Jahrgang X. 1904. Nr. 6.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.

Inhalt:

Vereins-Angelegenheiten.

In Gemässheit des auf der Hauptversammlung in Halle gefassten Beschlusses wird die nächstjährige 14. Hauptversammlung in der Pfingstwoche 1905 zu Jena stattfinden, der Direktor der Realschule daselbst, Herr Prof. Dr. Pfeiffer, hat den Vorsitz im Ortsausschusse übernommen.

Auch für diese Versammlung besteht die Absicht, die Hauptsitzungen für Diskussionen über bedeutsame Unterrichtsfragen, die durch geeignete Referate einzuleiten sind, offen zu halten. Im übrigen sind Anmeldungen zu Vorträgen auch jetzt schon erwünscht, wir bitten sie an den Herrn Direktor Prof. Dr. Pfeiffer (Jena, Löbdergraben 8) oder an Prof. Pietzker (Nordhausen) zu richten.

Der Vereins-Vorstand.

Der anschauliche Zusammenhang der Kegelschnitte durch die unendliche Kegelschnittkugel.

Von Kurt Geissler (Charlottenburg).

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle 1904*).

Es gibt kaum ein anderes Gebiet in der auf der Schule behandelten Geometrie, das so sehr zum Aufsuchen des Zusammenhanges auffordert, wie die Lehre von den Kegelschnitten. Darin liegt auch ein besonderer pädagogischer Wert dieser Lehre. Die meisten Lehrer lassen sich diese Gelegenheit nicht entgehen und suchen der reiferen Jugend durch dieses Beispiel eine möglichst klare Vorstellung von wissenschaftlichem Aufsuchen der einzelnen Tatsachen und den methodischen höheren Zielen der Wissenschaft zu geben. Freilich erlauben die Bestimmungen eine geringere Zeit, als sie des genannten Vorzuges wegen wünschenswert wäre. Dazu kommt, dass die Kegelschnitte so sehr deutlich auf das Stetige, auf die Ausdehnung der sinnlichen Betrachtung (durch Zeichnung) bis zum Unendlichkleinen und -Grossen hinweisen. Ob dies ein Vorzug ist, darauf möchte ich am Schlusse zurückkommen. Jedenfalls ist es gerade die Anschauung, die uns aufzufordern scheint, uns nicht mit dem Zeichenbaren, dem

*) S. Unt.-Bl. X, 3, S. 6.

Sinnlichvorstellbaren, dem Endlichen zu begnügen. Die Kegelschnitte sind zum Teil unendliche Kurven, zum Teil können sie durch eine natürliche Veränderung der Vorstellung, durch Erweitern und Verengen des Sinnlichvorstellbaren, zu unendlichen Kurven werden.

Damit gewinnt diese Lehre sicher ein hohes Interesse für den Schüler, der gern seine Gestaltungskraft zur Tätigkeit bringt, und zwar dies vermöge seiner jugendlichen Freiheit und Lebendigkeit schneller, freier, ungemessener tun möchte, als wir Aelteren dies gewohnt geworden sind. Sollen wir hier hindern oder fördern? Ersteres gewiss, wenn Gefahr vorliegt, dass ein gesetzloses Phantasieren der wissenschaftlichen Denkart schadet; letzteres, wenn die Möglichkeit vorliegt, jenen lebhaften Trieb zu mathematisch strenger Betätigung anzuleiten.

Ich möchte Ihnen zunächst in Erinnerung bringen, inwiefern gerade der anschauliche Zusammenhang der Kegelschnitte auf das Unendliche führt. Und zwar erlaube ich mir dabei eine etwas grössere Ausführlichkeit, als sie Fachgenossen gegenüber sonst nötig wäre, weil es sich hier um etwas Neues handelt und man bisher durch die übliche Richtung im neueren akademischen Geometrieunterrichte zur Ausschliessung des Unendlichen aus der eigentlichen räumlichen Vorstellungswelt angeleitet worden ist. Es handelt sich um die Kegelkrümmung, um die Ebene, welche schneiden soll, um die Lage derselben zu einer Geraden (Seitenkante des Kegels), um Parallelsein, kurz um die Schwierigkeiten des Unterschiedes von Gerade und Krumm, um den Schnittpunkt, der in das Unendliche läuft.

Der Scheitel des Kegelschnittes sei in einer Seitenlinie des Kegels und zwar in endlicher Entfernung vom Kegelscheitel angenommen (man stelle sich die Zeichnungen her; sie wurden auf der Versammlung in grösserem Massstabe aufgestellt). Der zweite Hauptscheitel entsteht dann durch Schnitt der Ebene mit der gegenüberliegenden Seitenlinie. Gehen wir von der Lage der Ebene aus, bei der sie einen Kreis liefert und lassen den zweiten Scheitel vom Kegelscheitel fortrücken, dann streckt sich die Ellipse mehr und mehr. Wenn man nicht daran denkt, dass man die schneidende Ebene weiter herumdrehen kann, so sollte man glauben, der Kegelschnitt bliebe immer eine Ellipse. Könnte man die Ebene nur bis zur parallelen Lage (parallel zur Seitenlinie) drehen, so würde man wohl die Parabel für eine Ellipse erklären, deren zweiter Scheitel in demselben Sinne „nicht mehr vorhanden oder fortgerückt“ wäre, wie der Schnitt von parallelen Geraden. Aber man kann die Ebene weiter drehen, und es stellt sich die auffällige Tatsache ein, dass man sich auf der anderen Seite einen Schnitt, auf dem Scheitelkegel eine Kurve vorstellen muss. Damit aber erlischt das Vorhandensein einer Kurve auf dem ursprünglichen Kegel nicht, wie man ohne Anschauung vielleicht denken könnte (man versetze sich stets in den Geist eines Schülers!), sondern wir stehen vor einer aus zwei Zweigen bestehenden Hyperbel. Dreht man rückwärts, so entfernt sich der zweite Zweig immer mehr, man möchte glauben, der Kegelschnitt bliebe immer eine Hyperbel und beim Wiederreichen der parallelen Lage möchte man die Parabel für eine Hyperbel erklären, deren zweiter Scheitel und zweiter Zweig in demselben Sinne „nicht mehr vorhanden oder fortgerückt ist“ wie der Schnitt der Parallelen.

Sollen wir nun die Anschauung zuklappen wie ein Buch? Fragt der Schüler nicht sofort: wieso ist denn nun jene Ellipse nicht dasselbe wie diese Hyperbel? Warum müssen wir nun der Parabel diese Sonderstellung einräumen, obgleich wir doch sehen, dass das Drehen sich ohne Sprung ausführen lässt? Es ist für uns sehr geläufig zu sagen, die Parabel sei der Grenzfall sowohl für Ellipse wie Hyperbel. Damit aber ist die Sonderbarkeit für den naiven Geist nicht fortgeschafft. Warum gilt das „sowohl?“ Der Schüler sieht immer wieder mit Erstaunen dies „Werden“ der Ellipse zur Parabel und dies Hingelangen der so ganz anders erscheinenden Hyperbel zur Gestalt der Parabel. Wir freilich lassen ihm kaum Zeit, dieser Verwunderung lange nachzugehen. Wir wollen weiter kommen, wir belehren ihn alsbald mit dem Worte des Grenzbegriffes. Er aber hält sich an die Anschauung, und diese zeigt ihm immer wieder den grundsätzlichen Unterschied in der Form der Ellipse und der zweiteiligen Hyperbel; sie zeigt ihm, dass bei der Parabel, welche doch der Grenzfall der Hyperbel sein soll, diese Zweiteiligkeit fort ist. Wo ist sie geblieben? Darf man dem Gedanken, der Anschauung nicht nachgehen? Wer an dieser Stelle die Schüler frei fragen lässt, der wird sich einer Menge von lebhafter Phantasie des jungen Geistes gegenüber sehen, wie ich es oft selbst im Unterrichte erfuhr. Es scheint sehr aufzuhalten, auch nur einigermassen auf diese, wie wir sagen möchten, Phantasieen einzugehen. Es scheint uns viel Verworrenes, Unreifes zutage zu kommen, womit wir selbst nichts anfangen können; und wir verzichten meist darauf, den Schüler selbst zur Ordnung hierin zu führen, wie wir es sonst gern mit den Gedanken der Lernenden tun — die Anschauung scheint zu versagen, zu verwirren, zu Unklarheiten, zu mathematisch Unbrauchbarem zu führen. Wenn man den Widerstand beobachtet, welchen der jugendliche Geist dem Absperren der weiteren anschaulichen Tätigkeit entgegenträgt, so möchte man fast seufzen: Ach wir Armen, zur Anschauung drängt doch alles!

Nur ungern lässt sich der Schüler das Buch der Anschauung hier zuklappen. Sagen wir gar, die Parallelen hätten nur einen unendlichfernen Punkt, rechts oder links, das sei gleichgültig, und dieser liege auf der unendlichfernen Geraden, so hört er verwundert zu. Wollen wir nicht bloss unsere Autorität in die Wagschale werfen, so müssen wir zugestehen, dass dies keine räumliche Vorstellung, keine anschauliche Geometrie mehr ist. In der Tat stimmen mit Recht viele Lehrer dafür, die sogenannten uneigentlichen Elemente, auch die imaginären Schnittpunkte von der Schule fortzulassen. Sollen wir nun schweigen? Was sagt sich der Schüler? Darf er, so fragt er häufig schüchtern: Kann der Scheitel der Ellipse nicht hintenherum und von der anderen Seite als Hyperbelscheitel wiederkommen?

Drehen wir die Ebene noch weiter, so gelangt der zweite Hyperbelscheitel schliesslich in den Kegelscheitel, die beiden Zweige werden, wie man sagt, zu einer Geraden mit einer Unterbrechungsstelle zwischen beiden Scheiteln der Hyperbel. Werden? fragt der Schüler und dürfen wir mitfragen. Schneidet die Ebene nicht tatsächlich in der ganzen, ununterbrochenen Geraden, falls sie diese Lage erhält? Warum soll schliesslich noch der Schnittgeraden die Bestimmung der Unterbrechungsstelle anhaften, wenn wir nicht in Gedanken doch noch vor dieser Lage sind? Auch hier handelt es sich um das Unendliche, die unendlichkleine Entfernung des zweiten Scheitels vom Kegelscheitel. So könnte ich auch den Fall ausführen, dass die Hyperbel zu zwei Geraden, die Parabel zu einem Strahle wird, der nur nach einer Seite vom Scheitel ausgeht, obgleich dann die der Seitenkante parallele Ebene wirklich in die unbegrenzte Seitenkante selbst hineingerückt sein soll. Kurz, das wirkliche Hineinrücken geht nicht, sonst haben wir die unbegrenzte Seitenlinie. Oder vielmehr, man muss die Anschauung bei diesem Grenzfalle oder bei dieser Beschränkung auf das Endliche ganz wunderbar ausmalen: es soll der Fall des völligen Zusammenfallens vorgestellt werden und doch soll auch noch der Fall des vorherigen nicht völligen Zusammenfallens festgehalten werden, und beides soll doch ein einziges Resultat geben, den Grenzfall. Das ist nicht mehr ein Verlangen, welches sich mit der Anschauung verträgt.

Aber was tun? Wir können dem Schüler nicht helfen, wenn es uns nicht gelingt, das Unendliche in der Vorstellung widerspruchslos, aber räumlich zu gestalten. Sollte das gelingen, so muss der Gegensatz von Krumm und Gerade, von Ebene und Kugel, so muss die Schwierigkeit des Parallelen mit dem Unendlichen ausgedeutet werden.

Werfen wir noch einmal den Blick auf die Figur des geschnittenen Kegels! Zwei den Kegel von innen berührende Kugeln liefern bekanntlich auf der Schnittebene die Brennpunkte des Kegelschnittes. Diese Kugeln werden immer grösser, wenn die Ellipse sich verlängert, bis sie Parabel wird, dann aber erscheint die eine Kugel, in das Unendliche vergrössert — wie der Schüler unwillkürlich sagt: — im Scheitelkegel und liefert den zweiten Brennpunkt der Hyperbel; sie kommt nun näher und wird wieder kleiner. Darf man nun sagen, es sei dieselbe Kugel, welche den zweiten Brennpunkt der Ellipse lieferte, und die Fortsetzung der Kugelvergrösserung gehe in eine Verkleinerung, von der anderen Seite her, über? Ohne völlige mathematische Aufklärung nicht, so gern es auch der Schüler möchte!

Die Entstehung der Kegelschnitte durch Leitkreis führt auf dieselben Fragen. Liegt der feste Punkt ausserhalb, der gleiche Entfernung von einem Kurvenpunkt, wie dieser vom Leitkreis haben soll, so ist er der eine und der Kreismittelpunkt der andere Brennpunkt der Hyperbel, oder umgekehrt. Die Asymptoten geben am schnellsten ein Bild vom ungefähren Verlauf der Kurve. Um sie zu erhalten, muss man Tangenten vom festen Punkte an den Kreis legen: die Frage der Berührung, ein Kapitel aus der Lehre des Unendlichkleinen liegt vor uns. Die Asymptoten haben im Unendlichen keinen endlichen Abstand mehr von der Kurve und zwar von beiden Zweigen; spricht man von Berührungen einer Asymptote mit der Kurve, so müssen diese im Unendlichen liegen; man pflegt wieder von nur zwei unendlichfernen Punkten zu sprechen, welche die Hyperbel mit der unendlichfernen Geraden gemeinsam habe, anstatt von vier Berührungen, wie der Schüler vermuten sollte. Wird der Leitkreis unendlich, so soll die Parabel entstehen; wieder liegt die Frage vor vom Krummen und Geraden mit Beziehung auf das Unendliche. Wo ist die Asymptote geblieben? fragt der Schüler bei der Parabel. Soll man ihm zumuten, dass er sich einen einzigen Schnitt mit einer unendlichfernen Geraden vorstellen müsse? Wölbt sich die Leitlinie ein klein wenig nach dem festen Punkte zu, so erscheint sie von diesem aus konkav und man kann sagen: der Punkt liege im inneren des Leitkreises. Es müsste eine Ellipse entstehen. Sofort? pflegt der Schüler zu sagen, indem er sich einbildet, man könne mit der Biegung der geraden Leitlinie einmal einen kleinen Anfang machen und hätte nun eine ein klein wenig mehr gebogene Parabel, die schon eine Ellipse sei.

Man kann es ihm nicht verdenken, wenn er die drei ineinander übergehenden Kurven mit demselben Scheitel als einen einzigen Kegelschnitt, ja als eine einzige Form auffassen will. Und doch muss er nun drei verschiedene Vektorengesetze aufstellen über Differenz, Vektorengleichheit und Summe der Radien. Man kann es ihm wieder nicht verdenken, wenn er diese drei Gesetze als ein einziges aussprechen und es derartig in der Anschauung auch sehen oder besser sich in räumlicher Vorstellung bilden will. Denn aus der Anschauung entstand ja jedes Gesetz. Aber wie soll er das anstellen? Der nach dem Leitkreise hingehende Strahl wird für die Parabel parallel zur Hauptachse! Wieder fragt man: schneidet die Parallele noch und wie? Hat sie noch eine Neigung zur Achse oder nicht? Für die Hyperbel lief der eine Vektor nach dem Inneren, der andere (zum Kreismittelpunkt) nach aussen, in das Konvexgebiet der Kurve hinein, für die Parabel auch, für die Ellipse nicht — warum nicht? Kann man ihn nicht auch für die Ellipse nach aussen ziehen und so vielleicht ein Differenzgesetz zustande bringen wie bei der Hyperbel? Ist es für die Parabel nicht als Summen- oder Differenzgesetz auffassbar?

Die projektive Ableitung scheint hier mehr sagen zu wollen. Figur 1 sei so her-

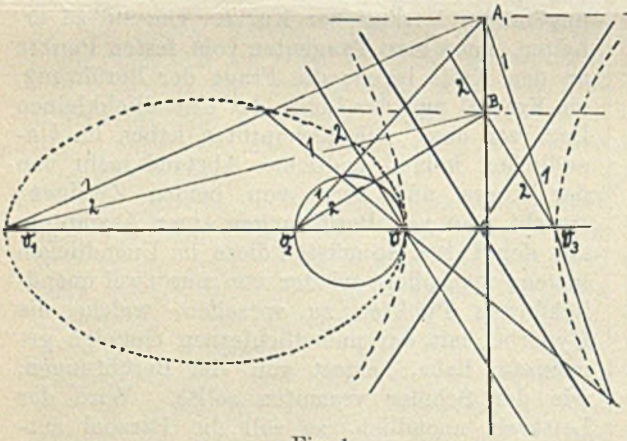


Fig. 1.

gestellt. Der Kreis mit dem Durchmesser 0_2 0 enthält als Kegelschnitt die entsprechenden Schnittpunkte von Strahlen zweier projektiven Büschel, die der Einfachheit halber die Zentra 0_2 und 0 haben mögen. Die Strahlen 1 und 2 des Zentrums 0_2 mögen nach A_1 und B_1 einer perspektiven Geraden laufen. Lässt man dann nach diesen beiden und beliebig viel anderen entsprechenden Punkten der perspektiven Geraden Strahlen eines dritten Büschels 0_3 oder 0_1 laufen, deren Zentra auf der verlängerten Geraden 00_2 liegen mögen, so ist das Büschel 0 projektivisch zum Büschel 0_3 oder 0_1, liefert also als Schnittkurve mit den Strahlen dieses Büschels einen Kegelschnitt, der aber nun nicht ein Kreis ist, wie für 0 und 0_2. Die Strahlen 1 und 2 des Büschels 0_3 haben entgegengesetzten Drehungssinn wie die entsprechenden des Büschels 0; es entsteht eine Hyperbel mit den Hauptscheiteln 0 und 0_3. Die Strahlen 1, 2 usw. des Büschels 0_1 haben denselben Drehungssinn wie das Büschel 0; es entsteht eine Ellipse mit den Hauptscheiteln 0 und 0_1. Ist 0_3 so gefunden, dass in B_1 eine Parallele zum Strahle 2 des Büschels 0 gelegt wurde bis zum Schnitte mit der Achse 00_2, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen 2 der beiden Büschel nicht oder „im Unendlichen", folglich müssten die von diesen Strahlen etwa gelieferten Punkte der Kurve im Unendlichen liegen. Der Strahl 2 gibt die Richtung einer Asymptote der Hyperbel an. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist die Mitte von 00_3, und durch diese Mitte kann man leicht die in der Figur stark gezogenen Asymptoten legen.

Wann aber hat man es mit einer Parabel zu tun? Der zweite Scheitel darf nicht rechts im Endlichen und nicht links im Endlichen liegen. Die nach A_1 und B_1 laufenden Strahlen dürfen weder denselben noch entgegengesetzten Drehungssinn wie das Büschel 0 haben oder sowohl das eine wie das andere, sie müssen parallel zur Achse liegen. Man weiss wieder nicht: liegt der neue Scheitel, das neue Zentrum rechts oder links im Unendlichen? Laufen die sämtlichen durch A_1, B_1 usw. gelegten Parallelen nach einem Punkte rechts oder links? Es handelt sich also wieder stets um das Parallelsein, um Krumm und Gerade. Diese Begriffe oder diese Anschauungen müssten durch eine räumliche Lehre vom Unendlichen mathematisch sicher geklärt sein, wenn man die unräumlichen Definitionen des unendlichfernen Punktes und der unendlichfernen Geraden für den Unterricht entbehren und doch eine anschauliche Einheit der Kegelschnitte erreichen will, wie sie der Schüler lebhaft wünscht.

Sehr geehrte Herren Kollegen, ich möchte nun nicht erwarten, dass Sie meine Lehre von den Weitenbehaftungen einfach als die einzig richtige Behandlung des Unendlichen anerkennten. Ich bitte Sie nur im folgenden darauf zu sehen, ob das, was ich sage, möglich ist, ohne Widerspruch, d. h. ohne Widerspruch zur gesamten tatsächlichen endlichen Geometrie, abgesehen also vom Grenzbegriffe und den „unanschaulichen, uneigentlichen, unendlichen Elementen." Wenn man freilich auf dem Standpunkte steht, mit der Einführung dieser Wortbestimmungen sei das Unendliche ein für alle Mal abgetan, also jeden Fortschritt nach Richtung der räumlichen Vorstellung des Unendlichen leugnet, so wird man auch keine Lust haben, sich mit dieser neuen Darstellung zu beschäftigen. Aber mit der blossen Behauptung, das Unendliche sei abgetan, ist freilich nichts bewiesen; auch mit der Tatsache nichts, dass so viele Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts der Bestrebung nach unendlicher Anschaulichkeit grundsätzlich den Rücken kehren. Der Schule ist hiermit wenigstens gewiss nicht gedient. Da Ihnen die Grundbegriffe im allgemeinen bekannt sind, auch meine Vorschläge, wie man das Unendliche vorstellungsmässig auf der Schule verwenden kann*), so darf ich etwas kürzer sein, als dies sonst möglich wäre. Aber für meinen heutigen Vortrag ist das Pädagogische die Hauptsache. Gestatten Sie mir drum einen Vergleich zu benutzen, der wie alle Vergleiche hinkt, aber doch für die Jugend im Anfange leicht fasslich ist. Denken wir uns ganz winzige Geschöpfe auf einer flachen Gegend unserer Erde, so würde dieselbe ihnen unendlichgross und zwar wie eine Ebene erscheinen. Bei ihren winzigen Wanderungen würden sie die Krümmung der Erde nicht so bemerken, wie wir grösseren Geschöpfe, und doch wissen wir, dass die Erde kugelig ist. Nun mögen wir uns vermöge unserer grossen räumlichen Vorstellungskraft in diese winzigen Geschöpfe hineinversetzen, aber doch auch wieder einmal in unsere Lage als grössere Wesen, d. h. wir mögen die Fähigkeit verschiedener Weitenbehaftungen besitzen. Soll dies der Lehre von den Weitenbehaftungen entsprechen, so müsste die Gegend für die winzigen Geschöpfe oder für die Weitenvorstellung dieser niederen Wesen wirklich eine Ebene sein, oder wir müssten in uns die Fähigkeit haben, beim Hineinversetzen in solche Geschöpfchen uns eine solche Gegend wirklich als Ebene vorzustellen ohne mathematische Fehler für alle in dieser Gegend gezeichneten Figuren, zugleich aber auch bei der höheren Weitenbehaftung einer Erweiterung der geraden Linie jenes Gebietes zu kugelig gekrümmten fähig sein. Die beiden Fähigkeiten oder Weitenbehaftungen wären mathematisch klar und sicher durch Gesetze oder Grundsätze des Unendlichen getrennt und doch auch verbunden (siehe das genannte Buch).

Stellen wir uns eine Kugel mit dem Radius ∞^2 vor; in dieser Weitenbehaftung hat solche Kugel Eigenschaften und Grössenverhältnisse wie eine endliche Kugel im Sinnlichvorstellbaren oder eine mit dem Radius ∞^1 im Uebersinnlichvorstellbaren erster Ordnung. Der Unterschied der einen und der anderen Ordnung besteht darin, dass bei gleichzeitiger Vorstellung mehrerer Weitenbehaftungen ein Gebiet der Kugeloberfläche, das einer niedrigeren Behaftung angehört, für diese Behaftung eben ist. Eine endliche, sonst aber beliebig grosse Ebene (es ist wohl zwischen beliebig und höherer Behaftung zu unterscheiden!) kann zugleich einer Kugelkrümmung höherer Ordnung angehören, sobald man nämlich diese Behaftung hinzuzieht. Eine Gerade in sinnlichvorstellbarer Ebene kann mit Hinzuziehung höherer Behaftung zum grössten Kugelkreis erweitert werden und zwar ohne jeden Fehler für die Vorstellung des Geraden im Endlichen. Wir können eine unendliche Kugel auch durch Zeichnung andeuten, als wären wir zeichnende Geschöpfe der höheren Ordnung; alles, was wir daran an Linien zeichnen, ist ebenso, als wäre es eine endliche Kugel, nur beim Hinzuziehen der niederen Behaftung müssen wir auf die Beziehungsgesetze der Behaftungen acht geben!

Wählen wir von den Kegelschnitten zunächst den Kreis! Derselbe liege auf der Kugel und zwar um einen Punkt M der Oberfläche herum in demselben Sinne wie auf der Erde ein Parallelkreis um einen Pol. Gehört der Kreis derselben Behaftung an wie die Kugel, so ist sein eigentlicher Mittelpunkt nicht dieser Pol; befindet er sich aber in einem kleinen Gebiete der Kugel, nämlich von niedrigerer Ordnung, so ist die kugelige Kalotte eben und sein Mittelpunkt fällt mit dem Pole zusammen. Kann ich solchen Kreis definieren durch Entfernungen von seinem auf der Kugel liegenden Mittelpunkte (dem Erdpole)? Irgend ein Punkt des Kreises habe vom Mittelpunkte die auf der Kugel als grössten Kreisbogen gemessene Entfernung $PM = r$, oder doppelt gerechnet $2r$ gleich seinem Durchmesser. Wir müssen unterscheiden zwischen der Konkavfläche (Kalotte) und dem übrigen Teile der Kugeloberfläche, der Konvexfläche dieses Kreises. Der Mittelpunkt (nördliche Erdpol) hat einen Gegenmittelpunkt M' (südlicher Erdpol) in der Konvexfläche. Zieht man von P den Radius nicht nach innen hinein bis M, sondern nach aussen durch M' um die Kugel herum bis zu dem Endpunkte des inneren Durchmessers und noch weiter bis M, und zieht von diesem den kurzen Konkavradius PM ab, so hat man als Differenz der nach M gezogenen Radien (geodätischen Linien) nicht den inneren Durchmesser, sondern den Durchmesser der Konvexfläche des Kreises. Also kann man auf der Kugel den Kreis sowohl definieren durch Summe wie durch Differenz der nach M gezogenen geradesten (geodätischen) Linien. Ist der Kreis endlich, während die Kugel von höherer Behaftung ist, so kann dieser dann ebene, endliche Kreis auf gewöhnliche Art durch den doppelten Radius, oder auch durch die Differenz der Radien erklärt werden, deren einer nach aussen durch das Unendliche gezogen ist.

*) Vergl. meinen Vortrag auf der vorigen Hauptversammlung in Heft 1, 2 dieses Jahrganges und mein Buch: Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. B. G. Teubner, 1902, usw.

In entsprechender Art kann man eine kugelige Ellipse definieren durch einen auf der Kugel liegenden Leitkreis und einen festen in der Konkavfläche liegenden Punkt und wieder das Gesetz der Summe von den zwei nach innen gerichteten Vektoren oder ebensogut die Konstanz der Differenz benutzen, indem man den einen Vektor nach dem Konvexraume um die Kugel herum zum anderen Brennpunkt zieht. Auch hierfür kann man die Behaftung der endlichen Ellipse mit der unendlichen Behaftung der Kugel verbinden. Definieren wir entsprechend eine Hyperbel durch einen Leitkreis und einen aussen (im Konvexen) gelegenen festen Punkt, so sollte man unwillkürlich auf den früher erwähnten Gedanken kommen, der eine Zweig dieser Kurve werde um die ganze Kugel herumlaufen und auf der anderen Seite wieder kommen als zweiter Zweig. Dann hätte der Schüler recht, welcher auf diese Idee kommt. Aber bei genauer mathematischer Betrachtung an der unendlichen Kugel zeigt sich dies als falsch. Nehmen wir einmal an, es sei in Figur 2

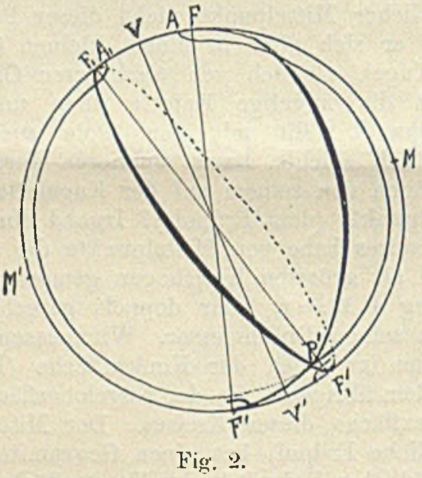


Fig. 2.

der Punkt P' ein sehr von den Scheiteln A und A_1 und den Brennpunkten F und F_1 entferner Punkt dieser sonderbaren Kurve, so müsste $P'F_1 - P'F$ die konstante Differenzgrösse haben. Ist nun F_1' der Gegenpunkt (gewissermassen Gegenpol auf der Erde, falls F_1 ein Pol ist) von F_1, so ist $P'F_1 - P'F = 180 - P'F_1' - (180 - P'F') = P'F' - P'F_1'$, und zwar müsste dies gleich 2 a, der grossen Achse der Hyperbel, also $= AA_1$ sein. Dies ist aber nur möglich, wenn es zu P' in der Gegend der Scheitel- und Brennpunkte einen Gegenpunkt P der Kurve gibt; denn die Figur $P'F'F_1'$ wäre dann kongruent der Figur PFF_1 und $PF - PF_1 = 2a$. Nun gibt es aber in der Gegend zwischen den Scheiteln A und A_1 keinen Hyperbelpunkt, also kann es auch in der gegenüberliegenden Gegend keinen Gegenpunkt der Kurve geben, kurz, die Kurve hat auf der gegenüberliegenden Seite der Kugel ein kongruentes Aussehen, es müssen daselbst zwei Gegenscheitel, eine entsprechende Gegenkonvexachse zu AA_1 existieren, und zu dem Mittelpunkte V gibt es einen Gegenkonvexmittelpunkt V'. Es ist danach klar, dass diese dem Differenzgesetz der Vektoren gehorchende kugelige Kurve (Kugelhyperbel) aus zwei Zweigen bestehen muss, die sich im Unendlichen schliessen wie Ellipsen (angedeutet bei F' und F_1') und Konkavmittelpunkte M und M' (Figur 2) wie Ellipsen besitzen. Man kann nun noch beweisen, dass jede Ellipse eine Gegenellipse auf der Kugel besitzt, und da sie, wie wir sahen, auch durch das Differenzgesetz der Vektoren definiert werden kann, so hört für das Unendliche der wesentliche Unterschied zwischen der zweizweigigen Hyperbel und der Ellipse, die nun auch zwei Teile hat, auf. Das Gesetz gestaltet sich folgendermassen: Der allgemeine Kegelschnitt besteht aus zwei elliptisch gekrümmten, einander gegenüberliegenden, kongruenten Zweigen; er besitzt zwei grosse Konkavachsen je $= 2a$ im Konkavraum zwischen den grossen Scheiteln jedes Zweiges, zwei grosse Konvexachsen im Konvexraum zwischen einem Scheitel des einen und dem nächsten Scheitel des anderen Zweiges $= 180 - 2a$. Die Summe der nach dem Konkavgebiet gerichteten Radiivektores ist $= 2a$; die Differenz eines nach einem inneren Brennpunkte und eines nach dem Gegenpunkte des anderen Brennpunktes gerichteten Radius ist gleich jeder Konvexachse $= 180 - 2a$.

Ist nämlich in Figur 3 der Mittelpunkt des einen Leitkreises $L_1 L L_2$ der Brennpunkt F_1,

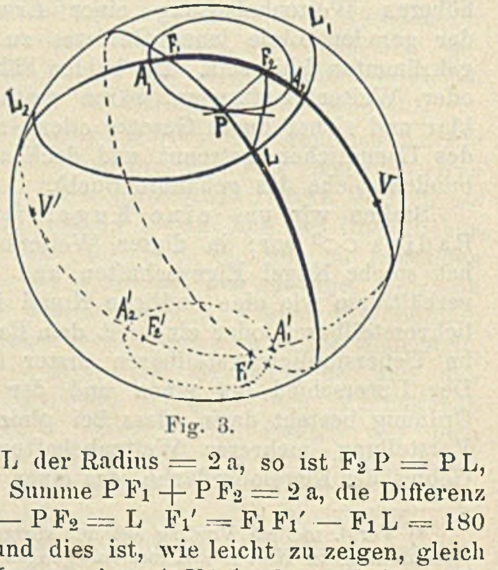


Fig. 3.

also F_1L der Radius $= 2a$, so ist $F_2P = PL$, also die Summe $PF_1 + PF_2 = 2a$, die Differenz $PLF_1' - PF_2 = L\ F_1' = F_1F_1' - F_1L = 180 - 2a$ und dies ist, wie leicht zu zeigen, gleich einer Konvexachse A_2VA_1' oder $A_2'V'A_1$. Ist nun eine elliptische Hauptachse, d. h. Konkavachse endlich, so haben wir im Endlichen eine

Ellipse. Sind aber die vier Leitkreise und die Konvexabstände der Scheitelpunkte endlich, so haben wir in der Gegend einer solchen Konvexachse eine endliche Hyperbel; Asymptoten gehen durch jeden Konvexmittelpunkt als grösste Kugelkreise und haben im Unendlichen gewisse Stellen (für bestimmte Behaftung) mit den Zweigen gemeinsam. Die Ausführung aller solcher Fragen nimmt hier zu viel Zeit in Anspruch und wird in einem besonderen Buche über die Kegelschnitte erscheinen.*) Ist der Leitkreis von der Ordnung ∞^1, hat aber der feste Punkt endliche Entfernung von seinem Umfange, so ist diese endliche Gegend des Umfanges eine endliche Gerade und man hat eine Parabel für das Endliche, die sich aber dennoch zu einem Zweige des allgemeinen Kegelschnittes für die Behaftung ∞^2 erweitert.

Die projektive Ableitung hat gleichfalls für die unendliche Kegelschnittkugel keine besonderen Schwierigkeiten. Die gerade Achse 00_2 in Figur 1 wird zu einem grössten Kugelkreis erweitert vorgestellt (Figur 4). Die Strahlen

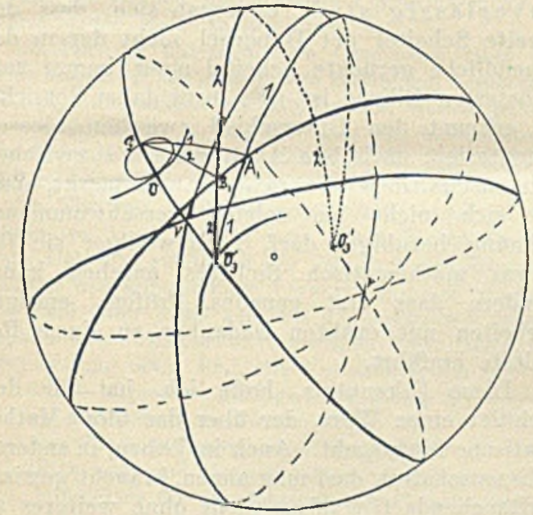


Fig. 4.

jedes Büschels können ohne den geringsten Fehler für das Endliche für die höhere Behaftung gleichfalls kugelig gekrümmt vorgestellt werden. Dann existiert zu jedem Zentrum auf der Kugel ∞^2 ein Gegenzentrum, z. B. $0_3'$ zu 0_3. Die perspektive endliche Gerade A_1B_1 ist ein zur grossen Achse senkrechter Kugelkreis. 0 und 0_3 liegen in jener endlichen Gegend auf verschiedenen Seiten von A_1B_1, der Drehungssinn ist verschieden und 00_3 sind die Scheitel einer endlichen Hyperbel. Ersetzt man aber 0_3 durch sein Gegenzentrum $0_3'$ und ordnet dies zu 0, so haben dieselben Strahlen 1 und 2 des Büschels 0_3, wenn sie von $0_3'$ aus kommen, in Beziehung auf die perspektive Gerade den gleichen Drehungssinn wie die Strahlen von 0.

In der Tat also sind 0 und $0_3'$ die Scheitel der Konkavachse einer sich im Unendlichen elliptisch schliessenden Kurve, und diese ist der eine Zweig des allgemeinen Kegelschnittes, also auch der genannten Hyperbel mit der Konvexachse 00_3. Die Asymptoten laufen durch den Mittelpunkt V von 00_3 als grösste Kugelkreise und durch den Gegenkonvexmittelpunkt V'. Liegt endlich 0_3 in einer Entfernung ∞^2 von 0, so sind die in der endlichen Gegend von 0 und der perspektiven Geraden (vergl. auch Figur 1) für das endliche Parallele und für diese Behaftung ist kein bestimmter Drehungssinn mehr vorhanden, wir haben die endliche Parabel, die aber für das Unendliche als allgemeiner kugeliger Kegelschnitt aufzufassen ist.

Darf man, so könnte man fragen, die genannten kugeligen Gebilde überhaupt Kegelschnitte in dem uns gebräuchlichen Sinne nennen? Ich habe mehrfach betont, dass eine endliche Gegend der unendlichen Kugel eine endliche Ebene ist und die daselbst in Vorstellung gelangende Gegend des allgemeinen Kegelschnittes durchaus genau die Eigenschaften eines der uns bekannten endlichen Kegelschnitte hat. Kann man aber die Vorstellung des Kreiskegels auch richtig in die höhere Behaftung bringen, sodass die unendliche Kugel dieses erweiterte Kegelgebilde wirklich im genannten allgemeinen Kegelschnitte schneidet? Das hat keine besonderen Schwierigkeiten, sobald man auch die geraden Seitenlinien des endlichen Kegels in bestimmter Weise zu solchen Linien erweitert, die im Unendlichen gekrümmt sind. Es existiert dann zur Spitze S des endlichen Doppelkegels eine Gegenspitze S' und zwischen beiden verläuft dieser allgemeine Kegel etwa wie eine ungeheure Doppelwurst. In der Tat kann man sich ein solches Gebilde vorstellen und es durch unendliche Kugeln durchschneiden so, dass die Formen des allgemeinen Kegelschnittes entstehen. Eine Kugel wie KK (Figur 5)

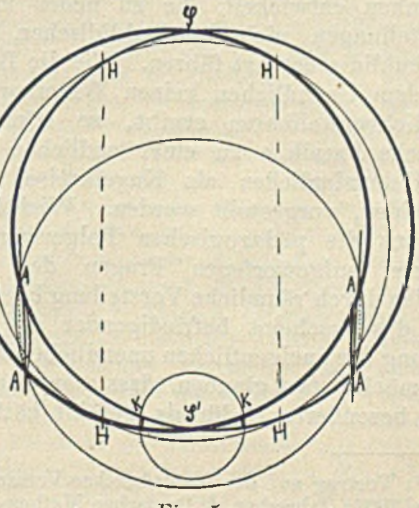


Fig. 5.

*) H. W. Schmidts Verlag, Jena, Jan. 05.

kann bei entsprechender Weitenbehaftung des allgemeinen Doppelkegels zwei Kreise bei K und K liefern; eine grössere Kugel zwei Ellipsen wie AA, eine noch grössere derartig grosse Ellipsen HH, dass zwei benachbarte Scheitel schliesslich in der endlichen Nähe eines Kegelscheitels wie S oder S′ die Enden einer Hyperbelachse sind und daselbst der Schnitt von Kugel und Kegel genau als endliche Hyperbel vorstellbar ist. Auch die Frage der anfangs erwähnten Berührungskugeln erledigt sich ohne grosse Schwierigkeit, indem jeder allgemeine Kegelschnitt seine vier Brennpunkte durch vier in dem Doppelkegel steckende Kugeln erhält. Wer all dieses in so kurzer Frist zum erstenmal hört, wird sich noch nicht gleich hineinfinden, ich habe aber bemerkt, dass die Jugend mit ihrer grossen Gestaltungskraft leicht nachfolgt und vieles selbst richtig weiter finden kann.

Gestatten Sie mir noch einige allgemeine Bemerkungen! Wenn man so ohne Widersprüche jede Ebene zur unendlichen Kugeloberfläche erweitern kann, und sich für die ebenen, in das Unendliche laufenden Kegelschnitte, die Parabel, Hyperbel oder unendliche Ellipse eine einzige einheitliche Vorstellung ergibt, die uns erlaubt, die im Anfange aufgeworfenen Wunschfragen zu erfüllen, so möchte man auf den Gedanken kommen, unser Raum sei vielleicht als kugelig gekrümmt im Unendlichen anzusehen. Das Krümmungsmass für die Ebene ist für das Endliche Null; aber man kann es für das Unendliche als $\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 1 : \infty^2 = \delta^2$, also als unendlichklein von zweiter Ordnung ansehen. Es erinnert dies unwillkürlich an gewisse Fragen der nichteuklidischen Geometrieen. Nach der Lehre von den Weitenbehaftungen würde die Antwort weder schlechthin nein noch ja lauten. An anderer Stelle *) habe ich die Grundgedanken entwickelt, die zu neuen möglichen Vorstellungen nicht antieuklidischer, sondern übereuklidischer Art führen. Wie die Behaftung mit dem Unendlichen keinen Widerspruch zum Sinnlichvorstellbaren ergibt, so können auch endliche Parallele zu einer endlichen Geraden im Uebersinnlichen als Kugelkreise, die sich schneiden, vorgestellt werden. Wichtiger sind für uns die pädagogischen Folgerungen. Die anfangs aufgeworfenen Fragen des Schülers werden durch räumliche Vorstellung beantwortet, und das erscheint befriedigender als die Einführung der uneigentlichen unendlichen Elemente. Ich möchte fast glauben, dass man nach diesen kein besonderes Bedürfnis gefühlt hätte, wenn man auf klare und widerspruchslose Art bereits früher das Unendliche hätte räumlich behandeln können. Jede Umgewöhnung freilich ist unangenehm; darum ist es mir auch begreiflich, dass diejenigen von den Weitenbehaftungen nicht viel wissen möchten, welche in ihren Arbeiten bisher sich immer der uneigentlichen unendlichen Elemente bedient haben. Dabei verkenne ich keineswegs den Wert derselben in allgemein mathematischer Beziehung. Der Schüler jedenfalls ist dem Anschaulichen zugänglich. Kann man einen pädagogischen Nutzen aus der vorgetragenen Darstellung der Kegelschnitte ziehen? Zunächst ist das S t r e b e n n a c h E i n h e i t, n a c h Z u s a m m e n h a n g wissenschaftlich bildend und an sich keinesfalls zu verwerfen, wenn es beim Schüler hervortritt. Eine besondere Befriedigung ist es für den jugendlichen Geist, wenn er sieht, dass seine kühne Idee vom Wiederkehren des Kegelschnittscheitels doch nicht ganz falsch war, sondern mathematisch scharf ausgestaltet werden kann. E r l e r n t z u g l e i c h, d a s s b l o s s e A h n u n g e n n i c h t z u v e r l ä s s i g s i n d: es ergab sich, dass der zweite Scheitel der Hyperbel nicht der in das Unendliche gerückte Scheitel einer immer vergrösserten Ellipse ist. Er lernt dabei Vorsicht, er erkennt den Unterschied zwischen blossen Phantasien, zwischen Ahnungen und zwischen wissenschaftlicher Betrachtung. Er merkt, dass er sich nicht bei solcher verschwommener Ahnung beruhigen darf, noch weniger sie für etwas mathematisch Sicheres ansehen kann, sondern dass erst genaues Prüfen, emsiges Arbeiten mit exakten Gedanken zu einem Resultate hinführt.

Diese Erkenntnis, hoffe ich, hat für den Schüler einen Wert, der über das bloss Mathematische hinausgeht. Auch im Leben, in anderen Wissenschaften darf man ahnen, braucht gewisse auftauchende Gedanken nicht ohne weiteres zu verwerfen, aber man hat dann die Pflicht der strengen, fleissigen Prüfung. Führt sie zu gewünschter widerspruchsloser Klarheit, so darf man die Ahnung beibehalten, freilich ausgedeutet nach dem strengen Gesetz des Denkens. Im anderen Falle muss man verwerfen oder besser sich zu dem Geständnis entschliessen: die Antwort war mir nicht möglich, ich muss mich bescheiden und mich begnügen. Wenn ich nicht irre, arbeiten wir im späteren Leben alle so, wir sind nicht blosse Maschinen, die sich durch nichts als die trockene, lückenlose Logik bestimmen liessen, wir ergreifen oft Ideen, und suchen dann nach ihrer Bestätigung durch die Prüfung, um sie entweder ohne Erbarmen zu verwerfen oder als richtig zu verwerten: das verleiht der Arbeit ein Gefühl der Befriedigung und der Freude.

*) Vortrag auf der Naturforscher-Versammlung in Kassel 1903: Jahresber. d. Deutschen Mathemat. Verein. Mai 1904.

Diskussion über die Bildungsaufgabe der Mathematik

auf der Hauptversammlung zu Halle.*)

Für diese Diskussion hatte der Vortragende Nath den wesentlichen Inhalt seines Vortrages**) in die nachstehenden Leitsätze zusammengefasst.

1. Die Hochschule bietet Berufsausbildung auf Grund wissenschaftlicher Studien, die Fachschule gibt Gelegenheit zum Erwerb solcher Kenntnisse und Fertigkeiten, wie sie für die Betätigung auf einem Felde des praktischen Lebens erforderlich sind, — die Bildungsschule überliefert einen für die Erfassung des Kulturlebens notwendigen Kreis des Wissens, indem sie zugleich damit und dadurch den Geist ihrer Zöglinge zu entwickeln und zu bilden sucht.

2. Als Bestandteil dieses von der Bildungsschule mitgeteilten Wissens hat die Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen die Aufgabe

in materialer Beziehung: ein nach der Eigenart der einzelnen Schulorganismen verschieden abgegrenztes Gebiet des Wissens zu überliefern und die Schüler fähig zu machen, diesen Stoff in selbsttätigem Können zu verwerten;

in formaler Beziehung: sich an der allgemeinen geistigen Ausbildung der Schüler in sinnlicher, intellektueller, ethischer und ästhetischer Hinsicht in einer ihr eigenen, durch andere Lehrfächer nicht zu ersetzenden Weise zu beteiligen.

3. Für die humanistischen Gymnasien muss der Wissensstoff auf die elementaren Disziplinen beschränkt werden, unbeschadet der Möglichkeit, Gesichtspunkte und Ausblicke zu bieten, die über sie hinausweisen; für die realistischen Lehranstalten ist die Einbeziehung der Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung nötig.

4. Ein auf das Wichtigste und Notwendigste beschränktes, aber sicheres und klares Wissen ist das erste Ziel; das zweite ist die Fähigkeit möglichst gewandter und selbständiger Verwertung dieses Wissens. Das Feld dafür bietet zunächst die Mathematik selbst; dann, soweit nicht besondere sachliche Belehrungen zur Vorbereitung nötig sind, die Verhältnisse des Lebens.

5. Die allgemeine geistige Entwicklung der Schüler hat die Mathematik zu fördern, indem sie

a) die Raumanschauung ausbildet und übt,

b) Sicherheit und Gewandtheit der Denkoperationen, mindestens für das Gebiet der Mathematik selbst, herbeiführt,

c) den Sinn für wissenschaftliche Betrachtungsweise erweckt,

d) ethische und ästhetische Anregungen gewährt.

Der Vorsitzende Hamdorff stellte fest, dass der Inhalt der Thesen fast überall Zustimmung finde, nur der zweite Absatz der These 3 sei Gegenstand von Meinungsverschiedenheiten. Demgemäss schlug er vor, die Debatte über diese These 3 bis zum Schluss zu verschieben, und vorher die anderen Thesen durchzusprechen, bei denen es sich in der Hauptsache nur um Aenderungen in der Fassung handeln werde. Die Versammlung stimmte diesem Vorschlag zu.

In der sehr eingehenden Debatte, die sich nunmehr entspann, wurden die beiden ersten Leitsätze unverändert angenommen, eine ganze Reihe von Rednern erklärte ihre entschiedene Zustimmung zu diesen Sätzen, sowohl dem Inhalt als der Form nach. Nur Thaer (Hamburg) nahm insofern eine etwas abweichende Stellung ein, als er eine gewisse Berücksichtigung des späteren Berufs auch schon auf der höheren Mittelschule für angezeigt hielt, der so geschickt abgefassten These 1 glaubte er indessen auch von seinem Standpunkte aus zustimmen zu können.

Zu These 4 wurde von mehreren Seiten bemerkt, dass das im zweiten Absatz dieser These näher umschriebene Anwendungsgebiet der Mathematik zu eng begrenzt sei, es fehlten darin die Anwendungen auf die naturwissenschaftlichen Verhältnisse, ferner sei es nicht richtig, die Anwendbarkeit auf die Verhältnisse des Lebens davon abhängig zu machen, dass besondere Belehrungen zur Vorbereitung nicht erfordert würden. Das reime sich z. B. nicht mit dem durch die Lehrpläne auch gegenwärtig schon vorgeschriebenen Betrieb der Zinseszinsrechnung, der doch eine gewisse Belehrung über die einschlägigen wirtschaftlichen Verhältnisse ganz unvermeidlicherweise voraussetze. Auszuschliessen seien nur Anwendungen, die umfangreichere und infolgedessen vermöge der Knappheit der verfügbaren Zeit unmögliche Belehrungen erforderten.

Demgemäss einigte man sich schliesslich dahin, dem zweiten Absatz des Leitsatzes 4 die nachstehende Fassung zu geben:

„Das Feld dafür bietet zunächst die „Mathematik selbst; dann die natur- „wissenschaftlichen Unterrichtsfächer, „insbesondere die Physik; endlich auch, „soweit nicht besondere umfang- „reichere sachliche Belehrungen zur „Vorbereitung nötig sind, die Ver- „hältnisse des Lebens."

Bei den in These 5 aufgeführten einzelnen Seiten, nach denen die Mathematik die allgemeine geistige Entwickelung der Schüler zu fördern hat, wurden von mehreren Seiten die in Punkt b hinzugefügten Worte „mindestens für das Gebiet der Mathematik selbst" beanstandet. Es wurde betont, dass es sich hier gerade um die allgemeine, über das Gebiet der Mathematik hinausgreifende Geistesschulung handle, damit reime sich nicht die besondere Betonung der auf dem Gebiete der Mathematik selber zu erzielenden Wirkung. Die Versammlung erkannte die Berechtigung dieser Beanstandung an und beschloss die Streichung der erwähnten Worte.

Apel (Halle) betonte die Bedeutung, die der mathematische Unterricht für die Erziehung zum klaren Gedankenausdruck besitze. Der Lehrer der Mathematik mache vielfach die Erfahrung, dass eine Wirkung des Sprachunterrichts auf die Gewohnheit sich klar und richtig auszudrücken, im mathematischen Unterricht nicht hervortrete, meistens müsse er die Ausbildung der Schüler auch nach dieser Richtung hin selbst übernehmen, seiner Meinung nach sei die dadurch den Schülern zuteil werdende Erziehung von einer über das Gebiet der Mathematik selbst hinausreichenden Tragweite.

Diese Ausführungen fanden mehrfach lebhafte Zustimmung, einstimmig wurde die Einfügung eines entsprechenden Passus in These 5 unter Buchstabe c beschlossen, während die bisher mit c und d numerierten, von der Versammlung anstandslos angenommenen Einzelpunkte nunmehr die Buchstaben d und e erhielten. Demgemäss stellte sich der Wortlaut des Leitsatzes 5 nach dem Beschluss der Versammlung, wie folgt:

5. „Die allgemeine geistige Entwicke- „lung der Schüler hat die Mathematik „zu fördern, indem sie

*) S. Unt.-Bl. X, 3, S. 65.

**) S. Unt.-Bl. X, 4, 5, S. 73, 97.

„a) die Raumanschauung ausbildet und übt,
„b) Sicherheit und Gewandtheit in den Denkoperationen herbeiführt,
„c) die Schüler zu der Gewohnheit klaren und scharfen Ausdrucks der Gedanken erzieht,
„d) den Sinn für wissenschaftliche Betrachtungsweise erweckt,
„e) ethische und ästhetische Anregungen gewährt.“

Nunmehr ging die Diskussion zu These 3 über; an dem lebhaften Meinungsstreit, der sich hierüber entspann, beteiligte sich eine grosse Zahl von Versammlungsteilnehmern, deren Ausführungen nachstehend teils ausführlich, teils dem Gedankengange nach, wiedergegeben werden.

Pietzker (Nordhausen): M. H.! Die Frage, ob die Elemente der Infinitesimal-Analysis in den Unterricht hineinzuziehen seien, ist, wie Ihnen bekannt sein wird, auch im Vereinsorgan mehrfach erörtert worden, vor Jahren im bejahenden Sinne von Kewitsch, kürzlich im verneinenden Sinne von Franz, in der nächsten Nummer werden zwei Entgegnungen gegen den Franzschen Artikel erscheinen, von Ebner und Schülke. Ich verkenne nicht eine gewisse Bedeutung der Gründe, die für die Bejahung dieser Frage ins Feld geführt werden, sie haben vielfach etwas Bestechendes, für durchschlagend möchte ich sie aber nicht erachten. Man sagt ja freilich: wir treiben ja doch auf der Schule schon vielfach Infinitesimal-Analysis in verschleierter Weise, z. B. bei der Quadratur des Kreises, bei Aufstellung der Tangentengleichungen, bei Behandlung der Maxima und Minima und bei noch manch anderen Anlässen teils mathematischer, teils auch physikalischer Art, warum wollen wir nicht das Ding nun bei seinem richtigen Namen nennen und, indem wir die Formelsprache der Infinitesimal-Analysis in den Unterricht einführen, diesen sogar vereinfachen, insofern wir nicht bei jedem Einzelanlass immer wieder dasselbe Verfahren wiederholen, sondern den Infinitesimal-Prozess ein für allemal abmachen, um die gewonnenen Ausdrucksformen dann auf die einzelnen Fälle anzuwenden. Demgegenüber möchte ich zweierlei geltend machen: Erstens ist es meiner Ansicht nach gerade die Aufgabe der für den wissenschaftlichen Hochschulunterricht vorbildenden Schule, die systematische Zusammenfassung durch die Betrachtung recht vieler Einzelfälle vorzubereiten, so dass die wissenschaftliche Systematik nicht ein hohles, äusserlich aufgenommenes Schema bleibt, sondern eine mit wirklichem Verständnis aufgenommene Wissensbereicherung wird. Und diese allgemeine Erwägung findet nun auf die vorliegende Frage noch darum besonders Anwendung, weil, wie ich zweitens betonen möchte, gerade bei der Einzelbehandlung die begrifflichen Schwierigkeiten umgangen werden können, die bei der systematischen Behandlung ganz unvermeidlich auftreten und mir als jungem Studenten förmliche Skrupel verursacht haben. Sie hängen zum Teil mit der Terminologie der Infinitesimal-Analysis zusammen, da behält einerseits der Differentialquotient, der doch nicht selbst mehr ein Quotient, sondern nur die Grenze sein soll, dem sich ein Quotient nähert, trotzdem die Form des Quotienten, da stellt sich das Integral als Summe von Produkten dar, deren einer Faktor ein Differential ist, d. h. man kommt um den für das innerliche Verständnis schwierigen Begriff des Unendlichkleinen garnicht herum.

Ich will dabei auch nicht verhehlen, dass ich das ganze in der Infinitesimal-Analysis seine systematische Ausbildung findende Verfahren, bei dem man der stetigen Aenderung beikommt, indem man sie als eine Folge unendlich kleiner Sprünge ansieht, dass ich dies Verfahren nur für einen Notbehelf halte, der, wie ich hoffe, einmal durch eine mehr in den Geist der Sache eindringende rein funktionelle Behandlung des Sachverhalts ersetzt werden wird. Vorläufig haben wir ja aber nichts anderes und da muss ich eben sagen: angesichts des Vorhandenseins der Schwierigkeiten, die ich eben skizziert habe, wird eine Aufnahme der Systematik der Infinitesimal-Analysis in den Unterricht im allgemeinen nur darauf hinauslaufen, den Schülern eine formelle Technik mehr beizubringen, ohne dass sie dadurch befähigt werden, nun mit dieser Technik auch gegebenenfalls viel anzufangen, statt der Erhöhung der geistigen Durchbildung, die man ihnen dadurch verschaffen möchte, wird eine gewisse äusserliche Fertigkeit erzielt werden, die bei allen, die nachher keine Veranlassung zur Beschäftigung mit den exakten Fächern haben, bald genug vergessen werden wird. Mir hat es auch einen gewissen Eindruck gemacht, wenn Herr Holzmüller wiederholt betonte, dass die Ingenieure immer die elementare Behandlung der technischen Probleme der infinitesimalen vorziehen. Ich bemerke dabei, dass ich nicht auf Holzmüllers Standpunkt stehe, ich bin der Ansicht, die Hochschulbildung, die die Ingenieure erhalten, sollte sie befähigen, bei den höheren, auf elementarem Wege ja doch stets nur mittels besonderer Kunstgriffe lösbaren Problemen jedesmal sicher und rasch den Infinitesimal-Ansatz zu finden, und ich ziehe aus den Holzmüllerschen Beobachtungen auch nur den Schluss, dass die Erzielung dieser Fähigkeit eben ihre nicht unerheblichen Schwierigkeiten selbst noch für den Hochschulunterricht hat und darum von dem Unterricht der höheren Mittelschulen noch weniger zu erwarten ist. Ich glaube, diese Schulen sollten ihre Aufgabe vielmehr darin sehen, der Hochschule auch nach dieser Richtung hin vorzuarbeiten und zu diesem Zwecke weit mehr, als es bisher geschehen ist, auch in ihrem Unterricht den Funktionsbegriff verwerten, worauf ja erfreulicherweise auch die neuen Lehrpläne hinweisen. Wer das flüssige Element, das in diesem Begriffe steckt, so recht innerlich begriffen hat, wird auf der Universität dann auch leichter den inneren Kern der Infinitesimal-Analysis erfassen und an dieser Erfassung durch die an sich noch den Charakter der Starrheit tragenden Ausdrucksformen, deren sich, wie ich schon sagte, die Infinitesimal-Analysis zur Zeit bedient, weniger gehindert werden.

Im übrigen ist das nur ganz allgemein gesprochen. Tatsächlich gewährt ja der mathematische Unterricht vielfach einen gewissen Spielraum, der z. B. es auch erlaubt, einem besonders befähigten Schülerjahrgang einen weiteren Ausblick auf das Gebiet des Hochschulunterrichts zu geben, dem will ich gar nicht entgegentreten. Wie ich vor zwei Jahren in Düsseldorf ausführte, kann ein Lehrer sich manches erlauben, was ein anderer lieber bleiben lassen sollte, und derselbe Lehrer kann einem Schülerjahrgang Dinge zumuten, an die er bei einem anderen nicht zu denken wagen würde. Ich empfehle dringend, dass wir uns mit dieser Freiheit begnügen, von einer ausdrücklichen Einführung der Elemente der Infinitesimal-Rechnung in den Unterricht der höheren Schulen aber absehen, der Zweck, der damit erreicht werden soll, würde meines Dafürhaltens nicht erreicht werden.

Prof. Gutzmer (Jena) führt aus, dass er sich durchaus für den Schlusssatz des dritten Leitsatzes des Vortragenden erklären müsse. Die Formulierung dieses Schlusssatzes erscheine ihm besonders glücklich, insofern nämlich ein Eingehen auf schultechnische Einzelheiten vermieden sei. Es handle sich nicht um die Einführung eines neuen Stoffes in die Schule, sondern darum, im Anschluss an die Lehrpläne von 1901, die eine Einführung in das Verständnis des Funktionsbegriffs vorschreiben, den alten Stoff der Oberstufe mit einer neuen Methode zu durchdringen und zu durchdenken. Der Funktionsbegriff sei dabei selbstverständlich wesentlich in geometrischer und graphischer Fassung und Behandlung zu entwickeln; das sei auch für die Anwendungen wichtig und erleichtere deren Verständnis. Dass die Forderung, die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung auf den realistischen Lehranstalten zu berücksichtigen, keine übertriebene sei, das lehre u. a. die geradezu internationale Reformbewegung auf dem mathematischen Unterrichtsgebiete und deren Erfolge; Redner verweist des näheren auf Frankreich, auf England und Nordamerika. Auch handle es sich durchaus erst in allerletzter Linie um die kleine Zahl derer, die sich der Mathematik widmen wollen. Die Hauptsache sei, gerade die übrigen Studierenden, namentlich die Juristen, Mediziner, Chemiker usw., durch den strafferen Schulunterricht in das Verständnis der Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung einzuführen. Diese Forderung zu befriedigen; halte Redner im Hinblick auf die Fortschritte der Unterrichtsmethoden im Rahmen der jetzigen Lehrpläne für möglich und im Sinne des dritten Nathschen Leitsatzes für nötig.

Schrader (Halle) spricht sich dahin aus, dass die begrifflichen Schwierigkeiten, die gegen die Einführung der Infinitesimalrechnung geltend gemacht werden, wohl mehr von den Lehrern, als von den Schülern empfunden würden. Die Erfahrung spreche entschieden für die Möglichkeit der Einführung.

Hupe (Charlottenburg): In der Erörterung der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan für die höheren Schulen ist die wesentlichste Frage bisher nicht berührt worden, die Frage, wo soll die Zeit für die Behandlung dieser Disziplin hergenommen werden. Der gegenwärtige Umfang der Lehraufgabe ist derart, dass man das Ziel nur bei grosser Anspannung erreicht. Es kann also nicht davon die Rede sein, den Lehrstoff einfach durch Hinzufügen der Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung zu vermehren. Da schlagen nun manche vor, man möge die synthetische Geometrie der Kegelschnitte ausscheiden. Meine Herren, unsere Ausbildung in der Mathematik vor dreissig und mehr Jahren hatte in den oberen Klassen im wesentlichen eine analytische Richtung — haben doch damals viele Realanstalten Differential- und Integralrechnung getrieben. Auf den Universitäten wurde ebenfalls die rechnerische Seite der Mathematik betont, für die Ausbildung der geometrischen Anschauung war wenig Gelegenheit vorhanden. Das ist in der neueren Zeit — Gott sei Dank — anders geworden. Das Gebiet der neueren Geometrie, welche in der Obersekunda betrieben wird, schwebte früher in der Luft. Durch die Einführung der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte wurde ein weites und fruchtbares Gebiet der Anwendung und Vertiefung der Lehren der neueren Geometrie zur Verfügung gestellt. Die geometrische Anschauung konnte gefestigt und erweitert werden. Wer jahrelang in diesem Gebiete unterrichtet hat, weiss, welche Anziehung die mühelose Erreichung von Ergebnissen auf einfachem Wege auf die Schüler ausübt, weiss, wie sie diese Betrachtungsweise der analytischen Behandlung vorziehen. Bedenken Sie auch, meine Herren, dass der Student eines technischen Faches sich leicht in die Rechnungsmechanismen der Infinitesimalrechnung findet, die logischen Schwierigkeiten pflegt er den Dozenten an den Universitäten zu überlassen, dass dagegen das Eindringen in die Lehren der darstellenden Geometrie, der Kinematik und der graphischen Statik ihm bei mangelhafter Vorbildung in geometrischer Anschauung erfahrungsmässig sehr grosse Schwierigkeiten bereitet. Es kann also im Ernste nicht davon die Rede sein, auf die synthetische Geometrie der Kegelschnitte, dieses vorzügliche Mittel zur Ausbildung der geometrischen Anschauung zu verzichten.

Von anderer Seite ist vorgeschlagen worden, man möge die Lehre von den unendlichen Reihen aus dem Lehrplane streichen. Eine Erörterung dieses Vorschlages erübrigt sich, eine Einführung in die Infinitesimalrechnung bedingt die Kenntnis der Reihenlehre.

Um von den Vorzügen und Vorteilen der neu einzuführenden Disziplin zu reden, so habe ich davon wenig erwähnen hören. Da wird vielfach auf die Vorteile bei der Lösung der Maximum- und Minimum-Aufgaben hingewiesen, dabei aber befürwortet, dass nur der erste Differentialquotient eingeführt werde. Wollen Sie aber die Aufgaben rechnerisch durchführen, so brauchen Sie zur Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, auch den zweiten Differentialquotienten. Die Schellbachsche Methode führt den Schüler reichlich bequem zu dem Ziele der Auffindung der ausgezeichneten Werte einer Funktion. Und wenn ich auch dieser Methode keinen besonders bildenden Wert zusprechen kann, so genügt sie doch dem Zweck und bietet ungesucht den Anlass, durch elementare geometrische Betrachtungen die Entscheidung darüber herbeizuführen, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, und so die Raumanschauung zu fördern. Ich möchte diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne mit Nachdruck darauf hinzuweisen, wie fruchtbar es ist, bei der Behandlung der Determinationen geometrischer und trigonometrischer Aufgaben bereits auf die Maximum- und Minimumsätze einzugehen, die sich aus der Bedingung der Lösbarkeit der Aufgaben ergeben. Da sind die Schüler anzuhalten, aus der Bedingung die Sätze über ausgezeichnete Werte herauszulesen und zu gestalten. Die Beispiele für die kubischen und biquadratischen Gleichungen in der Prima sollten besonders aus der Geometrie und Mechanik gewählt werden, und man sollte bei der Erörterung der Diskriminante fordern, dass auch hier die Sätze für die ausgezeichneten Werte herausgeschält werden, wie es in mustergültiger Weise die Lampesche Sammlung: „Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen" andeutet. Das hat eine weit bildendere Kraft als die mechanische rechnerische Herleitung der Maxima und Minima.

Des weiteren hat man es als wünschenswert bezeichnet, dass der angehende Mediziner mit den Methoden der Infinitesimalrechnung bekannt sei, da die neuere Physiologie sich dieses Hilfsmittels bediene. Meine Herren, dieser Wunsch geht zu weit. Der Mediziner wird sich im allgemeinen mit den Ergebnissen, welche die Infinitesimalrechnung für ihn gezeitigt hat, begnügen. Weit berechtigter ist die Klage, dass die Ausbildung der Mediziner in Chemie eine zu dürftige sei, und berechtigter daher die Forderung, dass der zukünftige Arzt eine Zeitlang im chemischen Laboratorium praktisch arbeite. Will er tiefer in die Wissenschaft eindringen, so wird er wohl die Energie besitzen, sich die Lehren der Infinitesimalrechnung anzueignen, wie es ein Helmholtz selbst noch in reiferen Jahren so getan hat, dass die gesamten Kulturvölker bewundernd auf seine Leistungen in mathematischer Physik hinschauen.

Gegen das Verlangen, den Schülern den Begriff und den Namen des Differentialquotienten zu geben, habe ich nichts einzuwenden. Hierfür bieten sich mannigfache Gelegenheiten, namentlich eignet sich hierzu die Betrachtung der Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung. Aber ich muss mich entschieden gegen eine systematische Behandlung der Infinitesimalrechnung in der obersten Klasse unserer höheren Schulen aussprechen.

Schliesslich möchte ich noch hervorheben, dass durch die Einführung der Differential- und Integralrechnung in die Realanstalten die Ungleichheit in der Vorbildung der Abiturienten wieder vermehrt werden würde, ein Zustand, der nichts Wünschenswertes hat.

Da wir somit keine wesentlichen Vorteile für unsere höheren Schulen von der Einführung der Infinitesimalrechnung erwarten können, vielmehr gewichtige Nachteile befürchten müssen, bitte ich Sie, ihre Stimmen gegen diesen Teil der These abzugeben.

Bernstein (Halle) empfiehlt lebhaft die Annahme der These auch in ihrem zweiten Teile. Gerade die Erfahrungen an der Hochschule, wo der Dozent der Physik fortwährend mit der mangelhaften mathematischen Vorbildung seiner Hörer, namentlich derer, die nachher sich nicht den exakten Fächern selbst zuwenden wollen, z. B. also der künftigen Mediziner zu kämpfen habe, zeigen die Notwendigkeit, die jungen Leute schon auf dem Gymnasium mit den wichtigsten mathematischen Hilfsmitteln für ein wirkliches inneres Verständnis der Naturvorgänge auszurüsten. Und dass eine ganze Reihe von fundamentalen Begriffen, wie z. B. die Begriffe der Geschwindigkeit, der Beschleunigung usw. ohne Heranziehung der Grundbegriffe und auch der Ausdrucksformen der Infinitesimal-Analysis nicht zum vollen und klaren Verständnis gebracht werden könne, sei zweifellos. Da müsse die erste Schulung bereits im Unterricht der höheren Mittelschulen erfolgen, der selbstverständlich eine zu abstrakte Behandlung vermeiden und überall an konkrete Einzelaufgaben anknüpfen werde. Jedenfalls müsse er auch vom Standpunkt des Hochschulunterrichts aus für die These eintreten.

Thaer (Hamburg) befürwortet auf das Wärmste die Aufnahme der Elemente der Infinitesimal-Rechnung in den Unterricht der Realanstalten. Die Gründe, die dagegen namentlich auch von Pietzker ins Feld geführt sind, vermag er nicht als stichhaltig anzuerkennen, vielmehr glaubt er auf Grund seiner eigenen praktischen Erfahrung versuchen zu können, dass es sehr wohl möglich sei, die Grundbegriffe den Schülern durchaus plausibel zu machen; welchen Vorteil von der Einführung dann der weitere Unterricht, sowohl der rein mathematische, wie der physikalische habe, das sei ja schon mehrfach sehr zutreffend betont worden. Er bittet um Aufnahme der These.

H. Müller (Charlottenburg): Ich kann mich für die Aufnahme der Differential- und Integral-Rechnung in den Lehrplan nicht erwärmen und halte sie auch für ganz überflüssig. Die vorhandenen Lehrpläne geben bei der Bestimmung über den Funktionsbegriff hinreichend die Möglichkeit, die Grundanschauungen der Differential-Rechnung zu entwickeln und die Maxima und Minima werden heute schon so behandelt, dass die einfachsten Operationen des Differentiierens zur Verwendung gelangen. Eine gewisse Kenntnis der funktionen-theoretischen Auffassung und der Grundlage der Differential-Rechnung, soweit sie für den Studierenden, auch den Studierenden der Mathematik und der Naturwissenschaften, wünschenswert ist, wird also den Schülern bei den heutigen Lehrplänen bereits mitgegeben und gegen ein Mehr erklären sich nicht nur viele Lehrer an höheren Schulen, auch zahlreiche Universitätslehrer wollen nichts davon wissen. Ich halte daher die These für überflüssig und ausserdem für beunruhigend, da sie eine Vermehrung des mathematischen Lehrstoffes erstrebt, demgemäss bitte ich Sie, ihr Ihre Zustimmung zu versagen.

Rühlmann (Halle): Es handelt sich nicht darum, ein Fach neu einzuführen, die Operation des Differentiierens wird schon jetzt mehrfach benutzt, wie bei der Darbietung der höheren Reihen. Dann soll man das Ding auch bei richtigem Namen nennen. Die Frage der Infinitesimalrechnung ist für Schulen eine rein methodische.

Geissler (Charlottenburg) betont, dass in dem Ausdrucke „Einbeziehung der Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung" durchaus nicht enthalten sei, man müsse die Lehren dieser Wissenschaft gewissermassen durchhetzen. Die Fassung könne daher auch wohl empfohlen werden für diejenigen, welche volle Freiheit für Zeitverwendung auf die interessanten Fragen des Unendlichen wünschen. Auch dem Studenten bleibe noch vieles dunkel, es handele sich auch für den elementaren Unterricht um die Beleuchtung einer ganzen Reihe von Fragen (Parallelen, Berührung usw.), die mit dem Unendlichkleinen zusammenhängen und nicht aus einem gründlichen Unterricht verbannt werden können. Deshalb sei die Aufnahme des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung nicht etwas dem elementaren Unterrichte ganz Fremdes, sondern könne sehr wohl mit dem vorhergehenden Unterrichte in Zusammenhang treten.

Schotten (Halle) tritt ebenfalls für Annahme der Nathschen These ein. Die Vorteile, die eine angemessene Behandlung der Elemente der Infinitesimal-Analysis gewähre, seien bereits mehrfach so zutreffend dargelegt worden, dass er sich diesen Ausführungen nur anschliessen könne; die bisher vorliegenden praktischen Erfahrungen sprechen gleichfalls dafür. Allerdings sei eines unumgänglich, nämlich das, dass der Unterrichtsstoff und die Unterrichtszeit durch die Aufnahme des neuen Lehrabschnitts keinerlei Vermehrung erfahren dürften, es gebe aber zweifellos innerhalb des mathematischen Pensums eine Reihe von Kapiteln, die eher entbehrlich seien und soweit erforderlich eingeschränkt oder gestrichen werden könnten, er könne also auch in der Rücksicht auf die verfügbare Zeit keinen Grund gegen die Annahme des zweiten Teils der These 3 erblicken, vielmehr befürworte er sie auch seinerseits.

Schubring (Erfurt) glaubt einen Unterschied zwischen Realgymnasium und Oberrealschule machen zu müssen, auf der letzteren halte auch er die Einführung der Elemente der Infinitesimal-Rechnung für möglich und nützlich, anders stehe die Sache für die Realgymnasien, hinsichtlich deren er wenigstens nicht überall die Einführung der Infinitesimal-Rechnung empfehlen könne, weil diese Anstalten zum Teil mehr in gymnasialem als in realistischem Geiste geleitet werden.

In seinem Schlusswort betonte der Berichterstatter Nath, dass er seinerseits die Aufnahme der Elemente der Infinitesimal-Analysis nur für den Realschullehrplan, nicht für den des Gymnasiums befürwortet habe, dieser Unterschied sei in der Debatte mehr und mehr verwischt worden. An der Notwendigkeit der Einführung in den Realschulunterricht müsse er jedenfalls festhalten. Darauf wurde über die beiden Teile der These getrennt abgestimmt. Während der erste Teil einstimmige Annahme fand, ergab sich bei der Abstimmung über den zweiten Teil fast Stimmengleichheit, die Gegner der These zählten eine Stimme mehr als die Anhänger. Allseitig war man darüber einig, dass von einem Versammlungsbeschluss unter diesen Umständen nicht die Rede sein könne, demgemäss kann die These 3 nur in ihrer ersten Hälfte als Ausdruck der in der Versammlung herrschenden Auffassung gelten.

Weitere Untersuchungen über Näherungsformeln zur Berechnung der Ludolfschen Zahl.

Von W. Koch (Dortmund).

(Schluss.)

III. Historisches.

Vorstehende Arbeit war bereits im wesentlichen bis zu dieser Stelle fertiggestellt, als zuerst — und zwar noch vor Veröffentlichung der Mitteilung des Herrn Kostka-Insterburg auf Seite 109 des vorigen Jahrgangs — zu meiner Kenntnis gelangte, dass bereits Vorarbeiten auf diesem Gebiete vorhanden sind. Für jeden, der auf dem Gebiete der Elementargeometrie arbeitet, ist es mangels einer vollständigeren wissenschaftlichen Darstellung dieses Zweiges der Mathematik sehr schwer, sich über die bereits vorhandenen Untersuchungen irgend einer Frage oder Aufgabe Kenntnis zu verschaffen. Hoffentlich bringt die im Erscheinen begriffene Weber-Wellsteinsche Enzyklopädie bald Abhilfe. Die geläufigen Lehrbücher bringen kaum mehr, als in der Schule behandelt wird, und man muss schon ältere schwer zu beschaffende Werke auftreiben, um weitergehende Untersuchungen aufzufinden. Erst als es mir gelang, das im Buchhandel längst vergriffene und daher in den Büchereien jüngerer Lehranstalten kaum vorhandene, doch den älteren Mathematikern noch wohlbekannte Buch von Baltzer: „Die Elemente der Mathematik" in die Hand zu bekommen, konnte ich feststellen, dass die wesentlicheren der in der vorstehenden Arbeit enthaltenen Formeln bereits von Huygens bewiesen worden sind. Wenn nun auch bei Baltzer sich in dem „Zyklometrie" bezeichneten Kapitel unter den Quellennachweisen mehrfache Fehler befinden, von denen ich einige in dieser Arbeit verbessern werde, so ist mir doch das Buch zur Auffindung der in Betracht kommenden Originalarbeiten behilflich gewesen. Weitere Quellennachweise habe ich entnommen dem Cantorschen Geschichtswerk sowie der Schrift von Rudio: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung."

Da meine weiteren Untersuchungen durch das Studium der genannten Schriften naturgemäss beeinflusst sind, so erscheint es mir nötig, hier eine Unterbrechung eintreten zu lassen, um nachträglich dasjenige anzugeben, was über die bisher behandelten Formeln historisch bemerkenswert ist.

Es sind drei Hauptgruppen von Formeln behandelt worden, von denen die erste die zur Berechnung der Vielecksgrössen dienenden Formeln, die zweite die auf das Verhältnis zweier sukzessiver Vielecksgrössendifferenzen sich beziehenden Formeln und die dritte die Näherungsformeln umfasst. Ich stelle diese Gruppen zunächst zusammen.

$$\text{I}\left\{\begin{array}{llll} \text{a)} & f_i' = \sqrt{f_i f_u} & \text{a')} & p_i' = \sqrt{p_i p_u'} \\ \text{b)} & f_u' = \dfrac{2 f_u f_i'}{f_u + f_i'} & \text{b')} & p_u' = \dfrac{2 p_u p_i}{p_u + p_i} \end{array}\right.$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{llll} \text{a)} & \dfrac{f_i' - f_i}{f_u - f_u'} < 2 & \text{a')} & \dfrac{p_i' - p_i}{p_u' - p_u''} < 2 \\ \text{b)} & \dfrac{f_i'' - f_i'}{f_u - f_u'} < \dfrac{1}{2} & \text{b')} & \dfrac{p_i' - p_i}{p_u - p_u'} < \dfrac{1}{2} \\ \text{c)} & \dfrac{f_u' - f_i'}{f_u - f_i} < \dfrac{1}{4} & \text{c')} & \dfrac{p_u'' - p_i'}{p_u' - p_i} < \dfrac{1}{4} \\ \text{d)} & \dfrac{f_u' - f_i''}{f_u - f_i'} < \dfrac{1}{4} & \text{d')} & \dfrac{p_u' - p_i'}{p_u - p_i} < \dfrac{1}{4} \\ \text{e)} & \dfrac{f_i'' - f_i'}{f_i' - f_i} > \dfrac{1}{4} & \text{e')} & \dfrac{p_i'' - p_i'}{p_i' - p_i} > \dfrac{1}{4} \\ \text{f)} & \dfrac{f_u' - f_u''}{f_u - f_u'} < \dfrac{1}{4} & \text{f')} & \dfrac{p_u' - p_u''}{p_u - p_u'} < \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\text{III}\left\{\begin{array}{llll} \text{a)} & f < \dfrac{f_i + 2 f_u}{3} & \text{a')} & p < \dfrac{p_i + 2 p_u'}{3} \\ \text{b)} & f < \dfrac{f_u + 2 f_i'}{3} & \text{b')} & p < \dfrac{p_u + 2 p_i}{3} \\ \text{c)} & f > \dfrac{4 f_i' - f_i}{3} & \text{c')} & p > \dfrac{4 p_i' - p_i}{3} \\ \text{d)} & f > \dfrac{4 f_u' - f_u}{3} & \text{d')} & p > \dfrac{4 p_u' - p_u}{3} \end{array}\right.$$

Von der Gruppe I sind zuerst die auf die Flächen bezüglichen Formeln entdeckt worden, und zwar stammt a) von Snellius (Cyclometricus 1621, prop. 9) und b) von Jakob Gregory (vera circuli et hyperbolae quadratura 1667, prop. 1 u. 12). Die Beweise sind die nämlichen, die man noch jetzt meist in den Lehrbüchern findet (vergl. Anm. d. Red. auf S. 107 d. vor. Jahrg.). Die Frage nach den Urhebern der auf die Umfänge bezüglichen Formeln ist von geringerer Bedeutung, da diese aus jenen bekanntlich leicht hervorgehen. Doch konnte ich feststellen, dass a') zuerst von Huygens (de circuli magnitudine inventa 1654, prop. 13) abgeleitet worden ist, aber nicht aus a), sondern selbständig. Auch Formel b') muss Huygens schon bekannt gewesen sein, wenn auch noch nicht zu der Zeit, als er jene Abhandlung schrieb, da er die erwähnte Gregorysche Abhandlung sehr genau kannte („de circuli et hyperbolae quadratura controversia") und den eben berührten Schluss von den Flächen auf die Umfänge mehrfach in seiner Arbeit ausgeführt hat. Aber auch die von mir (S. 106 d. vor. Jahrg.) gegebene vereinfachte Ableitung beider Formeln ist, wie ich kürzlich entdeckt habe, nicht neu; sie findet sich im XV. Bande der Hoffmannschen Zeitschrift (1889 S. 99) unter dem Titel: „Neuer einfacherer Beweis für einen bekannten Satz" von Prof. Strübing in Gr.-Lichterfelde. Die zweimalige Angabe von Baltzer, die sich durch alle Auflagen seiner Geometrie (§ 13, 2 Anm. u. 5) zieht, dass beide Formeln schon von Archimedes in der *Κύκλου μέτρησις* zur Berechnung der Vielecksumfänge gebraucht worden seien, ist irrig. Archimedes hat überhaupt nicht die abwechselnde Reihe der Vielecksumfänge zu seiner Kreismessung benutzt, sondern vom Sechseck ausgehend die Reihe der umbeschriebenen Vielecke für sich allein, alsdann die Reihe der einbeschriebenen Vielecke für sich allein, und zwar jeden Vielecksumfang aus dem vorhergehenden, nicht aus den beiden vorhergehenden, berechnet, wie man bei Cantor (I p. 258—260) nachlesen kann.

Die Formeln der Gruppen II und III stehen in engstem Zusammenhang, weil, wie bekannt, die letzteren aus den ersteren unmittelbar folgen. Derjenige, der die wichtigeren dieser Formeln zuerst bewiesen hat, ist Huygens in seiner schon erwähnten bedeutsamen Abhandlung: „De circuli magnitudine inventa“. Aufgestellt aber ist diejenige Formel, die mich in meiner früheren Arbeit über diesen Gegenstand vorzugsweise beschäftigt hat, nämlich III b′), bereits von Snellius. Sie stellt einen der beiden Sätze dar, welche die Grundlage seines Werkes „Cyclometricus“ bilden, zweier Sätze, durch welche mittels eines einfachen konstruktiven Verfahrens ein beliebiger Kreisbogen zwischen zwei enge Grenzen eingeschlossen wird. Obwohl nun Snellius auf diesen beiden Sätzen sein ganzes Werk, das als höchst bemerkenswert gerühmt wird, aufbaut, konnte er sie doch nicht beweisen; der Beweis ist vielmehr für beide erst Huygens gelungen. Die von Snellius gegebene untere Grenze wird uns später beschäftigen, die obere Grenze ist identisch mit III b′). Der diese Grenze angebende Snelliussche Satz ist von Huygens in prop. 15 bewiesen worden. Die Snelliussche Konstruktion, die wegen einer vorzunehmenden Bogendrittelung nicht elementar ausführbar ist, ist auch bei Cantor II S. 646 zu finden. (Um zu erkennen, dass durch die obere Bogengrenze sofort die Formel III b′) geliefert wird, hat man in der Cantorschen Fig. 134 durch D die zum Durchmesser senkrechte Sehne und durch den Mittelpunkt C die Parallele zu FJ zu ziehen; beide Geraden müssen sich dann auf dem Kreise schneiden). Die Grenze III b′) selber, durch welche die Richtigkeit des Snelliusschen Satzes unmittelbar erwiesen wird, ist von Huygens vorher in prop. 9 abgeleitet worden, und zwar rein geometrisch aus der in prop. 8 hergeleiteten Formel III a′), die ihrerseits wieder durch die bekannte Division aus III a) folgt (prop. 6). III a) aber folgt gerade so wie in meiner Darstellung aus II a), welche Formel also bei Huygens ebenfalls den Ausgangspunkt für die Ableitung der oberen Grenzen bildet (prop. 2). Der Beweis dieser Formel, den man auch bei Baltzer (a. a. O. § 13, 2) findet, beruht auf der Anwendung der Sätze, dass die Inhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate entsprechender Seiten und die Inhalte gleich hoher Dreiecke wie die Grundseiten sich verhalten. Baltzer gibt (§ 13, 5) an, dass Huygens die obere Grenze III b′) abgeleitet hat, und fährt dann unmittelbar fort: „Andere Grenzen der Peripherie des Kreises oder eines Bogens hatte Snellius in der Schrift Cyclometricus 1621 mitgeteilt“. Wir haben aber gesehen, dass Snellius' obere Grenze keine andere, sondern genau die soeben angegebene Huygenssche ist.

Als untere Grenze zu III b′) benutzt Huygens III c′), welche aus III c) durch die bekannte Division, aber wiederum in rein geometrischer Darstellung (prop. 7), hervorgeht. III c) entspringt (prop. 5) selbstverständlich aus II c) durch die früher besprochene Summation. Zum Beweise von II e) (prop. 1), den man auch bei Baltzer (§. 13, 2) dargestellt findet, wird vor allem der Satz herangezogen, dass die Quadrate zweier durch einen Punkt der Kreislinie gezogenen Sehnen sich verhalten wie ihre Projektionen auf den durch den nämlichen Punkt gezogenen Durchmesser.

Wenn nun auch bei meiner Darstellung die Formel II a) in einfacherer und anschaulicherer Weise sich ergibt, so muss ich doch zugeben, dass bei der Formel II e) die Huygenssche Darstellung schneller und einfacher zum Ziele führt. Charakteristisch für meine Herleitung dieser Formel ist die Darstellung der Vielecksumfänge und ihrer Differenzen auf einer Geraden sowie die Verwendung der Sätze von der Halbierenden eines Dreieckswinkels und von der harmonischen Teilung; charakteristisch für die Huygenssche Behandlung die Darstellung der Flächen und Flächendifferenzen durch Zeichnung dreier einbeschriebener Vielecke von der Eckenzahl n, 2n, 4n sowie die Verwendung von Flächensätzen. Wenn auch beide Ableitungen auf den ersten Blick so verschieden als möglich erscheinen, so können sie doch nur auf demselben gemeinsamen Untergrund beruhen, der durch das Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen gegeben ist, oder genauer durch die Beziehungen, in denen die Funktionen der halben Winkel zu denen der ganzen Winkel stehen. Man wird diesem gemeinsamen Untergrund näher kommen, wenn man bedenkt, dass der Satz von der Halbierenden eines Dreieckswinkels sich bequem durch zweimalige Verwendung des Satzes von den gleich hohen Dreiecken erweisen lässt.

Von der Huygensschen Abhandlung möchte ich noch hervorheben, dass sie sich durch ihre Klarheit und die rein geometrische Behandlung des Stoffes auszeichnet. Wenn ich jedoch von Formeln gesprochen habe, so muss man bedenken, dass zu damaliger Zeit noch keine Formeln verwandt, sondern dass alle Beziehungen und Ergebnisse in Worten ausgedrückt wurden, wodurch freilich das Lesen jener Abhandlung erschwert wird. Da diese Abhandlung verhältnismässig wenig bekannt zu sein scheint (Cantor erwähnt sie merkwürdigerweise überhaupt nicht), so gestatte ich mir im folgenden Urteile von Rudio anzuführen aus der eingangs erwähnten Schrift, die eine wortgetreue Uebersetzung jener Abhandlung enthält. Rudio bezeichnet diese Abhandlung ebenso wie diejenige des Archimedes als einen Markstein in der geschichtlichen Entwickelung des Problems von der Quadratur des Zirkels, er nennt sie eine klassische Arbeit, durch welche die von Archimedes begründete Methode ihre höchste Ausbildung erreichte; die darin niedergelegten Sätze besässen auch abgesehen von der Aufgabe der numerischen Rektifikation grosses Interesse. „Die genannte Abhandlung ist nicht nur für die Kreismessung geradezu epochemachend, sie gehört auch unstreitig zu den schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben worden sind, und wird, wie die Abhandlung des Archimedes, ihren Wert behalten, auch wenn die darin niedergelegten Resultate durch die Mittel der Analysis heutzutage auf viel kürzerem Wege gewonnen werden können. Sie gehört zu denjenigen, die von jedem, der sich für die Geschichte der Mathematik interessiert, gelesen werden sollte.“ „Endlich glaube ich noch speziell den Lehrern der Mittelschulen durch die Herausgabe jener nur noch schwer erhältlichen Abhandlungen einen Dienst zu erweisen. Denn ich zweifle nicht daran, dass das Studium dieser Abhandlungen, namentlich der viel zu wenig beachteten und doch gerade für den Mathematiklehrer der Mittelschule so eminent wichtigen Huygensschen Arbeit dem mathematischen Unterricht reichen Gewinn wird bringen können."

Die Formel II c) ist zuerst von Jakob Gregory in der genannten Abhandlung abgeleitet. Gregory nämlich hatte die Huygensschen Kreisbegrenzungen durch dessen Schrift kennen gelernt und leitete seinerseits die auf die Kreisflächen bezüglichen Formeln III a) und c) aus den Grundformeln II a) und b), deren letztere er, wie wir wissen, selber aufgestellt hatte, auf rein arithmetischem Wege ab. Dieser Weg aber führt, wie aus meiner Darstellung auf S. 107 hervorgeht (s. Formel 35), über die Formel II c). Leider ist mir weder die Gregorysche Schrift noch „Kunzes Planimetrie" (Jena 1851), in der sich nach Baltzers Angabe im achten Anhang die Gregorysche Ableitung findet, zur Verfügung, so dass ich nicht prüfen kann, inwieweit Gregorys Ableitung mit der meinigen übereinstimmt. Doch kann ein wesentlicher Unterschied nicht vorhanden sein. Cantor sagt nämlich (II, 653), Gregory zeige, dass, sofern Vielecke, deren Seitenzahl fortwährend zunimmt, ein- und umbeschrieben werden, die Vielecke höherer Seitenzahl einen immer weniger von einander verschiedenen Flächeninhalt besitzen. Und in Reidts Planimetrie finden sich ohne Angabe von Beweisen (Sätze zu § 39, 12 und 13) — freilich durch Druckfehler so arg entstellt, dass sie nur mit Mühe wiedererkannt werden können — die wichtigsten Formeln, die auf arithmetischem Wege zu den genannten Grenzen führen, und zwar die Formel II c) durch einen vollständigen Satz (12) ausgedrückt. Es ist mir nicht zweifelhaft, dass diese Formeln der Gregoryschen Darstellung entnommen sind. Ein Nachsuchen in der Gregoryschen Schrift muss das beweisen.

Die Formeln II f) und f') und die daraus hervorgehenden III d) und d') sind von Huygens und Gregory nicht behandelt worden, sie sind aber auch, wie ich gezeigt habe, entbehrlich und von mir nur der systematischen Vollständigkeit halber mitbehandelt worden.

Unter den neueren Schulbüchern finde ich nur in Schwerings Trigonometrie eine der Näherungsformeln, nämlich die von mir zuerst behandelte III b'), und zwar durch eine ähnliche Reihenentwickelung wie am Schlusse meines ersten Aufsatzes, abgeleitet.

IV. Andere Gruppen von Näherungsformeln.

Die von Snellius zur Darstellung seiner unteren Grenze benutzte Konstruktion sowie die hieraus entspringende Grenze selber, die in trigonometrischer Form

$$\alpha > \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha}$$

lautet, findet man bei Cantor (II, 646). Dieselbe Formel war aber schon vorher von Nikolaus von Cusa (de mathematica perfectione, um 1450) aufgestellt worden. Wenn nun auch diese Formel als das Vollkommenste bezeichnet werden muss, was der berühmte Kardinal, dem Cantor ein volles Kapitel widmet, geleistet hat, so muss doch sein Beweis, den man bei Cantor (II, 183 und 184) nachlesen kann, als durchaus hinfällig bezeichnet werden. Snellius verwendet, wie schon erwähnt, die genannte Formel als eine der beiden Grundlagen seiner Cyclometrie, ohne sie bewiesen zu haben.

Den ersten richtigen Beweis gibt Huygens in prop. 16 seiner besprochenen Abhandlung, indem er rein geometrisch beweist, dass

$$\frac{3\, p_u\, p_i}{2\, p_u + p_i} < p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3}$$

und demnach

$$p > \frac{3\, p_u\, p_i}{2\, p_u + p_i}$$

ist. Diesen Ausdruck erhält man, wie man sofort erkennt, aus der obigen Ungleichung durch Erweiterung mit $2n$ und Einführung der Vielecksumfänge.

Orontius Finaeus hatte in seinem Werke: „De rebus mathematicis hactenus desideratis" (1556) für den Kreisumfang den Näherungsausdruck $\sqrt[3]{p_u\, p_i^2}$ aufgestellt, ohne ihn aber beweisen zu können. Ihm war nicht bekannt, ob der dadurch gewonnene Wert zu gross oder zu klein sei; fälschlicherweise behauptete er, dass bei Zugrundelegung des ein- und umbeschriebenen Quadrates die Formel genau zutreffe, während man in Wirklichkeit doch nur den Wert $\pi = 2\sqrt[3]{4} = 3{,}1748$ erhält. Huygens widerlegt ihn, indem er (prop. 14) zeigt, dass

$$\frac{p_u' + 2\, p_i'}{3} < \sqrt[3]{p_u\, p_i^2} \text{ und demnach } p < \sqrt[3]{p_u\, p_i^2}$$

ist. In der Vorrede bezeichnet er den so gewonnenen Satz als den schwierigsten unter allen, die er beweisen will. Der äusserst schwierige rein geometrische Beweis zeigt den ungewöhnlichen geometrischen Scharfsinn des Verfassers. In trigonometrischer Form lautet die letzte Ungleichung

$$\alpha < \frac{\sin \alpha}{\sqrt[3]{\cos \alpha}}$$

und wird in den Logarithmentafeln unter dem Namen „Formel von Maskelyne" empfohlen zur Berechnung sehr kleiner Bogen aus den zugehörigen Funktionswerten und umgekehrt, da sie genauere Werte liefert als die Tafeln selber liefern können.

Schon die Tatsache, dass die beiden Formeln von Cusanus und Finaeus mehrfach neu entdeckt worden sind, weist darauf hin, dass sie der höchsten Beachtung wert sind. Sehen wir sie uns einmal näher an. Zunächst erkennen wir ihre Vielgestaltigkeit. Mit Hilfe der Grundformeln lassen sie sich nämlich schreiben

$$p > \frac{3\, p_u'\, p_i'}{2\, p_u' + p_i'} = \frac{3\, p_i'\, p_u''}{2\, p_i' + p_u''} = \frac{3\, p_u'\, p_u''}{4\, p_u' - p_u''} = \frac{3\, p_i'^2}{2\, p_i' + p_i}$$

und

$$p < \sqrt[3]{p_u'\, p_i'^2} = \sqrt[3]{p_i\, p_u'^2} = \sqrt[3]{\frac{p_i'^4}{p_i}}.$$

Ferner erkennen wir sofort, dass

$$\frac{3\, p_i'^2}{2\, p_i' + p_i} = \frac{p_i'^2}{p_i' - \frac{p_i' - p_i}{3}} > p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3}$$

und

$$\sqrt[3]{p_u\, p_i^2} < \frac{p_u + 2\, p_i}{3}$$

ist, weil auch das geometrische Mittel der drei Grössen p_u, p_i, p_i kleiner als das arithmetische ist, dass also die neuen Grenzen schärfer sind als die Huygensschen. Trotzdem behandelt Huygens diese Formeln gewissermassen nur beiläufig und verwendet auch in der Folge seine Formeln; freilich, wenn man noch das nächstfolgende Paar der Vielecksgrössen (p_u' und p_i') berechnet und benutzt, dann werden ja seine Grenzen, wie er ja selbst gezeigt hat, wiederum schärfer als die aus p_u und p_i gebildeten neubesprochenen Grenzen. Es liegt dies daran, dass alle diese Grenzen unter der Voraussetzung giltig sind, dass man $(p_u - p_i)^2$ bezw. $(f_u - f_i)^2$ vernachlässigen darf, so dass sie gewissermassen eine Annäherung von derselben Stufe ergeben. Auch erkennen wir, dass die Huygensschen Grenzen den Vorzug haben, dass sie linear sind. Daher mag wohl Huygens' Vorliebe für seine Formeln III b') und c') stammen. Diese Vorliebe und sein Bestreben, alles rein geometrisch abzuleiten, machen es wohl erklärlich, dass er die Ableitung der neuen Formeln auf seine Formeln stützte, und dass er infolgedessen den einfachen Weg übersah, der sich ihm geboten hätte, wenn er versucht hätte, beide Formeln selbständig herzuleiten. Zumal bei der Formel des Finaeus hätte er den schwierigen und umständlichen Beweis sparen können, da diese aus der von ihm selber abgeleiteten Grundformel I a') und der geometrisch leicht ersichtlichen Formel $p_u' < \sqrt{p_u p_i}$ durch das nämliche Verfahren unmittelbar entspringt, das er selber bei der Herleitung der Snelliusschen Formel (III b') verwendet. Um auch für die Formel des Cusanus diesen Weg zu finden, hätte er freilich schon damals die erst 13 Jahre später veröffentlichte Gregorysche Grundformel kennen müssen.

Es zeigen nämlich die drei Ausdrücke

$$\frac{p_u + 2\,p_i}{3}, \quad \sqrt[3]{p_u\, p_i^2}, \quad \frac{3\,p_u\, p_i}{2\,p_u + p_i} = \frac{1}{\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{p_u} + \frac{2}{p_i}\right\}}$$

einen sehr übereinstimmenden Bau, indem sie bezw. das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der drei Grössen p_u, p_i, p_i darstellen. Oder allgemeiner, wenn man aus drei Grössen, von denen die beiden ersten ein beliebiges sukzessives Gliederpaar der Reihe

$$\begin{array}{lllllllll} & p_u & p_i & p_u' & p_i' & p_u'' & p_i'' & \cdots \\ \text{bezw.}\ f_i & f_u & f_i' & f_u' & f_i'' & f_u'' & f_i''' & \cdots \end{array}$$

bilden, und deren dritte der zweiten gleich ist, die drei Mittel bildet, so enthält man die drei besprochenen Grenzen. Nur bei Verwendung des arithmetischen Mittels erhält man zwei verschiedene Formen der Grenze (III a u. b bezw. a' u. b'). Woher dies kommt, ist leicht ersichtlich. Bildet man die obige Reihe dadurch, dass jedes Glied als arithmetisches Mittel der beiden Vorglieder berechnet wird, so wird sowohl das geometrische als auch das harmonische Mittel durch das zu grosse arithmetische ersetzt, und es ergibt sich aus den Formeln II a') und b') die Reihe

$$\frac{p_u + 2\,p_i}{3} > \frac{p_i + 2\,p_u'}{3} > \frac{p_u' + 2\,p_i'}{3} > \frac{p_i' + 2\,p_u''}{3}$$
$$> \cdot \cdot \cdot \cdot > p,$$

da sich sowohl die p_i als auch die p_u der Grenze p nähern.

Dagegen folgt aus den Formeln:

$$p_u'^2 < p_u\, p_i \text{ und } p_i'^2 = p_i\, p_u',$$

bei denen nur das harmonische Mittel durch das grössere geometrische ersetzt wird, die Reihe

$$\sqrt[3]{p_u\, p_i^2} > \sqrt[3]{p_i\, p_u'^2} = \sqrt[3]{p_u'\, p_i'^2} > \sqrt[3]{p_i'\, p_u''^2} = \cdots\cdot > p;$$

und selbstverständlich muss die so gewonnene Grenze schärfer sein als die vorhergehende. Desgleichen folgt aus den Formeln

$$\frac{1}{p_u'} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p_u} + \frac{1}{p_i}\right\} \text{ und } \frac{1}{p_i'} < \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_u'}\right\},$$

bei denen nur das geometrische Mittel durch das kleinere harmonische ersetzt wird, die Reihe

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{p_u} + \frac{2}{p_i}\right\} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{p_i} + \frac{2}{p_u'}\right\} > \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{p_u'} + \frac{2}{p_i'}\right\} = \cdots > \frac{1}{p}$$

und damit die zugehörige untere Grenze für p.

Um die Gemeinsamkeit der Ableitung aller drei Grenzen klar zu beleuchten, kann man auch die Bemerkung machen, dass ebenso, wie aus den Reihen (S. 84, 1 a und b)

$$p = p_u - (p_u - p_i) + (p_u' - p_i) - (p_u' - p_i') + \cdots$$
$$\text{und } p = p_i + (p_i' - p_i) + (p_i'' - p_i') + (p_i''' - p_i'') + \cdots$$

die Grenzen von Snellius und Huygens (III a' b', c') hervorgehen, durch die nämliche Behandlung der Reihen

$$p = p_u \cdot \frac{p_i}{p_u} \cdot \frac{p_u'}{p_i} \cdot \frac{p_i'}{p_u'} \cdot \frac{p_u''}{p_i'} \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\text{und } p = p_i \cdot \frac{p_i'}{p_i} \cdot \frac{p_i''}{p_i'} \cdot \frac{p_i'''}{p_i''} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

die Grenze des Finaeus, und der Reihen

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_u} + \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_u}\right) - \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_u'}\right) + \left(\frac{1}{p_i'} - \frac{1}{p_u'}\right) - \cdots$$
$$\text{und } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_u} + \left(\frac{1}{p_u'} - \frac{1}{p_u}\right) + \left(\frac{1}{p_u''} - \frac{1}{p_u'}\right) + \cdots$$

die Grenze des Cusanus hervorgehen.

Es ist daher klar, dass meine frühere Behandlungsweise sich auch im allgemeinen auf die neuen Reihen ausdehnen lässt. Nur ist zu beachten, dass bei der Ableitung der Finaeusschen Grenze alle Rechnungszeichen durch die entsprechenden der nächst höheren Stufe ersetzt werden müssen, dass also Additionen in Multiplikationen, Subtraktionen in Divisionen übergehen und aus Koeffizienten Exponenten werden. Daher werden z. B. die auf S. 84 vorkommenden Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \text{ und } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$$

hier als Exponenten auftreten.

Auf diese Weise erhält man weitere Ableitungen unserer Formeln, deren Ausführung aber nach den gemachten Bemerkungen sich erübrigt. Auf eine dieser Arten entwickelt auch Baltzer (Geom. § 13, 3) die Cusanische Formel, um auf Grund der Archimedischen Vielecksmethode schnell zu einem möglichst genauen Wert von π zu gelangen. Dabei aber wird er sich nicht bewusst, dass er damit just diejenige Formel trifft, von der er nachher (5) sagt: „Andere Grenzen der Peripherie des Kreises oder eines Bogens hatte Snellius in der Schrift Cyclometricus 1621 mitgeteilt, von denen eine bereits bei Nicolaus Cusanus (1450) vorkommt (Klügel, math. W. IV p. 80)."

Anstatt also die angedeuteten Ableitungen der beiden Formeln zu geben, ziehe ich es vor, für die von mir zuerst behandelte Snelliussche Formel noch zwei weitere Beweise zu geben, die sich dann analog auch zur Ableitung der Cusanischen und der Finäischen Grenze verwenden lassen. Der eine Beweis beruht auf der Methode der unbestimmten Koeffizienten, der andere auf der Verwendung der trigonometrischen Reihen. Es sei p als lineare Funktion von p_u und p_i annähernd auszudrücken. Zu dem Zwecke setzen wir an

$$p = p_i + A\,(p_u - p_i) = A\,p_u + (1 - A)\,p_i,$$

wobei A eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet und vorbehalten wird, das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen zu ersetzen. Es ist nun auch

$$p \quad = A\,p_u' + (1 - A)\,p_i'$$

oder, da $p_i' < \dfrac{p_i + p_u'}{2}$,

$$p \quad < \frac{1 + A}{2} \cdot p_u' + \frac{1 - A}{2} \cdot p_i.$$

Da ferner $p_u' < \dfrac{p_u + p_i}{2}$ ist, so folgt

$$p \quad < \frac{1 + A}{4}\, p_u + \frac{3 - A}{4}\, p_i = p_i + \frac{1 + A}{4} \cdot (p_u - p_i).$$

Demnach ist $A = \frac{1+A}{4}$ und das Zeichen $=$ durch $<$ zu ersetzen. Also ergibt sich

$$p < p_i + \frac{p_u - p_i}{3}.$$

Ganz analog kann man zur Ableitung der Finäischen Grenze $\frac{p}{p_i} = \left(\frac{p_u}{p_i}\right)^{\lambda}$ ansetzen usw.

Durch Elimination von α^3 aus den Reihen

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \cdots$$

und

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \cdots$$

folgt:

$$2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 3\alpha + \frac{3}{20}\alpha^5 + \cdots,$$

also $\alpha < \frac{2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{3}$, d. i. die Snelliussche Formel.

Desgl. folgt durch Elimination von α^2 aus den Reihen für $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ und $\cos\alpha$ die Cusanische Formel

$$\alpha > \frac{3\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}.$$

Schliesslich folgt aus denselben beiden Reihen, wenn man ansetzt

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{\lambda} = \cos\alpha,$$

$$1 - \frac{\lambda}{3!}\alpha^2 + \left(\frac{\lambda}{5!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\cdot\frac{1}{3!\,3!}\right)\alpha^4 - \cdots =$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4} - \cdots,$$

also $\lambda = 3$ und daraus die Finäische Formel in der Form von Maskelyne

$$\alpha < \frac{\sin\alpha}{\sqrt[3]{\cos\alpha}} = \sqrt[3]{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}.$$

In der Láskaschen Formelsammlung finden sich (§ 2) von diesen drei trigonometrischen Formeln nur zwei, während die Cusanische Formel auffallender Weise fehlt. Und doch liefert die letztere im Verein mit der Maskelyneschen Formel ein vorzügliches Mittel, um kleine Winkel aus ihren Funktionen oder umgekehrt zu berechnen. Welche Vorteile beide Formeln selbst bei grossen Winkeln bieten, wenn man keine Logarithmentafeln zur Hand hat, kann man erkennen aus der guten Annäherung, welche man z. B. erzielt, wenn man etwa die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 3, 4 und 5 mit ihrer Hilfe berechnet.

Auch aus der Gleichung

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad \varrho' = \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}}$$

lassen sich alle drei Formeln ableiten, was ich jedoch der Kürze wegen übergehen will.

Wir setzen

$$h = \frac{3 f_i f_u}{2 f_i + f_u} \quad \text{und} \quad k = \sqrt[3]{f_i f_u^2}.$$

Wie aus der Reihe

$$f = f_u - (f_u - f_u') - (f_u' - f_u'') - \cdots$$

die weniger brauchbare Näherungsformel

$$g_u' = f_u' - \frac{f_u - f_u'}{3} \qquad f > g_u'$$

hervorgeht, so gehen aus den Reihen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_i} - \left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_i'}\right) - \left(\frac{1}{f_i'} - \frac{1}{f_i''}\right) - \cdots$$

und

$$f = f_u \cdot \frac{f_u'}{f_u} \cdot \frac{f_u''}{f_u'} \cdots$$

die weniger brauchbaren Näherungsformeln

$$h_i' = \frac{3 f_i f_i'}{4 f_i - f_i'} \qquad f < h_i'$$

und

$$k_u' = \sqrt[3]{\frac{f_u'^4}{f_u}} \qquad f > k_u'$$

hervor, für die sich gleichfalls mehrere Ableitungen geben lassen, auf deren Wiedergabe ich jedoch hier verzichten will.

Ordnet man die Näherungsformeln nach ihrer Grösse, so erhält man unter Benutzung meiner früheren Bezeichnungen

$$g_u < g_i < k_u < h < g_u' < g_i' < \cdots < f$$
$$f < g' < k < g'_1 < h_i' < g < \cdots,$$

welche Anordnung die bevorzugte Stellung der Grenzen h und k deutlich zeigt. Die Einordnung der einzelnen Näherungswerte in diese Reihe macht keine sonderliche Mühe. Es sei z. B. die Stellung von h festzustellen. Setzen wir

$$\frac{f_u - f_i}{f_i} = \varepsilon,$$

so ergibt sich

$$h = \frac{f_u}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon} \quad \text{und} \quad k_u = f_u \sqrt[3]{1 - \varepsilon},$$

also $k_u < h$. Ferner ist

$$g_u' = f_u\left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon'\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{4\varepsilon'}{(1-\varepsilon')^2}$$

(nach den Grundformeln), also

$$h = f_u\left\{1 - \frac{\frac{4}{3}\varepsilon'}{1 - \frac{2}{3}\varepsilon' + \varepsilon'^2}\right\},$$

und demnach $h < g_u'$, da $\varepsilon' = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ stets kleiner als $\frac{2}{3}$ ist. Dass $h > g_i$ ist, habe ich schon oben gezeigt. Demnach ist auch $g_i < g_u'$, was ich auf S. 89 o. l. nachträglich zu beweisen in Aussicht gestellt hatte. Damit ist aber auch gezeigt, dass $h < g_i'$ ist, welche Formel, wie oben auseinandergesetzt, Huygens geometrisch abgeleitet hat, um die Richtigkeit der Cusanischen Grenze zu erweisen.

Ferner lässt sich der schwierige Huygenssche Beweis, dass $g' < k$, durch folgende arithmetische Entwickelung ersetzen. Es sei

$$\frac{f_u - f_i}{f_u} = \delta, \text{ also } \delta = 4\delta'(1 - \delta').$$

Dann ist

$$k = f_i'(1 - 2\delta')^{-\frac{1}{3}} \text{ oder, da } f_i' = f_u'(1 - \delta'),$$

$$k = f_u'(1 - \delta')(1 - 2\delta')^{-\frac{1}{3}}.$$

Desgl. ist $g' = f_u'\left(1 - \frac{1}{3}\delta'\right)$. Daraus folgt

$$\frac{(k^3 - g'^3)(1 - 2\delta')}{f_u'^3 \cdot \frac{2}{3}\delta'^2} = 1 - \frac{4}{9}\delta' - \frac{1}{9}\delta'^2.$$

Da aber $\delta' = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ stets $< \frac{1}{2}$ ist, so bleiben beide Seiten der Gleichung stets positiv, also $k > g'$.

Alle behandelten Näherungsformeln gehen auch aus gewissen kyklometrischen Reihen hervor, deren Ableitung ich jedoch, obwohl ich sie früher (S. 89) in

Aussicht gestellt hatte, hier übergehen muss, damit diese Arbeit nicht einen Umfang erhält, der mit den Zwecken dieser Zeitschrift nicht im Einklang steht. Die erwähnten Reihen geben jedoch ein leichtes Mittel an die Hand, um alle Näherungsformeln zu klassifizieren, Darnach sind die bisher behandelten Näherungsformeln von der **zweiten Stufe**, da sie einen Wert ergeben, der von dem wahren Wert des Kreisinhalts oder Umfangs um weniger als $(f_u - f_i)^2$ bezw. $(p_u - p_i)^2$ abweicht. Demgemäss stellen die Vieleckgrössen selber eine Annäherung der **ersten** Stufe dar, da sie vom Kreise um weniger als $f_u - f_i$ bezw. $p_u - p_i$ abweichen. Huygens stellt nun auch Näherungsformeln höherer Stufe auf, und zwar rationale. Er leitet zunächst Lehrsätze (prop. 17 u. 18) über den Schwerpunkt eines Kreissegmentes ab, zu deren Beweis auch ein Parabelsegment sowie ein Lehrsatz von Archimedes betreffend den Schwerpunkt dieses Parabelsegmentes herangezogen werden, und gewinnt dann einen Satz (prop. 19), der in unserer Bezeichnung lautet

$$p < p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3} \cdot \frac{4\,p_i' + p_i}{2\,p_i' + 3\,p_i}$$

oder

$$p < \frac{10\,p_i'^2 + 6\,p_i'\,p_i - p_i^2}{3\,(2\,p_i' + 3\,p_i)}.$$

Eine Untersuchung dieser Formel zeigt, dass sie um weniger als $(p_i' - p_i)^3$ von p abweicht, also von der **dritten** Stufe ist. Doch genügt sie den Ansprüchen nicht, die an eine Näherungsformel zu stellen sind, d. h. es lassen sich andere Formeln von **demselben Bau** aufstellen, die schärfer sind als diese, z. B.

$$p < \frac{24\,p_i'^2 + 7\,p_i'\,p_i - p_i^2}{15\,(p_i' + p_i)},$$

zu der als obere Grenze

$$p > \frac{3\,p_i^2 + 14\,p_i\,p_u' - 2\,p_u'^2}{15\,p_i}$$

gehört. Diese Formeln sind gleichfalls von der dritten Stufe. Allein da hier der Zähler vom 2. Grade ist, so wird die Gliederzahl in Zähler und Nenner um je eins höher als bei den linearen Formeln, die Zahl der zu bestimmenden Koeffizienten vermehrt sich also um 2, und deswegen muss man von einer so konstruierten Formel verlangen, dass sie sogar eine Annäherung der 4. Stufe gibt. Diejenige Formel, die diesen Ansprüchen genügt, lautet

$$\frac{94\,f_i'^2 + 12\,f_i'\,f_i - f_i^2}{15\,(4\,f_i' + 3\,f_i)} < f < \frac{16\,f_u'^2 + 83\,f_u'\,f_i' + 6\,f_i'^2}{15\,(3\,f_u' + 4\,f_i')}.$$

(Entsprechend für die p).

Schliesslich stellt Huygens zu der erwähnten oberen Grenze auch noch eine untere Grenze auf (prop. 20), von der er jedoch keinen Beweis gibt, sondern nur sagt, dass sie auf einer eingehenderen Untersuchung der Schwerpunkte beruht. Diese lautet in Buchstaben:

$$p > p_i + \frac{30\,(p_i' + p_i)\,(p_i' - p_i)\,(2\,p_i' + 3\,p_i)}{9\,(2\,p_i' + 3\,p_i)^2 + 8\,(p_i' - p_i)^2}$$

und ergibt völlig ausgerechnet

$$p > \frac{60\,p_i'^3 + 134\,p_i'^2\,p_i + 32\,p_i'\,p_i^2 - p_i^3}{44\,p_i'^2 + 92\,p_i'\,p_i + 89\,p_i^2}.$$

Die Untersuchung zeigt, dass diese Formel eine Annäherung der 3. Stufe ergibt und in bezug auf die erreichte Genauigkeit sehr gut zu der besprochenen oberen Grenze passt. Aber da hier der Zähler vom 3., der Nenner vom 2. Grade, die Zahl der Koeffizienten also wiederum um zwei grösser ist, so muss man eine entsprechend gebildete Formel aufstellen können, die sogar eine Annäherung der 6. Stufe ergibt. Diese lautet, wenn man wieder zur Abkürzung

$$\delta = \frac{f_u - f_i}{f_u}$$

setzt, woraus

$$\delta' = \frac{f_u' - f_i'}{f_u'} = \frac{f_i' - f_i}{2\,f_i'}$$

folgen würde,

$$f > f_i \left(1 + \frac{2}{3}\,\delta + \frac{8}{15}\,\delta^2 \cdot \frac{1 - \frac{46}{77}\,\delta}{1 - \frac{16}{11}\,\delta + \frac{16}{33}\,\delta^2}\right),$$

wozu als obere Grenze

$$f < f_u \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\,\delta - \frac{2}{15}\,\delta^2 \cdot \frac{1 - \frac{40}{77}\,\delta}{1 - \frac{12}{11}\,\delta + \frac{8}{33}\,\delta^2}\right)$$

gehört. Hieraus folgen die entsprechenden Ungleichungen für p in bekannter Weise. Ein Versuch mit diesen Formeln wird zeigen, dass die beiden so gewonnenen Werte mindestens in sechsmal soviel Stellen übereinstimmen als die beiden Vieleckgrössen, aus denen sie berechnet wurden.

Ich bemerke jedoch ausdrücklich, dass die angeführten Formeln von höherer als der 2. Stufe nur rein theoretischen oder historischen Wert haben, da man ja die kyklometrischen Reihen, aus denen sie hervorgehen, besser **unmittelbar** zur Berechnung der Ludolfschen Zahl verwendet. Ich habe gewissermassen nur das ideale Endziel aufzeigen wollen, das zu erreichen man sich bestreben müsste, wenn man wie Huygens auf geometrischem Wege versuchen wollte, den Kreis annähernd durch eine rationale Funktion zweier sukzessiver Vieleckgrössen darzustellen.

Gleiches gilt nicht von den Näherungsformeln 2. Stufe; diese werden so lange ihre Bedeutung haben, als die Archimedische, d. h. die auf die Vieleckberechnung gestützte Kreismessung, mit deren Theorie sie, wie wir gesehen haben, aufs innigste zusammenhängen, ihre Bedeutung hat. Die Bedeutung der Archimedischen Kreismessung kann aber gar nicht durch die zu schnellerer Auswertung der Zahl π führenden neueren analytischen Methoden beeinträchtigt werden. Denn die Kreismessung ist ein eminent **geometrisches** Problem, das eine **geometrische** Lösung erfordert, und zwar eine Lösung, die wegen der Transzendenz von π den Kreis darstellen muss als den Grenzwert einer unendlichen Reihe konstruierbarer geometrischer Grössen. Und eine andere diese Bedingung erfüllende Methode gibt es nicht als die der regelmässigen Vielecke.

Vereine und Versammlungen.

Verhandlung über den exaktwissenschaftlichen Unterricht auf der Naturforscher-Versammlung zu Breslau *). Den Vorsitz in der Versammlung führte der erste Vorsitzende der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, Prof. Dr. **Chiari** (Prag), der an den auf der vorjährigen Naturforscherversammlung in Kassel gefassten Beschluss erinnernd, eine Darstellung der Vorgänge gab, die der gegenwärtigen Verhandlung voraus gegangen waren und die Vertreter der an der Frage besonders interessierten Vereinigungen, sowie den als Vertreter der grossherzoglich badischen Oberschulbehörde erschienenen Oberschulrat **Rebmann** aus

*) S. Unt.-Bl. X, 5, S. 115/116. Eine Sonderausgabe des amtlichen Berichts über die Verhandlungen ist in Aussicht genommen.

Karlsruhe begrüsste. Demnächst erhielt als erster Berichterstatter das Wort Prof. Dr. K. Fricke (Bremen), der eine Uebersicht über die geschichtliche Entwickelung und den gegenwärtigen Stand des exaktwissenschaftlichen Unterrichts in Deutschland gab. Indem er betonte, dass aus der Zeit des alten Scholastizismus der Glaube übrig geblieben sei, dass eine wirkliche Geistesbildung schliesslich immer doch nur aus Büchern gewonnen werden könne, nahm er Anlass, die herkömmliche Gegenüberstellung von Natur- und Geistes-Wissenschaften zu bestreiten und an den schon 1828 von Bessel ausgesprochenen Satz zu erinnern, dass Bildung des Geistes durch jedes ernste wissenschaftliche Studium gewonnen werden könne. Aus jener Zeit datiere die Realschulbewegung, deren innerster Kern in der Betonung der Bedeutung liege, die der Sach-Unterricht neben dem einseitig formal bildenden Sprachunterricht beanspruchen müsse.

Er skizzierte die Entwickelung des Realschulwesens seit seinen Anfängen bis auf die neueste Zeit, hob die mächtige Förderung hervor, die eine zeitgemässe Umgestaltung des ganzen Schulwesens durch das persönliche Eingreifen des Kaisers empfangen habe, konnte aber nicht verschweigen, dass der wünschenswerte Zustand noch immer nicht erreicht sei, wie sich allein schon aus dem ausserordentlich grossen zahlenmässigen Uebergewicht der Gymnasien ergebe (1902 in Deutschland 482 Gymnasien auf 131 Realgymnasien und 69 Oberrealschulen, in Preussen 315 Gymnasien auf 87 Realgymnasien und 42 Oberrealschulen). Sehr bedauerlich sei auch die Zurückdrängung des exaktwissenschaftlichen Unterrichts auf den Reformschulen, der Verlauf der Schulreformbewegung zeige deutlich, wie man den eigentlichen Bildungskern immer noch überall im Sprachunterricht suche.

Indem der Redner die Charakterisierung der im exaktwissenschaftlichen Unterricht gegenwärtig herrschenden Strömungen für die beiden Seiten dieses Unterrichts, die mathematisch-physikalische und die biologische, den folgenden Spezialreferenten überlassen zu wollen erklärte, nahm er nur Anlass, noch kurz auf die seinerzeit von der Hamburger Naturforscherversammlung erhobene und im vergangenen Jahre von der Kasseler Versammlung bestätigte Forderung der Wiedereinführung des biologischen Unterrichts in die oberen Klassen wenigstens der Realanstalten hinzuweisen, die Erfüllung dieser Forderung sei auch schon darum eine Notwendigkeit, weil es sonst unmöglich sei, die genügende Anzahl fachmässig vorgebildeter Lehrer zu gewinnen, indem es für die in jenen Fächern zu erwerbende Lehrbefähigung an der geeigneten Verwendung fehle; die Folge davon sei die, dass schon jetzt überall, besonders aber im Osten, der Unterricht vielfach in den Händen unzureichend vorgebildeter Lehrer liege. Unter lebhaftem Beifall der Versammlung schloss der Redner mit dem Ausdruck der Hoffnung, dass durch die natürliche Entwickelung der Dinge den exakten Geisteswissenschaften mit der Zeit der Platz werde eingeräumt werden, der ihnen als vollberechtigten Trägern der Geistesbildung neben den sprachlich-geschichtlichen Lehrfächern gebühre.

Der folgende Referent, Geheimrat Dr. Felix Klein (Göttingen), hatte ein Schema verteilen lassen, das den Zuhörern die Verfolgung der von ihm in den Vordergrund gestellten Hauptgesichtspunkte ermöglichte. An der Hand dieses Schemas vorgehend betonte der Redner in einem einleitenden Abschnitt zunächst, dass er nach Verständigung mit Prof. Fricke nicht nur die Wünsche der Universitäten, sondern auch die in den Kreisen der höheren Schulen selber herrschenden Strömungen zum Gegenstand seines Berichts machen wolle, er nahm Bezug auf drei, zum Teil aus den Göttinger Ferienkursen erwachsene, von ihm selbst, Prof. Riecke und Prof. Schilling herausgegebene, zahlreiche Beiträge von Fachgenossen in Göttingen bringende Veröffentlichungen*), gedachte der aus den Oberlehrerkreisen selbst erwachsenen Bewegungen, insbesondere der Gründung des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, ebenso wie der aus den Kreisen der Technik heraus lautgewordenen und namentlich von dem Verein deutscher Ingenieure vertretenen Forderungen, um auf Grund aller dieser Momente das Verhältnis des Unterrichts an den höheren Mittelschulen zu dem Universitätsunterricht zu charakterisieren und die Richtung, in der sich an beiden Stellen die Weiterbildung zu vollziehen habe, kurz zu zeichnen. Er betonte dabei auch seinerseits, dass es sich nur um die Bedürfnisse des allgemein bildenden Unterrichts handle, für deren immer nachdrücklichere Anerkennung die Unterstützung des mächtigen Faktors der Naturforscher-Versammlung zu gewinnen sei.

Im einzelnen auf den mathematischen Unterricht eingehend, besprach er kurz die Gründe für die vielfach zu beobachtende Abneigung der gebildeten Kreise gegen die Mathematik, schilderte die Wandlung, die die Methode des Unterrichts erfahren habe, kennzeichnete die Bedeutung der Mathematik für die Gesamtkultur im 19. und die ihr im 20. Jahrhundert obliegenden Aufgaben, erörterte die Verschiedenheit, in der die Lösung dieser Aufgaben von seiten der Gymnasien und der Realanstalten zu bewirken sei, hob die Wichtigkeit eines zweckmässigen propädeutischen und eines im weiteren Verlauf die Anwendungen genügend berücksichtigenden Unterrichtsbetriebes hervor und behandelte besonders eingehend das Verhältnis der Mathematik zu den Naturwissenschaften, das sehr wohl ein aufrichtiges, den beiderseitigen Wünschen gerecht werdendes Freundschaftsverhältnis sein könne. Mehrfach könne der naturwissenschaftliche Unterricht durch den zweckmässig geleiteten mathematischen Unterricht entlastet werden.

Der dritte Abschnitt des Referats war dem physikalischen Unterricht gewidmet, dessen eigenartigen Charakter nebst den daraus hervorgehenden Sonderforderungen der Redner eingehend skizzierte. Er erörterte, in welcher Weise die aus dem wachsenden Stoffumfang und der immer zunehmenden Verbindung mit den naturwissenschaftlichen Nachbargebieten erwachsenden Schwierigkeiten durch Verbesserung der Methode und passende Stoffbeschränkung unter Innehaltung leitender Gesichtspunkte überwunden werden könnten, betonte die Notwendigkeit ausreichender Ausrüstung der physikalischen Sammlungen, gedachte des steigenden Interesses für die Einführung von Schülerübungen und der Förderung, die die physikalische Didaktik durch die Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht gefunden hat, er schöpft daraus die Hoffnung, dass die einleitenden Vorlesungen an den Hochschulen künftig höher einsetzen können werden, als bisher.

Im vierten Abschnitt seines Referats würdigte Prof. Klein die Lehrerbildung und die sonstigen wissen-

*) Leipzig, B. G. Teubner.

schaftlichen Prämissen der Lehrertätigkeit, charakterisierte die für den Oberlehrer erforderliche Bildung als mitten zwischen der enzyklopädischen Bildung der Volksschullehrer und der wissenschaftlichen Vertiefung des Hochschullehrers stehend und zog aus dieser Charakterisierung eine Reihe von Folgerungen, u. a. die der Trennung der mathematisch-physikalischen Studien von den biologischen, erkannte die durch die Zulassung des Studiums an den Technischen Hochschulen erwachsende Konkurrenz als förderlich an, forderte eine gegen den bisherigen Zustand weit umfassendere Ausdehnung der Ferienkurse, sowie die Ermöglichung selbständiger wissenschaftlicher Weiterbildung und für diese Zwecke als Zielpunkt die Einrichtung regelmässiger Urlaubssemester.

In einem Schlusswort richtete er dann einen Appell zur Unterstützung dieser im staatlichen und nationalen Interesse gelegenen Forschungen teils an die Behörden, denen leider die exaktwissenschaftlich gebildeten Mitglieder vielfach noch fehlten, teils an die gebildeten Kreise überhaupt und die Mitglieder der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte insbesondere.

Diesem, mit besonders lang anhaltendem Beifall aufgenommenen Referat folgte nun an dritter Stelle der Bericht des Geheimrats Prof. Dr. Merkel (Göttingen) über die den biologischen Unterricht betreffenden Wünsche. Der Redner betonte ausdrücklich, dass er die schultechnische Seite der Frage ausser Betracht lassen werde, er wolle nur gewisse Wünsche zum Ausdruck bringen, deren Erfüllung seines Erachtens unerlässlich und bei gehöriger Einschränkung des in das Gebiet der Philologie gehörenden Unterrichts auch möglich sei. Unter Bezugnahme auf die von Professor Verworn in Göttingen veranlasste, eine Reihe von Abhandlungen verschiedener Fachmänner über den biologischen Unterricht im ganzen und dessen einzelne Seiten im besonderen enthaltende Schrift*), stellte er zwei Hauptsätze auf.

Erstens: Ein unentbehrliches Element einer den Ansprüchen der Gegenwart genügenden allgemeinen Bildung sei die Fähigkeit der Beobachtung.

Zweitens: Für jeden Schüler einer höheren Lehranstalt sei die Kenntnis der wichtigsten Funktionen des menschlichen Körpers unerlässlich.

In der Erfüllung dieser beiden Forderungen lasse die Schule viel, manchmal fast alles zu wünschen übrig. Die dem Kinde eigene treffliche Beobachtungsgabe werde in der Schule geradezu verkümmert, es hänge dies mit der unser ganzes Unterrichtssystem durchdringenden bedauerlichen Ueberschätzung des Bücherstudiums zusammen. Man müsse die Wiederherstellung des früheren, den biologischen Unterricht durch alle Klassen hindurch führenden Lehrplans fordern, wie es die „Hamburger Thesen" zum Ausdruck bringen.

In der Einzelgestaltung des Unterrichts sei eine angemessene Einschränkung der Systematik zu fordern, durch den Unterrichtsbetrieb dürfe dem Schüler die Freude an der Natur nicht verdorben werden. Es sei auch im einzelnen genügender Spielraum zu lassen, ob der Schüler etwas mehr botanisches oder zoologisches Wissen mitnehme, sei weniger erheblich, wichtiger sei die Gewohnheit zu beobachten und naturwissenschaftlich zu denken, die sei namentlich auch für die Angehörigen der Berufe, die sich später nicht weiter mit Naturwissenschaft befassen, wie Juristen und Theologen, sehr wichtig, darum sei die Durchführung des biologischen Unterrichts auch für die humanistischen Anstalten zu fordern.

Eine angemessene Einführung in die Kenntnis des eigenen Körpers sei der beste Schutz vor Vergeudung der Jugendkraft durch übermässigen Alkoholgenuss, Uebertreibung des Sports u. a. m., sie befähige die Vorgesetzten zu rationeller Behandlung der Untergebenen. Was das Mass des Lehrstoffes anlange, so sei jedenfalls zu fordern, dass der Schüler die Bedeutung der Zelle für den Organismus und die Funktion der Hauptorgane kennen lerne, die Anatomie sei nur soweit zu berücksichtigen, als es für hier erforderlich sei. Die Schüler der oberen Klassen seien auch über die Funktionen der Sexualorgane zu belehren, dieser Unterricht werde aber zweckmässigerweise nicht von einem Lehrer, sondern vom Arzt zu erteilen sein, es sei das eine besonders bedeutsame Aufgabe für den Schularzt.

„Schulhygienische Erwägungen" bildeten das Thema des vierten Referats, das Medizinalrat Professor Dr. Leubuscher (Meiningen) erstattete. Dieser betonte zunächst, wie die Forderungen der Schulhygiene bisher fast nur bei den niederen Schulen zu einiger Verwirklichung gekommen seien; während in 200 Gemeinden Schulärzte für die Volksschulen vorhanden seien, fehlten solche fast überall für die höheren Schulen, nur in der Heimat des Redners (Sachsen-Meiningen) bestehe die Einrichtung der Schulärzte für alle Schulen. Infolgedessen sei namentlich die Schädigung der Augen auf den höheren Schulen besonders stark und nehme mit der Klassenstufe fortwährend zu, wie bereits vor 38 Jahren zuerst durch Hermann Cohn (Breslau) festgestellt sei. Ohne zu verkennen, dass an den Uebelständen auch eine Reihe von Faktoren, die ausserhalb der Schule stehen, einen erheblichen Teil der Schuld trage, müsse er doch betonen, dass hier durch Verbesserung der Schuleinrichtungen viel geschehen könne. Der Lehrplan trage den hygienischen Forderungen nicht genügend Rechnung, tatsächlich existiere eine Ueberbürdung. Zu fordern sei unter allen Umständen Verkürzung der Lehrstunden, Verlängerung der Pausen, Beseitigung des Nachmittagsunterrichts, Beobachtung der körperlichen Entwickelung der Schüler. Bei Aufstellung des Stundenplans habe eine Mitwirkung des Schularztes einzutreten, eine Einrichtung, wie sie tatsächlich in Bulgarien bestehe und also auch wohl bei uns möglich sein werde. Die Reform des mathematisch-physikalischen Unterrichts dürfe nicht zu einer Vermehrung der Stundenzahl führen, der biologische Unterricht müsse möglichst im Freien erteilt werden. Ferner sei auf den höheren Schulen Gesundheitspflege zu lehren, dafür sei erforderlich, dass eine gewisse auf der Universität zu erwerbende hygienische Kenntnis zu einer Prüfungsforderung für alle Lehrer gemacht werde. Für die Bekanntmachung der abgehenden Schüler mit den Sexualverhältnissen tritt der Redner ebenfalls ein, auch er hält dies für eine Aufgabe, die dem Schularzt zu übertragen sei.

An diese beiden ebenfalls sehr beifällig aufgenommenen Referate schloss sich eine etwa einstündige Debatte, in der zuerst die Vertreter verschiedener Vereine das Wort erhielten.

Der Vertreter des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, Prof. Pietzker (Nordhausen) erklärte zunächst seine Befriedigung über den Verlauf, den die Verhandlungen genommen hätten. Die auf der

*) Jena, Gust. Fischer.

Versammlung des Vereins in Halle geäusserten Besorgnisse, dass die in den Lehrerkreisen herrschenden Anschauungen nicht genügend zu ihrem Rechte kommen würden, seien durch den Verlauf der Verhandlungen widerlegt. Allerdings sei ja die Zeit für die Diskussion sehr knapp, aber der Stoff könne auch in einer längeren Diskussion unmöglich erschöpft werden, mit Genugtuung begrüsse er die, wie er höre, für die weitere Behandlung der Sache in Aussicht genommene Niedersetzung einer Kommission, in der alle Interessentengruppen vertreten sein würden. Wenn auch von den Referaten nur eines in der Hand eines Schulmannes gelegen hat, so hätte sich doch auch sonst, namentlich in dem Referat des Herrn Geheimrat Klein ein weitgehendes Verständnis für die besonderen Verhältnisse des Schulbetriebes gezeigt, in den beiden letzten Referaten seien freilich neben vielen sehr dankenswerten Anregungen auch einige Forderungen zum Ausdruck gekommen, deren Durchführbarkeit vom Standpunkte des praktischen Schulbetriebes aus für nicht zweifelfrei gelten könne.

Einen speziellen Auftrag von seiten seines Vereins habe er nicht, zu den Einzelheiten, die in den Referaten zur Sprache gekommen seien, persönlich Stellung zu nehmen, erscheine ihm unter den obwaltenden Umständen unangebracht, demgemäss beschränkte sich der Redner auf eine möglichst treue Mitteilung des Inhalts der Verhandlungen, die über die hier behandelten Fragen auf den Vereinsversammlungen in Düsseldorf, Breslau und Halle geführt worden sind und namentlich des Inhalts der in Düsseldorf und Halle gefassten Beschlüsse. Er schloss mit dem Ausdruck der Zuversicht, dass die Arbeit der einzusetzenden Kommission erfolgreich sein werde.

Im Namen des Vereins Deutscher Ingenieure erklärte Geh. Rat Prof. v. Borries (Berlin-Charlottenburg), dass die mathematisch-naturwissenschaftliche Vorbildung auf unseren höheren Schulen den für das Verständnis unserer Zeit und ihrer Kulturaufgaben unerlässlichen Forderungen nicht genüge. Die Fähigkeit der Anschauung, das Verständnis für Grössenverhältnisse, für wirkliche Vorgänge, für den Zusammenhang von Ursache und Wirkung müsse in noch höherem Grade als bisher entwickelt werden, wenn das Ziel erreicht werden soll, Deutsche zu erziehen, die unser heutiges Leben voll verstehen und in ihm gedeihlich zu wirken vermögen. Dabei handele es sich nicht um Fachbildung für die Ingenieure, sondern um Allgemeinbildung, deren Unvollständigkeit in naturwissenschaftlicher Hinsicht bei den Vertretern der Rechtsprechung, der Verwaltung der Gesetzgebung gerade von den Ingenieuren besonders lebhaft empfunden wird.

Nachdem der Redner eine diesen Gedanken zum Ausdruck bringende Resolution verlesen hat, die seitens einer, auf Veranlassung des Vereins kurz vorher in München zusammengetretenen, Konferenz von Industriellen, Professoren an den Technischen Hochschulen und den Universitäten und einigen Schulmännern beschlossen worden ist, spricht er sich noch persönlich für die Wiederaufnahme der Anfänge der Differential- und Integralrechnung in den Unterricht aus, weil gerade dadurch die Aneignung gewisser für eine wirkliche Allgemeinbildung unentbehrlicher Begriffe vermittelt werde und spricht im übrigen die volle Zustimmung des Vereins deutscher Ingenieure zu den hier aufgestellten Zielen aus, die Hauptsätze der von Prof. Verworn herausgegebenen Schrift könnten ebensogut aus dem Kreise der Ingenieure herrühren. Auch er erwarte Gutes von der geplanten Kommissionsberatung.

Frau Dr. Lydia von Rabinowicz-Kempner (Charlottenburg) spricht als Vertreterin des Schlesischen Frauenverbandes und des Verbandes fortschrittlicher Frauenvereine. Sie empfindet es schmerzlich, dass die hier erhobenen Forderungen, mit deren Inhalt sie durchaus einverstanden ist, nur für die höheren Knabenschulen aufgestellt worden sind, während doch die Kenntnis der wichtigsten biologischen Gesetze und der Anthropologie ebenso wie eine auf dieser Kenntnis fussende Unterweisung über die Grundzüge der Gesundheitspflege für die nach diesen Richtungen meist in völliger Unkenntnis lebenden Frauen und Töchter noch notwendiger sei, als für das heranwachsende männliche Geschlecht. Im Namen der von ihr vertretenen Vereine und in der Hoffnung weiterer Zustimmung aus den Kreisen der Frauenwelt befürwortet sie unter dem Beifall der Versammlung die Einführung des biologischen Unterrichts in den höheren Mädchenunterricht, sowie in vereinfachter Gestalt auch in den Unterricht der Mädchenvolksschulen, ebenso wie für beide Arten der Mädchenschulen auch die Unterweisung in den Grundzügen der Gesundheitspflege.

Von den nunmehr zum Wort kommenden Einzelrednern befürwortet Grimsehl (Hamburg) eingehend die Wiederaufnahme der Anfänge der Infinitesimalrechnung in den höheren Unterricht, indem er auf Grund der an den Hamburger Schulen gemachten Erfahrungen ausführt, dass damit keine Belastung, sondern eine Entlastung der Schüler, andererseits aber eine Vertiefung namentlich des physikalischen Unterrichts herbeigeführt werde. Eine exakte, in das Wesen der Sache einführende Behandlung der bei so vielen Anlässen sowohl innerhalb der Elementar-Mathematik wie in der Physik auftretenden Grenzbetrachtungen werde gerade erst durch die Anwendung der wissenschaftlichen Bezeichnungen für den Differentialquotienten und das Integral ermöglicht. Ferner spricht er sich sehr warm für die physikalischen Schülerübungen aus, die das beste Mittel seien, den Uebelständen entgegenzuwirken, die die durch die Verhältnisse unabweislich gemachte Einschränkung des physikalischen Lehrstoffs auf die wichtigsten Vorgänge mit sich bringe. Denn durch die Schülerübungen werde das lebendige Interesse des Schülers derart erweckt, dass er auch ausserhalb der Schule für alles Wirken physikalischer Gesetze ein offenes Auge zeigen und jede Gelegenheit zu selbsttätiger Weiterbildung wahrnehmen werde. Die Frage der Revision des physikalischen Lehrstoffs eingehender zu behandeln müsse er sich versagen und wolle nur betonen, dass hier manches Alte aufgegeben werden müsse, um für Neues Raum zu gewinnen.

Classen (Hamburg) bekennt sich als Mitglied des naturwissenschaftlichen Vereins zu Hamburg, aus dessen Mitte seinerzeit der Anstoss zu der die Wiedereinführung des biologischen Unterrichts in die oberen Klassen fordernden Bewegung gekommen sei. Er selbst sei nicht Biologe, sondern Physiker, gerade als solcher wolle er aussprechen, dass die Physik keine Ursache habe, in der Berücksichtigung der biologischen Forderungen eine Beeinträchtigung ihrer Interessen zu erblicken. Die Beobachtungsfähigkeit, die auch die Physik fordere, werde besser als an den physikalischen Apparaten, in der Natur selbst, d. h. an den Vorgängen des lebenden Organismus gewonnen. Die Stärkung des biologischen Unterrichts nach Umfang und Methode kann auch die Physik ihrerseits nur freudig begrüssen, beide Seiten der Naturwissenschaft seien gleichberechtigt, beide tragen den Charakter von Experimental-Wissenschaften, deren Ziel das gleiche sei, möglichst treue Beschreibung der Naturvorgänge.

Archenhold (Treptow-Berlin) glaubt, dass die beiden einander entgegenstehenden Forderungen, einerseits Erweiterung des Lehrstoffes, andererseits Berücksichtigung der hygienischen Gesichtspunkte recht wohl gleichzeitig befriedigt werden könnten, wenn man den Unterricht so viel als möglich im Freien erteile. In Charlottenburg habe man eine Waldschule für kranke Kinder eingerichtet, seiner Meinung nach empfehle sich eine derartige Einrichtung ebensogut für gesunde Kinder. Er spreche aus Erfahrung, er habe z. B. mathematischen Unterricht im Freien erteilt und in einem zwölfstündigen Kursus dasselbe erreicht, was man sonst in der doppelten Stundenzahl erreiche, die Raumanschauung lasse sich da ganz anders pflegen, als im geschlossenen Raume, dabei sei von Uebermüdung keine Rede, die Knaben bleiben frisch. Ganz besonders empfehle sich natürlich der Unterricht im Freien für die Astronomie, er finde leider ein Hindernis daran, dass viele Lehrer selbst nur eine mangelhafte Kenntnis des gestirnten Himmels besitzen und infolgedessen fürchten, sich vor den Schülern zu blamieren. Manche Lehrer unterlassen es aus diesem Grunde, mit ihren Schülern die Treptow-Sternwarte zu besuchen. Aus diesem Grunde möchte er auch seinerseits die Forderung des Herrn Geheimrats Klein lebhaft unterstützen, dass den Lehrern zur Ergänzung ihrer Ausbildung auf dem vom Unterricht bisher ausgeschlossenen Gebiet die Möglichkeit, am besten durch Einrichtung von besonderen unterrichtsfreien Semestern, gewährt werde. Es sei auch wünschenswert, die vermöglichen Privatleute zur Hergabe von Mitteln für Unterrichtszwecke noch weit mehr wie bisher zu interessieren. Was nach dieser Richtung hin in Amerika geleistet werde, sei ja bekannt, aber es gehe auch in Deutschland, wie z. B. die Existenz seiner, durch Hergabe von Privatmitteln gegründeten Treptow-Sternwarte beweise. Er beantrage, dass die zu wählende Kommission auch den Auftrag erhalte, Wege ausfindig zu machen, auf denen in Deutschland noch mehr wie bisher private Mittel für wissenschaftliche und Unterrichtszwecke flüssig gemacht werden können.

Zum Schluss ergreift noch Oberschulrat Rebmann (Karlsruhe) das Wort, um im Anschluss an die vorangegangene Debatte auf die Schwierigkeit hinzuweisen, die durch die Fülle der vorgetragenen, mannigfach divergierenden Wünsche erwachse. Es werde schwer sein, allen gerecht zu werden, auch wenn man sie an sich für berechtigt halte. Wie bei den Universitäten, werde auch bei den höheren Mittelschulen eine fortwährend zunehmende Differentiierung eintreten, man werde für Realanstalten ein anderes Bildungsideal aufstellen müssen, als für Gymnasien. Der Schwerpunkt werde in der Erziehung zu naturwissenschaftlichem Denken liegen, doch so, dass dabei nicht Fachvorbildung, sondern allgemeine Bildung erstrebt werde. Da gilt es denn, den naturwissenschaftlichen Unterricht nicht mit Spezialitäten abzuschliessen, möchten diese auch noch so lehrreich sein, sondern mit den grossen, aus der Naturwissenschaft erwachsenen und ihre Weiterentwickelung bedingenden Gedanken, um eine naturwissenschaftliche Weltanschauung zu erzeugen. Unter diesem Gesichtspunkte werde man zu prüfen haben, was im einzelnen notwendig und beibehaltenswert und was entbehrlich sei, dabei werde man damit rechnen müssen, dass im nächsten Menschenalter Lehrzeit und Unterrichtsziele aus hygienischen Gründen unausbleiblich eine Heruntersetzung erfahren würden. Auch sei er nicht der Meinung, dass für die Erreichung guter Erfolge es besonders auf Verbesserung der Methode ankomme, wesentlicher seien die Persönlichkeiten der Lehrer. Hier sei es notwendig, bei Feststellung der Lehrziele nicht den genialen, vorzüglich begabten Lehrer im Auge zu haben, sondern vielmehr den Durchschnitt der Lehrer nach Massgabe sowohl der Begabung als auch der Leistungsfähigkeit. Nur bei gehöriger Berücksichtigung aller dieser Momente dürfe man hoffen, die Bewegung für die Verbesserung unseres Unterrichts in Fluss zu halten. Der Kommission wünsche er, dass es ihr gelingen möge, die mannigfachen Wünsche unter einen Hut zu bringen und so zu einem erspriesslichen Ergebnis zu gelangen.

Der Vorsitzende teilte die (bereits in No. 5, S. 116 näher angegebene) Liste der Herren mit, die seitens des Vorstandes für die Mitgliedschaft an der zu bildenden Kommission in Aussicht genommen sind, indem er betonte, dass der Beschluss über die Zusammensetzung nach den Satzungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte Sache nicht der Versammlung, sondern des Gesellschaftsvorstandes sei, der indessen naturgemäss den Wunsch habe, in Uebereinstimmung mit der Versammlung zu handeln. Aus der Mitte der Versammlung wurde angeregt, in die Kommission noch eine Dame hineinzuwählen, dieser Vorschlag aber zurückgezogen, nachdem vom Vorstandstisch aus darauf hingewiesen worden war, dass die Zusammensetzung der Kommission das Ergebnis sorgfältiger, alle Interessen gegeneinander abwägender Ueberlegung sei und dass es darum bedenklich erscheine, durch Aenderungen an der Zusammensetzung das erzielte Gleichgewicht wieder in Frage zu stellen, dass übrigens aber diese Kommission die selbstverständliche Befugnis habe, sich für die Beratung der ihr entgegentretenden Einzelfragen jedesmal durch Hinzuziehung geeigneter Persönlichkeiten zu erweitern und dass sie von dieser Befugnis jedenfalls reichlichen Gebrauch machen werde.

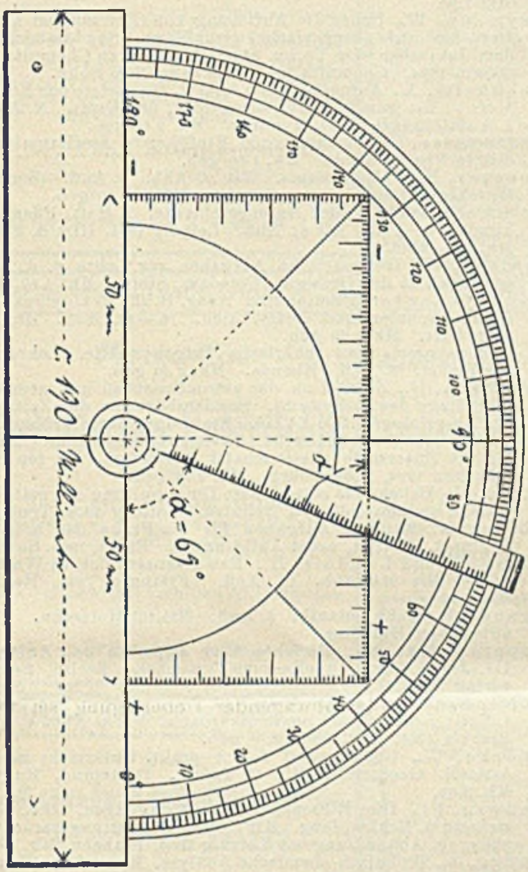
Schliesslich drückte die Versammlung ihre Zustimmung zu dem Vorgehen des Vorstandes dadurch aus, dass sie einstimmig die folgende Resolution annahm:

> In voller Würdigung der grossen Wichtigkeit der behandelten Frage spricht die Versammlung dem Vorstande den Wunsch aus, in einer möglichst vielseitig zusammengesetzten Kommission diese Frage weiter behandelt zu sehen, damit einer späteren Versammlung bestimmte, abgeglichene Vorschläge zu möglichst allseitiger Annahme gebracht werden können.

Lehrmittel-Besprechungen.

Neuer Transporteur nach Kreuschmer (D. R.-G.-M. No. 198516). Das nach Angabe von Professor Dr. Kreuschmer in Barmen von der Lehrmittel-Anstalt J. Ehrhard & Cie. in Bensheim (Hessen) hergestellte, zum Preise von M. 0,40 erhältliche neue Lehrmittel wird durch die nachstehende, auch über die Grösse Aufschluss gebende Figur veranschaulicht.

Das Neue an ihm besteht in einer Vorrichtung, die die natürlichen Werte der Winkelfunktionen ohne weiteres abzulesen gestattet. Zu diesem Zwecke ist der Drehzeiger so gestaltet, dass seine eine, mit Millimeterteilung versehene Kante gerade durch den Mittelpunkt des Transporteurs geht, auf dessen Scheibe ein, am Rande ebenfalls mit Millimeterteilung versehenes Rechteck von 100 mm Breite und 50 mm Höhe aufgezeichnet



ist. Innerhalb dieses Rechtecks wird durch den Zeiger bei jeder Winkelstellung ein rechtwinkliges Dreieck abgeschnitten, dessen eine Kathete von fester Länge ist, während die Hypotenuse und die andere Kathete je nach den Umständen veränderlich sind. Und zwar besitzt für Winkel zwischen 0 und 45^0, sowie zwischen 135^0 und 180^0 die horizontale, für Winkel zwischen 45^0 und 135^0 die vertikale Kathete die feste Länge von 50 mm. Wie bei diesem Verfahren die Werte der Winkelfunktionen ohne weiteres für jede Gradzahl ablesbar sind, ist unmittelbar klar, besonders nützlich dürfte der neue Transporteur aber für die Veranschaulichung der Beziehungen sein, die zwischen der Veränderlichkeit des Winkels selbst und der seiner Funktionen, sowie zwischen der Sachlage im ersten und der im zweiten Quadranten bestehen. Hergestellt ist er aus festem weissem Karton, der 8 mm breite Drehzeiger ist dauerhaft gearbeitet, der ganze Apparat ist demnach auch für die Hand des Schülers wohl geeignet. P.

Bücher-Besprechungen.

Albert Trappes Schul-Physik. Fünfzehnte Auflage, neu bearbeitet auf Grund der preussischen Lehrpläne von 1901 von Dr. T h e o d o r M a s c h k e, Oberlehrer am König-Wilhelm-Gymnasium in Breslau. Mit einem Anhange: Die einfachsten chemischen Erscheinungen mit Berücksichtigung der Mineralogie von Prof. Dr. J. S c h i f f, Oberlehrer am Johannes-Gymnasium in Breslau. Mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau, Ferd. Hirt 1903. Preis Mk. 4,50.

Das altbewährte, nach des Verfassers Tode bereits in der 11. bis 14. Auflage von mehreren anderen Händen umgearbeitete Buch erscheint hier in fast ganz neuem Gewande. Der Bearbeiter nennt in der Vorrede verschiedene Abschnitte, die ganz neu bearbeitet sind — unter ihnen befindet sich selbstverständlich der Abschnitt über Magnetismus und Elektrizität — ferner eine ganze Reihe von völlig neuen Zusätzen und eine grosse Zahl Einzelparagraphen, die eine neue Darstellung erfahren haben. Dadurch ist eine grosse Reichhaltigkeit des Inhalts erzielt worden, über die der Verfasser sich auch im Vorwort eingehend ausspricht. Er betont die Unmöglichkeit einer erschöpfenden Durcharbeitung des ganzen Stoffs, aus dem vielmehr eine Auswahl zu treffen sei, die je nach dem Ermessen der einzelnen Fachlehrer verschieden ausfallen werde, so dass man, um möglichst jedem Standpunkt gerecht zu werden, den Stoff nicht zu knapp bemessen dürfe. Wie dabei die systematische Stoffanordnung des Buches den freien Gang des methodischen Unterrichts nicht behindert, erläutert der Verfasser in der Vorrede durch eingehende Skizzierung eines speziellen Vorschlags für die Behandlung der Mechanik.

Sein eigentümliches Gepräge erhält das Buch durch das Bestreben, eine die einzelnen Seiten der physikalischen Vorgänge möglichst scharf auseinanderhaltende begriffliche Einsicht zu geben. Dieses, den experimentellen Charakter des Unterrichts übrigens nicht beeinträchtigende Bestreben tritt besonders deutlich in der Stoffeinteilung der Mechanik hervor, bei der das rein geometrische und das physikalische Element in den Bewegungsvorgängen streng unterschieden werden, vielleicht muss man die hier an das Abstraktionsvermögen und auch an die mathematische Auffassung der Schüler gestellten Anforderungen als ziemlich weitgehend bezeichnen. Besonderes Lob verdient der Abschnitt „Magnetismus und Elektrizität“, in dem theoretische und experimentelle, die Bedeutung der Analogie bei der Gewinnung der Grundbegriffe klar hervortreten lassende Behandlung vortrefflich ineinander greifen. Auf eine Reihe von Einzelheiten, die mir weniger gefallen, z. B. in der Optik, möchte ich nicht weiter eingehen, weil sie für mich kein Hindernis bilden, rückhaltlos anzuerkennen, dass ein an der Hand dieses Buches betriebener physikalischer Unterricht der speziellen Bildungsaufgabe, die der Physik im Lehrplane unserer höheren Schulen gestellt ist, der Erziehung zu einer auf eindringender Beobachtung ruhenden naturwissenschaftlichen Denk- und Anschauungsweise in hohem Grade gerecht zu werden vermag.

Wie früher ist dem Buche auch jetzt ein Anhang beigegeben, der die notwendigsten Elementarkenntnisse in der Chemie vermitteln soll. Die gegenwärtige von Prof. S c h i f f herrührende Form dieses Anhanges weist natürlich ebenfalls gegen seine ursprüngliche (von Stenzel herrührende) Fassung wesentliche Aenderungen auf, die Natur der Sache bringt es mit sich, dass diese, sich gegenwärtig auf die Bedürfnisse des chemischen Gymnasialunterrichts beschränkende Einführung in die Chemie im Gegensatz zu dem systematischen Charakter des voraufgehenden physikalischen Lehrbuches einen wesentlich methodischen Zuschnitt aufweist, sie befolgt einen ganz bestimmten Lehrgang und entfaltet infolgedessen natürlich nur für den Lehrer ihren vollen Wert, der gerade diesen Lehrgang bevorzugt. Bei ihm folgte auf die „Eigenschaften einiger wichtigen Stoffe (metallischer und nicht metallischer Zustand)“ das „Verhalten der Schwermetalle zum Schwefel„, dann „Die leichten Metalle“, „Verhalten der Metalle und des Phosphors beim Erhitzen an der Luft“, „Untersuchung der atmosphärischen Luft, Stickstoff und Sauerstoff“, „Untersuchung des Wassers, Wasserstoff und Knallgas“, „Atomtheorie“, „Kohlenstoff und Silicium“, Verbindungen des Wasserstoffs mit Schwefel, Stickstoff und Kohlenstoff“, Volumenverhältnisse der Gase; Molekulartheorie“, „Reduktionsvorgänge“, „Ternäre Verbindungen (Säuren und Basen)“, „Säuren und Salze“. Ohne zu verkennen, dass gewiss eine grössere Zahl von Lehrern den hier an die Hand gegebenen Weg gern einschlagen werden, muss ich doch sagen, dass er mir weniger zusagt, und zwar aus verschiedenen Gründen. Einmal benutzt er zur Einführung in die Chemie verschiedene Stoffe, die dem Schüler ferner liegen und weniger bekannt sind; gegenüber diesem, durch die wenig glückliche Verkoppelung von Chemie und Mineralogie im Gymnasiallehrplan allerdings begünstigten Verfahren erscheint mir die alte Anknüpfung an die mit der atmosphärischen Luft zusammenhängenden Vorgänge auch jetzt noch als die bei weitem natürlichere. Zweitens finde ich, dass hier unvermeidlicherweise manches vorweggenommen wird und namentlich erwachsen dabei auch die fundamentalen Begriffe der chemischen Theorie nicht in der Weise von selbst, wie man es wünschen möchte. Die Verwendung des „idealen Einheitselementes“ $\left(\frac{1}{16}S\right)$ hätte m. E. in einem solchen Elementarbuch keinen Zweck, hier sollte man ruhig mit dem Wasserstoff operieren, um hinterher in einer Anmerkung die Berichtigung auf die gegenwärtige Bedeutung der Aequivalentzahlen anzufügen. Im ganzen also muss ich sagen, dass ich, ohne die positiven Seiten dieses, die sichere Hand des praktischen Lehrers überall verratenden Leitfadens zu verkennen, für die erste Einführung einen anderen Weg vorziehen würde.

P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Ehrig, G., Ueber Stoff und Methode des mathem. Unterrichts an Baugewerkschulen. Leipzig 1904, Leineweber.

L'Enseignement mathématique, VI Année Nr. 1—6. Paris 1904, C. Naud.

Féaux, B., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 9. Aufl. Besorgt durch Fr. Busch. Mit 213 Fig. Paderborn 1904, Schöningh. Mk. 2.60.

Fitting, F., Das Rösselsprungproblem in neuer Behandlung, Programmabhandlung des Gymnasiums zu M.-Gladbach. Ostern 1904 (Progr.-Nr. 516). Mit 25 Fig. Leipzig 1904, Teubner.

Fort, O., und Schlömilch, O., Lehrbuch der analyt. Geometrie. 1. Teil: Analyt. Geometrie der Ebene, von O. Fort. 7. Aufl., besorgt von R. Heger. Ebenda. Mk. 4.—.

Fortschritte der Physik, Halbmon. Lit.-Verzeichn., redig. von R. Assmann und K. Scheel. Jahrg. III, No. 1—22. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn.

Fraas, E., Geologie. Mit 16 Abb. u. 4 Taf. 3. Aufl. (Samml. Göschen). Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Frick, J., Physikalische Technik. Siebente vollkommen umgearb. und stark vermehrte Aufl. von Otto Lehmann. In zwei Bänden. Erster Band, erste Abteilung. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. Mk. 16.—.

Geissler, K., Anschauliche Grundlagen der mathem. Erdkunde. Mit 52 Fig. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 3.— geb.

Geistbeck, M., Leitfaden der mathem. u. physik. Geographie. 25. Aufl. Mit Illustr. Freiburg 1904, Herder. Mk. 1.40.

Grimsehl, E., Der physikal. Unterr. auf der Unterstufe I, II. Lehrmittel der deutschen Schule. 4. Jahrg. 1904, Nr. 1, 2. Breslau 1904, Priebatsch.

Hänzel, E., Die Empfindungen als Abbildungen des Hirnstoffs. Leipzig 1904, Uhlig.

Hauber, W., Statik. II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Mit 61 Fig. (Samml. Göschen). Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Hertzsch, R. H., Der keimesgeschichtl.-stammesgeschichtl. Beweis für das Dasein Gottes. Leipzig 1901, Hertzsch. Mk. 1.60.

Heymann, W., Ueber die Auflösung von Gleichungen durch Iteration auf geometrischer Grundlage. Sonderabdr. aus dem Jahresber. der Techn. Staatslehranst. zu Chemnitz für Ostern 1904. Chemnitz 1904, Pickenhahn & Sohn.

Hochheim, A., Aufgaben aus d. analyt. Geometrie der Ebene. Heft 1: Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. A. Aufg. 3. Aufl. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 2.40 geb.

Holzmüller, G., Vorbereitende Einführ. in die Raumlehre. Mit 76 Fig. Ebenda. Mk. 1.60 geb.

Hoernes, R., Paläontologie. Mit 87 Abb. 2. Aufl. (Samml. Göschen). Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Hummel's Leitfaden der Naturgeschichte. 2. Heft: Pflanzenkunde. 23. Aufl. Mit 64 Abb. Leipzig 1904, Hirt & Sohn. Mk. 1.— kart.

Janisch, W., Geometrische Aufgaben zur Lehre v. d. Proportionalität der Grössen. Potsdam, Stein. Mk. 1.50.

Kambly-Roeder, Planimetrie. Ausg. B. für Realgymnasien, Oberrealschulen und Realschulen. 16.—22. Aufl. Breslau 1904, Hirt. Mk. 1.65 geb.

—„— Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Lehraufg. der Prima. 3. Aufl. Ebenda. Mk. 2.30 geb.

Kewitsch, G., Zweifel an der astronomischen und geometr. Grundlage des 60-Systems. Sonderabdr. aus der Zeitschr. für Assyriologie, Bd. XVIII. Strassburg 1904, Trübner.

Kleiber, J. u. Scheffler, H., Elementar-Physik mit Chemie für die Unterstufe wissenschaftl. Anstalten. Mit 300 Fig. München 1904, Oldenbourg. Mk. 2.60 geb.

Klein, F., Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathem. Unterr. an den höheren Schulen. Leipzig 1904, Teubner.

Köhler, A., Mathem. Aufgaben für die Prima der höheren Lehranst. Teil II, nebst Auflösungen. Berlin 1904, Simion.

Krass, M. und Landois, H., Das Pflanzenreich in Wort u. Bild. Mit 253 Abb. 11. Aufl. Freiburg 1904, Herder. Mk. 2.10.

Krause, H., Schulbotanik. 6. Aufl. Mit 401 Holzschn. Hannover 1904, Helwing.

Leppin & Masche, Berichte über Apparate und Anlagen. III. Jahrg. Nr. 1, 2 (Radium-Versuche). Berlin, Selbstverlag Nr. 4.

Loew, E., Pflanzenkunde. Ausgabe f. Realanstalten. In 2 Teilen. 1. Teil: Lehrstoff der Sexta bis Quarta. Mit 83 Abb. 4. Aufl. Breslau 1904, Hirt. Mk. 2.— geb.

Lüdcke, W., Uebungsstoff f. den prakt. Unterricht in der darstell. Geometrie. Mit 19 Tafeln. Dortmund, Ruhfus. Mk. 3.60.

Ludwig, Fr., Die Milbenplage der Wohnungen. Ihre Entstehung u. Bekämpfung. Mit 7 Abb. (Sammlung naturw. u. pädagog. Abhandlungen.) Leipzig 1904, Teubner. Mk. —.80.

Lunge, G., Technisch-chemische Analyse. Mit 16 Abb. (Sammlung Göschen.) Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Marpmanns illustr. Fachlexika der gesamten Apparaten-, Instrumenten- u. Maschinenkunde, der Technik u. Methodik f. Wissenschaft, Gewerbe u. Unterricht. Bd. I. Chemisch analyt. Technik u. Apparatenkunde. Lfrg. 1/2 à Mk. 1.50. Leipzig, Schimmelwitz.

Martus, H. C. E., Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Grosse Ausgabe. Mit 100 Fig. 3. Aufl. Dresden 1904, Koch. Mk. 9.—.

Mitteilungen, Mathem. naturwiss., d. mathem. naturw. Vereins in Württemberg, herausgeg. von Schmidt, Haas u. Wölffing. II. Serie, VI. Band, Heft 1 (April 1904). Stuttgart, Metzler.

Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere d. mathematischen Unterrichts a. d. Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Inaugural-Dissertation. Leipzig 1904, Teubner.

Müller, F., Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathemat. Inhalts. Ebenda. Mk. —.80.

Neesen, Fr., Kathoden- und Röntgenstrahlen, sowie die Strahlung aktiver Körper. Mit 50 Abb. Wien 1903, Hartleben. Mk. 4.—.

Netto, E., Elementare Algebra. Mit 19 Fig. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 4.40 geb.

Niemöller, F. und Dekker, P., Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. In 4 Heften. Heft 4: Pensum der beiden Primen des Realgymnasiums und der Oberrealschule. Mit 25 Fig. Breslau 1904, Hirt. Mk. 2.50 kart.

Ohmann, O., Leitfaden für den Unterricht in der Chemie u. Mineralogie. 3. Aufl. Berlin 1904, Winckelmann u. Söhne. Mk. 1.80.

Partheil, G. und Probst, W., Die neuen Bahnen d. naturkundl. Unterrichts. 9. Aufl. Berlin 1904, Gerdes & Hödel. Mk. —.60.

Paust, J. G. und Steinweller, F., Pflanzen- u. Tierkunde. Mit 65 Abb. 9. Aufl. (Hirts Realienbuch No. 7.) Breslau 1904, Hirt. Mk. —.55 kart.

Paust, J. G., Physik, Chemie und Mineralogie. Mit 78 Abb. 9. Aufl. (Hirts Realienbuch No. 8.) Ebenda. Mk. —.40 kart.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.