streng zu scheiden und zu formulieren und aus gegebenen Prämissen die richtigen Schlüsse zu ziehen, werden doch wohl in der Tat alle die geistigen Tätigkeiten geübt

---

[56]) Max Simon, a. a. O. S 24.

[57]) Max Simon, a a. O. S. 24.

[58]) Th. Waitz, a. a. O. S. 404. Vergl. A. Schaeffer, der geometrische Unterricht auf psychologischer Grundlage. Beilage zum Jahresber. des Gymnasiums zu Buchsweiler. 1893.

[59]) W. Schrader, Erziehungs- und Unterrichtslehre für Gymnasien und Realschulen. 4. Aufl. Berlin, Hempel. 1882. S. 63.

und ausgebildet, die das Nachdenken ausmachen. Mag es sich nun auch wirklich so verhalten, dass diese ganze Ausbildung zunächst nur für weitere mathematische Studien von Wert ist, so scheint mir, — ohne dass ich damit freilich die Frage nach der Möglichkeit der formalen Bildung entschieden haben möchte, — die Wahrscheinlichkeit sehr gross, dass von ihr der Schüler auch auf anderen Gebieten Gewinn ziehen wird, wenn er nur auf dem neuen Felde sich erst eingewöhnt hat.[60]) Jedenfalls nötigt die Bestimmtheit der Begriffe und die strenge Gleichmässigkeit ihrer Bezeichnung, die Evidenz der Grundsätze, die Stetigkeit und Stringenz der Beweise zu vollständiger Bestimmtheit des Denkens im einzelnen und zu genauer Unterscheidung des Verwandten, zu sorgfältiger Wahl und gleichmässigem Festhalten der Bezeichnung des Gedachten. Die Sprache der Mathematik gewöhnt, das Erkannte streng adäquat, ohne Rest und ohne Ueberschuss in Zeichen zu fassen. „Im mathematischen Ausdruck kann kein Schwanken und Schielen vorkommen.“ [61]) Wo also sprachliche Schulung und mathematische Schulung sich die Hand reichen, da wird einerseits die ganze Fülle an Schönheit und Reichtum, andererseits die ganze Schärfe und Sachlichkeit des Ausdrucks und der Darstellung in dem Schüler erweckt und erzeugt werden.[62]) Mathematischer Unterricht wird also, gleichviel in welcher Ausdehnung oder Beschränkung, für die formale Ausbildung des Geistes als ein unersetzliches Hilfsmittel anzuerkennen sein.

Doch „alle formelle Bildung der Schüler ist nichts als Entwickelung des philosophischen Sinnes“ [63]), d. h. des Sinnes für wissenschaftliche Betätigung, des Sinnes für die Zusammenfassung aller Erkenntnis unter allgemeinsten und höchsten Gesichtspunkten. Philosophie war dereinst ein Gegenstand schulmässiger Unterweisung auf den höheren Lehranstalten. Sie ist für eine geraume Zeit aus ihnen so gut wie verbannt gewesen, als ein veraltetes, eingerostetes und unfruchtbar gewordenes Unterrichtsverfahren Schülern wie Lehrern den Geschmack verdorben hatte. Aber eifrige Verfechter ihrer Berechtigung haben nie aufgehört für ihre Wiedereinführung zu sprechen[64]), es hat sich die Erkenntnis durchgerungen, dass eine „philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage“ [65]) geeignet sein dürfte, die naturwissenschaftlichen Kenntnisse der älteren Schüler unserer höheren Lehranstalten für eine Einführung in die Prinzipien und Methoden wissenschaftlicher Forschung nutzbar zu machen, und der literarische Versuch, diesen Gedanken ins Leben zu führen, ist mit Erfolg gemacht worden.[66]) Die neuen Lehrpläne haben das Fach der philosophischen Propädeutik zwar noch nicht ausdrücklich geschaffen, aber sie stehen ihrem Betrieb doch wohlwollend und ermunternd gegenüber. Sie bezeichnen ihre Aufnahme in den Lehrplan der Prima als wünschenswert und als die Aufgabe einer solchen Unterweisung, „die Befähigung für logische Behandlung und spekulative Auffassung der Dinge zu stärken und dem Bedürfnisse der Zeit, die Ergebnisse der verschiedensten Wissenszweige zu einer Gesamtanschauung zu verbinden, in einer der Fassungskraft der Schüler entsprechenden Form entgegenzukommen.“ Zu wünschen sei, „dass zur Förderung dieser Aufgabe auch Vertreter der übrigen wissenschaftlichen Lehrfächer beitragen.“ [67]) So haben denn auch die amtlichen Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen in jüngster Zeit an verschiedenen Stellen das Thema behandelt, dass die höhere Schule die Pflicht habe, in die Philosophie einzuführen.[68])

Schon vor dieser letzten günstigen Wendung in der Auffassung der Schulverwaltung aber ist von einsichtsvoller Seite darauf hingewiesen worden, dass in den philosophischen Unterricht der obersten Klassen die Lehrer des Deutschen und der Mathematik sich zu teilen haben. „Fällt jenem die Aesthetik Schillers, die Ethik Kants und seine Lehre von der Urteilskraft zu, so diesem die erkenntniskritische Behandlung des Zahlbegriffes, die er in allen seinen Verzweigungen von seinem Ursprunge aus der logischen Funktion des Vergleiches an verfolgen muss. — Und der Unterricht in der Stereometrie und Mechanik zwingt uns auf Kants Anschauungen von Raum und Zeit einzugehen und den Gegensatz zwischen ihm und Gauss klarzulegen.“ [69]) Es will mir nicht ganz sicher scheinen, ob man

[60]) Den Ausführungen von C. Dillmann, Die Mathematik, die Fackelträgerin einer neuen Zeit. Stuttgart, Kohlhammer. 1889. S. 117 ff. sich anzuschliessen, dürfte doch wohl schwer halten.

[61]) C. Dillmann, a. a. O. S. 206.

[62]) Vergl. Fr. Pietzker, Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht, in: Unterr.-Bl. f. Math. u. Naturw. II, S. 2.

[63]) A. F. Bernhardi, Mathematik u. Sprachen. Gegensatz u. Ergänzung. Progr. des Friedrich-Werderschen Gymnasiums, 1816, auch in: Ansichten über die Organisation gelehrter Schulen. Berlin 1818.

[64]) R. Lehmann, Erziehung und Erzieher. Berlin, Weidmann. 1901. S. 244 ff.

[65]) G. A. Lambeck, Beilage z. Jahresber. des Realgymnasiums zu Barmen. 1897.

[66]) A. Schulte-Tigges. Berlin, Reimer. 1898 und 1899. 2. Aufl. 1904.

[67]) Lehrpläne und Lehraufgaben. 1901. Methodische Bemerkungen zum Deutschen, No. 7.

[68]) Verhandlungen der 9. Direktoren-Versammlung in der Provinz Sachsen, 1903. Berlin, Weidmann. S. 1—168.

[69]) M. Simon, a. a. O. S. 32 u. 33.

die Grenzen des Unterrichts so weit wird stecken dürfen, ob eine erschöpfende Behandlung dieser Probleme nicht über die zur Verfügung stehende Zeit und über die Fassungskraft der Schüler hinausgehen würde. An sich aber halte ich die Verbindung des Unterrichts in der philosophischen Propädeutik mit dem mathematischen für durchaus möglich und für angebracht, wenn der Lehrer die nötigen Qualitäten besitzt, wobei die Lehrbefähigung für das Fach nicht immer massgebend ist. Konnten doch einst im Anschluss an Trendelenburgs Elementa logices Aristoteleae Beispiele zur Logik aus der Mathematik und Physik zusammengestellt werden [70]), die ein vielbenutztes Hilfsmittel gewesen sind. Wirklich kommen ja in der Mathematik nicht nur die Gesetze der elementaren Denkformen, sondern auch die der methodischen in durchsichtiger klarer Weise zur Darstellung. Die Mathematik ist dem Schüler nicht nur im einzelnen eine Schule des logischen Denkens, sondern auch im ganzen das Musterbild eines wissenschaftlichen Systems. Mit dem Eindringen in sie und durch dasselbe entwickelt sich in dem Schüler der Sinn für Wissenschaftlichkeit im engeren und strengeren Sinne. „Kein anderer Lehrgegenstand vermag das in gleicher Weise zu leisten, keiner kann deshalb die Mathematik vertreten oder ersetzen.“ [71]) Es ist das eigenartig systematische Gefüge der mathematischen Wissenschaft, die das zur Folge hat. „Während andere Wissenschaften, zumal empirische, ihre Ergebnisse gleichsam einfach hinbreiten, ist die Struktur der mathematischen Erkenntnisse eine mannigfaltige. Die Lehrsätze stehen in netzartiger Verbindung; von einer Wahrheit zur anderen führen mehrere Wege, der eine zur Bestätigung des anderen dienend. Von vielen Lehrsätzen geht die Erkenntnis abwärts zur Spezialisierung oder Hinzufügung neuer Bedingungen, seitwärts durch Modifikation von Bestimmungen, aufwärts durch Ausscheidung von Bedingungen und Verallgemeinerung des Bereiches der Geltung.“ [72])

Wenn ich nun die systematisierende Kraft des mathematischen Unterrichts so hervorhebe, so wird man mir hieraus, wie vielleicht aus einigen anderen Aeusserungen die Absicht unterlegen, als wollte ich den Unterricht „in systematischer Form nach sachlich-logischen, nicht methodisch nach psychologischen Gesichtspunkten“ erteilt wissen. Dagegen möchte ich mich ganz kurz verwahren. Ich bin durchaus der Ansicht, dass mit dem System aufzuhören, nicht mit ihm anzufangen sei, ich meine auch, dass man Gefahr läuft, die geistige Kapazität der Schüler zu überschätzen [73]), wenn man die Forderung an die Fähigkeit systematischen Denkens, die durch zweckmässigen Lehrbetrieb allmählig erreicht werden kann, zu hoch stellt; aber diesem Ziele nachzustreben halte ich doch für eine besondere Aufgabe des höheren Unterrichts und bin der Meinung, dass man die menschliche Natur nicht verkennt, wenn man Systematik des Denkens als oberste Forderung und höchstes Geistesideal hinstellt. [74])

Für die Bildung des Geistes nach der intellektuellen Seite ist die Bedeutung der Mathematik wohl nicht zu bestreiten. Dass sie dem Gemüte keine Nahrung gebe, dass sie ernüchternd, ausdörrend wirke, dass Einbildungskraft und Schönheitsgefühl aus ihr keine Anregung gewönnen, das ist der „trockenen Wissenschaft der Zahlen“ oft genug zum Vorwurf gemacht worden. Und ein nun schon dahingeschiedener Fachgenosse [75]) hat an keiner anderen Stelle als an der Schwelle des freien Deutschen Hochstifts zu Frankfurt a. M. den Fachgenossen ein Wort des Grossen von Weimar entgegengerufen: „Die Mathematik vermag kein Vorurteil hinwegzuheben, sie kann den Eigensinn nicht lindern, den Parteigeist nicht beschwichtigen, nichts von allem Sittlichen vermag sie.“ [76]) Ein hartes Wort des Dichters, von dem wir freilich wissen, dass er unserer Wissenschaft nicht hold gewesen ist. Und nun mag ja zugegeben werden, dass der mathematische Unterricht allein nicht imstande ist, die Menschen zur Sittlichkeit zu erziehen, — dass er einen Beitrag dazu liefern kann, das ist so gar schwer nicht zu zeigen. [77]) Was die Mathematik als Erziehungsmittel vor allen anderen Lehrgegenständen auszeichnet, ist,

[70]) P. Freyer, Beilage z. Jahresber. der Klosterschule Ilfeld. 1872. 2. Aufl. Bei W. Weber, Berlin. 1889.

[71]) Th. Waitz, a. a. O. S. 403. So auch R. Most, Ueber den Bildungswert der Mathematik. Beilage z. Jahresber. des Realgymnasiums zu Koblenz. 1895. S. 8: „Der reiche und hohe Bildungswert der Mathematik liegt auch darin, dem Schüler in seiner eigenen Entwickelung auf einem abgegrenzten Gebiet zu zeigen, wie Wissenschaft entsteht, sich entfaltet und zu erhabener Höhe steigt, — ihm somit Achtung vor einer und damit vor jeglicher Wissenschaft und vor jedem höheren geistigen Bemühen um Wahrheit einzuflössen.“

[72]) O. Willmann, a. a. O. II. S. 133.

[73]) Max Simon, a. a. O. S. 21: „Der Mensch hat von Natur den Trieb zum Wissen, den Trieb zum Beweisen muss man ihm einpflanzen.“

[74]) Fr. Pietzker, System und Methode im exakt-wissenschaftlichen Unterricht, in: Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. V. S. 48.

[75]) H. Dobriner, s. den Bericht über die dritte Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Wiesbaden (15.—16. Mai 1904), Stettin. Herrcke und Lebeling. S. 129.

[76]) Goethe, Sprüche in Prosa. Ueber Naturwissenschaft. IV. W. W. Stuttgart, Cotta. 1853. III. S. 310.

[77]) Stammer, Ueber den ethischen Wert des mathematischen Unterrichts, in: Ztschr. f. mathem. und naturw. Unt. XXVIII. S. 487 ff. — J. Hermes, Das ethische Element im mathematischen Unterricht. Ebenda. S. 91 ff.

dass sie allein die Gelegenheit zu selbständiger, schaffender Tätigkeit gibt. Während Religion, Geschichte, Sprachen, zum Teil auch die Naturwissenschaften die Lehren, Tatsachen, Regeln, Ergebnisse und Beobachtungen als fertige, gegebene Wahrheiten mitteilen, die zu lernen und im Gedächtnisse zu behalten sind, kann im mathematischen Unterricht der Schüler durch eigenes Nachdenken die Schlüsse finden, die zur Erkenntnis der Wahrheit führen, er erhält eine Ahnung, welches Mittel er in seiner eigenen Verstandestätigkeit besitzt. Und wenn er nun erfahren hat, dass er imstande ist, mit eigener Kraft die sich ihm entgegenstellenden Schwierigkeiten zu überwinden und dass ausdauernde geistige Anstrengung zum Ziele führt, so wird er auch später vor den Aufgaben nicht zurückschrecken, die ihm das Leben auf anderen Gebieten stellt, er wird den Mut haben, den Kampf mit scheinbar unüberwindlichen Hindernissen aufzunehmen und die Kraft besitzen, sie zu besiegen, und nicht ruhen, bis ihm dies gelungen ist.[78])

Und die „trockene Wissenschaft?" Kroneckers Wort: „Wir bilden auch Gedichte, und da nur die Wahrheit schön ist, so beweisen wir sie auch",[79]) können wir doch vielleicht schon hier und da auch dem Verständnis unserer Schüler nahe bringen, sei es, dass wir ihre Aufmerksamkeit auf die symmetrische Architektonik einer Formel oder eines Systems von Formeln, oder auf die eines Sätzezusammenhanges lenken, sei es, dass wir bei einem Beweise oder bei der Herleitung einer Formel darauf hinweisen, wie in der Herbeischaffung der Beweismittel ein frei bewegliches geistiges Element, die Phantasie, nicht anders wie in der künstlerischen Schöpfung, tätig sei. Die knappe, klare, übersichtliche Form des Beweises, die Uebersichtlichkeit einer Formel, die Möglichkeit, z. B. aus der Gleichung der Kegelschnitte, oder aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades Gestalt und Arten der Kurven durch Diskussion zu finden, Gestaltenzusammenhänge, wie die regelmässigen Polyeder sie bieten, der Nachweis ihrer beschränkten Anzahl aus dem Eulerschen Satze, die Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks, den Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise und der Seitenabschnitte, das alles kann eine Quelle nicht nur logischer Befriedigung, sondern auch ästhetischer Freude sein.[80]) Ein Unterricht, wie einst Carl Schellbach[81]) ihn erteilte, — er, dem Ludwig Wiese ironisch halb und doch zugleich als Ehrentitel den Beinamen des „liebenswürdigen Enthusiasten" gegeben hat[82]), — war gewiss imstande, neben einem tüchtigen Wissen, einem gewandten Können, einer klaren Verstandesbildung auch diese Seite des Unterrichtserfolges aufzuweisen, seinen Schülern mochte wohl die Ahnung nahe treten, was Plato meinte mit seinem Wort: *ὁ θεὸς γεωμετρεῖ*, — dass mathematisches Denken als eine wahrhaft göttliche Tätigkeit des menschlichen Geistes erscheint. In einer solchen Ahnung aber wirken intellektuelle und ästhetische, ethische und religiöse Affekte zusammen zu einer tiefen und nachhaltigen Anregung der Seele. Wir streben alle nach diesem Erfolge, — und wir erreichen ihn nach den uns zugeteilten Kräften.

So wäre ich wohl am Ende, meine Herren, und möchte zum Schluss nur zweierlei noch hervorheben. In der zweiten Hälfte meines Vortrages habe ich mich bemüht, möglichst viel herbeizutragen, was die grosse Bedeutung des mathematischen Unterrichts für die allgemeine Geistesbildung erweisen könnte. Aber schon durch die Anlage meines Vortrages habe ich angedeutet, dass diese Seite mir nicht ganz so hoch steht, wie häufig betont wird, dass mathematisches Wissen mir als Ziel des Unterrichts ebenso wichtig ist. Mich mit einer Autorität wie Otto Willmann in diesem Punkte in Uebereinstimmung zu zeigen, möchte ich mir dabei nicht versagen. „Die Mathematik", sagt dieser hier doch gewiss kompetente Denker, „empfiehlt sich ohne Frage durch die psychischen Wirkungen, welche die Beschäftigung mit ihr hervorruft; sie gibt Exaktheit, Scharfsinn, Findigkeit, übt im logischen Denken, weckt den spekulativen Sinn, gibt eine Vorstellung eines architektonischen Ganzen von Wahrheiten; allein, wenn dieses Ganze von Wahrheiten nicht im Ganzen der Wahrheit eine so bedeutsame Stelle einnähme, der mathematische Erkenntnisinhalt nicht eine solche Bedeutung für unseren ganzen Erkenntniskreis hätte, so würden jene formalen Vorzüge noch kein bestimmender Grund für mathematische Bildungsstudien sein.[83]) Bildung

78) M. Simon, a. a. O. S. 21: „Die Stählung des Willens, die Gewöhnung auf geistigen Gebieten sich selbst zu vertrauen, die Strenge gegen eigene und fremde Behauptungen sind wesentlich Frucht des mathematischen Unterrichts, dem in der Erziehung der Jugend zur geistigen Mündigkeit eine führende Rolle zufällt."

79) Vergl. C. Schellbach, Ueber die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. Berlin, Reimer. 1887. S. 31. — M. Simon, a. a. O. S. 24. — Die Schriften von G. Hauck, die Stellung der Mathematik zur Kunst und Kunstwissenschaft. Berlin 1880, und E. Lampe, Rede zur Geburtstagsfeier Sr. Maj. d. Kaisers 1893 sind mir nicht zu Gesicht gekommen.

80) Vergl. R. Most, a. a. O. S. 8: „Wenn etwa aus den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der Reihenlehre die Gesetze der ebenen Trigonometrie enthüllt waren, dann habe ich stets ein ästhetisches Wohlgefühl bei den Schülern beobachten können."

81) S. a. a. O. S. 18—21. Vergl auch F. Müller, C. H. Schellbach, Gedächtnisrede. Berlin. G. Reimer. 1893.

82) L. Wiese, Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen. Berlin, Wiegandt und Grieben. 1886. II. S. 219.

83) O. Willmann, a. a. O. II. S. 59.

soll den Geist des Lernenden durch Wissenschaft wachsen, aber auch zur Wissenschaft hinaufwachsen machen. Mit totem Wissen und mechanischem Können ist ihr nicht geholfen, aber ebensowenig mit einer unbestimmten Regsamkeit, mit der leeren Form möglicher Betätigung. Was sie verlangt, ist erfüllte innere Form und diese kommt auf den verinnerlichten Inhalt heraus.

Was der griechische Weise über seines Hörsaals Pforte schrieb: „*μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην*“, es steht auch heute über allen Türen, die zu wissenschaftlicher Forschung den Zugang eröffnen. Mathematik ihrem Inhalt nach, Mathematik als Prüfstein der Geister, ist trotz gelegentlicher Anzweifelung[84]) eine unerschütterliche Säule der Bildung unserer Tage. Des sind wir stolz und froh, und wir wissen, dass wir dazu ein Recht haben. Denn — ohne unbescheiden zu sein — wir haben alle Stunden erlebt, in denen unserer Schüler Augen glänzten und an unseren Lippen hingen, in denen ihrem Ohr kein Wort unserer Rede verloren ging, in denen uns des Lehrens Lust Geist und Gemüt erhoben hat. Das sind ja die Stunden, in denen wir zum Bewusstsein kamen, dass wir nicht unnütz arbeiten, dass wir etwas Wertvolles an unserer Jugend schaffen, die Stunden, die uns in den anderen trösten, wo wir — über der infamen Rangen Faulheit und Dummheit seufzen und stöhnen.

Goethe sagt einmal: „Plato will keinen *ἀγεωμέτρητον* in seiner Schule leiden; wäre ich im Stande eine zu machen, ich litte keinen, der sich nicht irgend ein Naturstudium ernst und eigentlich gewählt.“ [85]) Zwar hat er sich gegen den Vorwurf gewahrt, als sei er „ein Widersacher, ein Feind der Mathematik überhaupt, die doch niemand höher schätzen könne als er, da sie gerade das leiste, was ihm zu bewirken völlig versagt worden“ [86]); und es ist eine feine Bemerkung, dass die Einseitigkeit des damaligen Unterrichts vielleicht an diesem Versagen schuld gewesen sei, dass seinem „gegenständlichen Denken“ ein auf Anschauung beruhender Unterricht in der Geometrie vielleicht mehr zugesagt hätte. [87]) Aber wir können auf Platos Forderung bestehen und Goethes Wunsch als berechtigt bezeichnen. Denn der Einseitigkeit wollen wir doch nicht verfallen, dass wir nun nur Mathematik, auch nur Mathematik in erster Linie für unsere Schüler forderten. „Mathematik ist nur eines der Elemente der Bildung und zwar weder das höchste noch das unentbehrlichste; sie bedarf der Ergänzung durch Philologie, Philosophie und Religionslehre, und ebenso der Verknüpfung ihrer Materien mit anderen Wissensstoffen.“ [88])

(Der Bericht über die an den Vortrag anschliessende Diskussion folgt in der nächsten Nummer).

Weitere Untersuchungen über Näherungsformeln zur Berechnung der Ludolfschen Zahl.

Von W. Koch (Dortmund).

(Fortsetzung.)

II. Das Verhältnis zweier sukzessiver Flächen- oder Umfangsdifferenzen.

Die Ungleichung 20)

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} < \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{1}{4} < \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'}$$

enthält die vier charakteristischen Verhältnisse je zweier sukzessiver Flächen- oder Umfangsdifferenzen. In einer jeden Theorie der auf das Archimedische Annäherungsprinzip gegründeten Kreismessung werden diese Verhältnisse notwendigerweise eine grosse Rolle spielen, da erst sie die rechte Vorstellung darüber schaffen, mit welchen Schritten man sich dem Ziele nähert, d. h. in welchem Masse die zur Kreismessung benutzten Reihen der Vielecksgrössen konvergieren. Es erscheint deshalb lohnend, die obige Ungleichung, die bisher rein geometrisch abgeleitet wurde, auch arithmetisch abzuleiten.

Die zuerst abgeleitete Formel $\frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{1}{4}$ lässt sich in Form eines Lehrsatzes folgendermassen aussprechen.

Lehrsatz: Ist eine Grösse in zwei beliebige Teile geteilt und wird einer dieser Teile wiederum nach demselben Verhältnis geteilt, so ist der mittlere der drei so entstandenen Teile kleiner als ein Viertel der Grösse.

Arithmetisch gestaltet sich der Beweis dieses Lehrsatzes noch bequemer als geometrisch. Für die beiden beliebigen Teile der Grösse 1 kann man nämlich stets eine Grösse $x < 1$ so bestimmen, dass sie durch die Ausdrücke $\frac{1+x}{2}$ und $\frac{1-x}{2}$ dargestellt werden. Wird nun einer dieser Teile nach demselben Verhältnis geteilt, so heisst der mittlere der drei Teile in jedem Falle

$$\frac{1+x}{2} \cdot \frac{1-x}{2} = \frac{1-x^2}{4},$$

ist also $< \frac{1}{4}$.

Vollzieht man dagegen die zweite Teilung nicht nach demselben, sondern nach einem grösseren oder

---

[84]) K. Gneisse, Ueber den Wert der mathematischen und sprachlichen Aufgaben für die Ausbildung des Geistes. Berlin, Weidmann. 1898.

[85]) Goethe, Italienische Reise II. — W. W. herausgegeben von K. Heinemann. Leipzig und Wien. Bibl. Institut. XV. S. 85 (5. Oktober 1787).

[86]) Goethe, Ueber Mathematik und deren Missbrauch. W. W. Stuttgart und Augsburg. Cotta 1858. XL. S. 468.

[87]) C. Hildebrandt, a. a. O. S. 4.

[88]) O. Willmann, a. a. O. II. S. 137, vergl. auch Fr. Reidt, a. a. O. S. 28: „Wie der Lehrer der Mathematik volle Anerkennung und Würdigung des Wertes seines Unterrichtsfaches von Seiten der anderen Kollegen erwarten und verlangen soll, ebenso muss er bereit sein, auch die eigenartige Bedeutung der anderen Disziplinen von seiner Seite zu würdigen und die Mathematik nur als ein Glied des grösseren Ganzen zu betrachten, welches der Ergänzung durch die anderen bedarf und seine volle Kraft nur in friedlichem Wetteifer und durch gegenseitige Unterstützung zu entfalten vermag.“

kleineren Verhältnis, so gelangt man zu folgenden zwei Zusätzen.

1. Zusatz: Teilt man den kleineren Teil nach einem Verhältnis, dessen Wert der Einheit näher, oder auch den grösseren Teil nach einem Verhältnis, dessen Wert der Einheit ferner liegt, so wird der mittlere Teil erst recht kleiner als ein Viertel der Grösse.

Denn da der mittlere Teil bei dieser Teilung noch weiter verkleinert wird, so versteht sich dieser Zusatz von selbst.

2. Zusatz. Teilt man dagegen den kleineren Teil nach einem Verhältnis, dessen Wert der Einheit ferner, oder auch den grösseren Teil nach einem Verhältnis, dessen Wert der Einheit näher liegt, so kann der mittlere Teil ebensowohl kleiner als grösser sein als ein Viertel der gegebenen Grösse.

Denn bei dieser Teilung kann der mittlere Teil durch Wahl des Verhältnisses über den Wert $\frac{1}{4}$ hinaus beliebig vergrössert werden.

Die Strecke $F_i'' F_u'$ wird nun aus $F_i' F_u$ dadurch gewonnen, dass durch die Teilung nach ϱ zuerst der Punkt F_u', alsdann durch die Teilung des kleineren Abschnitts $F_i' F_u'$ nach dem der Einheit näher liegenden Verhältnis ϱ' der Punkt F_i'' bestimmt wird. Also ist

$$\frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{1}{4}.$$

Ferner ist

$$F_u' F_u = F_i' F_u \cdot \frac{1+x}{2},$$

also auch $$F_u'' F_u' = F_i'' F_u' \cdot \frac{1+x'}{2},$$

folglich durch Division:

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} = \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} \cdot \frac{1+x'}{1+x}.$$

Da aber $x' < x$, also der letzte Faktor < 1 ist, so ergibt sich

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} < \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{1}{4}.$$

Schliesslich haben wir noch

$$F_i F_i' = F_i F_u \cdot \frac{1-x}{2},$$

also auch $$F_i' F_i'' = F_i' F_u' \cdot \frac{1-x'}{2},$$

folglich durch Division

$$\frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'} = \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} \cdot \frac{1-x'}{1-x} = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1-x'}{2}.$$

Wir erkennen zwar, dass $\frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'} > \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u}$ ist, aber nicht, ob jenes Verhältnis $\lesseqgtr \frac{1}{4}$ ist. Es liegt hier der Fall des Zusatzes 2 vor, also kommt es hier auf die Beziehung zwischen x' und x an. Diese aber hängt von der Beziehung zwischen ϱ' und ϱ ab, die durch die Formel (29, S. 108)

$$\varrho'^2 = \frac{1+\varrho}{2}$$

gegeben ist. Da aber

$$\varrho = \frac{1-x}{1+x} \text{ und } \varrho' = \frac{1-x'}{1+x'}$$

ist, so haben wir

$$\left(\frac{1-x'}{1+x'}\right)^2 = \frac{1}{1+x} \text{ oder } 1+x = \left(\frac{1+x'}{1-x'}\right)^2.$$

Also ist $$\frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+x')^2}{1-x'} > \frac{1}{4},$$

denn im letzten Bruche ist der Zähler grösser, der Nenner aber kleiner als 1. Dadurch ist die Ungleichung 20), die uns die beiden unteren Grenzen für π liefert, bewiesen.

Man erkennt, dass man auch von vornherein die Grössen ϱ und ϱ' an Stelle von x und x' benutzen und dadurch für die vier Verhältnisse explizite Ausdrücke in den ϱ ableiten kann. Da man alsdann

$$\varrho = \cos\alpha = \frac{f_i}{f_i'} = \frac{f_i'}{f_u}$$

setzen kann, so erhält man auch die vier Verhältnisse als trigonometrische Funktionen oder als Funktionen der Vielecksgrössen. Da der Gang der Rechnung der obigen Entwickelung genau entspricht, so sollen hier nur die Ergebnisse angegeben werden. Man erhält

31)

$$\text{a)}\quad \frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} = \frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} = \frac{\varrho}{4\varrho'^4} = \frac{\cos\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_u'^2}{f_u \cdot f_i'}$$

$$\text{b)}\quad \frac{f_u' - f_i''}{f_u - f_i'} = \frac{\varrho}{\varrho'^2} \cdot \frac{1}{4\varrho''^2} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot 4\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{4} \frac{f_u' \cdot f_u''}{f_u \cdot f_i''}$$

$$\text{c)}\quad \frac{f_u' - f_u''}{f_u - f_u'} = \frac{\varrho}{4\varrho''^4} = \frac{\cos\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_u''^2}{f_u f_u'}$$

$$\text{d)}\quad \frac{f_i'' - f_i'}{f_i' - f_i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\varrho'} \cdot \frac{1}{\varrho''^2} = \frac{1}{4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f_u''}{f_i'}.$$

Bedenkt man nun, dass $4\varrho < (1+\varrho)^2$, weil das geometrische Mittel $\sqrt{\varrho}$ der Grössen 1 und ϱ kleiner als ihr arithmetisches Mittel $\frac{1+\varrho}{2}$ ist, und dass demnach $\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} < \frac{1}{4}$ sein muss, so erkennt man durch Vergleichung der ϱ-Ausdrücke in den vier Gleichungen ohne weiteres die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{\varrho}{4\varrho''^4} < \frac{\varrho}{4\varrho'^2 \cdot \varrho''^2} < \frac{\varrho}{4\varrho'^2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{4\varrho' \cdot \varrho''^2},$$

aus der man die Ungleichung

$$\text{20 a)}\quad \frac{f_u' - f_u''}{f_u - f_u'} < \frac{f_u' - f_i''}{f_u - f_i'} < \frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} < \frac{1}{4} < \frac{f_i'' - f_i'}{f_i' - f_i}$$

erhält, die mit 20) identisch ist.

Man kann jedoch alle geometrischen Beziehungen zu der Fig. 1 fallen lassen und die Gleichungen 31) rein arithmetisch ableiten aus den zur Vielecksberechnung dienenden Formeln (S. 108 F. 29, 30, 31):

$$\frac{f_u}{f_i'} = \frac{f_i'}{f_i} = \frac{1}{\varrho} \text{ und } \varrho'^2 = \frac{1+\varrho}{2}.$$

Die Rechnung gestaltet sich bequem, indem man nur den Satz von der korrespondierenden Subtraktion der Glieder einer Proportion wiederholt zur Anwendung zu bringen braucht. Da sich aber dieser Aufsatz anstatt auf jene Formeln vielmehr auf die aus ihnen leicht ableitbaren Grundformeln 27) stützt, so ziehe ich im Interesse der Einheitlichkeit dieser Arbeit die Ableitung aus den Grundformeln vor, wenn sie auch um ein Geringes weniger bequem ist.

Aus der ersten Grundformel 27) folgt die „Normalform“ (s. 27 a)

$$\frac{f_u}{f_i'} = \frac{f_i'}{f_i};$$

hieraus durch korrespondierende Subtraktion

$$\text{32)}\quad \frac{f_u - f_i'}{f_i' - f_i} = \frac{f_u}{f_i'}$$

und hieraus wiederum durch korrespondierende Addition und unter Berücksichtigung der zweiten Grundformel

33) $$\frac{f_u - f_i'}{f_u - f_i} = \frac{f_u}{f_i' + f_u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f_u'}{f_i'}.$$

Auf dieselbe Art folgt aus der zweiten Grundformel (Normalform 27a)

34) $$\frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i'} = \frac{f_i'}{f_i' + f_u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f_u'}{f_u}.$$

Durch Multiplikation von 33) und 34) erhält man

35) $$\frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} = \frac{1}{4}\cdot\frac{f_u'^2}{f_u\cdot f_i'}.$$

Das ist die Formel 31a); da f_u' das harmonische Mittel von f_u und f_i' nach der zweiten Grundformel, das harmonische Mittel aber immer kleiner als das geometrische ist, weil offenbar

$$\sqrt{ab}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)} < \sqrt{ab}$$

ist, so ist der Faktor

$$\frac{f_u'^2}{f_u\cdot f_i'} < 1 \text{ und } \frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} < \frac{1}{4}.$$

Multipliziert man die aus 33) durch Sukzession hervorgehende Gleichung mit 34), so folgt

36) $$\frac{f_u' - f_i''}{f_u - f_i'} = \frac{1}{4}\,\frac{f_u'\cdot f_u''}{f_u\cdot f_i''}.$$

Das ist die Gleichung 31b).

Vergleicht man die rechten Seiten der Gleichungen 35) und 36) und beachtet, dass $\frac{f_u''}{f_i''} < \frac{f_u'}{f_i'}$ ist, weil im ersten Bruche der Zähler kleiner, der Nenner aber grösser ist als im zweiten Bruche, so hat man

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{f_u'}{f_u}\cdot\frac{f_u''}{f_i''} < \frac{1}{4}\cdot\frac{f_u'}{f_u}\cdot\frac{f_u'}{f_i'}$$

und demnach

$$\frac{f_u' - f_i''}{f_u - f_i'} < \frac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} < \frac{1}{4}.$$

Dividiert man 32) durch die aus ihr mittels Sukzession abgeleitete Gleichung und multipliziert die so entstandene Gleichung mit 36), so folgt

$$\frac{f_i'' - f_i'}{f_i' - f_i} = \frac{1}{4}\cdot\frac{f_u''}{f_i'} > \frac{1}{4}.$$

Dies ist die Gleichung 31d). Auch die Gleichung 31c) erhält man leicht, indem man die aus der Grundformel 27a) durch Sukzession hervorgehende Gleichung durch 27a) selber dividiert und die so entstandene Gleichung mit der aus 35) durch Sukzession hervorgehenden multipliziert. Es ergibt sich

$$\frac{f_u' - f_u''}{f_u - f_u'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{f_u''^2}{f_u\cdot f_u'}$$

welcher Ausdruck kleiner ist als 36), da hier der Zähler kleiner, der Nenner aber grösser ist als dort. Damit ist die Ungleichung 20a) wiederum bewiesen.

Alle diese Ableitungen der Ungleichung 20a), aus der die gesuchten unteren Grenzen g_i und g_u hervorgehen, sind aber nicht völlig konform demjenigen Verfahren, das ich in der früheren Arbeit S. 106 und 107 eingeschlagen habe, um aus den Grundformeln auf arithmetischem Wege diejenigen Ungleichungen (a. a. O. F. 9, 10, 19, 20) abzuleiten, die unmittelbar zu den oberen Grenzen g und g_1 führten. Vergegenwärtigen wir uns in Kürze das dort eingeschlagene Verfahren.

Aus der Reihe der Vielecksgrössen

37a) $f_i \quad f_u \quad f_i' \quad f_u' \quad f_i'' \quad f_u'' \ldots,$

also durch doppelseitige Annäherung, sollte die Kreisgrösse f hergeleitet werden, indem sie als lineare Funktion je zweier Folgeglieder annähernd dargestellt wurde. Zu diesem Zwecke wurden zunächst f_i' und f_u' als Funktionen der beiden vorangehenden Glieder ausgedrückt. So gewannen wir die beiden Grundformeln, und zwar sowohl geometrisch (S. 106 r.) unmittelbar aus der Figur als auch arithmetisch (S. 108 l.) durch Elimination von ϱ und ϱ' aus den zur Kreisberechnung dienenden ϱ-Formeln (S. 108, F. 29, 30, 31). Alsdann wurden aus den Grundformeln lediglich durch Anwendung der Formel

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

die Ungleichungen

$$f_i' < \frac{f_i + f_u}{2} \text{ und } f_u' < \frac{f_u + f_i'}{2}$$

abgeleitet, welche ein jedes Glied der obigen Reihe annähernd als lineare Funktion der beiden vorangehenden Glieder darstellten und dadurch auch die gesuchten oberen Grenzen für f lieferten.

In genau der nämlichen Weise lassen sich aber auch die beiden unteren Grenzen gewinnen. Wir gelangen zu ihnen, wie bekannt, indem wir f durch einseitige Annäherung, d. h. aus den Reihen

37b) $f_i \quad f_i' \quad f_i'' \quad f_i''' \ldots$

und 37c) $f_u \quad f_u' \quad f_u'' \quad f_u''' \ldots,$

berechnen. Zu diesem Zwecke ist zunächst ein jedes Glied dieser Reihe als Funktion der beiden vorangehenden Glieder, d. h. f_i'' als Funktion von f_i und f_i' und f_u'' als Funktion von f_u und f_u' darzustellen. Die gesuchten Gleichungen sollen wiederum zuerst geometrisch aus der Figur, alsdann arithmetisch aus den ϱ-Gleichungen hergeleitet werden.

Es sei der Schnittpunkt von OA' und AF_i'' mit J bezeichnet und $JK \perp OF_u$ gezogen, dann gehen durch die Punkte A' und J die zwei Paare von Parallelen $A'F_u''$ und JF_i'', $A'F_i''$ und JK, also ist

$$\frac{OA'}{OJ} = \frac{OF_u''}{OF_i''} = \frac{OF_i''}{OK}.$$

Da aber nach der ersten Grundformel

$$OF_i'''^2 = OF_i''\cdot OF_u''$$

ist, so folgt nach Division durch $OF_i''^2$

$$\frac{OF_i'''^2}{OF_i''^2} = \frac{OF_u''}{OF_i''} = \frac{OF_i''}{OK} = \frac{OF_i''}{\frac{1}{2}(OF_i' + OF_i'')}.$$

Also haben wir

$$\left(\frac{f_i''}{f_i'}\right)^2 = \frac{f_i'}{\frac{1}{2}(f_i + f_i')}$$

oder 38) $$f_i'' = f_i'\cdot\sqrt{\frac{2f_i'}{f_i + f_i'}}.$$

Ziemlich schwer gelingt die Auffindung der geometrischen Ableitung der Formel für f_u''.

Die auf AF_u' in A' errichtete Senkrechte schneide AF_u im Punkte S, dann sind die rechtwinkligen Dreiecke OAF_u' und $SA'F_u'$ ähnlich, also verhalten sich die Hypotenusenabschnitte des einen Dreiecks wie diejenigen des anderen; und da ausserdem die Strecke $F_i'F_u$ durch die Punkte F_u' und O harmonisch geteilt wird, so hat man

$$\frac{F_i''F_u'}{SF_i''} = \frac{F_i'F_u'}{OF_i'} = \frac{F_u'F_u}{OF_u}$$

und hieraus durch korrespondierende Addition

$$\frac{SF_u'}{SF_i''} = \frac{OF_u + F_u'F_u}{OF_u}.$$

Da $\sphericalangle OA'S = \frac{a}{4}$, so ist
$$OS = SA' = SF_u'',$$
d. h. S der Mittelpunkt der Strecke OF_u'', deren Endpunkte die Strecke $F_i'' F_u'$ harmonisch teilen. Demnach besteht die bekannte Relation
$$SF_u''^2 = SF_i'' \cdot SF_u',$$
aus der man erhält
$$\frac{SF_u'^2}{SF_u''^2} = \frac{SF_u'}{SF_i''} = \frac{OF_u + F_u'F_u}{OF_u}.$$

Die weitere Ableitung gestaltet sich leicht. Man erhält, da SF_u'' die Hälfte von OF_u'' und demnach das arithmetische Mittel von OF_u' und $F_u''F_u'$ ist,
$$\frac{SF_u'^2}{SF_u''^2} = \left(\frac{2SF_u'}{2SF_u''}\right)^2 = \left(\frac{OF_u' + F_u''F_u'}{OF_u''}\right)^2 = \frac{OF_u + F_u'F_u}{OF_u}$$
und hieraus
$$\left(\frac{2OF_u' - OF_u''}{OF_u''}\right)^2 = \frac{2OF_u - OF_u'}{OF_u}.$$
Demnach hat man
$$\left(\frac{2f_u' - f_u''}{f_u''}\right)^2 = \frac{2f_u - f_u'}{f_u}$$
oder
$$\left(2 \cdot \frac{f_u'}{f_u''} - 1\right)^2 = 2 - \frac{f_u'}{f_u}$$
und hieraus

39) $$\frac{f_u'}{f_u''} = \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{2 - \frac{f_u'}{f_u}}\right\}.$$

Aus den zuerst von Vieta gegebenen zur Kreisberechnung vorzüglich geeigneten Formeln
$$\varrho = \frac{f_i}{f_i'}, \quad \varrho'^2 = \frac{1+\varrho}{2}$$
gelingt die arithmetische Ableitung der Formel 38) unmittelbar, wenn man noch $\varrho' = \frac{f_i'}{f_i''}$ hinzunimmt und nunmehr ϱ und ϱ' eliminiert. Ebenso lässt sich aber zur Berechnung der umbeschriebenen Vielecke (vergl. S. 108 F. 29 und 33) die Formel
$$\frac{\varrho'^2}{\varrho} = \frac{f_u}{f_u'}$$
benutzen und aus dieser in ähnlicher Art die Formel 39) herleiten. Offenbar sind die Formeln 38) und 39) konform mit gewissen trigonometrischen Formeln, welche $\sin\frac{a}{4}$ als Funktion von $\sin\frac{a}{2}$ und $\sin a$ bezw. $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$ als Funktion von $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ und $\operatorname{tg} a$ darstellen.

Im Beginn dieser Arbeit ist gezeigt worden, wie die Reihen 37 b) und 37 c) aus 37 a) hervorgehen. Demgemäss kann man natürlich die neu gewonnenen Formeln auch aus den Grundformeln herleiten. Aus der ersten Grundformel ergibt sich nämlich unter Berücksichtigung der zweiten
$$\frac{f_i''^2}{f_i'^2} = \frac{f_i' f_u'}{f_i f_u} = \frac{f_i'}{f_i} \cdot \frac{f_u'}{f_u} = \frac{f_i'}{f_i} \cdot \frac{2 f_i'}{f_i' + f_u} = \frac{2 f_i'^2}{f_i f_i' + f_i f_u} =$$
$$\frac{2 f_i'^2}{f_i f_i' + f_i'^2} = \frac{2 f_i'}{f_i + f_i'}$$
und hieraus sofort die Formel 38).

Aus der zweiten Grundformel
$$\frac{1}{f_u'} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_i'}\right\}$$
leiten wir ab
$$\frac{f_u}{f_i'} = 2 \cdot \frac{f_u}{f_u'} - 1 \text{ und } \frac{f_u'}{f_i'} = 2 - \frac{f_u'}{f_u}.$$
Nun ist nach der ersten Grundformel
$$\left(\frac{f_u'}{f_i''}\right)^2 = \frac{f_u'^2}{f_i' f_u'} = \frac{f_u'}{f_i'},$$
folglich ergibt sich
$$\left(2 \cdot \frac{f_u'}{f_u''} - 1\right)^2 = 2 - \frac{f_u'}{f_u}$$
und hieraus die Formel 39).

Beiläufig bemerkt, erhält man auch aus den Gleichungen 31 c) und 31 d) die Formeln 39) und 38). Aus 31 c) erhält man nämlich eine gemischt-quadratische Gleichung für f_u'', aus 31 d), welche Gleichung vorher in der Form
$$\frac{f_i'' - f_i'}{f_i' - f_i} = \frac{f_i'^2}{(f_i'' + f_i')(f_i' + f_i)}$$
zu schreiben ist, eine rein-quadratische Gleichung für f_i''.

Um nunmehr die Grössen f_i'' und f_u'' annähernd als lineare Funktionen der beiden Vorglieder darzustellen, benutzen wir ausser der vorhin angegebenen Ungleichung
$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$
noch die Ungleichung
$$\frac{a}{a-\delta} > \frac{a+\delta}{a} \text{ oder } \frac{a}{a+\delta} > \frac{a-\delta}{a},$$
welche aus $a^2 > a^2 - \delta^2$ unmittelbar durch Division folgt.

Ersetzen wir in der Formel 38) oder
$$\frac{f_i''}{f_i'} = \frac{f_i'}{\sqrt{f_i' \cdot \frac{f_i' + f_i}{2}}}$$
im Nenner das geometrische Mittel der Grössen f_i' und $\frac{f_i' + f_i}{2}$ durch das grössere arithmetische, so ergibt sich an ihrer Stelle die Ungleichung
$$\frac{f_i''}{f_i'} > \frac{f_i'}{f_i' - \frac{f_i' - f_i}{4}} > \frac{f_i' + \frac{f_i' - f_i}{4}}{f_i'},$$
also
$$f_i'' > f_i' + \frac{f_i' - f_i}{4}.$$

In der Formel 39) stellt der Wurzelausdruck $\sqrt{2 - \frac{f_u'}{f_u}}$ das geometrische Mittel der beiden Grössen 1 und $2 - \frac{f_u'}{f_u}$ dar, ersetzen wir dieses wiederum durch das arithmetische, so folgt
$$\frac{f_u'}{f_u''} < 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{f_u'}{f_u}\right);$$
also ist umgekehrt
$$\frac{f_u''}{f_u'} > \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{f_u'}{f_u}\right)} > 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{f_u'}{f_u}\right).$$
Nun ist aber
$$f_u > f_u',$$
also
$$\frac{f_u - f_u'}{f_u} < \frac{f_u - f_u'}{f_u'}$$
oder
$$1 - \frac{f_u'}{f_u} < \frac{f_u}{f_u'} - 1.$$
Folglich
$$\frac{f_u''}{f_u'} > 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{f_u}{f_u'} - 1\right)$$
oder
$$f_u'' > f_u' - \frac{f_u - f_u'}{4}.$$

Somit haben wir wieder die beiden Ungleichungen 22), die zur Ableitung der unteren Grenzen g_i und g_u dienen.

Zum Schluss dieses Abschnittes noch einige Worte über die etwaige Verwendung der durch diese Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse im Schulunterricht. Herr Böttcher-Leipzig empfiehlt die Kreismessung dadurch anschaulich zu machen, dass die Vielecksumfänge oder Inhalte gleichzeitig mit ihrer Berechnung auch durch die besprochene Konstruktion geometrisch dargestellt werden. Ja, es haben sich sogar Stimmen erhoben, dass man es bei dieser geometrischen Darstellung des Kreisumfangs und Inhalts bewenden lassen und auf die Rechnung ganz verzichten soll. Gegen diese Ansicht wenden sich freilich Herr Böttcher selbst und Herr Geheimrat Klein (s. S. 115 d. vor. Jahrg.). Von der Besprechung jener Konstruktion bis zur Ableitung unserer oberen Grenze für π ist jedoch nur ein kleiner Schritt. Die einfache Anwendung des Satzes von der Halbierenden eines Dreieckswinkels und die Ausführung der Summation führen, wie ich in meinem ersten Aufsatze über diesen Gegenstand gezeigt habe, sogleich zum Ziel. Auch erkennt der Schüler sogleich, dass eine obere Grenze gewonnen wird. Hiermit aber wird man sich wohl in der Obertertia oder Untersekunda am besten begnügen. Man müsste sonst unverhältnismässig viel Zeit auf die Abteilung der unteren Grenze verwenden. Wollte man trotzdem die untere Grenze für π benutzen, so würde man wohl am besten tun, auf einen Beweis der Formel

$$\frac{p_i'' - p_i'}{p_i' - p_i} > \frac{1}{4}$$

ganz zu verzichten und durch eine einfache Probe, indem man drei sukzessive Werte $p_i\ p_i'\ p_i''$, am besten wohl die drei zuerst berechneten Umfangswerte, einsetzt, ihre Richtigkeit zu bestätigen, worauf die Summation wie vorhin vollzogen wird. Sollte sich jedoch einmal in den oberen Klassen Zeit zur Behandlung der Kreismessung finden, so könnte man diese wohl am besten an die Trigonometrie anschliessen und die obige Formel etwa folgendermassen ableiten:

$$\frac{p_i'' - p_i'}{p_i' - p_i} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{4} - 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha} = 2\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$2\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{8}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}} = 2\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{8}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}} =$$

$$\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{8}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}} > \frac{1}{4}.$$

Man erhält demnach eine von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 360^0$ stetig wachsende Funktion mit dem Anfangswert $\frac{1}{4}$ und dem Endwert ∞.

Desgleichen kann man ableiten:

$$\frac{p_i' - p_i}{p_u - p_u'} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\cos\alpha)} =$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}} < \frac{1}{2},$$

$$\text{da } \cos\alpha < \cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\alpha}{4} \text{ ist.}$$

Durch Summation ohne Zuziehung irgend einer geometrischen Darstellung ergeben sich dann die beiden Näherungsformeln.

Die obige Bemerkung über die Prüfung des ersten der beiden behandelten Verhältnisse mittels der drei zuerst berechneten Vielecksumfänge gibt mir noch Anlass zur Erörterung über die Frage, welches das Vieleck geringster Eckenzahl ist, mit dem die Reihe der Vielecksumfänge begonnen werden kann. In den Schulbüchern wird stets das umbeschriebene Sechs- oder Viereck gewählt, offenbar aus dem Grunde, weil eine der darin auftretenden Vielecksgrössen rational ist. Jedoch genau so wie aus dem Achteck durch Verbindung der abwechselnden Ecken das Viereck hervorgeht, erhält man aus letzterem das Zweieck als ein wohldefiniertes regelmässiges Vieleck. Bei diesem sind sogar alle Grössen rational, nämlich der Umfang gleich dem vierfachen Radius, der Inhalt und der Radius ϱ von der ersten Ordnung unendlich klein. Ebenso erhält man aus dem umbeschriebenen Viereck („Vierseit"), indem man abwechselnde Tangenten verschwinden lässt, das aus zwei parallelen Tangenten gebildete „Zweiseit", in dem Umfang, Inhalt und Radius R von der ersten Ordnung unendlich gross sind. Zweieck und Zweiseit sind stets an und für sich regelmässig. Beide teilen den zugehörigen Kreis in zwei Hälften. Für diese Halbierung aber gebraucht man einen Anfangspunkt bezw. eine Anfangstangente, von dem bezw. der ausgehend man durch fortgesetzte Halbierung die beiden Reihen der 2^n-Ecke erhält. Es stellt daher der Anfangspunkt der Teilung das „Eineck", die Anfangstangente das „Einseit" dar. Beide sind von dem Radius r unabhängig, gehören daher zweifach unendlich vielen Kreisen gleichzeitig an. Beim Eineck ist der Umfang von der ersten, der Inhalt von der zweiten Ordnung unendlich klein, desgl. beim Einseit, das mit einem Kreise von unendlich grossem Radius zusammenfällt, der Umfang von der ersten, der Inhalt von der zweiten Ordnung unendlich gross. Ein Radius ϱ beim Eineck oder ein Radius R beim Einseit ist nicht mehr definierbar. Es sind daher unter den auf die regelmässigen Vielecke sich beziehenden Formeln alle diejenigen, die den Radius ϱ bezw. R enthalten, nicht mehr für das Eineck bezw. Einseit giltig, z. B. die Formel 29) S. 108. Ueberhaupt sind allgemein alle diejenigen Formeln, die ausdrücklich unter der Voraussetzung eines konkaven Zentriwinkels 2α abgeleitet sind, für das Eineck oder Einseit nicht mehr giltig, z. B. die Formeln 4, S. 84. Sobald jedoch diese Beschränkung nicht besteht, sind die Formeln giltig, was u. a. insbesondere für die Formeln

$$\frac{p_i'' - p_i'}{p_i' - p_i} = \frac{1}{4}\cdot\frac{p_u'''}{p_i'} \text{ und } p_i'' = p_i'\sqrt{\frac{2\,p_i'}{p_i + p_i'}}$$

der Fall ist. Beim Eineck ist nunmehr der halbe Zentriwinkel $\alpha = 180^0$, also

$$p_i = 0 \text{ und } p_i' = 4;$$

demnach liefert die letzte Formel $p_i'' = 4\sqrt{2}$, also ergibt sich

$$\frac{p_i'' - p_i'}{p_i' - p_i} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{4 - 0} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414 > \frac{1}{4}.$$

Es lässt sich aus diesem Ergebnis, das, trotzdem der denkbar grösste Zentriwinkel genommen worden ist, nur so wenig von $\frac{1}{4}$ abweicht, dass es noch nicht einmal den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht, ein Rückschluss machen auf die Schärfe der zugehörigen Näherungsformel

$$p < p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3}.$$

(Schluss folgt.)

Neue physikalische Unterrichtsapparate.

Demonstrations-Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle.*)
(Auszug.)

Von E. Grimsehl (Hamburg).

1. Apparat zur Bestimmung der Wellenlänge des Lichts. Der Apparat, welcher in der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht XVII, 135—137 eingehend beschrieben ist, benutzt die Beugungsstreifen, die dadurch entstehen, dass ein durch einen Spalt gehendes Lichtbündel auf einen dem Spalte parallelen dünnen Draht trifft. In dem Apparat sind der beugende Draht und ein in $^1/_{10}$ Millimeter eingeteiltes Okulusmikrometer so angebracht, dass alle drei zur Berechnung der Lichtwellenlänge erforderlichen Grössen, nämlich die Drahtdicke, der Abstand der Beugungsstreifen und die Entfernung des Drahtes vom Okularmikrometer, unmittelbar der Messung zugänglich sind.

2. Einfaches Fernrohrmodell. Auf ein Meterlineal sind einfache, aus Blech gebogene Klemmen verschiebbar so angebracht, dass man in den Klemmen beliebig Konvex- und Konkavlinsen einsetzen und zu beliebigen optischen Instrumenten zusammensetzen kann. Der einfache Apparat ist in erster Linie konstruiert, um den Schülern bei den physikalischen Schülerübungen Gelegenheit zu geben, die Abstandsverhältnisse der einzelnen Linsen zu ihrer Brennweite, sowie die Vergrösserungverhältnisse bei beliebiger Kombination der Linsen selbständig aufzufinden.

3. Einfacher Spektralapparat und Reflexgoniometer. Zwei Flacheisenstäbe sind durch ein Charnier, dessen Achse hohl ist, miteinander verbunden. Auf die Flacheisenstäbe werden, ähnlich wie beim Fernrohrmodell, Klemmen für die Linsen, sowie Spalte und Blenden mit Fadenkreuz aufgesetzt. In die hohle Achse des Charniers kommt ein drehbares, mit einer Teilung versehenes Tischchen zum Aufstellen eines Prismas. Eine am Charnier angebrachte doppelte gelenkige Verbindung, welche mit einem am Prismentischchen angesetzten Arm in zwangläufiger Verbindung steht, bewirkt bei Spektralbeobachtungen, dass das Prisma stets die Stellung der minimalen Ablenkung beibehält, wenn die beiden Flacheisenstäbe gegeneinander gedreht werden. Der Apparat enthält trotz seiner einfachen Konstruktion alle für Spektralbeobachtungen notwendigen Teile und gestattet demnach z. B. die Bestimmung des Brechungsexponenten des Prismas für jeden Teil des Spektrums. Bei Benutzung von Sonnenlicht sind die Fraunhoferschen Linien gut zu beobachten. Derselbe Apparat lässt sich als Reflexgoniometer verwenden, wenn man die Verbindung des Prismentischchens mit der gelenkigen Verbindung aufhebt und nur das Tischchen für sich drehen kann.

*) S. Unt. Bl. X, 3, S. 64.

Die Apparate 2 und 3 sind in der Zeitschr. f. phys. und chem. Unterricht im Juliheft dieses Jahres XVII, 202—209 eingehend beschrieben worden.

4. Augenmodell. Das Augenmodell unterscheidet sich von den sonst gebräuchlichen Modellen dadurch, dass es erstens die Form des Auges möglichst natürlich nachahmt, dass alle wesentlichen Bestandteile desselben dabei vorkommen, die Cornea, Cuticula, Sclerotica und Retina, die Iris und die Augenlinse, und dass das Augenmodell endlich ein deutliches reelles Bild auf der Netzhaut erzeugt, das hervorgerufen ist durch die drei auch im natürlichen Auge vorkommenden brechenden Flächen, die Corneafläche und die vordere und hintere Fläche der Kristallinse. Das ist dadurch erreicht, dass der ganze Augapfel aus einer hohlen, oben offenen Glaskugel besteht, deren vorderer Teil so ausgebogen ist, wie es beim natürlichen Auge die Cornea ist. Der gläserne Hohlkörper wird mit Wasser gefüllt. Eine der Iris entsprechende Blechscheibe teilt die Wassermasse in zwei ungleichgrosse Teile, die den beiden Augenkammern entsprechen. Hinter der Pupille ist die Krystallinse auswechselbar angebracht. Durch die Auswechselung der Linse kann das Auge in ein emmetropes, ein myopes und ein hypermetropes Auge verwandelt worden. Eine vor das Auge gesetzte Blende gestattet die Verwendung von Linsen zur Demonstration der Wirkung von Brillen, Lupen und Fernrohren auf die Grösse des Netzhautbildes. Eine genaue Beschreibung des Augenmodells findet sich in Heft 7 vom laufenden Jahrgang von „Natur und Schule III, 316—318."

5. Apparat für das Trägheitsmoment. Der Apparat bezweckt die physikalische Deutung des Satzes $T_n = T_s + Ma^2$, wo T_s das Trägheitsmoment für eine Schwerpunktsachse und T_n das Trägheitsmoment für eine der Schwerpunktsachse parallele Achse ist, welche von der Schwerpunktsachse den Abstand a hat. Der Apparat besteht aus einer an einem Faden aufgehängten Messingstange, an welcher zwei aus Aluminiumblech hergestellte seitliche Arme angebracht sind, die an ihren Enden die Achsen für je eine kreisförmige Metallscheibe tragen. Sind diese Metallscheiben um ihre Schwerpunktsachsen ohne Reibung drehbar, und versetzt man das ganze Massensystem in Drehung um die vertikalhängende Messingstange, so erfahren die Metallscheiben bei der Bewegung nur eine translatorische Bewegung im Kreise, sodass nur das Trägheitsmoment ihrer im Schwerpunkt vereinigten Metallmasse, bezogen auf die mittlere Achse, zur Geltung kommt. Dieses ist das Trägheitsmoment Ma^2. Wenn aber die Metallscheiben fest mit den Armen verbunden werden (durch eine passend angebrachte Schraube), so müssen sie sich noch um ihre eigene Schwerpunktsachse mitdrehen, wodurch dann zu dem vorigen Trägheitsmoment noch ihr eigenes Trägheitsmoment T_s hinzukommt. Hierdurch treten sowohl die Summe der beiden Trägheitsmomente, wie auch die einzelnen Summanden in ihrer physikalischen Bedeutung klar hervor.

6. Apparat für den Projektionssatz. Der Apparat bezweckt den experimentellen Nachweis, dass bei einem auf zwangläufiger Bahn geführten Körper, der durch eine Kraft beeinflusst wird, die mit der Bahn einen Winkel einschliesst, nur diejenige Komponente der Kraft in Wirksamkeit tritt, welche

durch die Projektion der Kraft auf die Bahn dargestellt wird.

Die ausführliche Beschreibung der Apparate 5 und 6, sowie ihre Anwendung auf die Mechanik ist im Septemberhefte der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht XVII, 257—267 veröffentlicht worden.

Die Apparate werden von A. Krüss, Hamburg hergestellt.

Ueber die Begrenzung des chemischen Lehrstoffes.

(Mit besonderer Berücksichtigung der Lehrbuchfrage.)

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle.*)

Von E. Löwenhardt (Halle a. S.).

M. H.! Den Mittelpunkt der Verhandlungen haben auf den letzten Vereinsversammlungen die biologischen Naturwissenschaften gebildet. Diesen Fächern gegenüber, die noch um die ihnen gebührende Stellung an den höheren Schulen kämpfen müssen, befinden sich Physik und Chemie seit langem in der erfreulichen Lage der beati possidentes. Uneingeschränkt in jeder Richtung gilt das zunächst von der Physik, insofern diese über einen theoretisch und experimentell überall anerkannten Kanon verfügt, sodass einzelne strittige Punkte, wie etwa die Bedeutung der optischen Polarisation und die Behandlungsweise der Elektrizität im Unterricht, nur als accidentiell, z. T. bedingt durch die Fortschritte der Wissenschaft, bezeichnet werden können. Ein Beweis für diese Stellung der Physik ist z. B. das Vorhandensein einer gewissen sozusagen feststehenden Summe stets wiederkehrender Aufgaben und Fragen bei den Reifeprüfungen. Während ferner die Physik in den verschiedenen preussischen Prüfungsordnungen für Oberrealschulen unverändert als Hauptfach gilt, ist die Chemie aus der Stellung eines solchen, welche ihr im Verein mit Physik noch durch das Reglement von 1891 zuerteilt war, durch die Lehrpläne von 1901 trotz der weiter bestehenden schriftlichen Prüfung verdrängt worden. Denn während bis dahin nicht genügende Leistungen sowohl in Physik wie in Chemie kompensiert werden mussten, wird das jetzt nur noch für Physik, nicht mehr für Chemie unbedingt gefordert. Mag nun diese Aenderung auch vielleicht nur aus praktischen Gründen erfolgt sein, umsomehr, als ja die Forderung der schriftlichen chemischen Arbeit offenbar nunmehr in einem gewissen Widerspruch zu der Wertung des Faches für das Resultat der Gesamtprüfung steht: die Tatsache an sich bleibt und wird von jedem, der die Bedeutung chemischer Kenntnisse für die allgemeine Bildung voll würdigt, bedauert werden, schon deshalb, weil durch jene Aenderung offenbar der Anschein erweckt werden kann, als habe der chemische Unterricht bisher zu hohe Anforderungen an die Schüler gestellt. Und tatsächlich ist die Meinung vorhanden, dass dem wirklich so sei. Gelegentlich eines im vorigen Herbste auf der 47. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung von Herrn Prof. Dr. Hammerschmidt gehaltenen sehr dankenswerten Vortrags über den bildendem Wert der Chemie wurde in der sich anschliessenden Diskussion von mathematischer Seite aus lebhaft jene Ansicht verfochten. Wir waren ja damals auch ganz unter uns: anwesende Philologen hätten wohl mit Freuden diesen häuslichen Streit im mathematisch-naturwissenschaftlichen Lager aufgegriffen. Nun ist mir nicht zweifelhaft, dass solche Angriffe von selbst verstummen werden, wenn z. B. infolge der Entwicklung der physikalischen Chemie die Kombination der Lehrbefähigungen: Physik-Chemie mit Mathematik als Nebenfach erst häufiger wird, aber immerhin ist mir damals der Gedanke aufgetaucht, ob nicht vielleicht der Grund für solche Anschauungen und auch für die Beschränkungen in den Lehrplänen z. T. in dem Betrieb des chemischen Unterrichts selbst liegen könne. Nicht als ob ich der Ansicht wäre, wir Chemiker hätten uns weniger der Ausbildung der Methodik unseres Faches gewidmet als andere Naturwissenschafter. Diesen Vorwurf können wir durch Nennung der Namen: Arendt, Wilbrand, Friedrich, C. G. Müller, Ohmann, Dannemann, Lüpke und zahlreicher anderer leicht zurückweisen. Sondern ich meine, dass sich vielleicht bei uns noch nicht ein so allgemein anerkannter eiserner Bestand an Lehrstoff gebildet hat, oder vielmehr: ein solcher eiserner Bestand hebt sich noch nicht auch dem Nichtchemiker deutlich genug vor nebensächlichen Dingen heraus. Viel mag ja auch auf Rechnung der unmethodischen Lehrart früherer Zeit und besonders der Lehrbücher kommen: hat mir doch ein Kollege erzählt, dass er in seiner Schulzeit die „Technische Chemie“ von Wagner (ein Buch von vielen 100 Seiten) hat benutzen müssen. Ferner haben wir mit dem Umstand zu rechnen, dass jedermann, selbst ein Gymnasiast, von seiner Schulzeit her wohl eine gewisse Summe physikalischer Kenntnisse mitbringt, dass aber chemische Kenntnisse noch nicht Allgemeingut der Gebildeten geworden sind.

Daher erscheint es sowohl im Interesse einer vorurteilslosen Würdigung des chemischen Unterrichts wie auch einer gewissen Ausgleichung der Anforderungen nützlich, festzustellen, was sich im Laufe der Zeit als wirklich wesentlicher Bestand des chemischen Lehrstoffs herausgestellt hat, mit anderen Worten, die Frage zu beantworten: Welche Kenntnisse kann und muss der chemische Unterricht seinen Schülern vermitteln? Ich hoffe damit zugleich den Beweis zu liefern, dass wir im allgemeinen weit entfernt von zu hohen Anforderungen sind.

Die preussischen Lehrpläne, von denen die letzten übrigens in unserem Fach weit eingehendere methodische Bemerkungen enthalten als die vom Jahre 1891, darf ich als bekannt voraussetzen.

Die Durchsicht der Schulprogramme ergab nur eine geringe Ausbeute (d. h. der Programme von 1903, da mir die neuen Programme noch nicht zur Hand waren), weil die preussischen Schulen meist nur die offiziellen Bestimmungen abdrucken und die Zahl der nichtpreussischen Oberrealschulen, die ja wesentlich in Betracht kommen, nicht sehr gross ist. Am eingehendsten sind noch die Lehrberichte der Berliner, Hamburger, Bremenser und einiger west- und südwestdeutscher Schulen.

Lassen Sie mich die Untersekunda vorwegnehmen. Der chemische Unterricht ist hier nach den Lehrplänen propädeutisch und es erscheint die Ansicht am verbreitetsten, von bekannten Stoffen, Elementen und Verbindungen auszugehen, und sozusagen heuristisch zu verfahren, um ein möglichst grosses Gebiet in den Kreis der Erörterung zu ziehen und dadurch den mit dem Einjährigenzeugnis abgehenden Schülern ein, wie man zu sagen pflegt, abgerundetes chemisches Wissen mit auf den Weg zu geben. An den badischen Oberrealschulen tritt dieser Gesichtspunkt in den Hinter-

*) S. Unt. Bl. X, 3, S. 64.

grund, da hier das Pensum der Untersekunda die erste Stufe des Gesamtpensums darstellt. So verzeichnet die Oberrealschule zu Freiburg: „Oxydations- und Reduktionserscheinungen der Metalle, Halogene, Volum- und Gewichtsverhältnisse“. Von den preussischen Anstalten fasst das von Saldernsche Realgymnasium in Brandenburg, wo der chemische Unterricht unter der Leitung eines unserer erfahrensten Methodiker steht, die Aufgabe folgendermassen: „Der Verbrennungsprozess, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenstoff“. Es sind das Mittelpunkte, von denen zahlreiche Beziehungen nach den verschiedensten Richtungen hinleiten. Und während hier, soweit man aus den Veröffentlichungen aus dem chemischen Unterricht dieser Schule schliessen darf, schon in U II im weitgehendsten Masse quantitave Versuche angestellt werden, geht aus der Anlage der auf den meisten Schulen in der U II eingeführten Leitfäden hervor, dass die Behandlung gewöhnlich eine qualitativ elementare ist, soweit nicht die Begründung der stöchiometrischen Grundgesetze einige quantitative Versuche fordert. Nach meinen Erfahrungen möchte ich mich aus verschiedenen Gründen für diesen letzten Weg — übrigens den preussischen Lehrplänen entsprechend — erklären. Dann würden sich etwa im Anschluss an Levins weitverbreiteten „Leitfaden für den Anfangsunterricht“ folgende Ausgangspunkte für die Untersuchungen bieten (ohne damit die Reihenfolge als massgebend hinzustellen): Luft, Wasser, Salzsäure, Schwefelsäure, Kohlensäure und kohlensaurer Kalk, Kochsalz, Gips, Schwefel, Phosphor, Eisen, die Edelmetalle, Ammoniak, Schiesspulver, Quarz. Dabei werden besonders folgende Begriffe gewonnen: chemisches Zeichen, Formel und Gleichung, Element, Verbindung, Legierung; Oxydation und Reduktion. Verbrennung, Analyse und Synthese; Säure, Basis und Salz, trockene Destillation; die stöchiometrischen Grundgesetze, die Ausdrücke Atom und Molekül; die Kenntnis der einfachsten Krystallformen, der wichtigsten Erze und geologisch bedeutsamen Mineralien und ihrer Veränderungen. Dass die Vorgänge der Atmung, Ernährung und Assimilation, sowie das Notwendige über Spross- und Spaltpilze (Gärung) durch passende Demonstration und Experimente erläutert werden, versteht sich wohl heutzutage für den biologischen Kursus der U II von selbst; solche Versuche können, wo chemischer und biologischer Unterricht in U II in einer Hand liegen, auch im Anschluss an die chemischen Untersuchungen ausgeführt werden. — Wenn man grundsätzlich **nichts** bringt, was nicht durch die Anschauung möglichst vielseitig erläutert wird (wie ja die Lehrpläne für den Anfangsunterricht durchweg das Experiment als Grundlage fordern) und durch immanente Wiederholungen für mannigfache Beleuchtung des Durchgenommenen sorgt, so wird der um die angeführten Ausgangspunkte ankrystallisierende Stoff mühelos von den Schülern bewältigt. Die stöchiometrischen Rechnungen sind auf dieser Stufe wohl auf das zur Erläuterung der Gesetze und Gleichungen unentbehrlichste zu beschränken, pflegt doch auch der propädeutische physikalische Unterricht hier möglichst von allen Berechnungen abzusehen. Historische Hinweise können hier und da zweckmässig zur Belebung beitragen; reiches Material findet sich hierfür in Henrici „Kleiner Grundriss der Elementar-Chemie“ (Teubner), abgesehen von den bekannten wissenschaftlichen Werken.

Aus dem Gesagten folgt, dass für die U II nur ein ebenfalls möglichst elementar gehaltenes Lehrbuch angebracht erscheint. Die allermeisten für den Anfangsunterricht bestimmten Leitfäden enthalten meiner Ansicht nach viel zu viel, was in diesem Falle nicht wohl durch die Notwendigkeit einer reichen Stoffauswahl, sondern höchstens dadurch zu rechtfertigen sein möchte, dass den Schülern, für welche die U II die letzte Schulklasse ist, Gelegenheit zu eigener Weiterbildung gegeben werden soll. — Solche Themata, wie der Schwefelsäureprozess und die Reduktionsprodukte der Salpetersäure, der Solvayprozess, die verschiedenen Oxydations-, Sulfurierungs- und Chlorierungsstufen von Blei, Quecksilber und Zinn, eine eingehende Charakterisierung sämtlicher Halogene, die Kobalterze oder gar Atomwärme, Beziehung des Isomorphismus zum Atomgewicht und überhaupt die physikalischen Beziehungen des Atom- und Molekulargewichts gehören entschieden nicht in den propädeutischen chemischen Unterricht. Es ist mir nicht im geringsten zweifelhaft, dass solche Uebertreibungen den Nichtfachmann mit Misstrauen gegen den chemischen Unterricht erfüllen müssen. Einem unserer ersten Hochschullehrer wurde einst der chemische Lehrplan für eine Mittelschule zur Beurteilung vorgelegt, die er mit den Worten gab: „Sehr schön; das ist etwa ebensoviel, wie ich vor meinen Studenten in zwei Semestern lese!“: Der Herr würde fast dasselbe Urteil über manche für die Untersekunda der Realanstalten bestimmte Leitfäden fällen können. An einer Oberrealschule ist (laut Programm) sogar der Rüdorff-Lüpke in U II eingeführt, ein Buch, welches vielen für die Oberklassen zu schwer erscheint.

Wenn wir nun die Oberklassen ins Auge fassen, werden sich Bemerkungen über die Methode auch nicht ganz umgehen lassen, doch sehe ich von einer Erörterung der Lehrpläne ab, wenn auch die Versuchung dazu an einzelnen Punkten bezüglich der preussischen Vorschriften sehr nahe liegt. Ich will hier nur auf die dankenswerte Besprechung verweisen, welche in der Poskeschen Zeitschrift für chem. u. phys. Unterricht seinerzeit von dem Herrn Herausgeber veröffentlicht wurde (1901 pg. 263). Ich halte es ferner durchaus nicht für wünschenswert, den Lehrstoff bis in die Einzelheiten zu definieren, das ist selbst innerhalb der einzelnen Anstalt nicht völlig durchführbar. Wer die österreichischen bis auf jeden noch so unbedeutenden Stoff spezialisierten offiziellen Vorschriften kennt, wird sich nicht nach einer solchen Knebelung sehnen. Wohl aber erscheint es bei dem sehr engen Zusammenhang des chemischen Lehrstoffes der einzelnen Klassen unerlässlich, dass von der Obersekunda bis zum Abiturientenexamen kein Lehrerwechsel für die einzelne Schülergeneration eintritt. Dadurch, dass jeder Schüler von ein und demselben Lehrer durch die drei Oberklassen durchgeführt wird, wird schon von vornherein einer Ueberspannung der Anforderungen vorgebeugt.

Die Stoffauswahl angehend ist zunächst ausdrücklich zu betonen, dass sich das Pensum der Oberklassen auf demjenigen der Untersekunda aufbauen soll. Allerdings wird dieser Anschluss den Oberrealschulen dadurch einigermassen erschwert, dass in die Obersekunda die Abiturienten der sechsklassigen Realanstalten von recht verschiedener chemischer Vorbildung eintreten. Doch kann man ohne Ueberlastung der Schüler ziemlich schnell eine gewisse Gleichmässigkeit der Leistungen erzielen, wenn man in der Obersekunda den Nachdruck weniger auf eine gewisse systematische Vollständigkeit der durchzunehmenden Verbindungen als auf eine gründliche Durcharbeitung der einzelnen Reaktionsarten und wichtigsten Begriffe legt: so möchte ich die Forderung der preussischen Lehrpläne einer „methodischen Einführung“ auslegen. Ob man nun den Lehrgang mehr „analytisch“ nach Wilbrand oder „synthetisch“ nach Arendt und der Mehrzahl der sogenannten methodischen Lehrbücher gestalten will, ist Geschmackssache. Massgebend muss nur bleiben, dass zur experimentellen Begründung möglichst nur Reaktionen herangezogen werden, deren Verlauf, und Verbindungen, deren Zersetzungsweise nicht erst selbst der Erklärung bedürfen (wie man ja etwa bei den Beweisen in der elementaren Mathematik Einschachtelungen zu vermeiden sucht).

Für die Behandlung im einzelnen sollen neben methodischen auch technische, biologische und hygienische Beziehungen massgebend sein. Beiläufig möchte ich hier auf einige litterarische Erscheinungen aufmerksam machen, die, obgleich z. T. eigentlich für Studierende bestimmt, doch auch für unsere Zwecke wertvolle Fingerzeige enthalten. Es sind das neben der dritten neubearbeiteten Auflage von Ira Remsens „Einleitung in das Studium der Chemie“ die im vorigen Jahre erschienene „Schule der Chemie“ von Ostwald und ein zweites kleineres Buch „Elementare anorganische Chemie“ von James Walker, Professor am University College zu Dundee.

Für die anorganische Chemie ergibt sich etwa folgendes Material: die Nichtmetalle Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, die Halogene, Schwefel, Phosphor, Kohlenstoff, Silicium. Die Verbindungen Wasser, Wasserstoffsuperoxyd, Ozon, Ammoniak, Methan, Aethylen, Acetylen, Chlorwasserstoff, Fluorwasserstoff, Schwefelwasserstoff, der aus Phosphor und Aetzkali entwickelte Phosphorwasserstoff, Schwefeldi- und trioxyd, Phosphortri- und pentoxyd, Kohlenoxyd und -dioxyd, Siliciumdioxyd, die Stickstoffoxyde; von Säuren, Salpetersäure, Schwefelsäure, Orthophosphorsäure, endlich Schwefelkohlenstoff, Calcium- und Siliciumcarbid, sowie Cyan. Elemente wie Arsen und Bor sind ganz kurz und besonders mit Rücksicht auf ihre Sauerstoffverbindungen Arsenik und Borsäure abzuhandeln. Unter den Metallen sind die Leichtmetalle Kalium, Natrium, Calcium, Aluminium, Ammonium und ihre Verbindungen besonders ausführlich zu behandeln, da sich in ihnen eine grosse Menge von Beziehungen vereinigen. Die Schwermetalle Eisen, Quecksilber, Kupfer, Blei und Silber fordern wegen der Metallurgie, der chemischen Reaktionen und vielfachen praktischen Anwendungen ausgiebige Beachtung, während Chrom und Mangan in ihren Oxyden vorzügliche Beispiele von Uebergangstypen unter den Elementen darstellen. Gold und Platin, ferner Zink, Zinn, Nickel und Magnesium treten dem Schüler ganz vorwiegend als Metalle entgegen. Bei den häufigeren Metallen werden in Verbindung mit den Laboratoriumsarbeiten der Schüler ihre analytischen Verhältnisse sorgfältig zu beachten sein. Analytische Besonderheiten, wie etwa die Auffindung von Phosphorsäure und alkalischen Erden im Schwefelammoniumniederschlag, gehören meiner Meinung nach nicht auf die Schule, wenigstens nicht bei je dreistündigem chemischen Gesamtunterricht. Jedenfalls gehen solche Dinge über den Rahmen des zur chemischen Bildung eines Oberrealschülers Nötigen hinaus — Dabei ergeben sich nun weiter die wichtigsten Begriffe, Gesetze und Reaktionen. Besonders wertvoll ist es, so oft wie möglich auf das Gesetz von der Erhaltung der Energie hinzuweisen, wozu z. B. bei Reduktionen und Salzzersetzungen häufig Gelegenheit ist. Ein Haupterfordernis aber des Unterrichts in Obersekunda und Unterprima ist es, die Untersuchungen, so oft es die Zeit gestattet, quantitativ zu gestalten, damit der Schüler immer wieder sieht, dass das Wesentliche in allem die Mengenverhältnisse sind. Es sollten also eudiometrische und ähnliche Versuche zur Gassynthese und Analyse, wie sie in vielen Lehrbüchern, sowie besonders in der Zeitschr. f. phys. und chem. Unterricht und anderwärts von Friedrich C. G. Müller, Rischbieth und anderen vorbildlich dargestellt sind, in ausgiebigster Weise angestellt werden. Dazu kommen etwa beim Brennen von kohlensaurem Kalk, beim Löschen von gebranntem Kalk, bei der Reduktion von Kupferoxyd einfache Gewichtsuntersuchungen, während bei Durchnahme der Salzbildung Acidimetrie und Alkalimetrie eine wichtige Rolle spielen. Durch das Fehlen solcher quantitativer Versuche unterschied sich in früherer Zeit der chemische Unterricht sehr zu seinem Nachteil von dem physikalischen, wo messende Versuche ganz selbstverständlich waren. Wenn der wahre Bildungswert eines Lehrfaches wirklich hauptsächlich von seinem Gehalt an Mathematik abhängt, so steht die Chemie heute mit in der ersten Reihe. Ein chemischer Unterricht ohne gründliche experimentelle Behandlung der quantitativen Beziehungen gibt einen Körper ohne Skelett! — Unentbehrliche Stützen des Verständnisses sind endlich stöchiometrische Rechnungen, wenn hierin auch nicht alle Lehrer soweit gehen werden, wie der „Grundriss“ von Rüdorff-Lüpke oder gar die inhaltreiche Aufgabensammlung von Bräuer. Recht zweckentsprechend ist die unter dem Titel „Stöchiometrie“ veröffentlichte Sammlung von Ferdinand Fischer (Hannover, Hahnsche Buchhandlung). Die stöchiometrischen Prüfungsaufgaben, welche an manchen Schulen den Abiturienten gestellt werden, zeigen, dass man auch mit einfachen Mitteln hübsche Resultate erzielen kann.

In der anorganischen Chemie sind an passenden Stellen die Elemente der Mineralogie und Krystallographie, schon in UII vorbereitet, zu wiederholen und zu erweitern, also z. B. beim Kalkspat die einfacheren Formen des hexagonalen, bei Durchnahme der Erze diejenigen des regulären Systems etc. Ebenso bietet sich beim Calcium und Aluminium sowie beim Kochsalz Gelegenheit, Notizen aus der dynamischen Geologie und Petrographie einzufügen, die dann leicht in einigen besonderen Stunden nach den wichtigsten Richtungen hin zu einem ganz kurzen Abriss der Elemente der Geologie vervollständigt werden können, zumal, wenn, auf der Oberrealschule wenigstens, die besonderen geographischen Stunden helfend eintreten können. Die Schüler bringen diesen Dingen stets reges Interesse entgegen.

Was endlich die organische Chemie anbetrifft, so ist zu vermuten, dass gerade sie wegen ihres gelehrten Formelschatzes die Abneigung ferner Stehender gegen die Chemie wesentlich hervorgerufen hat. Nun, meine Herren, erstens werden im Schulunterricht nur ganz einfache organische Verbindungen besprochen, — bei komplizierteren, wie den Kohlehydraten, begnügt man sich mit den empirischen, bei den Fetten mit den rationellen Formeln; — zweitens ist bei der geringen Zahl der in diesen Verbindungen vorkommenden Elemente die Art der Atombindung viel leichter zu merken, als bei den anorganischen Elementen mit ihrer wechselnden Wertigkeit; drittens herrschen innerhalb der wenigen Gruppen, zu denen jene Verbindungen gehören, so einfache übersichtliche Beziehungen, dass nicht nur nach meiner Beobachtung gerade die organischen Teile des Pensums dem Primaner weniger Schwierigkeiten machen als das Mosaik der anorganischen Chemie. Es werden als berücksichtigenswert angesehen: die einfachsten, d. h. je zwei bis drei, Kohlenwasserstoffe, Alkohole, Säuren, Aldehyde und einige physiologisch wichtige Verbindungen der Fettreihe, weiter die Produkte der trockenen Destillation, die Gärungsvorgänge, die Fette und ihre Verseifung, ferner die Kohlehydrate besonders nach ihrer biologischen und technischen Bedeutung, und von den aromatischen Verbindungen Benzol, einige Phenole und Säuren, Nitrobenzol und Anilin und im Anschluss an letzteres etwas von den organischen Farbstoffen. Die wissenschaftlichen Synthesen sind wohl fast überall auszuschliessen. Auch in der organischen Chemie ist alles und jedes auf Anschauung zu begründen; es lassen sich auch hier zahlreiche, allerdings meist sehr einfache Versuche ausführen, die ich gelegentlich in einem Schulprogramm zusammengestellt habe. Man sollte sich auch hier stets gegenwärtig halten, dass ein naturwissenschaftlicher Unterricht ohne fortwährende Anschauung nur leeres Geschwätz ist. Dass biologische, physiologische und hygienische Gesichtspunkte überall besonders massgebend sein werden, ist erklärlich. Dem Stoffwechsel im pflanzlichen und im menschlichen Organismus wird am besten eine zusammenhängende Betrachtung zu widmen sein.

Es bleibt nun noch ein kurzes Wort über den Umfang der theoretischen Chemie auf der Schule. Der schon erwähnte englische Professor James Walker erklärt, dass theoretische Chemie gar nicht auf die Schule gehöre. In Deutschland wird ihm hierin freilich niemand beistimmen, zumal unsere Schulverhältnisse von den englischen bedeutend abweichen. Wohl aber halte ich es für wünschenswert, sich möglichst lange der Benutzung atomistischer Anschauungen im Unterricht zu enthalten. Dass dieses sogar in rein wissenschaftlichen Werken möglich ist, zeigen Ostwalds „Grundlinien der anorganischen Chemie“, also wirds auch wohl auf der Schule gehen. Selbstverständlich muss ferner die Atom- und Molekulartheorie gründlich experimentell vorbereitet werden. Die schon früher im Laufe des Unterrichts angestellten unentbehrlichen volumetrischen Versuche werden später für diesen Zweck durch eine oder mehrere Dampfdichtebestimmungen, die sich ja mit dem Viktor Meyerschen Apparat ausserordentlich einfach gestalten, und durch Bestimmungen von Atomwärme ergänzt. Den Schülern ist der Unterschied zwischen Hypothese und Gesetz zum deutlichen Bewusstsein zu bringen. Man kann z. B. immer noch in einzelnen Lehrbüchern von Avogadros Gesetz lesen! Ostwalds Bemerkung „man wird also den Nutzen der Atomhypothese sich nicht zu versagen brauchen, wenn man sich gegenwärtig hält, dass sie eine Veranschaulichung der tatsächlichen Verhältnisse unter einem zweckmässigen und leicht zu handhabenden Bilde ist, aber keineswegs für die wirklichen Verhältnisse substituiert werden darf“ gilt ganz sicher erst recht für die Behandlung dieser und ähnlicher Fragen in der Schule. Der Schüler muss notwendig zu einer falschen Auffassung derselben gelangen, wenn ihm der Lehrer von Anfang an immer von Atomen und Molekülen spricht: die trefflichen Worte Aequivalent- und Verbindungsgewicht sind so eingebürgert, dass sich keiner vor ihrer Benutzung zu scheuen braucht. — Wie verschieden über diesen Punkt die Auffassungen immer noch sind, geht daraus hervor, dass mir vor einigen Jahren einmal ein sonst sehr nüchtern denkender Kollege sagte: „ich will, dass die Schüler fest glauben, dass es Atome gibt!“ — Uebrigens werden Sie sich nicht wundern, wenn ich, abweichend von einem unserer verbreitetsten und tüchtigsten Schulbücher, der Meinung bin, dass der Unterricht erst recht nicht „von den Grundzügen der Theorie der elektrolytischen Dissoziation der Elemente durchdrungen“ sein darf, wenn auch selbstverständlich die Schüler mit dieser Theorie bekannt gemacht werden müssen.

Ich bin am Ende. Die an das Lehrbuch zu stellenden Anforderungen ergeben sich aus dem Gesagten, wenn man etwa noch berücksichtigt, dass manche, besonders technische Dinge behandelnde, wichtige Abschnitte zweckmässig im Lehrbuche ausführlicher dargestellt werden müssen, als sie der Unterricht geben kann, um dem Schüler, der sich selbst genauer informieren will, eine seinem Wissen angepasste Lektüre darzubieten. — Als musterhaft möchte ich hier diese Abschnitte im Grundriss von Rüdorff-Lüpke anführen. — Natürlich gehört ein auf das Studium der Studenten zugeschnittenes Buch nicht an eine Schule, wie etwa der Roscoe-Schorlemmer, und endlich — darf das Schulbuch nicht zu viel kosten.

Also, meine Herren, möchte ich zum Schluss hinzufügen, „extensiv Beschränkung, intensiv allseitige Durcharbeitung!“ Wir werden nur dann mit vollem Recht auch den Schein zu weitgehender Anforderungen zurückweisen und auf voller Gleichschätzung mit den anderen exakten Unterrichtsfächern bestehen dürfen, wenn wir niemals vergessen, dass auch die Stellung des chemischen Unterrichts klar gekennzeichnet ist durch die Aufgabe der höheren Schulen, allgemeine Bildung zu vermitteln, und dass er auch an seinem Teil, um mit Worten der Wieseschen Lehrpläne zu schliessen, „die Zöglinge mit allem dem bekannt und vertraut machen soll, was in allem Wechsel der Erscheinung das Bleibende und Unvergängliche ist, und mit der Wahrheit, die über der Wirklichkeit steht.“

Das Zeichnen im naturgeschichtlichen Unterricht.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle.*)

Von Prof. Dr. Walter Oels (Halle a. S.).

M. H.! Der Zweck meines Vortrags ist es, Ihnen, soweit es die Zeit erlaubt, durch Skizzen vorzuführen, was und wie nach meiner Ansicht im naturgeschichtlichen Unterricht gezeichnet werden soll. Ich werde daher statt langatmiger theoretischer Erörterungen, die besser in Fachblättern Platz finden, Ihnen nur folgende vier Leitsätze vorlegen, die ich durch Zeichnungen zu beweisen, bezw. zu erläutern versuchen werde. Sie lauten:

1. Was man genau kennt, kann man zeichnen, und umgekehrt, was man nicht zeichnen kann, kennt man nicht.

2. Es ist dahin zu streben, dass die Schüler die wichtigsten Naturgegenstände ohne wesentliche Fehler aus dem Kopfe zeichnen können.

*) S. Unt. Bl. X, 3, S. 64.

3. Eine Repetition durch Zeichnungen erfordert nicht mehr Zeit, als eine solche durch Beschreibung mit Worten.

4. Das schematische Zeichnen an der Wandtafel kann durch gedruckte Zeichentafeln nicht ersetzt werden.

Was den ersten Leitsatz anlangt, so kann sich der naturwissenschaftliche Lehrer stündlich überzeugen, wie wenig die Schüler Tiere und Pflanzen, die sie zu kennen vorgeben, wirklich kennen. Selbst ein so häufiges Tier, wie der Maikäfer, gehört tatsächlich zu den unbekannten. Kein Schüler kann ihn beim Beginn des entomologischen Unterrichtes einigermassen richtig an die Tafel zeichnen. Nach der Durchnahme können es alle Schüler, ein Beweis, dass nicht technische Schwierigkeiten, sondern nur Unkenntnis den Misserfolg im ersten Falle veranlasst. Nun kann freilich jemand einwenden, dass so einfache Gegenstände nicht allgemein beweisend sind, und dass man z. B. eine Linde, ein Pferd, einen Menschen wohl kennen kann, ohne doch diese Gegenstände zeichnen zu können. Nun, ich behaupte, wer die Verzweigung, die Laubgruppierung, sozusagen den Faltenentwurf und die davon abhängige Licht- und Schattenverteilung einer Linde, die Bewegungen des Kopfes und der Beine bei einem weidenden, springenden, galoppierenden Pferde wirklich kennt, kann Linde und Pferd auch ohne Schwierigkeiten richtig schematisch zeichnen (Skizze einer Linde, Buche, Eiche, eines weidenden, eines springenden Pferdes). Schematisieren aber heisst, die charakteristischen Linien eines Gegenstandes heraussehen. Das kann im naturgeschichtlichen (und Zeichen-) Unterricht den Schülern so beigebracht werden, dass sie einfachere Tiere und Pflanzen ganz, von zusammengesetzteren wenigstens die charakteristischen Organe richtig aus dem Gedächtnis zeichnen können. Der moderne, in sehr günstige Bahnen gelenkte Zeichenunterricht unterstützt den Naturgeschichtslehrer hierbei so, dass man in Tertia schon wahre Kunstwerke von Schmetterlingen und Blüten zu sehen bekommt. Das ist nun im naturgeschichtlichen Unterricht nicht der Zweck. Richtig soll in beiden Fächern gezeichnet werden, im Zeichnen jedoch mit Betonung des Schönen, in der Naturgeschichte mit Hervorhebung, wenn auch bisweilen etwas übertriebener, der charakteristischen Linien. Ein abgemagertes Pferd ist beispielsweise für die Erkennung des Knochenbaues geeigneter, als ein wohlgerundetes; das erstere ist also für den naturgeschichtlichen Unterricht ebenso vorzuziehen, wie das letztere für den Zeichenunterricht.

Die Wirbeltiere kommen, weil ihre Durchnahme den drei unteren Klassen zufällt, was das Zeichnen anlangt, schlechter weg als die Glieder- und niederen Tiere. Man wird sich, besonders in VI, in der Regel mit Teilzeichnungen begnügen. Von den Säugetieren kommen die allgemeine Gliederung, die Fuss- und Zahnformen besonders in Betracht (Skizzen: 1. Armskelett des Menschen mit Umriss der Muskeln, 2. Vorderbein des Hundes, 3. Bein des Menschen, 4. Hinterbein des Pferdes, 5. Skelett des Pferdes, 6. Fussskelette des Bären [Sohlengänger], Hundes [Zehengänger], Pferdes [Zehenspitzengänger], 7. Zähne des Menschen und der Raubtiere mit den Wurzeln). Doch kann man selbst in VI schon einige ganze Säugetiere zu zeichnen versuchen, z. B. Hund, Seehund, Pferd, Elefant, Wal (Skizze eines schreitenden Elefanten), was in der Klasse der Vögel in noch grösserem Umfang geschehen kann (Skizze eines am Baum hackenden Spechtes) und schon in VI zu ganz brauchbaren Resultaten führt. Von den Reptilien lasse ich eine Schildkröte, eine Eidechse, die drei einheimischen Schlangen (nur Kopf und Vorderende), einen Schlangenschädel und Giftzahn, von den Amphibien einen Frosch mit seinen Entwicklungsstufen und einen Molch, von den Fischen sämtliche durchgenommene Arten zeichnen (Skizze einer Scholle). In Tertia ist es eine wahre Freude, die Skizzenbücher zur Hand zu nehmen: die Schüler begnügen sich gewöhnlich nicht mit der rohen Skizze, sondern suchen sie zu Haus durch Schattierung oder Farbe zu verschönern, manchmal mit negativem Erfolg, aber doch mit Lust und Liebe. Von jeder Insektenordnung werden geeignete Vertreter, Larven, Puppen, Frassstücke gezeichnet. Ich fange in der Regel mit den Käfern und zwar mit dem Maikäfer an, von dem jeder Schüler ein Spirituspräparat zur Bewegung der Teile und Zerlegung in seine Hauptteile in die Hand bekommt. (Skizzen und Besprechung von Buchdrucker, Maikäfer, Schwärmerraupe, Ochsenbremse.)

M. H., ich sehe mich genötigt, wegen der vorgerückten Zeit hier meinen Vortrag abzubrechen, glaube aber auch mit den vorgeführten Skizzen schon gezeigt zu haben, wie man mit wenig Strichen sichere naturgeschichtliche Anschauung und Kenntnis erzielen kann. Schliesslich spreche ich die Hoffnung aus, meiner seit vielen Jahren geübten und stetig verbesserten Methode einige Anhänger gewonnen zu haben.

Vereine und Versammlungen.

Naturforscher-Versammlung in Breslau. Die Versammlung nahm ihren programmgemässen Verlauf, als Versammlungsort für das nächste Jahr wurde Meran gewählt, der Vorstand der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, aus dem der bisherige erste Vorsitzende Chiari (Prag) ausscheidet, wurde, da der erste Stellvertreter v. Hefner-Alteneck im Laufe des Jahres gestorben ist, diesmal durch zwei Personen ergänzt, nämlich Chun (Leipzig) und Naunyn (Strassburg).

In der Abteilung für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht wurden von dem in No. 4 d. Unt. Bl. mitgeteilten Programm nur die beiden Vorträge von Archenhold und Krebs in der angekündigten Weise gehalten, das von Börnstein angekündigte Thema wurde statt seiner von O. Steffens (Berlin) behandelt, völlig fiel der Vortrag von Bail aus, dafür sprach Schotten (Halle), der „einige Bemerkungen zur synthetischen Geometrie der Kegelschnitte“ vortrug. Von verschiedenen Seiten wurde der Wunsch ausgesprochen, die Abteilung, die nach der Gründung des Vereins z. Förd. d. Unt. i. d. Math. u. d. Naturw. keinen Zweck mehr habe, überhaupt eingehen zu lassen.

In der gemeinschaftlichen Sitzung beider Hauptgruppen am 22. September erfolgte die im vergangenen Jahre beschlossene Verhandlung über den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Schulen. Nach Erstattung der vier a. a. O bereits erwähnten Referate durch die Herren Fricke, Klein, Merkel und Leubuscher kamen noch eine Reihe von Rednern zum Wort, zuerst als Vertreter des Vereins z. Förd. d. Unt. i. d. Math. u. d. Naturw. Pietzker (Nordhausen), dann als Vertreter des Vereins Deutscher Ingenieure Geh. Rat Prof. Dr. v. Borries (Berlin-Charlottenburg), ferner als Vertreterin verschiedener Frauenvereine Fräulein Dr. Lydia v. Rabinowicz (Berlin), hierauf eine Reihe von Einzelrednern. Es wurde die Niedersetzung einer zwölfgliedrigen Kommission beschlossen, die die aus den verschiedenen Interessentenkreisen laut gewordenen Wünsche prüfen und verwerten soll, um einer späteren Versammlung Bericht zu erstatten. Sie wird aus den Herren v. Borries (Berlin-Charlottenburg), Duisberg (Elberfeld), Fricke (Bremen), Gutzmer (Jena), Klein (Göttingen), Kraepelin (Hamburg), Leubuscher (Meiningen), Pietzker (Nordhausen), Poske (Berlin), Bastian Schmid (Zwickau), Schotten (Halle), Verworn (Göttingen) bestehen und ihre Arbeit unter dem Vorsitz von Prof. Gutzmer, als dem Vorsitzenden der naturwissenschaftlichen Abteilung des wissenschaftlichen Ausschusses der Gesellschaft erledigen.

Eingehender Bericht wird in späterer Nummer erfolgen.

* * *

Gemeinschaftliches Tagen der Fachvereine. In No. 7 und 8 des laufenden (21.) Jahrgangs der Blätter für höheres Schulwesen veröffentlicht Prof. Block (Giessen), der Vorsitzende des zu Ostern d. J. in Darmstadt abgehaltenen ersten Oberlehrertages, einen Artikel unter der Ueberschrift „Der deutsche Oberlehrerverband und die bestehenden fachwissenschaftlichen Vereine“. Unter Wiederabdruck einer im Mai 1902 im „Korrespondenzblatt für den höheren Lehrerstand“ von ihm veröffentlichten Ausführung befürwortet er, dass die einzelnen fachwissenschaftlichen Vereine nicht, wie bisher, an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten ihre Versammlungen abhalten, sondern gleichzeitig und an demselben Orte, selbstververständlich in einer für alle Anstalten des Reiches gemeinsamen Ferienzeit, also zu Ostern oder zu Pfingsten. Der Begrüssungsabend und der erste Arbeitstag würde dann den Oberlehrern gemeinsam sein, ebenso wie die in üblicher Weise für den Schluss solcher Versammlungen anzusetzenden Vergnügungen und Ausflüge. Dazwischen würde jeder Verein für seine spezielle Tätigkeit zwei bis drei Tage zur Verfügung haben. Den Einwand, dass dadurch die älteren Vereine zu Sektionen des Oberlehrertages „degradiert“ würden, glaubt Prof. Block nicht erwarten zu sollen. Dagegen erhofft er von der Verwirklichung seiner Anregung mannigfache Vorteile. Insbesondere weist er auf die Vereinfachung hin, die die Vorbereitung der Versammlung erfahren würde, bei der getrennten Tagung werde ein überflüssig grosser Arbeitsaufwand erfordert, er führt ferner die Interessen der Versammlungsteilnehmer an, die an mehreren Kongressen teilnehmen möchten und er hält es für gut, wenn vor dem Eintritt in die Spezialarbeit etwas lebhafter betont würde, dass die Teilnehmer „nicht nur Spezial- und Fachgelehrte, sondern auch Oberlehrer sind und sein wollen“.

Lehrmittel-Besprechungen.

Zoologische Zeichentafeln, herausgegeben von Dr. O. Vogel u. O. Ohmann. Heft I, 9. Aufl. Heft II, 7. Aufl. Heft III, 5. Aufl. Berlin 1903. Winckelmann & Söhne.

Die vorliegenden Hefte sind für die Hand des Schülers bestimmt. Zweck derselben ist, den Schüler zu stärkerer Selbsttätigkeit im zoologischen Unterricht heranzuziehen, indem demselben die Umrisszeichnungen des Anschauungsstoffes auf den Tafeln in einer Form geboten werden, die ihn zwingt, dieselben zeichnerisch zu vervollständigen und so die gewonnene Anschauung zu vertiefen und fester zu halten. Ausserdem sind auf der Rückseite der Blätter der neuen Auflagen Fragen beigedruckt über die betreffenden zur Darstellung] gebrachten Tiere bez. Organe, welche vom Schüler beantwortet werden sollen.

Heft I enthält auf 16 Tafeln die Darstellung von 25 Säugetieren und Vögeln nebst wichtigen Organen derselben. Ausserdem ist demselben eine Weltkarte in Merkatorprojektion beigegeben. Die Benutzung derselben ist in der Weise gedacht, dass der Schüler die Namen der besprochenen Tiere auf eine durch eine Zahl bezeichnete Stelle der Karte — die Heimat der betreffenden Art — einträgt und später nochmals aufsucht.

Heft II behandelt auf 24 Blättern eine grössere Zahl (70) Wirbeltiere, ausser Säugetieren und Vögeln, auch Reptilien, Amphibien und Fische. Eine wesentliche Neuerung besteht darin, dass auf einer ganzen Reihe von Blättern farbige Darstellungen geboten werden, namentlich bei schematischen Zeichnungen der inneren Organe.

Heft III ist auf 16 Tafeln der Naturgeschichte der wirbellosen Tiere von den Arthropoden bis zu den Protozoen gewidmet. Gegen die früheren Auflagen enthält auch dieses Heft eine Anzahl neuer Abbildungen sowie Verbesserungen. In gleicher Weise wie bei Heft II ist eine Anzahl Zeichnungen mit charakteristischen Farben versehen.

Es liegt dem Referenten fern, an dieser Stelle auf die Methodik des in Frage stehenden Unterrichtsgegenstandes näher einzugehen. Wer sich darüber und insbesondere über den praktischen Gebrauch des vorliegenden Hilfsmittels unterrichten will, findet die beste Auskunft in der Programmabhandlung von O. Ohmann: Ueber die Anwendung der zeichnenden Methode im naturwissenschaftlichen Unterricht des Gymnasiums. Wissenschaftl. Beilage zum Jahresbericht des Humboldt-Gymnasiums zu Berlin, 1899. Die Wichtigkeit des Zeichnens im naturkundlichen Unterricht wird ja allgemein anerkannt. Ueber die Art der Ausführung im einzelnen sind die Meinungen geteilt; viel wird hier von der Individualität des Lehrers, seiner eigenen Vorbildung, Veranlagung und Neigung abhängen. Sicher aber werden allen, selbst solchen Lehrern, die der hier in Frage kommenden Methode kühler gegenüberstehen, die besprochenen Zeichentafeln sowohl wie die erwähnte Abhandlung sehr wertvolle Anregungen bieten zur Weiterbildung und Vervollkommnung der eigenen Unterrichts-Methode.

Petry (Nordhausen).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte, gesammelt und herausg. Leipzig 1904, Teubner.

Arche, A., Praktische Chemie. 2. Aufl. Mit 14 Abb. Wien 1904, Hölder.

Arendt, R., Leitfaden für den Unterricht in der Chemie und Mineralogie. 9. Aufl. Bearb. von Dr. L. Doermer. Mit 134 Abb. Hamburg 1904, Voss. Mk. 1.60 geb.

Arndt, E., Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der ersten Klasse. Mit 2 Taf. Berlin 1904, Weidmann. Mk. 1.—.

Baumhauer, H., Leitfaden der Chemie. 1. Teil: Anorgan. Chemie 4. Aufl. Mit 34 Abb. Freiburg, Herder. Mk. 2.—.

Beckenhaupt, C., Die Urkraft im Radium und die Sichtbarkeit der Kraftzustände. Heidelberg 1904, Winter. Mk. 1.—.

Bennecke, Fr., Ueber die Verlegung des zoolog. Unterrichts in d. Sommersemester. Sonderabdr. aus Natur u. Schule III., 7. Leipzig 1904, Teubner.

Blätter, Periodische, für Realienunterr. und Lehrmittelwesen, redig. von R. Neumann u. J. Fischer. Jahrg. IX, 1903/04, Heft 4—6. Tetschen, Henckel.

Blochmann, R., Luft, Wasser, Licht und Wärme. 2. Aufl. Mit Abb. (Aus Natur u. Geisteswelt). Leipzig 1904, Teubner. Mk. 1.25 geb.

Block, C., Lehr- und Uebungsbuch f. d. planimetr. Unterr. an höh. Schulen. 1. Teil: Quarta. Ebenda. Mk. 1.— geb.

Bohnert, F., Bericht über d. Hilfsmittel f. d. phys. Unterr. und über d. physik. Schülerübungen a. d. Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg, erstattet im Auftr. der Schulbehörde f. d. Weltausstellung in St. Louis 1904. Hamb. 1904, Progr.-Nr. 852.

Bollettino dell 'Associazione Mathesis, Anno VIII 1903/04, Nr. 4—6. Torino, Tipografia degli Artigianelli 1904.

Braun, R., Die Mysterien des Altertums u. moderne Wissenschaft. Stuttgart 1904, Selbstverlag.

Brühns, W., Kristallographie. Mit 190 Abb. (Samml. Göschen). Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Conwentz, H., Die Gefährdung d. Naturdenkmäler und Vorschläge zu ihrer Erhaltung. Denkschrift. Berlin 1904, Bornträger.

Dahl, Fr., Kurze Anleitung zum wissenschaftl. Sammeln und zum Konservieren von Tieren. Mit 17 Abb. Jena 1904, Fischer. Mk. 1.—.

Dennert, E., Das chemische Praktikum. 2. Aufl. Hamburg 1903, Voss. Mk. 1.— kart.

Doiwa, J., Rechen-Taschenbuch des Lehrers, V. Heft. Wien 1904, Pichler. Mk. 2.—.

Ebeling, M., Leitfaden der Chemie für Realschulen. Mit 281 Abb. 4. Aufl. Berlin 1904, Weidmann. Mk. 2.60 geb.

Ehrig, G., Trigonometrie für Baugewerkschulen. Mit 68 Fig. Leipzig 1904, Leineweber.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.