Jahrgang X. 1904. Nr. 4.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Halle (Saale).

Von Max Nath (Nordhausen).

Meine hochgeehrten Herren! Wenn ich, der Aufforderung unseres Vorstandes folgend, die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen zur Einleitung für unsere Besprechungen dieses Themas erörtere, so beabsichtige ich, Ihnen in meinen Ausführungen ein Bild der vielfachen Verhandlungen zu zeichnen, die seit langer Zeit darüber geführt worden sind, geführt worden sind nicht zum wenigsten in den Versammlungen unseres Vereins. Erwarten Sie also keine individuelle und besonders geartete Auffassung und Behandlung der Aufgabe. Nur eine Hervorhebung der hauptsächlichsten Streitpunkte und eine Stellungnahme zu ihnen werden Sie finden. Und wenn ich um Ihre Nachsicht bitte schon aus dem Grunde, weil ich mir bewusst bin, dass unter Ihnen viele sind, die eine längere und ausgiebigere Unterrichtserfahrung haben, als mir zur Verfügung steht, und die seit längerer Zeit und intensiver der Frage nachgedacht haben, die uns heute hier zusammengeführt hat, so muss ich es noch besonders auch deswegen tun, weil ich ihrem Studium wegen einer unvorhergesehenen Abhaltung nicht habe so viel Zeit widmen können, als ich bei der Uebernahme der Arbeit für möglich hielt.

Ein philosophischer Schriftsteller unserer Tage[1]) hat den Begriff der höheren Schulen dahin bestimmt, „dass es das leitende Prinzip des höheren Unterrichts sein muss, an einem zweckmässig ausgewählten Stoff die harmonische Entwickelung aller derjenigen geistigen Kräfte in dem Individuum zur Entfaltung zu bringen, die zur Erzeugung des gegebenen Kulturzustandes wirksam gewesen sind.“ Es ist mit Recht bemerkt worden[2]), dass diese Definition sehr klar die in Betracht kommenden Begriffe hervorhebt, das Objekt des Unterrichts, den Zögling, in dem Kräfte geistiger Art entwickelt werden sollen, das Mittel dazu, den zweckmässig ausgewählten Stoff, endlich den Zweck, den Schüler zu befähigen, an dem Kulturzustande den rechten Anteil zu nehmen. Von dieser Erklärung aus-

[1]) Ferdinand Jakob Schmidt. die Philosophie auf den höheren Schulen. Preussische Lehrbücher 1902. S. 461—482.

[2]) Alfred Rausch, Schülervereine, Erfahrungen und Grundsätze. Halle a. S. 1904. S. 15 — auch in den Verhandlungen der 9. Direktorenkonferenz der Provinz Sachsen 1903. Berlin, Weidmann. S. 125.

gehend lassen Sie uns einen Blick werfen auf die Besonderheit anderer Bildungsveranstaltungen, um für die Stellung und Aufgabe des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen die Folgerungen zu ziehen.

Entwickelung geistiger Kräfte erscheint als das Ziel des höheren Unterrichts. In dieser Zweckbestimmung fehlt die Berücksichtigung bestimmter Berufsarten. Nur das eine wird an der Beschaffenheit dieser Geistesentwickelung hervorgehoben, dass sie dem Zöglinge die tätige[3]) Teilnahme an den durch die Kulturentwickelung geschaffenen Verhältnissen ermöglichen soll. Aber, wird man sagen, den Hochschulen, der Universitas literarum, wohnt diese Absicht in noch höherem Masse bei. Betrachtet man die Dinge, entkleidet von dem schmückenden Rankenwerk überlieferter Beiworte, so sieht man, dass es in Wirklichkeit etwas anders steht. Wer die Hochschule bezieht, sucht Bildung — Vorbildung, aber Vorbildung für das Eingreifen in die Kulturverhältnisse nach einer bestimmten Richtung, er sucht Fachbildung. Die Hochschule bietet sie ihm, wie die Fachschule ihrerseits dem, der sie aufsucht, eine Fachausbildung überliefert. Verschieden ist der Umfang und die Gestaltung dieser Fachbildung, verschieden der Weg, auf dem man sie an jeder Stelle gewinnt. Die Hochschule entwickelt von den Prinzipien her, aus den inneren Gründen der Sache, historisch und systematisch vor dem Hörer einen Wissenszusammenhang, dessen dieser später einmal für die Ausübung eines Berufes sich wird bedienen müssen. Sie wünscht vor allem, dass der Hörer diesen Zusammenhang als solchen sich zu eigen mache, sie sucht ihn zu befähigen, dass er an der engeren Verknüpfung und an der Erweiterung dieses Wissens selbständig sich beteilige, sie überlässt ihm, für die Anwendung im Beruf das Gegebene nach seinen Bedürfnissen zu verarbeiten. Anders die Fachschule. Den Stoff, den sie liefert, verknüpft sie auf das engste mit seiner Anwendung in einer bestimmten Tätigkeit, sie wählt aus, was für die Verwendung von Wert sein kann, sie verzichtet auf Vollständigkeit und systematische Gestaltung zu gunsten der schnellen und bequemen Benutzbarkeit des Dargebotenen; wo sie auf Probleme zu sprechen kommt, ergeben sich diese aus der Anwendung, die das Wissen finden soll, nicht aus dem Wissen selbst. Fachbildung bieten sie also beide, die Hochschule, wie die Fachschule; die Hochschule in der Absicht, den Lernenden zu wissenschaftlicher Erfassung und Behandlung der für sein Fach nötigen Kenntnisse zu befähigen, die Fachschule, indem sie die Ausbildung für einen Beruf durch die Darbietung des nötigen Wissens und seiner Verwertung in dem Fache herbeizuführen sich bestrebt.

Diesen Zielen gegenüber ist die Absicht der höheren Schule, die man als Bildungsschule bezeichnen kann, eine allgemeine, zugleich eine propädeutische, vorbereitend auf die spätere besondere Vorbildung für den Lebensberuf. Aber ohne Berücksichtigung irgend eines besonderen Berufs hat sie zum Ziel „diejenige allgemeine Reife des Denkens und Wollens, diejenige geistige und sittliche Ausbildung der Persönlichkeit, welche den Menschen befähigt, sich mit Erfolg für die besonderen leitenden Berufe vorzubereiten, deren Aufgabe es ist, die Nation auf der Bahn der Bildung und Gesittung zu erhalten und vorwärts zu führen“[4]), sie ist bestrebt, in ihren Schülern zu entwickeln „klare und tiefe, zum Wissen dringende Erkenntnis der natürlichen und geschichtlichen Wirklichkeit, sicheres Urteil über die eigenen Verhältnisse und Aufgaben, einen festen, durch die höchsten menschlichen Zwecke bestimmten Willen.“[5])

Aus zweckmässig ausgewählten Stoffen bemüht sich die höhere Schule diese Entwickelung in Bewegung zu setzen. Sie hat in ihren Lehrplänen den Kreis dieser Stoffe umschrieben, und in ihm ist seit langer Zeit auch unsere Wissenschaft einbegriffen. Ein gewisses Mass sicheren und geordneten Wissens, zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten verschieden weit ausgedehnt oder eingeengt, ist als das Ziel des mathematischen Unterrichts bezeichnet, in den z. Z. gültigen Lehrplänen wie in allen früheren. Ueberlieferung positiver Kenntnisse ist also die nächste Aufgabe unserer Tätigkeit. Man kann streiten, ob sie die wichtigste ist, und wir werden darüber reden, in welcher Ausdehnung sie zu lösen sei. Jedenfalls ist sie eine unserer Aufgaben, der wir uns keinesfalls entziehen können. Aber wir teilen sie mit den Vertretern der anderen Fächer, die zu jenem Kreise zweckmässig gewählten Bildungsstoffes gehören. Doch wie bei allen anderen Gegenständen des Unterrichts ist die Ueberlieferung des Stoffes nur eine Aufgabe, die uns obliegt. Wie der Sprachunterricht sich nicht damit begnügen kann, die Form der Sprache, die Bedeutungen der Worte, ihre Abwandlung in Deklination und Konjugation, die Satzfügung und den Sprachgebrauch dem Gedächtnis und dem Verstande des Schülers nahe zu bringen, wie vielmehr erst in der An-

[3]) So Fr. Paulsen gegenüber stark betont von Fr. Pietzker, Humanismus und Schulzweck. Braunschweig, Salle. 1889. S. 44, S. 53.

[4]) Max Simon, Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts, in: A. Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. München, C. H. Beck. 1898. Bd. IV. S. 20.

[5]) Fr. Paulsen, Artikel „Bildung“ in: W. Rein. Enzyklopädisches Handbuch der Pädagogik. 2. Aufl, Langensalza, Beyer. 1. S. 662.

leitung und Gewöhnung zur Anwendung dieses Stoffes in der Lektüre und im eigenen Gebrauch der Sprache die sachliche Aufgabe des Sprachunterrichts sich erschöpft, so genügt auch der mathematische Unterricht seiner Bestimmung erst dann, wenn er die Schüler befähigt, die erworbenen Kenntnisse in selbständiger Arbeit richtig anzuwenden. Wissen, aber ebensosehr Fähigkeit, das Wissen anzuwenden, ist das Ziel des Unterrichts. Das materiale Ziel, dem das formale gegenübersteht. Dass dieses Ziel, allgemeine Schulung und Bildung des Geistes, das wichtigere sei, wird oft genug betont. Auf die Summe der Einzelkenntnisse komme es nicht an, die Hauptsache sei, dass der Schüler anschauen, dass er denken lerne, je nach der Art des Lehrgegenstandes, mit dem die Schule ihn beschäftigt[6]). Aber, so sehr ich die Wichtigkeit dieses Ertrages unserer Tätigkeit schätze, — um die Funktionen des Geistes in Bewegung zu setzen, bedarf es eines Stoffes, an dem sie ausgeübt werden können. Diesen Stoff in irgend einer Umgrenzung zu überliefern, ist die erste Aufgabe; die zweite, ihn so zu überliefern, dass allgemeine Geistesbildung an ihm möglich sei.

Von der Umgrenzung des mathematischen Lehrstoffes wäre also zunächst zu sprechen. Vielleicht war es einmal möglich, für alle höheren Lehranstalten das Ziel des mathematischen Unterrichts bezüglich des Stoffes gleich hoch — oder gleich niedrig — anzusetzen.[7]) Es wird das zu einer Zeit gewesen sein, wo die Lehrpläne hervorhoben, was die einzelnen Schultypen einander annäherte. Die jetzigen Lehrpläne betonen ihre Eigenart. Es ist mit Recht darauf hingewiesen worden, wie in dem jetzt abgeschlossenen Schulkampfe die kulturelle Bewegung sich spiegele, „gemäss welcher die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in der allgemeinen Auffassung siegreich neben die philologisch-historische getreten ist, nicht um jene überhaupt zu verdrängen, sondern um sich mit ihr in die Herrschaft gleichmässig zu teilen.“ [8]) „Es gab eine Zeit, in welcher altsprachlich-historische Bildung tatsächlich mit Fug und Recht als Allgemeinbildung bezeichnet werden durfte, dagegen mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung als Berufsbildung. Diese Zeit ist vorüber, und man hat langsam aber sicher erkannt, dass der Begriff der Allgemeinbildung eine Variable ist und keine Konstante“, [9]) man hat sich entschlossen, die Gleichwertigkeit verschieden geführter Bildungswege anzuerkennen, man hat den Schulorganismen das Recht ihrer Eigenart zugestanden.

Aus der Eigenart der Schulorganismen ergibt sich nun eine verschiedene Umgrenzung des mathematischen Lehrstoffes, ergibt sich, dass er für die Realanstalten einen weiteren Umfang haben kann, als für das Gymnasium. Die Eigenart der Anstalten besteht in der Verschiedenheit des Weges, auf dem sie zu demselben Ziele, zur Bildung, zum Verständnis des Kulturlebens, dem wir angehören, zur Fähigkeit, in dieses einzugreifen, leiten. Der Weg ist die Mitteilung verschiedenartiger Kenntnisse, die Uebung und Ausbildung des Geistes an ihnen. Dem Gymnasium ist die historische Vertiefung eigentümlich, der Weg durch die Vergangenheit, die Orientierung an den Verhältnissen des Altertums, — den Realanstalten das Studium der Sprachen und des Lebens moderner Völker, die Betrachtung der Naturerscheinungen und die Vertiefung in die Gesetze des Naturgeschehens. Gemeinsam sind daneben beiden Schulformen eine Anzahl solcher Lehrgegenstände, deren die Bildung der Gegenwart in keinem Falle entraten kann, gemeinsam ist beiden auch der mathematische Unterricht. Aber er kann jetzt „je nach Bedürfnis und im Zusammenhang mit dem allgemeinen Bildungsziele der Anstalt bald mehr die eine, bald mehr die andere Seite hervorkehren; erst die Gesamtheit der nebeneinander stehenden Anstalten hat sozusagen für die ganze Vielseitigkeit der Wissenschaft aufzukommen.“ [10])

Es hat nicht an Stimmen gefehlt, die den Umfang des mathematischen Unterrichts am Gymnasium zu erweitern rieten, es hat nicht an Versuchen gemangelt — gelungenen[11]), und gewiss auch nicht an verfehlten — die Möglichkeit zu erweisen. Ein Erfolg war ihnen nicht beschieden. Der Umkreis des Wissens, wie ihn die Lehrpläne des vergangenen Jahrhunderts im wesentlichen gleichartig festgelegt hatten, ist 1892 durch die Einfügung der Lehre von den Kegelschnitten um ein Stück vergrössert worden. Die Lehrpläne von 1901 haben diesem Bestande etwas wesentliches nicht hinzugefügt, — denn die Wiedereinführung der 1892 ausgemerzten Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre wird als eine Vermehrung doch wohl kaum in betracht kommen können. So ist die Lehraufgabe nach wie vor im wesentlichen das geblieben, was man als Elementarmathematik seit langer Zeit von der höheren Mathematik sondert. Verzicht leistend auf eine Erweiterung des Pensums gehen andere Wünsche dahin, in

[6]) H. Schotten, Wissenschaft und Schule, in: Unterrichtsbl. f. Mathem. u. Naturw. 1900. S. 40.

[7]) A. Wernicke, Kultur u. Schule. Osterwieck a. H. 1895. S. 192.

[8]) A. Wernicke, Allgemeinbildnng und Berufsbildung, in: Ztschr. f. mathem. und naturw. Unterricht. XXIX. S. 381.

[9]) A. Wernicke, a. a. O. S. 383.

[10]) Felix Klein, der Unterricht in der Mathematik in: W. Lexis, Die Reform des höheren Schulwesens in Preussen. Halle a. S., Waisenhaus. 1902. S. 263.

[11]) Man denke an C. Schellbachs Tätigkeit.

der Behandlung und Darstellung des Stoffes andere Wege einzuschlagen. Die Starrheit der Euklidischen Geometrie ist beklagt worden, die, wie sie schon an dem Grundwerke des Altmeisters das Verständnis erschwere, auch in den neueren Bearbeitungen ein Hindernis bilde, ohne dass doch die jüngeren Erzeugnisse die Vorzüge des Vorbildes sich erhalten hätten. [12]) Einführung moderner Betrachtungsweisen, eine „Umbildung vieler Teile der in der Schule gelehrten Geometrie an der Hand der neueren Geometrie ist für ein Bedürfnis der Zeit erklärt“ [13]) worden. Und in verschiedenem Umfange ist auch der Versuch dazu gemacht worden. Für die ersten Anfänge wenigstens hat man unternommen, „durch Drehen, Wenden und Verschieben der Figuren die Anschaulichkeit und die Klarheit des Verständnisses der Figur und ihrer Beziehungen zu steigern, zugleich die Anforderungen an das Gedächtnis der Schüler zu vermindern“, [14]) man hat im Gebiet der Kongruenz die vier Kongruenzsätze durch die Sätze der axialen und zentralen Symmetrie ersetzt, man hat bei der Behandlung der Aehnlichkeit die Definition auf die perspektivische Lage gegründet“, [15]) u. dgl. m. Fehlte es an Zeit und Raum, die neuere Geometrie selbst in die Schule einzuführen, so suchte man in den Elementen doch ihren Methoden Geltung zu verschaffen. Die Versuche blieben nicht ohne Widerspruch; gegenüber den Bestrebungen, die Geometrie der Lage im Unterricht zu behandeln, hat man es unternommen, „die Geometrie des Masses nach Euklid als Ausfluss eines Prinzips kennen zu lehren und dabei gleichzeitig ihre Stellung im Organismus unseres Wissens zu bestimmen.“ [16]) Auch die Arithmetik hat man einer ähnlichen Umarbeitung zu unterwerfen versucht, indem man die Strenge und Schärfe modern-wissenschaftlicher Begriffsbildung, Schlussfolgerung und Beweisführung in die Schule übertrug. [17]) Die Lehrbüchererscheinungen bieten ein buntes Bild dieser widerstreitenden Tendenzen, z. T. ein Hinausschreiten über die bisherigen Ziele des Gymnasiums durch die Einfügung neuer Gebiete, z. T. den Versuch, den gegebenen Lehrstoff nach neuen Gesichtspunkten zu bearbeiten, endlich eine nicht geringe Zahl, die kurz und gut in hergebrachter Form den hergebrachten Stoff behandelt.

Nun, eine Ueberschreitung der Grenzen der Elementar-Mathematik wird der Unterricht am Gymnasium wohl nur gelegentlich, nicht ohne die Gefahr des Misslingens, sich gestatten können. Die Zeit, die zur Verfügung steht, die Anforderungen an die Leistungskraft der Schüler, die er stellen darf, sie reichen dazu im allgemeinen sicherlich nicht aus. Wem es gelingt, der möge dessen sich freuen und an seiner Stelle das Seine tun, — es ist auch zu wünschen und zu hoffen [18]), dass es ihm nicht gewehrt wird, falls er es leisten kann ohne Beeinträchtigung anderer Interessen, — aber er möge nicht fordern, dass anderen befohlen werde, was ihm besonders günstige Umstände ermöglichten. Die Eigenart des Gymnasiums

---

[12]) Hubert Müller, Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Metz, G. Scriba. 1889.

[13]) Aeusserung von Alfred Clebsch, vergl. Hubert Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen. Leipzig, B. G. Teubner. 1878. S. III.

[14]) Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. Leipzig, B. G. Teubner. 1897. S. III.

[15]) Hubert Müller, a. a. O. S. V u. VI.

[16]) A. Wernicke, Grundzüge der Euklidischen Geometrie des Masses. Braunschweig 1887. Beilage zum Jahresber. d. Herzogl. Neuen Gymnasiums. S. 1. — Vergl. Joh. K. Becker. Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. Berlin, Weidmann. 1883. S. 24. „Die Fanatiker der projektivischen Geometrie vergessen, dass die Geometrie des Masses und der Form .... zwar manche Berührungspunkte mit der Geometrie der Lage hat, im Ganzen aber davon unabhängig ist und dieser also nicht untergeordnet werden kann, ohne dass man ihr Gewalt antut; dass man also nicht das vergebliche Unternehmen versuchen soll, zu vereinigen, was nicht zusammengehört, statt den Prinzipien nachzuforschen, nach welchen auch die Geometrie des Masses und der Form in ihrer Weise entwickelt werden kann, die sie als Wissenschaft auf die gleiche Stufe der Vollkommenheit bringt, die die Geometrie der Lage erreicht.“ S. 59: „Was ferner den Stoff anbetrifft, so ist doch zunächst die Geometrie des Masses und der Form wichtiger als die der Lage, und es ist zweckmässiger, erst die Figuren selbst zu betrachten, ehe man von ihrer kongruenten oder ähnlichen Abbildung und den Beziehungen zwischen Original und Projektion handelt. ... Es kann nur verwirren, wenn man gleich anfangs von Strahlenbüscheln und Parallelscharen spricht, Vielecke und Vielseite unterscheidet, das Vieleck bloss als Gebilde aus Geraden und Punkten definiert und dann doch von seiner Fläche spricht, positive und negative Flächen unterscheidet, Punkte und gerade Linien perspektivisch aufeinander bezieht u. dgl. m. ... Hat es nun auch keinen Zweck, mehr aus der Geometrie der Lage in die Elementargeometrie herüberzunehmen, als auch schon zum besseren Verständnis der Eigenschaften der Figur und der sich in derselben aussprechenden Gesetze erforderlich ist, so darf man in dem Bestreben, auseinanderzuhalten, was nicht zusammengehört, doch wieder nicht zu weit gehen. Die Beziehungen der Symmetrie zwischen Punkt und Gerade (zentrische und symmetrische Figuren), die Relationen zwischen Strahlenbüschel und Parallelschar, die Begriffe von Zentrum, Durchmesser, konjugierten Durchmesserpaaren, harmonischen Punkt- und Strahlenpaaren gehören zweifellos auch in die Elemente.“

[17]) Z. B. Fr. Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Halle a. S., H. W. Schmidt. 1875. — F. August, Die Elemente der Algebra für die Mittelklassen höherer Schulen. Berlin, Winckelmann. 1875. — O. Reichel, Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe. 2 Teile. Berlin, Haude und Spener. 1886 u. 1890. — K. Schwering, Anfangsgründe der Arithmetik u. Algebra. Freiburg i. Br. Herder. 1893.

[18]) Vergl. Adolf Matthias, Die Pflege der Eigenart in unseren höheren Schulen, in: Deutsche Monatsschrift für das gesamte Leben der Gegenwart. III. Heft 7 (April 1904). S. 40—51, bes. S. 49 ff.

als der Schule der historischen Bildung, die Ansprüche, die diese Bildung an die Zeit und Kraft des Schülers stellt, sie nötigt, nicht der Bedeutung, wohl aber dem Umfange nach, die exakten Fächer zurücktreten zu lassen. Zusammenhang und Gründlichkeit des Wissens, Sicherheit des Könnens lassen sich nur auf einem kleinen, auf dem abgegrenzten Gebiet der Elementarmathematik, erreichen. Es ändert daran nichts, wenn seit 1892 der Koordinatenbegriff und die Lehre von den Kegelschnitten im Lehrplan steht, wenn 1901 die Behandlung des Funktionsbegriffes empfohlen wird. Es gilt doch hier nicht eine systematische Behandlung zu geben, sondern Ausblicke und Orientierungen, Vorbereitungen des Schülers für die neuen Anschauungen, die der Hochschulunterricht ihm nahe führen wird.[19]) Dieser Aufgabe kann es dann auch dienen, wenn — ursprünglich aus Gründen der Vereinfachung und Erleichterung, — von der althergebrachten Darstellung abgegangen wird, wenn die Anschauungen und Methoden neuerer Wissenschaft in den Lehrstoff der Schulmathematik eingeführt werden.[20]) Aber kein Hinausgehen über dieses Gebiet in materialer Beziehung, auch nicht aus Rücksicht auf die Naturwissenschaften, etwa auf das bessere und tiefere Verständnis von Physik und Astronomie! Kein Schüler hat jetzt ein Recht, dem Gymnasium daraus einen Vorwurf zu machen, dass er zu kurz gekommen sei bei der Belehrung in den exaktwissenschaftlichen Fächern. Wie das Gymnasium heute sein soll und sein kann, muss und kann es sich Beschränkungen auferlegen. Es kann mit Fug und Recht darauf verweisen, dass ja die Schwesteranstalten bieten, was bei ihm vermisst wird, und dass jetzt keine äussere Rücksicht mehr nötigt, den sachlich minder genehmen Bildungsweg zu wählen.

An den Realanstalten liegen die Verhältnisse anders. Die neuen Lehrpläne haben die Disziplin der darstellenden Geometrie dem Unterrichtsstoffe hinzugefügt und einen oft ausgesprochenen Wunsch befriedigt. Einem zweiten gegenüber, der Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung, haben sie sich spröder verhalten. Ich stehe nicht an, meine Ansicht dahin auszusprechen, dass diese Einführung wünschenswert, in der Natur der Sache liegend und dass sie möglich sei. Die Stimmen, die sie fordern, haben sich je länger je mehr verstärkt, gemehrt an Zahl und an Gewicht, gemehrt aus dem Kreise der Lehrer an den Realanstalten,[21]) selbst wie aus dem der Hochschullehrer.[22]) Man hat unter den letzteren nicht immer so gedacht,[23]) man hat sich oft gegen diese Forderung ausgesprochen, mit dem Bedenken, dass die jungen Leute auf den Hochschulen den Anfangsvorlesungen dann nicht die nötige Aufmerksamkeit und Sorgfalt zuwenden möchten, dass die Strenge wissenschaftlicher Untersuchung aber in den Unterweisungen der Schule schon aus Mangel an Zeit nicht werde zu erreichen sein. Jetzt fordert man oft diese Unterweisungen, weil unter ihrer Voraussetzung sich die Hochschulvorträge von vorn herein anders würden gestalten lassen. Aus anderen Beweggründen stellen wohl die Lehrer der höheren Schulen ihre Forderung. Was für mich die Hauptsache ist, was mich dazu geführt hat, sie zu der meinen zu machen, das ist die Eigenart der realistischen Lehranstalten, die Bedeutung, die auf ihnen die Mathematik als Lehrgegenstand und Bildungsfaktor sowohl an und für sich als auch als Hilfsmittel für die Naturerkenntnis hat. Es hat für mich sehr wenig Bedeutung, dass für den Mediziner und den Verwaltungsbeamten, für den Chemiker und den Nationalökonomen Kenntnis der Infinitesimalrechnung von Wert ist. Diesem Bedürfnis könnte durch Einrichtung besonderer Kurse an den Hochschulen, wie für das Lateinische und Griechische, abgeholfen werden. Aber so gewiss auch die Realanstalten nur Elemente der Mathematik lehren können und lehren sollen, so muss doch der Begriff „Elemente" hier anders gefasst werden. Man kann von Elementen

[19]) Vergl. W. Münch, Geist des Lehramts. Berlin, Reimer. 1904. S. 434: „Was von den schwierigeren mathematischen Gebieten den Höhepunkt und Abschluss des gesamten höheren Schulunterrichts bilden soll, unterliegt noch dem Meinungsstreite; erste Einblicke jedenfalls in die jenseitigen Gebiete möchte man gern noch vermitteln, auch um Interessse mit auf den Weg zu geben."

[20]) H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Leipzig, B. G. Teubner. 1890. I. S. 22: „Dagegen muss entschieden eine Reform des planimetrischen Elementar-Unterrichts gefordert werden in dem Sinne, dass die neueren Methoden, insofern als sie das Verständnis und die Einsicht nicht erschweren, sondern erleichtern, und insofern als sie grössere Anschaulichkeit und natürlichere Beweisführung gewähren, dem geometrischen Elementar-Unterricht dienstbar gemacht werden."

[21]) A. Thaer, Differentialrechnung auf Realanstalten, in: Monatsschrift für höhere Schulen, III. S. 86—89. — H. Seeger, Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung. Güstrow, Opitz. 1894. — G. Kewitsch, Höhere Analysis in der Schule, in: Unterr.-Bl. für Math. u. Naturw. III. S. 53 ff.

[22]) Vor allem jetzt F. Klein, auf der Schulkonferenz 1900 (Verhandlungen S. 154) und zuletzt wohl in: Ueber den mathematischen Unterricht auf höheren Schulen (Ztschr. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung XI, 3 und auch Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht XXXIII. S. 114 ff.), dann auch W. Lexis und G. Hauck in dem Gutachten zur Schulkonferenz (Verhandlungen S. 383 u. 391.)

[23]) Z. B. A. Wernicke, Kultur und Schule, S. 191 u. 192; Slaby, Gutachten zur Schulkonferenz 1900. (Verhandlungen S. 377 ff., besonders S. 382).

der Mathematik sprechen in dem Sinne, dass man darunter alle Grundbegriffe, die Fundamentalsätze und Hauptmethoden aller Gebiete versteht.[24]) In diesem Sinne das Unterrichtsgebiet der Realanstalten erweitern zu wollen, wäre natürlich nicht möglich. Aber unter den neuen „Elementen" nehmen die Elemente der Infinitesimalrechnung immer noch eine besondere Stelle ein, ausgezeichnet einmal durch ihre historische Bedeutung, ausgezeichnet noch mehr durch ihre Verwendbarkeit. Von der ganz einzigen Bedeutung, die für die Entwickelung der Mathematik der Begriff der Stetigkeit, des Unendlichkleinen, des Differentialquotienten und des Integrals gehabt hat, eine Vorstellung zu gewähren, scheint mir einer höheren Schule anzustehen, die so, wie die Realanstalten es tun, die Mathematik in die vorderste Reihe der Bildungsfächer schiebt. Ist man der Ansicht, dass Einführung in die antike Philosophie zu den Aufgaben des Gymnasiums gehöre und glaubt man dieser Aufgabe gerecht zu werden, indem man zwei bis drei platonische Dialoge mit den Schülern liest, so meine ich, müsste es auch hier möglich sein, aus dem weiten Gebiet der Infinitesimalrechnung eine Auswahl zu treffen, die es ermöglicht, dass der Schüler das Rechnungsmässige sich zu eigen mache, und dass er eine Vorstellung erhalte von dem gewaltigen Rüstzeug, das der Mensch mit dieser Wissenschaft in der Hand hält. Die Ausführung der Forderung mag auf Schwierigkeiten stossen. Es werden vielleicht manche Schüler das Gebotene nicht verarbeiten können. Aber verarbeiten alle Gymnasiasten, was ihnen in Plato und Sophokles geboten wird? Und hat man schon daran gedacht, diese Schriftsteller von der Schule zu verbannen, weil einige Schüler ihnen nicht gewachsen sind? Man behält sie bei und misst an ihnen die Geister. Man hält sie, weil die Eigenart der Lehranstalt sie fordert. Ziehen wir die Konsequenzen. Einstmals haben realistische Lehranstalten ihre Schüler in die Infinitesimalkalkül eingeführt,[25]) sie haben davon Abstand nehmen müssen aus äusseren Gründen. Es sind aber auch jetzt wohl noch einige mit Erfolg bemüht, die Leistungen auf ihrer alten Höhe zu halten. Mir selbst fehlen ja freilich Erfahrungen in diesem Unterricht. Aber die Diskussion bietet vielleicht Gelegenheit, aus erfahrenem Munde Bericht über die Erfolge zu erhalten. Man [26]) hat gegen die Forderung eingewendet, dass die Zeit zu knapp sei, dass die Kenntnisse nur oberflächlich sein könnten, dass sich ein mechanisches, gedankenloses Handhaben des Verfahrens ergeben würde. Die Zeit ist knapp, das gebe ich zu, — sie wird auch stets knapp bleiben, so sehr man durch Ausscheidung alles Entbehrlichen, gewohnheitsmässig Ueberlieferten an Stoff und Uebungen bemüht sein mag, Klarheit des Wissens und Kraft des Könnens der Schüler für die Einführung in die neuen Vorstellungen zu bereiten.

Es soll ja aber an den Realanstalten auch kein Kolleg über Differential- und Integralrechnung gelesen werden, es sollen nicht alle Subtilitäten der Funktionentheorie behandelt werden. Das geschieht ja wohl auch jetzt noch nicht in den Vorlesungen der Hochschulen. Auch jetzt, wie zu meiner Zeit, bietet die Anfangsvorlesung doch wohl ganz einfach und simpel Anleitung und Uebung zur gewandten und sicheren Handhabung des Kalküls und demnächst die Anwendungen auf Geometrie, Analysis und Mechanik.[27]) Was auf den Realanstalten zu erreichen wäre, das hat ein Freund der Sache vor kurzem so formuliert: „Anleitung zur systematischen Trennung des Wesentlichen vom Unwesentlichen, Vereinfachung der Lehre von den Reihen und von den extremen Werten, von den Tangenten, schärfere Begründung der Exhaustionsmethode, der Bewegungslehre wie der mathematischen Teile der Physik überhaupt, Gelegenheit, die ganze Mathematik unter einem neuen Gesichtspunkt zu wiederholen. . . . Der Primaner wird gezwungen, die Potenz-, Wurzel-, Logarithmenlehre und die Goniometrie sich wieder zu eigen zu machen, die Anwendungen führen ihn an planimetrische, trigonometrische und stereometrische Aufgaben, von der eigentlichen analytischen Geometrie, d. h. von der Anwendung der Analysis auf Geometrie erhält

[24]) Vergl. dazu E. u. U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra usw. Leipzig, Fues. 1884. Kap. 16, bes. S. 414 ff.

[25]) In Wiesbaden bei Traugott Müller und Unverzagt, in Güstrow bei Seeger, in Berlin bei Gallenkamp und wohl noch an mancher anderen Stelle.

[26]) Vor allem G. Holzmüller, an vielen Orten und zuletzt in der Monatsschrift für höhere Schulen. II. S. 557: Ist es möglich und wünschenswert, die Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan der höheren Schule aufzunehmen? Vergl. auch K. Franz. Zur Frage des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen, in Unterr.-Bl. für Math. und Naturw. X. S. 33.

[27]) Vergl. H. Burckhardt, Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken in: Ztschr. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XI. S. 49 ff., bes. S. 56: „Dem angehenden Jünger der Mathematik würde ich raten, sogleich mit beiden Füssen in die Differential- und Integralrechnung zu springen. Diese Disziplin kann man so vortragen, dass man dabei gar nicht danach fragt, wie es die Analysis anfängt, der Forderung der Geometrie gerecht zu werden, sondern in den entscheidenden Punkten an die geometrische Anschauung appelliert." — Ebenso F. Klein, a. a. O. S. 121: „Ich wünsche eine praktische Differential- und Integralrechnung, welche sich auf die einfachsten Beziehungen beschränkt und diese an der Hand der dem Schüler bereits geläufigen Naturvorgänge fortgesetzt veranschaulicht."

er erst hier eine klare Vorstellung." [28]) Ob eine solche Einführung als oberflächlich zu bezeichnen wäre, erscheint mir doch sehr diskutabel. Und dass das Verfahren nicht mechanisch wird, hätte der Lehrer zu verhüten, ebensoweit wenigstens zu verhüten, als auch z. B. das Radizieren und Logarithmieren nicht zu einer mechanischen Operation wird.

Wie weit oder wie eng wir aber auch den Kreis mathematischer Belehrung ziehen, die Forderung, dass „das erste und unbedingte Erfordernis auf allen Gebieten des Schulunterrichts ein gediegenes und verständnisvolles Wissen sein müsse" [29]), gilt stets für sie. Und ich möchte die Forderung um so stärker betonen, je mehr ich Gewicht lege auf die andere Seite, auf die Befähigung der Schüler, das Wissen in Können umzusetzen, es in selbstständiger Arbeit zu verwerten. Ich halte es für durchaus richtig, dass „ohne festes, voll verstandenes Wissen ein Können ganz unmöglich ist, oder doch wenigstens ein äusserliches, mechanisches, leicht wieder verloren gehendes Besitztum bleibt." [30]) Man mag den einzuprägenden Stoff auf das sorgfältigste sichten und auf seine Unentbehrlichkeit hin prüfen, man mag alles ausscheiden, was irgend als nicht notwendig für den Fortgang erwiesen werden kann, — das, was übrig bleibt, muss aber zu klarem, sicherem, unverlierbarem, stets präsentem oder wenigstens leicht wieder hervorzurufendem geistigen Eigentum des Schülers gemacht werden. Ich halte also einen systematischen Aufbau des mathematischen Wissens im Geiste des Zöglings für eine unabweisbare Pflicht des Unterrichts und muss daher ebenso die Bestrebungen ablehnen, die Mathematik als Hilfswissenschaft der Naturwissenschaften zu behandeln [31]), wie auch diejenige, den Unterricht in der Mathematik in eine fortlaufende Reihe von Aufgaben zu verwandeln. [32]) Freilich, die Erzeugung des Wissens ist nur die eine Aufgabe des Unterrichts. Entstehen muss natürlich mit und neben dem Wissen ein Können. Mathematik wissen und sie nicht anwenden können, heisst ein Schwert halten, ohne es schwingen zu können. Nur, meine ich, der allein wird daran denken können, das Schwert zu schwingen, der es fest in seiner Hand hält. Das Können herbeizuführen ist die zweite Aufgabe des Unterrichts, eine Aufgabe, die aber nicht erst nach der Lösung der ersten an den Lehrer herantritt, sondern zugleich mit und neben dieser, aber nicht mit Vernachlässigung derselben, ihre Erledigung findet. Es ist sehr wohl möglich, — und ich habe mit grosser Freude das glückliche Gelingen begrüsst, das der Versuch gefunden hat, — die mathematischen Disziplinen durch die Vorführung von Aufgaben zu lehren. Ein mächtiger Hebel selbständiger Mitarbeit der Schüler liegt in dieser Unterrichtsform, — aber die andere Seite, die Zusammenfassung des an den Aufgaben erarbeiteten Stoffes zu übersichtlich angeordnetem, in sich fest verknüpftem Wissen darf nicht fehlen. Aber ich zweifle nicht, dass dies erreicht werden kann und erreicht wird. Es ist hier, wie im Sprachunterricht. Die Erkennung der Sprachgesetze, der Formen von Deklination und Konjugation, der Regeln des Satzbaues aus der Anwendung der Sprache selbst, die induktive, direkte oder imitative Methode der Spracherlernung, ist im höchsten Masse geistbildend. Aber für die Zwecke des Unterrichts reicht sie zuletzt doch nur dann, wenn mit Energie und nachhaltiger Konsequenz das Ergebnis dieser Arbeit zusammengefasst, dem Gedächtnis der Schüler eingeprägt und in dem Gedächtnis erhalten, wenn die logischen und psychologischen Zusammenhänge aufgewiesen und verständlich gemacht werden.

Uebungen, Anwendungen sind also nötig, sei es, dass dem Zögling zur freien Aneignung in der Form von Aufgaben geboten wird, was von den Stoff des Wissens nicht notwendig zum System gehört, sei es, dass dieser selbst auf die Gebiete Anwendung findet, die man im engeren Sinne als Aufgaben bezeichnet, auf die eingekleideten Gleichungen, auf die Konstruktionsaufgaben, auf solche Aufgaben, die neben der Kenntnis planimetrischer, trigonometrischer, stereometrischer Relationen Fertigkeit im Rechnen fordern. Entnimmt man aber den Stoff der Uebungen auf diese Weise hauptsächlich der Mathematik selbst, so „kann es nicht ausbleiben, dass diese Einseitigkeit der Mathematik Angriffe zuzieht." [33]) So ist man darauf gekommen, den Uebungsstoff aus unendlich mannig-

[28]) A. Thaer, a. a. O. S. 89. — Vergl. auch H. Frank, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Beilage z. Jahresb. d. Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Berlin. 1895.

[29]) H. Schotten, Mathematischer Unterricht. Beilage z. Jahresb. der städtischen Oberrealschule zu Halle a. S. 1899. S. 19.

[30]) H. Schotten, a. a. O. S. 6.

[31]) A. Richter, Beilage z. Jahresb. d. Gymnasiums zu Wandsbeck. 1891. — Drsb., Vorschläge zur Umgestaltung des mathematischen Unterrichts in: Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht. XXIII. S. 321 ff. — Drsb., Arithmetische (Trigonometrische) Aufgaben mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1898. — Fr. Pietzker, Die Stellung der Physik im Gymnasialunterricht, in: Ztschr. f. phys. u. chem. Unterricht. IV. S. 217; auch Humanismus und Schulzweck. S. 47.

[32]) M. Schuster, Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. 3 Teile. Leipzig, B. G. Teubner. 1900—1903. — Anzeigen des Buches von M. Nath in der Ztschr. für das Gymnasialwesen. Jahrg. 1900 Okt.-Heft, 1901 April-Heft, 1903 Dez.-Heft.

[33]) A. Schülke, Wie soll Mathematik und Physik auf höheren Schulen betrieben werden? in: Ztschr. f. math. u. phys. Unterricht. XXII. S. 413.

faltigen Gebieten zu entnehmen, durch diese Vielseitigkeit den Unterricht zu beleben, ihn anziehend und fruchtbar zu machen, ihn praktisch zu gestalten.[34]) Man reisst damit die Mathematik aus einer gewissen Isolierung, man bringt sie mit anderen Fächern in Berührung und bewirkt, dass die Schüler die mathematische Auffassung auch für das spätere Leben behalten.[35]) Aber es heisst ganz gewiss über das Ziel hinausschiessen, wenn man verlangt, dass nun die Mathematik ganz den Naturwissenschaften dienstbar gemacht werde, dass mit Rücksicht auf diese Stellung der Stoff beschnitten werde in einem Masse, dass der systematische Zusammenhang der mathematischen Kenntnisse verloren gehen muss.[36])

Schon die Häufung der Anwendungen an sich hat ihre Bedenken. Nicht sie ist „massgebend für eine wirkliche Aneignung, sondern eine durch und durch dringende Erkenntnis, wenn auch nur weniger Aufgaben.“ [37]) Beim mathematischen Unterricht kann „vor lauter Vorführung interessanter Anwendungen die eigentliche logische Durchbildung verkümmern, und das darf auf keinen Fall eintreten, weil sonst der Kern der Sache verloren geht.“ [38]) „Ein Unterricht, der Anwendungen auf die Volkswirtschaftslehre, auf Erd- und Himmelskunde und auf Geodäsie, auf Krystallographie und Nautik, auf Physik und technische Fragen wie Dach- und Brückenkonstruktionen berücksichtigt, muss im weitesten Sinne auch Fachunterricht sein, wenn er wirklichen Nutzen schaffen soll und nicht an Stelle theoretischer Betrachtungen und Aufgaben unverstandene, mechanisch gelöste Anwendungen treten sollen, was sicher gefährlich sein würde.

(Fortsetzung folgt).

Diskussion über den Betrieb der Physik als Naturwissenschaft auf d. Hauptversammlung zu Halle.*)

Für diese Diskussion hatte der Vortragende Grimsehl den wesentlichen Inhalt seiner Ausführungen in die nachstehenden Leitsätze zusammengefasst:

1. Es ist wünschenswert, auf den Anschauungsbildern für die Unterstufe auch physikalische Vorgänge aus dem natürlichen Anschauungs- und Ideenkreise der Kinder wahrheitsgetreu zur Darstellung zu bringen und im Anschauungsunterricht zu besprechen, damit die natürliche Neigung der Kinder zur Beobachtung physikalischer Naturerscheinungen nicht vollständig vernachlässigt und unterdrückt wird.
2. Die im naturgeschichtlichen Unterrichte behandelten Lebenserscheinungen an der Pflanze und am Tier sind an passenden Stellen durch einfache physikalische Experimente zu erläutern.
3. Der Unterricht in der Erdkunde bietet Gelegenheit zur Behandlung der für die Gebirgsbildung und für die klimatologischen Erscheinungen wichtigen Vorgänge aus der Physik der unbelebten Natur.
4. Im physikalischen Unterricht soll bei der experimentellen Behandlung der zur Darstellung eines Naturvorganges verwandte Apparat stets als nebensächlich gegenüber der Erscheinung selbst zurücktreten.
5. Die Mathematik ist im Physikunterricht als Hilfswissenschaft zu behandeln. Sie hat hier nur den Zweck, das beobachtete Tatsachenmaterial zu ordnen, aus physikalischen Hypothesen sichere Schlüsse zu ziehen und einem Naturgesetz eine möglichst einfache und präzise Fassung zu geben.
6. Die Behandlung physikalischer Aufgaben mit schwierigen mathematischen Entwickelungen ist der Mathematikstunde zuzuweisen.
7. Der physikalische Unterricht hat auf allen Gebieten Anschluss zu suchen an die in der freien Natur stattfindenden Vorgänge.
8. Es ist wünschenswert, dass der Physikunterricht bis in die oberen Klassen auch von den Lehrern der übrigen naturwissenschaftlichen Fächer und nicht ausschliesslich von den Mathematikern erteilt wird.

Die Diskussion leitet der Vorsitzende Presler mit dem Vorschlag ein, sich zunächst auf die Thesen 1 bis 7 zu beschränken, die These 8 aber, die vielleicht die meisten Meinungsverschiedenheiten hervorrufen werde, zunächst zurückzustellen. Die Thesen 1 bis 7 würden dann der Reihe nach durchzusprechen sein, ohne sich dabei ängstlich an die jedesmal zur Diskussion stehende These zu binden. Die Versammlung stimmt diesem Vorschlage zu.

Pietzker (Nordhausen) ist mit der Tendenz und dem Inhalt der Thesen im ganzen einverstanden, behält sich allerdings an verschiedenen Stellen Aenderungsvorschläge im einzelnen vor. Er vermisst aber zwei Thesen. Erstens eine Einleitungsthese, die den in dem Grimsehlschen Vortrag ausgesprochenen Gedanken zum Ausdruck bringt, dass die physikalischen Gesetze nicht auf die Vorgänge beschränkt sind, die im physikalischen Unterricht durch besondere Veranstaltungen hervorgerufen werden, die diesbezüglichen Ausführungen des Vortragenden hätten ihm besonders gefallen, zweitens eine hinter der Grimsehlschen These 4 einzufügende These betreffend das Verhältnis der im früheren Unterricht gelegentlich zu gebenden physikalischen Belehrungen zu dem systematischen Physikunterricht. Indem er sich einen Vorschlag für die letztere These vorbehält, schlägt er für die erstere den Wortlaut vor:

„Der letzte, nie aus dem Auge zu verlierende „Zweck des physikalischen Unterrichts ist die Be„greiflichmachung der (Vermittelung des Verständ„nisses für die) fortwährend ohne unser Zutun in der „uns umgebenden Welt auftretenden Vorgänge.“

Suchsland (Halle) tritt dem Antrage Pietzker auf Vorsetzung einer besonderen Überschrift entgegen.

---

[34]) A. Schülke, a. a. O. S. 414.
[35]) A. Schülke, a. a. O. S. 421.
[36]) Vergl. A. Richter, Vorschläge zur Umgestaltung des mathematischen Unterrichts.
[37]) H. Schotten, a. a. O. S. 6 und 7.
[38]) F. Klein, Verhandlungen der Schulkonferenz 1900. S. 153.
*) S. Unt.-Bl. X., Nr. 3, S. 64.

Er meint, dass These 1 genügte, wenn bei den Anschauungsbildern durch einige Beispiele darauf hingewiesen würde, welcher Art die Bilder sein könnten. Er schlägt vor z. B. ein Bild zu schaffen mit der Überschrift: „Das Trinken der Tiere“. Wenn auf einem solchen dargestellt wären ein trinkender Hund, ein trinkendes Pferd, eine trinkende Gans, ein Huhn, eine Taube etc. und dann im Anschluss daran erörtert würde, wie die verschiedenen Tiere durch die Lage ihrer Nasenöffnungen oder durch den Bau ihrer Schnäbel und Mäuler zum Teil von dem herrschenden Luftdruck beim Saufen Gebrauch machen könnten oder nicht, so würde dadurch eine schöne Anregung zur Besprechung physikalischer Erscheinungen als Naturvorgänge gegeben.

Thaer (Hamburg) spricht sich durchaus für die Grimsehlschen Thesen aus, insbesondere hält er die positive Anregung wahrheitsgetreuer Darstellung auf den Anschauungstafeln in These 1 für zweckmässig.

Wetekamp (Schöneberg): Ich brauche wohl nach meinen Ausführungen in früheren Versammlungen nicht erst hervorzuheben, dass ich mit dem Sinne der Thesen durchaus einverstanden bin, am liebsten würde ich es sehen, wenn in den Thesen unter „Physik“ gleich „Chemie“ zugefügt würde. Gegen die vom Vorsitzenden vorgeschlagenen Zusätze habe ich nichts einzuwenden. Dem Vorredner stimme ich darin durchaus zu, dass im Unterricht von der untersten Stufe an viel mehr Gewicht auf Anschauung gelegt werden muss, die wiederum nur durch Pflege der Handtätigkeit erreicht werden kann. Weniger Worte und mehr Sachen; weniger einfache Rezeptivität — mehr Selbstbetätigung. Unsere Augen sind noch zu anderem da, als nur schwarze Buchstaben und allenfalls Laternenpfähle zu sehen. — Dass es auf der untersten Stufe schon möglich ist, physikalische Erscheinungen mit Erfolg zu behandeln, habe ich schon in Düsseldorf an dem Beispiel der Schule der dänischen Gesellschaft gezeigt. — Im Sinne der Thesen scheint es mir zu liegen, wenn in der ersten These der Hinweis auf die Bilder fortbleibt, es könnte scheinen, als sollten diese als besonders wertvolles Anschauungsmittel hingestellt werden, während doch nur vor falschen bildlichen Darstellungen gewarnt wird. Das Hauptanschauungsmittel müssen immer die Gegenstände selbst sein.

Poske (Berlin) erklärt sich gegen die von Pietzker beantragte Einleitungsthese, weil deren Stil mit dem Charakter der Grimsehlschen Thesen nicht zusammenstimme. Ein Wort wie Begreiflichkeit würde Grimsehl nicht gebrauchen. Mindestens sei die Zusatzthese in eine möglichst kurze Fassung zu bringen.

Sittig (Frankfurt a. M.): Ich bin in voller Übereinstimmung mit den Ausführungen des Herrn Prof. Grimsehl für den Antrag Pietzker, dass Grimsehls Grundforderung als besonderer Leitsatz an die Spitze gestellt werde. Gegenüber den heutigen Bestrebungen, grosse Summen in für Schüler undurchsichtigen Einrichtungen und komplizierten Apparaten zu verschwenden, möchte ich eine ganz besonders scharfe Fassung des vorgeschlagenen Lehrsatzes befürworten. Dem gleichen Zwecke würde überdies die unmittelbare Anreihung von Leitsatz 4 und 5 dienen können. — Den Hinweis auf die Anschauungsbilder in Leitsatz 1 begrüsse ich mit Freude und möchte ihn keineswegs missen. Von diesen Tafeln sollten auch alle die Darstellungen schwinden, für die das Kind in unseren Tagen keine Unterlage in der Wirklichkeit mehr findet.

Pietzker steift sich nicht auf die von ihm vorgeschlagene Fassung, vielleicht wäre Herr Grimsehl selbst geneigt, eine passende Fassung vorzuschlagen.

Grimsehl: Ich stimme dem Vorschlage von Herrn Pietzker vollkommen bei, habe nur deshalb die von ihm vorgeschlagene These nicht an den Anfang der Thesen gestellt, da der Inhalt desselben ja schon in der Ueberschrift angegeben ist. Ich hätte auch gegen die Pietzkersche Formulierung nichts einzuwenden, vielleicht empfiehlt sich am meisten eine Fassung, die ein Teil der ursprünglich von mir in Aussicht genommenen, nachher fallengelassenen ersten These ist (s. d. Wortlaut der These 1 in den Beschlüssen der Versammlung).

Weiss (Weilburg a. L.) macht darauf aufmerksam, dass die im Gebrauch befindlichen Anschauungstafeln öfters geradezu falsche Darstellungen geben.

Gebhardt (Dresden-Blasewitz): Ich schliesse mich dem Vorredner an, ich möchte das Wort wahrheitsgetreu in der These 1 noch besonders unterstreichen. Mir ist es z. B. vielfach aufgefallen, dass physikalische Anschauungstafeln, die mit groben perspektivischen Fehlern behaftet sind, nicht nur feilgeboten, sondern sogar in Prospekten noch besonders angepriesen werden. So tritt insbesondere noch der perspektivisch gezeichnete Kreis oft als ein Gebilde mit zwei scharfen Spitzen auf. Ich kenne Darstellungen des Grammeschen Ringes und des Ritchie-Motors, bei denen einzelne Gruppen derselben Zeichnung ganz verschiedene Standpunkte des Beschauers voraussetzen. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass denkende Schüler geradezu Unbehagen empfinden, wenn sie sich in solche Bilder einarbeiten sollen und benutze diese Bilder daher jetzt geradezu als Muster, wie man nicht zeichnen soll. Gewisse Inkonsequenzen bei rein schematischen Skizzen, die manchmal nicht zu umgehen sind, sollen hier ausser Betracht bleiben. Im übrigen bin ich durchaus für weise Beschränkung in der Anwendung fertig gedruckter Anschauungstafeln für physikalische Apparate. Zum mindesten sollten sich nur wirkliche Fachmänner mit ihrer Herstellung befassen, was leider vielfach nicht der Fall ist. Ich für meine Person pflege gute Zeichnungen zu photographieren und danach hergestellte Diapositive bei nur mässig oder gar nicht verdunkeltem Zimmer zu projizieren, wodurch Platz, Geld und Zeit gespart wird.

Hamdorff (Guben) weist darauf hin, dass, wie der Vortragende selbst ja auch vorausgesetzt hatte, auch jetzt an vielen Schulen in der gewünschten Weise physikalische Erscheinungen im naturgeschichtlichen und erdkundlichen Unterricht in den Mittel- und Unter-Klassen besprochen werden. Im übrigen lehre die Erfahrung, dass man mit all den neuen Unterrichtsmethoden auf ältere Methoden zurückkomme, die selbstredend verbessert würden. So sei in dem altpreussischen Gymnasium von 1834—56 mehrfach direkt Unterricht in der Physik von Quarta an erteilt worden — wie Redner aus eigener Erfahrung weiss, mit gutem Erfolge, die Rücksicht auf Einheit der Lehrpläne verlangte das Aufhören dieses Unterrichts. Was aber selbst kleineren Schülern zugemutet werden kann, lehrten die Erfahrungen unseres unvergesslichen Schwalbe, der vor Jahren in der ersten Vorschulklasse seiner Anstalt selbst Physikunterricht hatte und über dessen Ergebnisse überrascht war. Ob dieser die s. Z. geäusserte Absicht, die Summe seiner Erfahrungen nach dieser

Richtung in einem Programm niederzulegen, verwirklicht hat, ist dem Redner nicht bekannt.

Pietzker: Die Einfügung des Hinweises auf die Chemie, wie sie Herr Wetekamp vorschlägt, möchte ich nicht empfehlen, obwohl man ja in der Sache ihm nur zustimmen kann. Wir können aber den Unterricht in der Chemie, der seine besonderen aus der Eigenart seines Stoffes fliessenden Bedürfnisse und Forderungen hat, nicht so nebenher abmachen. Dass die besondere Hervorhebung der Anschauungsbilder in These 1 Missverständnisse erregen kann, finde ich auch, diesem Missverständnis lässt sich durch eine leicht anzubringende Umstellung der Worte in der These vorbeugen.

Weise (Halle) erklärt sich mit dem in Leitsatz 1 niedergelegten Gedanken einverstanden, hält es aber für eine unerlässliche Vorbedingung für das Gelingen der Ausführung desselben, dass der diesen Unterricht erteilende Lehrer in der Physik ausreichend vorgebildet ist.

Wetekamp: Nach den Ausführungen des Herrn Pietzker will ich davon Abstand nehmen bezüglich der Einfügung des Wortes Chemie einen Antrag zu stellen; ich kann das um so eher, als ich den Eindruck gewonnen habe, dass sachlich die Versammlung in der Mehrheit mit mir einverstanden ist.

Die Versammlung nimmt nunmehr die von Pietzker gewünschte Einleitungsthese in der von Grimsehl vorgeschlagenen Fassung als These 1 (s. u.) und die bisherige These 1 in etwas veränderter Fassung (s. u.) als These 2 an.

These 2 und 3 werden ohne erhebliche Debatte als These 3 und 4, nur mit der Massgabe angenommen, dass in These 4 (bisher 3) hinter dem Worte Erdkunde die Worte „sowie in der Mineralogie“ eingefügt werden.

Vor der bisherigen These 4 wünscht Pietzker die Einfügung einer These, durch die dem vorgebeugt werden soll, dass die gelegentlichen physikalischen Belehrungen im naturkundlichen Unterricht der Unterstufe dem späteren systematischen Physikunterricht vorgreifen. Diese Gefahr sei in der Tat vorhanden, wie die Diskussion über den biologischen Unterricht auf der Düsseldorfer Versammlung gezeigt habe, dort sei mehrfach die Neigung hervorgetreten, die Einführung in die Grundvorstellungen der Physik geradezu in den biologischen Unterricht hineinzuziehen. Die Folge solchen Unterrichtsbetriebes würde unter Umständen die sein, dass die Schüler, die den Stoff des physikalischen Unterrichts bereits genügend zu kennen glaubten, den richtigen Anschluss verpassten.

Die Versammlung nimmt nach kurzer Debatte die von Pietzker vorgeschlagene These in der am Schluss angegebenen Fassung als These 5 an.

Zur These 4 bemerkt Geissler (Charlottenburg), es könne der Wortlaut zu der wohl nicht gemeinten Auffassung Anlass geben, als ob die Nebenumstände, die ein Apparat mit sich bringt, bei der Erklärung vernachlässigt werden sollten. Es wird aber dem Schüler das eigentliche Wesen der Sache durch Berücksichtigung dieser Nebenumstände klarer, während bei Vernachlässigung derselben sich das Gefühl einstellt, als sei doch nicht alles klar verstanden worden. Aber es ist wichtig, dass die Erscheinung möglichst einfach zu tage tritt. Geissler empfiehlt deshalb, eventuell zu formulieren, es solle für die Herstellung bezw. Wahl des Apparates stets der Grundsatz möglichster Einfachheit und Zurücktreten von jeder blendenden Ausführung massgebend sein.

Ein Abänderungsantrag wird nicht gestellt, die These gelangt unverändert als These 6 zur Annahme.

Zu These 5 bemerkt Pietzker, dass die hier der Mathematik zugewiesene Rolle zu eng umschrieben sei, es gebe doch eine Reihe von Einzelgebieten, auf denen die mathematische Behandlung der Einzelaufgabe der ganzen Untersuchung die Richtung vorschreibe und für die anzustellenden Experimente geradezu die Grundlage liefere.

Geissler findet, dass der Zweck der Mathematik „das beobachtete Tatsachenmaterial zu ordnen, aus physikalischen Hypothesen sichere Schlüsse zu ziehen und einem Naturgesetze eine möglichst einfache und präzise Fassung zu geben“ für den Physikunterricht wenigstens in den oberen Klassen durchaus wesentlich ist und darum auch (vergl. These 8) in den obersten Klassen die mathematische Bildung der Physiklehrer notwendig sei.

Bernstein (Halle) weist darauf hin, dass durch die auch in den neueren Prüfungsordnungen zum Ausdruck kommende Betonung der angewandten Mathematik die Fühlung zwischen Mathematik und Physik in erfreulicher Weise gefördert werde, über die diesem Zweck dienenden Einrichtungen, wie sie auf mehreren Universitäten bestehen, gebe das Buch von Klein und Riecke (Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig 1901) nähere Auskunft. Die Fassung der in Rede stehenden These sei nicht ohne Bedenken, sie sei geeignet, die Position der biologischen Gegner des Mathematikunterrichts, als deren Wortführer Prof. Kraepelin in Hamburg aufgetreten sei, zu stärken und dadurch einen ungünstigen Einfluss auf die Neueinrichtungen für angewandte Mathematik zu üben.

Thaer ist mit der von Grimsehl vorgeschlagenen Fassung einverstanden, die er für zweckmässig hält.

H. Müller (Charlottenburg): Liest man die These in der Form, wie sie vorliegt, ohne besondere Betonung des Wörtchens „hier“, so ist allerdings die Deutung möglich, dass der Herr Vortragende dem Hineingreifen der Mathematik in den physikalischen Unterricht nur geringen Wert beilege. Ich glaube aber, dass dies ein Missverständnis ist, und nehme an, dass Herr Grimsehl nur einer überwiegend mathematischen Behandlung physikalischer Fragen entgegentreten will, ohne jedoch diese als etwas Nebensächliches zu bezeichnen, dass er also den Anteil der Mathematik an der Physikstunde umgrenzen will. Für diese Absicht scheint mir das Wörtchen „nur“ nicht glücklich gewählt zu sein; ich schlage daher vor, das Wort „vor“ durch das Wort „vorzugsweise“ zu ersetzen, das der Absicht des Herrn Grimsehl gerecht wird und die vorhin geäusserten Bedenken gegen die vorliegende These zerstreut.

Weiss tritt auch seinerseits dafür ein, dass die Physikstunde nicht als Mathematikstunde benutzt wird. Mit der Ersetzung des Wortes nur durch vorzugsweise ist er einverstanden. Demgemäss empfiehlt er die Annahme der entsprechend abgeänderten These 6, in der Physikstunde seien nur mathematisch einfache physikalische Aufgaben zu behandeln.

Die These wird dann in der von Müller vorgeschlagenen Fassung als These 7 angenommen, desgl. ohne Debatte die Thesen 6 und 7 als Thesen 8 und 9.

In der nunmehr sich anschliessenden Diskussion über These 8 ergreift zunächst das Wort

Grimsehl: Ich habe mit der letzten These beabsichtigt, zum Ausdruck zu bringen, dass wir die

Lehrer der Physik nicht ausschliesslich unter den Mathematikern suchen sollen. Ein Naturwissenschaftler, der den Physikunterricht erteilen soll, muss natürlich dem Unterricht völlig gewachsen sein, und das kann auch dann eintreten, wenn er nicht speziell Mathematiker ist.

Für diese These beantragt Poske (Berlin) folgende Fassung: „Es ist wünschenswert, dass der Lehrer der Physik mit der experimentellen Technik hinreichend vertraut ist, um die Physik als Naturwissenschaft lehren zu können.“ Die Kandidaten kämen heute zum grössten Teil mit sehr mangelhafter experimenteller Vorbildung in den Schuldienst; es bedürfte einer weiteren Ausgestaltung der jetzt in Berlin eingerichteten Vorbereitungskurse und ihrer Ausdehnung auf die anderen Provinzen, wenn hierin Wandel eintreten sollte; auch müsste verlangt werden, dass die künftigen Lehrer der Physik sich schon auf der Universität eine bessere Vorbildung in experimenteller Hinsicht verschafften. Das Naturgemässeste sei, wenn Mathematik und Physik in einer Hand lägen; nur wo der Physik durch allzu mathematische Behandlung Schaden erwachse, könne es angebracht sein, dass die Physik von einem Nichtmathematiker erteilt werde.

Thaer würde das Fallenlassen der These 8 bedauern, da diese Anstoss zu zweckmässiger Kombination in der Prüfung für das Lehramt und bei der Unterrichtsverwaltung geben könnte.

Pietzker bittet, die ganze These zu streichen, die ihrem Inhalt nach nicht notwendig hierher gehöre. In der vorgeschlagenen Fassung könne sie zu missverständlicher Auslegung Anlass geben, es sei auch schwer, ihr eine solche Fassung zu geben, bei der solche Missverständnisse ausgeschlossen seien. Der Poskesche Antrag setze an ihre Stelle eine These mit wesentlich verschiedenem Inhalt. Dieser These könne man an sich natürlich nur zustimmen, eine ausdrückliche Aufnahme unter die von der Versammlung zu beschliessenden Leitsätze sei aber doch nicht ratsam, weil sie geeignet sei, den Zustand des Unterrichts ungünstiger erscheinen zu lassen, als er in Wahrheit sei.

Die Versammlung beschliesst darauf, die These ganz fallen zu lassen.

Die schliesslich angenommenen Thesen hatten nunmehr folgenden Wortlaut:

Beschlüsse der Versammlung.

1. Die Aufgabe des physikalischen Unterrichts besteht darin, die physikalischen Begriffe und Gesetze an der Hand der in der belebten und unbelebten Natur stattfindenden Vorgänge zu entwickeln.

2. Es ist wünschenswert, im Anschauungsunterricht für die Unterstufe auch physikalische Vorgänge aus dem natürlichen Anschauungs- und Ideenkreise der Kinder zu besprechen und in angemessenem Umfange durch wahrheitsgetreue Anschauungsbilder zur Darstellung zu bringen, damit die natürliche Neigung der Kinder zur Beobachtung physikalischer Naturerscheinungen nicht vollständig vernachlässigt und unterdrückt wird.

3. Die im naturgeschichtlichen Unterricht behandelten Lebenserscheinungen an der Pflanze und am Tier sind an passenden Stellen durch einfache physikalische Experimente zu erläutern.

4. Der Unterricht in der Erdkunde sowie in der Mineralogie bietet Gelegenheit zur Behandlung der für die Gebirgsbildung und für die klimatologischen Erscheinungen wichtigen Vorgänge aus der Physik der unbelebten Natur.

5. Die Besprechung physikalischer Vorgänge im naturgeschichtlichen und erdkundlichen Unterricht soll der systematischen Behandlung des Stoffes im eigentlichen physikalischen Unterricht nicht vorgreifen, vielmehr nur das Material vermehren, das in diesem Unterricht systematisch zusammenzufassen ist und das Bedürfnis nach solch systematischer Zusammenfassung bei den Schülern erwecken und steigern.

6. Im physikalischen Unterricht soll bei der experimentellen Behandlung der zur Darstellung eines Naturvorganges verwandte Apparat stets als nebensächlich gegenüber der Erscheinung selbst zurücktreten.

7. Die Mathematik ist im Physikunterricht als Hilfswissenschaft zu behandeln. Sie hat hier vorzugsweise den Zweck, das beobachtete Tatsachenmaterial zu ordnen, aus physikalischen Hypothesen sichere Schlüsse zu ziehen und einem Naturgesetz eine möglichst einfache und präzise Fassung zu geben.

8. Die Behandlung physikalischer Aufgaben mit schwierigen mathematischen Entwickelungen ist der Mathematikstunde zuzuweisen.

9. Der physikalische Unterricht hat auf allen Gebieten Anschluss zu suchen an die in der freien Natur stattfindenden Vorgänge.

Weitere Untersuchungen über Näherungsformeln zur Berechnung der Ludolfschen Zahl.

Von W. Koch (Dortmund).

I. Eine Ergänzung zu meinem vorigen Aufsatze.

In meinem vorigen Aufsatze über das nämliche Thema (No. 4 und 5 des vorigen Jahrganges) habe ich mich auf die Beantwortung der Fragen beschränkt, die in dem vorangegangenen Adrianschen Aufsatze aufgeworfen waren. Aus diesem Grunde habe ich die Ausfüllung einer Lücke, die der aufmerksame Leser wohl bemerkt haben dürfte, dieser späteren Arbeit vorbehalten. Auf S. 106 l. ist nämlich die entwickelte Näherungsformel auf das 24-Eck angewandt, die so erhaltene Zahl mit dem wahren Wert von π verglichen und daraus der Schluss gezogen worden, dass mit vier Dezimalen zu rechnen ist. Es mag nun jene Näherungsformel beim Gebrauch vor Schülern notdürftig genügen, sonst aber ist jenes Verfahren natürlich nicht zulässig, da man doch eine Zahl, die erst berechnet werden soll, nicht schon als bekannt voraussetzen darf. Jene Näherungsformel genügt also für sich allein nicht, da sie gar keinen Anhalt gibt für den Grad der erreichten Genauigkeit. Man müsste daher entweder einen jener Formel speziell zugeordneten Ausdruck aufstellen, der die Prüfung der erreichten Genauigkeit zulässt, auf welches Verfahren ich noch im Laufe dieser Arbeit zurückkommen werde, oder besser, man stellt eine zweite Näherungsformel auf, die von gleicher Art und von der Beschaffenheit ist, dass π zwischen die durch beide Formeln gelieferten Werte zu liegen kommt. Das letztere Verfahren ist bekanntlich von Archimedes und allen seinen Nachfolgern auf dem Gebiete der elementaren Kreismessung eingeschlagen worden. In der Gegenwart, wo die Verwendung der gemeinen Brüche durch diejenige der Dezimalzahlen abgelöst worden ist, könnte es zwar vielleicht zur Not genügen, die Reihe der einbeschriebenen Vielecke (oder die der umbeschriebenen Vielecke) allein zu berechnen, da man durch den Vergleich zweier auf einander folgenden Werte eine gewisse Anzahl von Stellen erhält in denen beide übereinstimmen, doch kann man auch dann den so gewonnenen Wert nicht ohne Bedenken gleich π setzen, da ja dieser Wert zwischen zwei zu kleinen (zu grossen) Werten liegt und daher leicht selber zu klein (zu gross) sein kann. Auch können dadurch einige Stellen verloren gehen. Im vorliegenden Falle aber würde dieses Verfahren schon deswegen nicht recht anwendbar sein, weil die Verwendung der Näherungsformel den Abschluss der gesamten Rechnung darstellt. Wenn also überhaupt, so wird es ganz besonders in diesem Falle notwendig sein, die irrationale Zahl π zwischen zwei Grenzen einzuschliessen.

In der vorigen Arbeit habe ich zwei Näherungsformeln für π aufgestellt (F. 11 und 21), von denen die eine sich auf die Umfänge, die andere auf die Flächen der regelmässigen Vielecke bezieht. Drückt man beide Formeln in den Umfängen p aus (vergl. S. 107 l. u.), so lauten sie

$$p = p_i + \frac{p_u - p_i}{3} \text{ und } p = p_u' - \frac{p_u' - p_i}{3}.$$

Da aber beide Formeln dadurch abgeleitet wurden, dass fortgesetzt das harmonische bezw. geometrische Mittel je zweier sukzessiver Umfänge durch das zu grosse arithmetische Mittel ersetzt wurde (vergl. F. 15 und 16 mit 9 und 10), so stellen beide eine obere Grenze für π dar.

Es kommt nunmehr darauf an, noch eine untere Grenze für π aufzustellen, und diese Aufgabe stellt sich dieser erste Abschnitt meiner Arbeit. Zu einer solchen unteren Grenze führen die folgenden Ueberlegungen.

Eine unendliche Reihe mit abnehmenden Gliedern und wechselnden Vorzeichen

$$a_0 - b_0 + a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

lässt sich auf zwei Arten in eine Reihe mit lauter gleichen Vorzeichen verwandeln, indem man sie nämlich schreibt

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdot\cdot\cdot$$

und $a_0 - (b_0 - a_1) - (b_1 - a_2) - (b_2 - a_3) - \cdot\cdot\cdot$

Wenden wir dies auf diejenige Reihe an, welche den Kreisumfang als den Grenzwert aus der Reihe der Umfänge der ein- und umbeschriebenen Vielecke darstellt, nämlich (vergl. Fig. 1, S. 84 und Fig. 4, S. 104)

$$\text{1 a)}\quad OP = OP_u - P_i P_u + P_i P_u' - P_i' P_u' + P_i' P_u'' - P_i'' P_u'' + \cdot\cdot\cdot\cdot,$$

so erhalten wir

$$\text{1 b)}\quad OP = OP_i + P_i P_i' + P_i' P_i'' - P_i'' P_i''' + \cdot\cdot\cdot$$

und

$$\text{1 c)}\quad OP = OP_u - P_u' P_u - P_u'' P_u' - P_u''' P_u'' - \cdot\cdot\cdot$$

Aus diesen drei Reihen erhalten wir durch Summation die Reihen der sukzessiven Näherungswerte:

$$\text{2)}\quad \begin{array}{llllll} \text{a)} & p_u\ p_i & p_u'\ p_i' & p_u''\ p_i'' \cdot\cdot\cdot \\ \text{b)} & p_i\ p_i' & p_i''\ p_i''' & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \text{c)} & p_u\ p_u' & p_u''\ p_u''' & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \end{array}$$

welche Reihen nichts weiter aussagen, als dass man den Kreisumfang gewinnt als den Grenzwert der Reihe der Umfänge, entweder der ein- und umbeschriebenen oder nur der einbeschriebenen oder nur der umbeschriebenen Vielecke, d. h. entweder durch beiderseitige Annäherung oder durch einseitige, und zwar letztere entweder von der einen oder von der anderen Seite.

Es sei nunmehr die Aufgabe gestellt, den Kreisumfang p annähernd darzustellen als lineare Funktion je zweier Folgeglieder der Reihen 2). Es gibt aber vier charakteristische Paare von Folgegliedern, da die Reihe 2 a), wie man sofort sieht, deren zwei liefert:

$$p_u \text{ und } p_i,\ p_i \text{ und } p_u',\ p_i \text{ und } p_i',\ p_u \text{ und } p_u'.$$

Oder geometrisch ausgedrückt, es ist festzustellen, in welchem Verhältnis die vier Strecken

$$P_i P_u,\quad P_i P_u',\quad P_i P_i',\quad P_u P_u'$$

durch den Punkt P geteilt werden.

Man erhält somit vier analoge Näherungsformeln, aber auch nur vier, denn die Betrachtung der Fig. 4 (S. 105) erweist, dass kein Paar sukzessiver Punkte existiert, dessen Abstand durch den Punkt P anders geteilt wird, als dies bei einer jener vier Strecken der Fall ist. Dass aus der Reihe 2 a) im Gegensatz zu den Reihen 2 b) und 2 c) zwei Formeln herzuleiten sind, sieht man schon daraus, dass in jener Figur die Strecke $P_i P_u$ durch P anders geteilt wird als die Strecke $P_i P_u'$. Zum Zwecke der arithmetischen Ableitung der beiden oben wiederholten Näherungsformeln wurden die Glieder der Reihe 1 a) den Bedingungen unterworfen (Formel 9 und 10):

$$\text{3)}\quad P_i P_u' = P_u' P_u \text{ und } P_i P_i' = P_i' P_u';$$

dadurch erhält man aus ihr

$$\text{4 a)}\quad \begin{cases} OP = OP_u - P_i P_u \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right\} \\ \text{und } OP = OP_i + P_i P_u' \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right\} \end{cases}$$

und somit die gewünschten Formeln:

$$\text{5 a)}\quad \begin{cases} OP = OP_i + \frac{1}{3} P_i P_u \\ \text{und } OP = OP_u' - \frac{1}{3} P_i P_u'. \end{cases}$$

Aus 3) wurden aber ferner die von einander unabhängigen Formeln hergeleitet:

$$\text{3 a)}\quad P_u' P_u = 2\, P_i P_i' \text{ und } P_i P_i' = 2\, P_u'' P_u',$$

und diese Formeln wurden von mir zur geometrischen Darstellung des Punktes P und somit zur geometrischen Herleitung jener beiden Näherungsformeln benutzt (S. 105 Fig. 3 und S. 107). Es ergab sich, dass $P_i P_u$ im Verhältnis 1 : 2 und $P_i P_u'$ im Verhältnis 2 : 1 durch P geteilt wird.

Da sich die Gleichungen 3) nicht umgekehrt aus 3 a) herleiten lassen, so stellen sie zwar für die beiden Reihen 4 a), aber nicht für die aus ihnen hergeleiteten Näherungsformeln 5 a) die notwendigen Bedingungen dar, sondern für die letzteren nur hinreichende Bedingungen. Dagegen bilden die Gleichungen 3 a) die für die Gültigkeit jener Formeln notwendigen Bedingungen. Hebt man also die Gültigkeit der Gleichungen 3) und somit der Reihen 4 a) auf, so liefern die Gleichungen 3 a) immer noch die in Fig. 3 (S. 105) dargestellte Punktfolge und damit die beiden Formeln 5 a). Erst wenn man die spezielleren Bedingungen 3) hinzunimmt, hat man das in Fig. 4 dargestellte Bild.

Aus den Gleichungen 3 a) kann man weiter, indem man das einemal $P_i P_i'$, das anderemal $P_u'' P_u'$ eliminiert, herleiten:

$$\text{3 b)}\quad P_u' P_u = 4\, P_u'' P_u' \text{ und } P_i P_i' = 4\, P_i' P_i'',$$

welche Gleichungen die notwendigen Bedingungen aufstellen, durch welche aus 1 b) und 1 c) die Reihen hervorgehen:

$$\text{4 b)}\quad \begin{cases} OP = OP_i + P_i P_i' \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right\} \\ \text{und } OP = OP_u - P_u' P_u \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right\} \end{cases}$$

und damit auch die Näherungsformeln:

5b) $OP = OP_i' + \frac{1}{3} P_i P_i'$ und $OP = OP_u' - \frac{1}{3} P_u' P_u$.

Dass für die Giltigkeit dieser Näherungsformeln die Bedingungen 3b) zugleich hinreichend und notwendig sind, zeigt auch die der obigen analoge geometrische Darstellung. Hierbei sind z. B. die von den Endpunkten P_i und P_i' der festen Strecke $P_i P_i'$ sukzessive abgetragenen Strecken gleichgerichtet, und es sind die von den Punkten $P_i, P_i', P_i'', \ldots$ abgetragenen Strecken immer das Vierfache der von den Punkten $P_i', P_i'', P_i''', \ldots$ abgetragenen Strecken (Fig. 4), also schliesslich auch $P_i P = 4 P_i' P$, und ebenso $P P_u = 4 P P_u'$, woraus sich die gewünschten Formeln ergeben. Die Strecken $P_i P_i'$ und $P_u P_u'$ werden demnach durch den Punkt P aussen im Verhältnis 4 : 1 geteilt.

Man erhält also den Punkt P, indem man die vier Strecken

$$P_i P_u, \quad P_i P_u', \quad P_u' P_u, \quad P_i P_i'$$

bezw. teilt nach dem Verhältnis

$$-\frac{1}{2}, \quad -2, \quad +\frac{1}{4}, \quad +4,$$

wobei das Minuszeichen die innere, das Pluszeichen die äussere Teilung andeutet.

Gleichzeitig ergibt sich aus dieser Darstellung, dass man mit Schülern der Obertertia, die den Begriff der inneren und äusseren Teilung einer Strecke erfasst haben, aber von unendlichen Reihen noch nichts wissen, eine jede geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots (-1 < x < +1)$$

auf diesem geometrisch-anschaulichen Wege summieren kann. Die Strecke 1 ist alsdann im Verhältnis $\frac{1}{x}$ zu teilen. Für einen positiven Wert von x wird dies Verhältnis positiv, die Teilung also eine äussere; für einen negativen Wert von x dagegen wird das Verhältnis negativ, die Teilung also eine innere.

Dass man die vier gewonnenen Näherungsformeln 5a) und 5b) durch die Gleichungen 3) in einander überführen kann, ist selbstverständlich. Ueberhaupt war es von vornherein ohne weiteres klar, dass man die in meiner vorigen Arbeit für p aufgestellte Formel in jeder der vier Formen schreiben konnte:

$$6)\ p = p_i + \frac{p_u - p_i}{3} = p_u' - \frac{p_u' - p_i}{3} = p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3}$$
$$= p_u' - \frac{p_u - p_u'}{3}.$$

Trotzdem habe ich diese ausführlichere Darstellung vorgezogen, weil die nachfolgenden Entwickelungen eine selbständige und unabhängige Herleitung jeder einzelnen Formel zum Bedürfnis machen.

Die Vielecksumfänge und Vielecksinhalte will ich in der Folge zusammenfassend mit dem Wort „Vielecksgrössen" bezeichnen, desgleichen den Uebergang vom n-Eck zum 2n-Eck kurz durch das Wort „Sukzession" ausdrücken.

Zieht man von den vier Näherungsformeln 5a) und 5b) die aus ihnen durch die Sukzession hervorgehenden Formeln ab, so erhält man wiederum die vier Gleichungen 3a) und 3b) als die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Gültigkeit jener Formeln.

Diese Bedingungen sind aber insofern nicht voll erfüllt, als in ihnen die Gleichheitszeichen nur näherungsweise zu verstehen und von Rechts wegen durch Ungleichheitszeichen zu ersetzen sind. Es ist nunmehr die Hauptaufgabe festzustellen, welches Ungleichheitszeichen jedesmal einzusetzen ist.

Diese Aufgabe erfordert eine eingehende Untersuchung der Fig. 1, die nunmehr in grösserer Vollständigkeit von neuem entworfen werden soll.

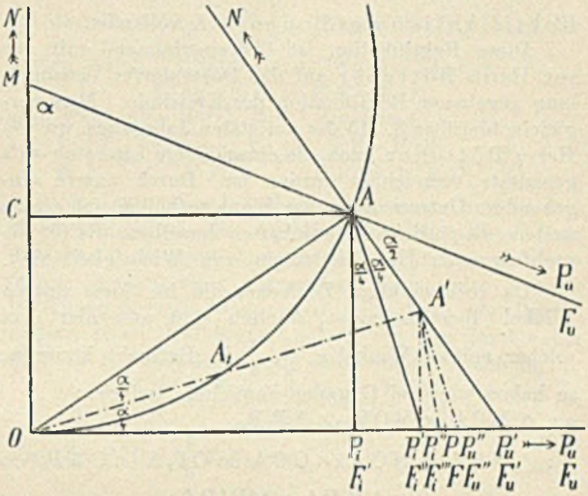


Fig. 1.

Ist wie früher $\sphericalangle\, OMP_u = \alpha = \frac{\pi}{n}$, $OP_u = \frac{1}{2n} p_u$ und $OP_i = CA = \frac{1}{2n} p_i$, so folgt, da NAP_u' parallel zur Halbierenden des $\sphericalangle\, OMA$ und $NO = 2MO$ ist, $OP_u' = \frac{1}{2n} p_u'$; dgl. da die Halbierende AP_i' des $\sphericalangle\, P_i A P_u'$ zur Basis eines gleichschenkligen Dreiecks OAP_i' wird, $OP_i' = \frac{1}{2n} p_i'$. Ferner ist $\sphericalangle\, AOP_u = ONP_u' = \frac{\alpha}{2}$, der beide Peripheriewinkel auf dem Bogen $\overset{\frown}{OA}$ sind. Wird nun $\sphericalangle\, AOP_u$ durch die Gerade OA_1A' halbiert, so müssen auch die Bogen, auf denen die neu entstandenen Peripheriewinkel $P_u O A_1$ und $A_1 O A$ stehen, gleich sein; d. h. A_1 ist die Mitte von $\overset{\frown}{OA}$, also, weil $\sphericalangle\, OAA'$ ein rechter, schliesslich auch die Mitte von OA'. Da ferner NA_1 die Mittelsenkrechte von OA' ist, so ist $\triangle\, NOA'$ gleichschenklig; dgl., da OA' die Mittelsenkrechte der Basis AP_i' des gleichschenkligen Dreiecks OAP_i' ist, auch $\triangle\, AA'P_i'$ gleichschenklig. Folglich sind die Punkte A und P_i' symmetrisch zu OA', also $A'P_i' \perp OP_u$ und demnach $\parallel AP_i$. Halbiert man ferner $\sphericalangle\, P_i' A' P_u'$ durch die Gerade $A'P_u''$, so ist diese $\perp OA'$, da OA' den Nebenwinkel $AA'P_i'$ halbiert, und $\parallel AP_i' \parallel NA_1$, da diese beiden Geraden gleichfalls $\perp OA'$ sind. Da aber der von NA_1 auf OP_u abgeschnittene Abschnitt gleich der Seite des umbeschriebenen 4n-Ecks und A_1 die Mitte von OA' ist, so ist der Abschnitt, den die durch A' zu NA_1 gezogene Parallele $A'P_u''$ abschneidet, doppelt so gross, also $OP_u'' = \frac{1}{2n} p_u''$. Halbiert man schliesslich $\sphericalangle\, P_i'A'P_u''$ durch die Gerade $A'P_i''$, so wird wiederum $\triangle\, OA'P_i''$ gleichschenklig. Da aber OA_1 die einfache, also OA' die doppelte Seite des einbeschriebenen 4n-Ecks darstellt, so ist auch $OP_i'' = \frac{1}{2n} p_i''$. Fährt man in dieser Weise fort, indem man den $\sphericalangle\, P_u O A'$ wiederum durch eine Gerade OA_2A''

halbiert, dgl. $\sphericalangle P_i''A''P_u''$ durch die Gerade $A''P_u'''$ und $\sphericalangle P_i''A''P_u'''$ durch die Gerade $A''P_i'''$, so wird $OP_u''' = \frac{1}{2n} p_u'''$ und $OP_i''' = \frac{1}{2n} p_i'''$. So gelangt man schliesslich zu einem Punkte P von der Eigenschaft, dass $OP = \overset{\frown}{OA}$ ist. Damit ist die *geometrische Rektifikation des Bogens* $\overset{\frown}{OA}$ vollendet.

Diese Rektifikation ist übereinstimmend mit der von Herrn *Böttcher* auf der Düsseldorfer Versammlung gegebenen Rektifikation der Kreislinie. Man vergleiche hierüber S. 115 des vorletzten Jahrgangs, wo von Herrn *Böttcher* auch die einschlägige Literatur aufs genaueste verzeichnet worden ist. Durch unsere eingehendere Untersuchung der Figur enthüllen sich einige weitere wesentliche Eigenschaften derselben, die für die nachfolgenden Entwickelungen von Wichtigkeit sind.

Da rechtwinklige Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen, ähnlich sind und hier drei solcher spitzer Winkel $\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}$ in Betracht kommen, so haben wir drei Gruppen ähnlicher Dreiecke:

$\alpha : \triangle MCA \backsim MOP_u \backsim AP_iP_u,$

$\frac{\alpha}{2} : \triangle NCA \backsim NOA \backsim OCA \backsim OP_iA \backsim OAP_u' \backsim$
$$AP_iP_u' \backsim A'P_i'P_u'$$

$\frac{\alpha}{4} : \triangle OAA' \backsim OP_i'A' \backsim OP_u''A' \backsim P_i'P_u''A' \backsim P_iP_i'A \sim$
$$ONA_1 \sim A'NA_1$$

usw.

Es sei nun
$$MC = \varrho,\ MP_u = R,\ \frac{1}{2} NA = \varrho',\ \frac{1}{2} NP_u' = R',$$
usw., dann stellen
$$\varrho \quad \varrho' \quad \varrho'' \quad \varrho''' \quad \cdots$$
die kleineren Radien der einbeschriebenen Vielecke und
$$R \quad R' \quad R'' \quad R''' \quad \cdots$$
die grösseren Radien der umbeschriebenen Vielecke dar. Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke MCA und MOP_u, $MO = 1$ vorausgesetzt,
$$\varrho R = 1, \text{ desgl. } \varrho' R' = 1,\ \varrho'' R'' = 1 \text{ usw.}$$
Also sind *die Radien R die reziproken Werte der Radien ϱ in bezug auf den festen Radius r als Masseinheit.* Die Reihe der Punkte P wird durch fortgesetzte Winkelhalbierungen gewonnen; beachtet man nun den Satz, dass die Halbierende eines Dreieckswinkels die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, so erkennt man sofort, dass jeder weitere Punkt P gewonnen wird durch Teilung des Abstandes der beiden zuletzt gefundenen Punkte nach einem Verhältnis, das durch den zugehörigen Radius ϱ oder, was dasselbe ist, durch den reziproken Wert des zugehörigen Radius R dargestellt wird. Und zwar ist die nämliche Teilung immer zweimal hinter einander anzuwenden (vergl. die Formeln 29 bis 32 auf S. 108). Es haben nun in der Figur 1 die Punkte P noch eine zweite Bezeichnung F erhalten, um dadurch diejenige Beziehung der Vielecksumfänge zu den Vielecksflächen wiederzugeben, die durch die Formeln (S. 107 l. u.)
$$f_i' = \frac{r}{2} \cdot p_i \text{ und } f_u = \frac{r}{2} \cdot p_u$$
ausgedrückt wird. Schreiben wir nun unter die alten Bezeichnungen P die neuen F und unter diese wieder das Verhältnis, durch dessen Anwendung ein jeder Punkt gewonnen wird, so erhalten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{cccccccc}
P_u & P_i & P_u' & P_i' & P_u'' & P_i'' & P_i''' & \cdots \\
F_i & F_u & F_i' & F_u' & F_i'' & F_u'' & F_i''' & F_u''' \cdots \\
 & & \varrho & \varrho & \varrho' & \varrho' & \varrho'' & \varrho'' \cdots \\
 & & \frac{1}{R} & \frac{1}{R} & \frac{1}{R'} & \frac{1}{R'} & \frac{1}{R''} & \frac{1}{R''} \cdots
\end{array}$$

Es wird also jedes Paar gleich akzentuierter Punkte F durch die *nämliche* Teilung gewonnen, was für die Bezeichnungen P nicht zutrifft. Aus diesem Grunde ist es für die nachfolgenden Untersuchungen bequemer und übersichtlicher, die neuen Bezeichnungen F an Stelle der alten P zu verwenden.

Gehen wir nunmehr nach diesen Vorbereitungen zur Untersuchung unserer vier Verhältnisse, 3a) und 3b), über:
$$\frac{F_i F_i'}{F_u' F_u'} \quad \frac{F_i' F_i''}{F_u' F_u'} \quad \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'} \quad \frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u}$$
so erkennen wir, dass sich die schwebende Frage nach dem Wert dieser vier Verhältnisse für die ersten beiden sofort erledigt. Das erste ist nämlich < 2 und das zweite $< \frac{1}{2}$, da offenbar

7) a) $F_i F_i' < F_i' F_u < 2 F_u' F_u$ und
b) $2 F_i' F_i'' < F_i' F_u' < F_u' F_u$

ist. Demnach haben wir
$$\begin{array}{ll}
F_i F_i' < 2 F_u' F_u & 2 F_i' F_i'' < F_u' F_u \\
F_i' F_i'' < 2 F_u'' F_u' & 2 F_i'' F_i''' < F_u'' F_u' \\
F_i'' F_i''' < 2 F_u''' F_u'' & 2 F_i''' F_i'''' < F_u''' F_u'' \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$
Folglich durch Addition
$$F_i F < 2 F F_u \qquad 2 F_i' F < F F_u.$$
Addiert man $F F_u$ $\qquad F_i' F$,

so folgt $F_i F_u < 3 F F_u \qquad 3 F_i' F < F_i' F_u$;

daher $\frac{1}{3} F_i F_u < F F_u \qquad F_i' F < \frac{1}{3} F_i' F_u$

und
$$8a)\ OF < OF_u - \frac{1}{3} F_i F_u \quad 8b)\ OF < OF_i' + \frac{1}{3} F_i' F_u,$$
welche Ergebnisse nach dem zu Beginn dieser Arbeit Gesagten erwartet werden mussten

Es seien nun die Punkte, welche die Strecken
$$F_i F_u \quad F_i' F_u' \quad F_i'' F_u'' \quad F_i''' F_u''' \quad \cdots$$
nach dem Verhältnis -2 teilen, bezw. bezeichnet mit
$$G \quad G' \quad G'' \quad G''' \cdots,$$
desgl. die Punkte, welche die Strecken
$$F_i' F_u \quad F_i'' F_u' \quad F_i''' F_u'' \quad F_i'''' F_u''' \quad \cdots$$
nach dem Verhältnis $-\frac{1}{2}$ teilen, bezw. mit
$$G_1' \quad G_1'' \quad G_1''' \quad G_1'''' \cdots,$$
dann können wir statt 8a) und b) schreiben:
$$9) \begin{cases} \quad OF < OG & \quad OF < OG_1' \\ a)\ OG = OF_u - \frac{1}{3} F_i F_u & b)\ OG_1' = OF_i' + \frac{1}{3} F_i' F_u. \end{cases}$$
Es ist hiernach
$$10) \quad a)\ \frac{2}{3} F_i F_u = F_i G \text{ und } b)\ \frac{1}{3} F_i' F_u = F_i' G_1'.$$
Addieren wir zur Gleichung 10b) $F_i F_i'$, so haben wir
$$\frac{2}{3} F_i F_i' + \frac{1}{3} F_i F_u = F_i G_1',$$
und wenn wir diese Gleichung von 10a) abziehen, so folgt:
$$\frac{1}{3} \left\{ F_i F_u - 2 F_i F_i' \right\} = G_1' G, \quad \left[G_1' G = F_i G - F_i G_1' \right]$$
also wegen 7a) $G_1' G > O$.

Subtrahieren wir ferner von 10b), die aus 10a) durch Sukzession hervorgehende Gleichung $\frac{2}{3} F_i' F_u' = F_i' G'$, so folgt

$$\frac{1}{3}\left\{F_i' F_u - 2 F_i' F_u'\right\} = G' G_1',$$

also wegen 7 b) auch $G' G_1' > O$.

Demnach haben wir die Punktfolge:

$$\ldots . F \ldots G' G_1' G G_1 \ldots F_u.$$

Setzen wir

$$g = \frac{r}{2} \cdot 2 n O g \qquad g' = \frac{r}{2} \cdot 2 n O G'$$

$$g_1' = \frac{r}{2} \cdot 2 n O g_1' \qquad g_1'' = \frac{r}{2} \cdot 2 n O G_1''$$

$$g'' = \frac{r}{2} \cdot 2 n O G'' \quad \ldots .$$

$$g_1''' = \frac{r}{2} \cdot 2 n O G_1''' \quad \ldots .,$$

so ist

$$f < \cdot \cdot \cdot < g' < g_1' < g < g_1 < \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

oder wenn wir die Grössen G durch die Grössen f ausdrücken:

$$11)\quad f < \cdot \cdot \cdot < f_u' - \frac{f_u' - f_i'}{3} < f_i' + \frac{f_u - f_i'}{3}$$

$$< f_u - \frac{f_u - f_i}{3} < \cdot \cdot \cdot$$

Auf arithmetischem Wege können wir diese Ungleichung leicht ableiten, wenn wir aus der Ungleichung

$$f < \frac{f_i' + 2 f_u'}{3}$$

mittels der Formeln (19 und 20 auf S. 107)

$$f_i' < \frac{f_i + f_u}{2} \qquad f_u < \frac{f_u + f_i'}{2}$$

zuerst f_u', alsdann f_i' eliminieren. Es ergibt sich dadurch

$$11\text{ a)}\qquad f < \frac{f_i' + 2 f_u'}{3} < \frac{f_u + 2 f_i'}{3} < \frac{f_i + 2 f_u}{3},$$

welche Ungleichung mit 11) identisch ist.

Nun ist noch zu untersuchen, ob der Wert von $\frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'}$ und von $\frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u}$ grösser oder kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Da die Grössen ϱ eine stetig zunehmende Reihe mit dem Grenzwert 1 bilden, so lassen sich die beiden Ungleichungen aufstellen:

$$12\text{ a)}\quad \frac{F_i' F_i'}{F_i F_u} = \frac{F_i' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_i''}{F_i' F_u'} = \frac{F_i'' F_u''}{F_i'' F_u'} < \cdot \cdot \cdot \cdot < \frac{1}{2}$$

und

$$12\text{ b)}\quad \frac{F_i' F_u}{F_i F_u} = \frac{F_u' F_u}{F_i' F_u} > \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u'} = \frac{F_u'' F_u'}{F_i'' F_u'} > \cdot \cdot \cdot \cdot > \frac{1}{2}$$

Aus 12 a) folgt durch Vergleichung der an ungerader Stelle stehenden Verhältnisse

$$\frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'},$$

dgl. durch Vergleichung der an gerader Stelle stehenden Verhältnisse

$$\frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_u'},$$

zusammen also

$$13\text{ a)}\qquad \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_u'} < \frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''}.$$

In ganz der nämlichen Weise folgt aus 12 b)

$$13\text{ b)}\qquad \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} > \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} > \frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u}.$$

Beide Ungleichungen kann man noch in der vollständigeren Form schreiben:

$$14\text{ a)}\qquad \frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} < \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_u'} < \frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''}$$

$$14\text{ b)}\qquad \frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} < \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'}$$

Alle diese Verhältnisse liegen ihrem Werte nach nahe an $\frac{1}{4}$ und nähern sich diesem Grenzwerte mit wachsendem n. Man wird erst dann beide Ungleichungen zu einer einzigen vereinigen können, wenn festgestellt ist, an welcher Stelle bei beiden der Wert $\frac{1}{4}$ einzufügen ist. Diese Frage erledigt sich am leichtesten bei dem Verhältnisse $\frac{F_i' F_u'}{F_i F_u}$. Wegen der Gleichheit der beiden ersten Verhältnisse in 12 a) ist nämlich

$$F_i' F_u' \cdot F_i F_u = F_i F_i' \cdot F_i' F_u,$$

also, wenn man durch $F_i F_u^2$ dividiert:

$$\frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} = \frac{F_i F_i' \cdot F_i' F_u}{F_i F_u^2} = \frac{F_i F_i' \cdot F_i' F_u}{(F_i F_i' + F_i' F_u)^2} < \frac{1}{4},$$

weil das geometrische Mittel der Strecken $F_i F_i'$ und $F_i' F_u$ kleiner als das arithmetische ist. Ohne diese Tatsache als bekannt vorauszusetzen, kann man eine einfache geometrische Veranschaulichung der letzten Gleichung geben, wenn man über $F_i F_u$ als Durchmesser einen Halbkreis schlägt, der die Senkrechte $F_i' A$ in L schneidet. Dann lautet diese Gleichung:

$$\frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} = \frac{F_i F_i' \cdot F_i' F_u}{F_i F_u^2} = \left(\frac{F_i' L}{F_i F_u}\right)^2,$$

also, da $F_i' L < \frac{1}{2} F_i F_u$ ist,

$$15)\qquad \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{1}{4}.$$

Demnach ist noch das Verhältnis $\frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'}$ zu untersuchen.

Da die Strecke $F_i'' F_u'$ (s. Fig. 1) durch die Halbierenden der Nebenwinkel $F_i'' A' F_u'$ und $F_i'' A' A$ in den Punkten F_u'' und O harmonisch geteilt wird, so ist

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_i'' F_u''} = \frac{O F_u'}{O F_i''}$$

und demnach durch korrespondierende Addition:

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_i'' F_u'} = \frac{O F_u'}{O F_i'' + O F_u'}$$

Aus demselben Grunde ist $O F_u''$ das harmonische Mittel von $O F_i''$ und $O F_u'$, d. h.

$$O F_u'' = \frac{2 O F_i'' \cdot O F_u'}{O F_i'' + O F_u''}.$$

Dadurch wird

$$\frac{F_u'' F_u'}{F_i'' F_u'} = \frac{O F_u''}{2 O F_i''}.$$

Ferner ist, da die Punkte F_i'' und F_u'' durch die nämliche Teilung entstehen,

$$\frac{F_i' F_i''}{F_i'' F_u'} = \frac{F_i'' F_u''}{F_u'' F_u'}$$

oder

$$\frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_i''} = \frac{F_u'' F_u'}{F_i'' F_u'}.$$

Folglich haben wir

$$16)\qquad \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_i''} = \frac{O F_u''}{2 O F_i''}.$$

Da ferner

$$\frac{F_i'' F_i'''}{F_i''' F_u''} = \frac{A' F_i''}{A' F_u''} = \frac{O F_i''}{O A'} = \frac{O F_i''}{O F_i'''},$$

so folgt wiederum durch korrespondierende Addition:

$$17)\qquad \frac{F_i'' F_i'''}{F_i'' F_u''} = \frac{O F_i''}{O F_i'' + O F_i'''}.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen 16) und 17) ergibt sich:

$$18)\qquad \frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 O F_u''}{O F_i'' + O F_i'''} > \frac{1}{4},$$

da $OF_u'' > OF_i''' > OF_i''$, ist. Demnach ist auch

$$\text{19)}\qquad \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'} > \frac{1}{4}.$$

Ohne die Kenntnis von dem Begriffe des harmonischen Mittels vorauszusetzen, kann man den Beweis dieser wichtigen Formel in vereinfachter und anschaulicherer Weise rein geometrisch folgendermassen führen.

Nach dem Satze von der Winkelhalbierenden und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $A' F_i'' F_u''$ und $A F_i' F_i''$ ist

$$\frac{F_i'' F_i'''}{F_i''' F_u''} = \frac{A' F_i''}{A' F_u''} = \frac{A F_i'}{A F_i''}.$$

Hieraus folgt durch korrespondierende Addition

$$\text{17a)}\qquad \frac{F_i'' F_i'''}{F_i'' F_u''} = \frac{A F_i'}{A F_i' + A F_i''}.$$

Wegen derselben Aehnlichkeit ist ferner:

$$\text{16a)}\qquad \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_i''} = \frac{A' F_i''}{A F_i''}.$$

Durch Multiplikation folgt:

$$\frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''} = \frac{A' F_i''}{A F_i' + A F_i''}.$$

Man errichte nun auf $A F_i''$ in F_i'' die Senkrechte, die $A F_i'$ in D und $A F_u'$ in E schneiden möge. Dann werden die beiden entstandenen Dreiecke ADE und $A' F_i'' E$ gleichschenklig. Demnach ist

$$AD = AE = 2 AA' = 2 A'E = 2 A' F_i''.$$

Also geht die letzte Gleichung über in

$$\text{18a)}\qquad \frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 AD}{A F_i' + A F_i''};$$

da aber $AD > A F_i'' > A F_i'$ ist, so ist der letzte Bruch > 1 und demnach die Formel 19) bewiesen.

Nunmehr können wir die beiden Ungleichungen 14a) und b) zusammenfassen zu der einen Ungleichung:

$$\text{20)}\qquad \frac{F_u'' F_u'}{F_u' F_u} < \frac{F_i'' F_u'}{F_i' F_u} < \frac{F_i' F_u'}{F_i F_u} < \frac{F_i'' F_u''}{F_i' F_u'} < \cdots < \frac{1}{4} < \cdots < \frac{F_i'' F_i'''}{F_i' F_i''} < \frac{F_i' F_i''}{F_i F_i'}.$$

Jetzt lässt sich folgendes System von Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{ll}
4 F_i' F_i'' > F_i F_i' & 4 F_u'' F_u' < F_u' F_u \\
4 F_i'' F_i''' > F_i' F_i'' & 4 F_u''' F_u'' < F_u'' F_u' \\
4 F_i''' F_i'''' > F_i'' F_i''' & 4 F_u'''' F_u''' < F_u''' F_u'' \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Folglich durch Addition

$$4 F_i' F > F_i F \qquad 4 F F_u' < F F_u.$$

Subtrahiert man

$$F_i' F \qquad F F_u',$$

so folgt $3 F_i' F > F_i F_i'$ $\quad 3 F F_u' < F_u' F_u$;

$$\text{daher}\quad F_i' F > \frac{1}{3} F_i F_i' \qquad F F_u' < \frac{1}{3} F_u' F_u$$

$$\text{und 21a)}\quad OF > OF_i' + \frac{1}{3} F_i F_i'$$

$$\text{21b)}\quad OF > OF_u' - \frac{1}{3} F_u' F_u$$

Damit haben wir die gesuchten unteren Grenzen, die zu den oberen Grenzen 11) gehören:

$$\text{22a)}\quad f > f_i' + \frac{f_i' - f_i}{3} \qquad \text{22b)}\quad f > f_u' - \frac{f_u - f_u'}{3}.$$

Die soeben vollzogene Summierung, die diese Grenzen lieferte, lässt sich geometrisch-anschaulich darstellen durch das in der Einleitung dieser Arbeit erörterte Verfahren, bei dem die Strecke $F_i F_i'$ bezw. $F_u' F_u$ nach dem Verhältnis $+4$ bezw. $+\frac{1}{4}$ geteilt wird. Da jedoch die hier zu summierende Reihe

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

identisch ist mit der Reihe

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots,$$

so muss es in diesem speziellen Falle ein Verfahren geben, bei welchem die Grenze durch **beiderseitige** Annäherung und zwar auf völlig analoge Art wie früher gewonnen wird. Verdoppelt man nämlich die Strecken $F_i F_i'$, $F_i' F_i''$, $F_i'' F_i'''$, ... in der Richtung auf F_u und bezeichnet die entstehenden Endpunkte bezw. mit S', S'', S''', ..., so ist $4 F_i' F_i'' = 2 F_i' S'' > F_i F_i' = F_i' S'$ oder $F_i' S'' = 2 F_i' F_i'' > \frac{1}{2} F_i' S'$ und demnach $S'' S' < \frac{1}{2} F_i' S'$. Also haben wir

$$2 F_i' F_i'' > S'' S', \; 2 F_i'' F_i''' > S''' S'', \; 2 F_i''' F_i'''' > S'''' S''', \dots$$

also durch Addition $2 F_i' F > F S'$ und $3 F_i' F > F_i' S' = F_i F_i'$, also wiederum $F_i' F > \frac{1}{3} F_i F_i'$. Entsprechend wird die andere untere Grenze gewonnen. Jedoch ist diese Ableitung, wie man sieht, etwas weniger einfach als die zuerst angegebene.

Es seien nun die Punkte, welche die Strecken

$$F_i F_i' \qquad F_i' F_i'' \qquad F_i'' F_i''' \qquad F_i''' F_i'''' \dots$$

nach dem Verhältnis $+4$ teilen bezw. bezeichnet mit

$$G_i' \qquad G_i'' \qquad G_i''' \qquad G_i'''' \dots,$$

dgl. die Punkte, welche die Strecken

$$F_u' F_u \qquad F_u'' F_u' \qquad F_u''' F_u'' \qquad F_u'''' F_u''' \dots,$$

nach dem Verhältnis $+\frac{1}{4}$ teilen, bezw. mit

$$G_u' \qquad G_u'' \qquad G_u''' \qquad G_u'''' \dots.$$

Dann können wir statt 21a) und b) schreiben

$$\text{23)}\qquad \begin{cases} \text{a)} & OF > OG_i' \\ & OG_i' = OF_i' + \frac{1}{3} F_i F_i' \\ \text{b)} & OF > OG_u' \\ & OG_u' = OF_u' - \frac{1}{3} F_u' F_u. \end{cases}$$

Da nun nach 15)

$$F_i' F_u' < \frac{1}{4} F_i F_u$$

ist, so ist auch

$$F_i F_i' + F_u' F_u > \frac{3}{4} F_i F_u,$$

also nach Multiplikation mit $\frac{4}{3}$:

$$\frac{4}{3} F_i F_i' + \frac{4}{3} F_u' F_u > F_i F_u$$

oder

$$F_i G_i' + G_u' F_u > F_i F_u.$$

Daraus folgt

$$F_i G_i' > F_i G_u' \text{ oder } G_u' G_i' > O,$$

d. h. G_i' liegt näher an F als G_u'.

Addieren wir ferner zu der Gleichung

$$\frac{1}{3} F_i' F_i'' = F_i'' G_i''$$

$F_i' F_i''$ und ziehen alsdann

$$\frac{1}{3} F_i F_i' = F_i' G_i'$$

davon ab, so folgt mit Rücksicht auf 19)

$$\frac{4 F_i' F_i'' - F_i F_i'}{3} = G_i' G_i'' > O,$$

es liegt also G_i'' näher an F als G_i'. Ebenso lässt sich natürlich auch zeigen, dass $G_u' G_u'' > O$. Die Lage des Punktes G_u'' zu G_i' zu untersuchen, hat wenig Zweck, da ja die Punkte G_u hinter den entsprechenden Punkten G_i zurückbleiben, die Grenze 22 b) also von geringerem Werte als 22 a) ist, doch soll an einer späteren Stelle dieser Arbeit bewiesen werden, dass auch $G_i' G_u'' > 0$ ist. Demnach ergibt sich endgültig die Punktfolge:

$$G_u\, G_i\, G_u'\, G_i' \cdot \cdot \cdot \cdot F \cdot \cdot \cdot \cdot G'\, G_1'\, G\, G_1 \cdot \cdot \cdot$$

Setzen wir wieder

$$g_i = \frac{r}{2} \cdot 2\,n\,O\,G_i \qquad g_i' = \frac{r}{2} \cdot 2\,n\,O\,G_i' \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$g_u = \frac{r}{2} \cdot 2\,n\,O\,G_u \qquad g_u' = \frac{r}{2} \cdot 2\,n\,O\,G_u' \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

so besteht die Ungleichung:

24) $$g_u < g_i < g_u' < g_i' < \cdot \cdot \cdot < f < \cdot \cdot \cdot \cdot < g' < g_1' < g < g_1.$$

Damit ist das Verhältnis der einzelnen Grenzen zu einander und zu π ins Klare gebracht. Auch erkennt man leicht, welche beiden Grenzen zweckmässig zusammenzustellen sind. Ist z. B. f_u' die zuletzt berechnete Vielecksgrösse, so ist $g_i' < f < g'$ zu wählen, also

25) $$f_i' + \frac{f_i' - f_i}{3} < f < f_u' - \frac{f_u' - f_i'}{3}.$$

Ist ferner p_i' die zuletzt berechnete Grösse, so wählt man zweckmässig $g_i'' < f < g_1''$, also ist

26) $$p_i' + \frac{p_i' - p_i}{3} < p < p_i' + \frac{p_u' - p_i'}{3} \text{ usw.}$$

Die Formeln (S. 106 und 107)

27) $$f_i' = \sqrt{f_i \cdot f_u} \qquad f_u' = \frac{2\, f_u \cdot f_i'}{f_u + f_i'}$$

28) $$p_u' = \frac{2\, p_u\, p_i}{p_u + p_i}, \qquad p_i' = \sqrt{p_i \cdot p_u'},$$

welche gewissermassen die Grundlage dieser ganzen Arbeit bilden, sollen aus diesem Grunde fernerhin als die „G r u n d f o r m e l n" bezeichnet werden. Sie lassen sich zweckmässig in der „Normalform" schreiben:

27 a) $$\frac{f_u - f_u'}{f_u' - f_i'} = \frac{f_u}{f_i'} = \frac{f_i'}{f_i} = \frac{1}{\varrho} = R = \cos \alpha$$

28 a) $$\frac{p_u' - p_u''}{p_u'' - p_i'} = \frac{p_u'}{p_i'} = \frac{p_i'}{p_i} = \frac{1}{\varrho'} = R' = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Grundformeln kann man nun beide Grenzen auch durch dasselbe Wertepaar ausdrücken. So hat man z. B., wenn f_i' die zuletzt berechnete Vielecksgrösse, dagegen f_u' noch nicht berechnet ist, aus $g_i' < f < g_1'$ die drei identischen Ungleichungen:

29) $$\begin{cases} f_i' + \dfrac{f_i' - f_i}{3} < f < f_i' + \dfrac{f_u - f_i'}{3} \\[2mm] f_i' + \dfrac{f_i' - f_i}{3} < f < f_i' + \dfrac{f_i' - f_i}{3} \cdot \dfrac{f_i'}{f_i} \\[2mm] f_i' + \dfrac{f_u - f_i'}{3} \cdot \dfrac{f_i'}{f_u} < f < f_i' + \dfrac{f_u - f_i'}{3}. \end{cases}$$

Desgleichen erhält man aus $g_i < f < g$ die Ungleichung, aus der 25) durch Sukzession hervorgeht, sowie die mit dieser identische Ungleichung

25 a) $$f_i + \frac{2}{3}(f_u - f_i)\frac{f_i}{f_u} < f < f_i + \frac{2}{3}(f_u - f_i).$$

Die entsprechenden Ungleichungen in p lauten:

26) $$\begin{cases} p_i' + \dfrac{p_i' - p_i}{3} < p < p_i' + \dfrac{p_u' - p_i'}{3} \\[2mm] p_i' + \dfrac{p_i' - p_i}{3} < p < p_i' + \dfrac{p_i' - p_i}{3} \cdot \dfrac{p_i'}{p_i} \end{cases}$$

26 a) $$p_i + \frac{p_u - p_i}{3} \cdot \frac{p_i}{p_u} < p < p_i + \frac{p_u - p_i}{3}$$

und 30 $$p_i + \frac{2}{3}(p_u' - p_i) \cdot \frac{p_i}{p_u'} < p < p_i + \frac{2}{3}(p_u' - p_i).$$

Hierin gehen die identischen Ungleichungen 26) aus 26 a) durch Sukzession hervor und die linken Seiten von 26 a) und 30) sind identisch. Dass die Verwendung der unteren Grenze g_u weniger zweckmässig sein würde, ist klar, da sie stets durch die schärfere Grenze g_i ersetzt werden kann.

Was schliesslich die Wirkung der Anwendung dieser Formeln betrifft, so ergibt sich schon aus den Fehlerbestimmungen, die ich auf S. 107 und 108 in der vorigen Arbeit vorgenommen habe, dass wegen der Vernachlässigung von $(f_u - f_i)^2$ oder $(f_u - f_i')^2$ bezw. von $(p_u - p_i)^2$ oder $(p_u' - p_i)^2$ die Anzahl der für π gewonnenen Stellen im allgemeinen nicht grösser sein wird als das Doppelte der ohne diese Formeln gewonnenen Stellen. Noch deutlicher wird diese Tatsache durch die Reihenentwickelungen hervortreten, die im weiteren Verlaufe dieser Arbeit vorgenommen werden sollen.

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mitteilungen.

Konstruktion eines Näherungswertes für $\frac{\pi}{2}$.

Teilt man den Durchmesser eines Kreises $AB = 2r$ nach dem goldenen Schnitt und trägt den grösseren Abschnitt von A aus als Sehne AC in den Kreis ein, so findet sich, wie man bald sieht, für die Entfernung BC der Wert $r\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$, dessen doppeltes (rund $r \cdot 3{,}1446$) sich von $r\pi$ nur um etwa 0,003 unterscheidet. BD ist also mit grosser Annäherung gleich der Länge des Quadranten in jenem Kreise. Stellt man sich ein Dreieck von der eben beschriebenen Form aus hartem Holz her und legt seine Hypotenuse so an den Durchmesser irgend eines Kreises an, dass die dem Punkte B entsprechende Dreiecksecke auf den Endpunkt des Durchmessers fällt, so wird auf der Kathete BD durch den Kreis selbst die ungefähre Länge seines Quadranten abgeschnitten. F. B l e n c k e (Hamm i. W.)

* * *

Weitere Vereinfachung der Fünf- und Zehnecks-Konstruktionen.*) Für Aufgabe 7 habe ich eine Vereinfachung gefunden. Zur Gewinnung der letzten sechs Teilpunkte: R, N, Q, O, L und P (Fig. 4) kann man auf zwei Arten mit acht Elementen auskommen, so dass $S = 26$ wird:

1) Nach K (BX) fahre man fort: K (KE) : $(C_1 + C_3)$ und H (KE) : $(C_1 + C_3)$.
2) Man schlage A (AY') : $(2\,C_1 + C_3)$ [Die Lage von Y' findet man in Fig. 5] und B (AY') : $(C_1 + C_3)$; dann nehme man, indem man dem Durchmesser die Endpunkte S und T gibt, BS auf (C_1) und schlage T (BS) : $(C_1 + C_3)$.

H. B o d e n s t e d t (Braunschweig).

Vereine und Versammlungen.

76. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Breslau.**) Aus dem nunmehr gedruckt vorliegenden Programm mögen folgende Einzelheiten hier Platz finden. In den beiden allgemeinen Sitzungen am 19. und 23. September werden sprechen R o u x (Halle a. S.) über „die Entwickelungsmechanik, ein neuer Zweig der biologischen Wissenschaft"; G a z e r t (Berlin) über „die deutsche Südpolarexpedition"; E u g e n M e y e r (Charlottenburg) über „die Bedeutung der Verbrennungskraftmaschinen für die Erzeugung motorischer Kraft"; H a b e r l a n d t (Graz) über „Sinnesorgane im Pflanzen-

*) S. Unt.-Bl. X, 3, S. 56—59, insbes. S. 58.
**) S. a. Unt.-Bl. X, 2; S. 41.

reiche"; Rhumbler (Göttingen) über „Zellenmechanik und Zellenleben."

Die Gesamtsitzung beider wissenschaftlichen Hauptgruppen am Vormittag des 22. September wird durch „Bericht und Debatte über den naturwissenschaftlich-mathematischen Unterricht an den höheren Schulen" ausgefüllt werden. Referate haben übernommen K. Fricke (Bremen) [die heutige Lage des naturwissenschaftlich-mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen]; F. Klein (Göttingen) [Neue Tendenzen auf mathematisch-physikalischer Seite]; Merkel (Göttingen) [Wünsche, betreffend den biologischen Unterricht]; Leubuscher (Meiningen) [Schulhygienische Erwägungen]. **)

Am Nachmittag desselben Tages wird in einer gemeinschaftlichen Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe über „die Eiszeit in den Gebirgen der Erde" verhandelt werden. Referate erstatten E. Brückner (Bern) über „die Eiszeiten in den Alpen"; Hans Meyer (Leipzig) über „die Eiszeit in den Tropen"; J. Partsch (Breslau) über „die Eiszeit in den Gebirgen Europas zwischen dem nordischen und dem alpinen Eisgebiet."

Für die Abteilung 12 (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht) sind folgende Vorträge angemeldet: F. S. Archenhold (Berlin-Treptow): Die Bedeutung der Planetenkarten der illustrierten Zeitschrift „Das Weltall" für den Unterricht; Th. Bail (Danzig): Zum Betriebe des naturgeschichtlichen Unterrichts; Börnstein (Berlin-Wilmersdorf): Die Wetterkunde im Unterricht; W. Krebs (Gr. Flottbeck bei Hamburg): Nationale Gesichtspunkte in der Reform des naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Bücher-Besprechungen.

Pahde, Adolf: Erdkunde für höhere Lehranstalten. Glogau, Karl Flemming. 8⁰.
I. Teil: Unterstufe. 1899. VI u. 96 S.
II. Teil: Mittelstufe, 1. Stück. 1903. VIII u. 134 S. 2. durchgesehene und verbess. Auflage.
III. Teil: Mittelstufe, 2. Stück. 1901. IX u. 169 S.
IV. Teil: Mittelstufe, 3. Stück. 1902. VII u. 148 S.

Wenn ein bekannter Didaktiker, dem man ein grosses Verdienst um die Hebung des geographischen Unterrichtes nicht absprechen kann, von dem Pahdeschen Lehrbuche gesagt hat, es sei in wissenschaftlicher Hinsicht eine vortreffliche Leistung, könne aber unter dem pädagogischen Gesichtspunkte nicht als ein Fortschritt bezeichnet werden, so liesse sich dem erwidern, dass wir es zur Feststellung unverbrüchlicher unterrichtlicher Leitsätze noch keineswegs gebracht haben, und dass einstweilen noch jeder Schriftsteller das gute Recht für sich in Anspruch nehmen kann, seine Auffassung, wenn er sie nur entsprechend durchführt, als eine in ihrer Art wohlbegründete anerkannt zu sehen. Und Dr. Pahde, Prof. am Realgymnasium in Krefeld, scheint sich uns in diesem Falle zu befinden.

Derselbe schliesst sich in der Hauptsache den von A. Kirchhoff in die Schulgeographie hineingetragenen Reformprinzipien an, weicht aber von der wohl bekannten Anlage des massgebenden Kompendiums in einem wichtigen Punkte ab. Er vermeidet nämlich den gedrängten Depeschenstil, der ja freilich nicht gerade ästhetisch wirkt, und entwickelt die einzelnen Lehren in wohlgerundeten Sätzen. Man könnte vielleicht einwerfen, dass die sehr zahlreichen Randnoten, die zur Erläuterung und weiteren Ausführung dienen, auch den Nachteil einer gewissen Unterbrechung des Textes mit sich bringen; indessen würden wir dies ebensowenig als einen besonderen Schaden betrachten, wie wir auch in den kurzen Schlagworten nichts Schlimmes erblicken können, soweit es sich um ein Schulbuch handelt, dessen Hauptzweck es ist, als Repetitorium für den lebendigen Vortrag des auf keine Eselsbrücke angewiesenen Lehrers zu dienen. Für den Selbstunterricht ist natürlich ein Buch, wie das vorliegende, weitaus geeigneter, und das ist gleichfalls ein nicht zu unterschätzendes Moment. Jedenfalls ist es dem Verfasser sehr gut gelungen, die Verpflichtung, einen grossen Stoff zu bewältigen, mit der Anforderung, ein lesbares Deutsch zu schreiben, in Einklang zu bringen.

Das Bestreben, den Schülern das nun einmal nicht ganz entbehrliche Memorieren zu erleichtern, hat dazu geführt, dass von der Verwendung verschiedener Drucksorten ausgiebiger Gebrauch gemacht wurde. Der Anblick mancher Seiten ist dadurch zwar ein etwas unruhiger geworden, allein das fällt wenig ins Gewicht, wenn dadurch den Lernenden eine wirkliche Unterstützung zu teil wird. Viele Mühe hat sich der Verfasser mit der Toponomastik und der richtigen Aussprache der geographischen Eigennamen gegeben, und es ist ihm durchweg geglückt, das Richtige zu treffen; nur das portugiesische „ei" (Madeira, Janeiro) ist nicht ëh, sondern es wird das e vom i sehr scharf getrennt gesprochen. Auf die in neuerer Zeit beliebt gewordene Aufnahme von Karten und Kärtchen ist mit gutem Grunde Verzicht geleistet worden. Dagegen ist jedes Bändchen am Schlusse mit einer Anzahl von typischen Landschaftsbildern ausgestattet, die der Hoelzelschen Sammlung von „Charakterbildern" entnommen sind. Sehr zu loben sind die genauen Namen- und Sachregister, die dazu dienen werden, den jungen Leuten noch über die Schulstunde, sogar vielleicht über die Schuljahre hinaus das Buch lieb zu machen, weil sie darin leicht nachschlagen und sich über ihnen begegnende Gelegenheitsfragen orientieren können. Ueber die Ausstattung ist dem, der die Flemmingschen Verlagsartikel kennt, kaum etwas zu sagen; dieselbe entspricht natürlich auch weitgehenden Ansprüchen. Die Korrektheit des Druckes verdient alles Lob.

Die Disposition des Stoffes richtet sich, wie sich dies von selbst versteht, nach den preussischen Lehrplänen. Demgemäss ist für die Unterstufe, der 9 bis 12 jährige Knaben angehören, zunächst ein kurzer Ueberblick über die allgemeine Erdkunde vorgeschrieben; daran reiht sich ein Abriss der Länderkunde, und zuletzt wird Deutschland in eingehendere Behandlung genommen. Die Ueberzeugung des Referenten, dass die Grundwahrheiten der mathematischen Geographie in Klassen, deren Schüler das erwähnte, jugendliche Alter haben, zwar gelehrt, nicht jedoch zu wirklichem Verständnis gebracht werden kann, konnte auch durch diese mit wirklich grosser Geschicklichkeit an ihre Aufgabe herantretende Darstellung nicht erschüttert werden. Indessen sei bereitwillig konstatiert, dass das Mögliche versucht und auch innerhalb der nun einmal durch die Natur der Dinge gezogenen Schranken erreicht worden ist. Die Beschreibung Deutschlands lehnt sich, wie es die

**) Vergl. hierzu den Bericht über die diesjährige Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des math.-naturw. Unterr. (Unt.-Bl. X, 3; S. 66/67). Der damals gefasste Beschluss (a. a. O. S. 67) ist nicht zur Ausführung gelangt, das oben mitgeteilte Programm war anderweit bereits abgeschlossen und in das allgemeine Versammlungsprogramm aufgenommen worden.

Kirchhoffsche Methodik erheischt, an eine Zerfällung des Gebietes in „natürliche Landesteile“ an, und diesen müssen sich die Staaten eingliedern lassen, wenn auch die politischen Grenzen dabei etwas Not leiden. Dass dieselben etwas zufällig, historisch Gewordenes sind, wird auf diese Weise schon früh dem Schüler einleuchtend, und die Emanzipation von den Fesseln, welche ehemals die „politische Geographie“ — heute hat sich dieser Begriff ja gründlich umgestaltet — Lehrern und Leitfäden auferlegte, ist vollzogen. Da wir aber im bürgerlichen Leben mit den tatsächlichen Verhältnissen tagtäglich rechnen müssen, so war eine mehr statistisch gehaltene „staatliche Uebersicht“ über das Deutsche Reich ganz am Platze.

Das erste Stück der Mittelstufe umfasst unseren Erdteil mit Ausnahme Deutschlands. Die Vielgestaltigkeit des Kontinentes, wie dereinst Strabon so bezeichnend sagte, ermöglicht es, relativ leicht die natürlichen Einheiten herauszufinden, und man wird sich mit denen, welche Herr Pahde annimmt, recht wohl einverstanden erklären können. Es sind die folgenden: Mittelmeergebiet, Westen des Rumpfes, Nordwesteuropa, skandinavisches Nordeuropa, Osteuropa und Südosten des Rumpfes (Karpaten- und Alpenländer). Die angrenzenden Meere haben jeweils auch eine kurze Besprechung gefunden. Es bedarf keines besonderen Hinweises, dass jeder der sechs Landkomplexe nun wieder in Unterabteilungen zerlegt werden muss; so der Süden in seine drei geographisch gleichwertigen Halbinseln. Die Rubriken, die für jede Untereinheit aufgestellt werden, sind die üblichen: Lage, Grenzen und Grösse; Oberflächengestalt und Gewässer; Klima und Naturprodukte; Bevölkerungsverhältnisse nebst geschichtlicher Skizze; Staaten- und Ortskunde. Wir wissen wohl, dass das Ideal der Länderkunde mit einer Nebeneinanderstellung dieser einzelnen Teile, die in ihrer Gesamtheit das betreffende Stück der Erdoberfläche bestimmen, nicht gedeckt wird; hängen doch z. B. die menschlichen Siedelungen direkt vom Bodenbau, dem Bewässerungsnetze und der Verteilung der klimatischen Faktoren ab. Trotzdem wird der praktische Schulmann der Rubrikenbildung den Vorzug geben, weil nur durch sie die Aneignung der Tatsachen so, wie es sich gehört, erleichtert und auch für die Repetition der nötige Anhalt geboten wird.

Das dritte Bändchen beginnt mit einer gemeinverständlichen Meereskunde, die auch gleichzeitig auf Meteorologie und Kartographie Rücksicht nimmt. Darauf folgen die vier aussereuropäischen Erdteile in nachstehender Reihenfolge: Australien und Ozeanien, Amerika, Afrika, Asien. Die deutschen Kolonien bilden einen Schlussabschnitt, der seine gute Berechtigung hat, da man gemeiniglich nicht recht weiss, wo man diese Schutzgebiete am besten unterbringen soll. Die Grundsätze, nach denen die Bearbeitung der Erdteile erfolgte, weichen von denjenigen, die den europäischen Ländern zu grunde liegen, nicht wesentlich ab. Hingegen steht der Inhalt des vierten Bandes, der sich einzig und allein mit dem Deutschen Reiche beschäftigt, wieder ganz auf eigenen Füssen. Man wird, wenn man sich etwas hineinliest, rasch die Ueberzeugung gewinnen, dass ein ganz gewaltiges Mass von hingebender Arbeit in diesem dünnen Büchlein steckt, und wer dasselbe studiert hat, kann gewiss von sich sagen, er kenne sich in seinem Vaterlande aus.

Auf die Korrektheit der einzelnen Angaben ist offenbar grosses Gewicht gelegt worden, und Lehrer wie Schüler können diesem Handweiser gleich vertrauensvoll sich überlassen. Dass ein Fachgeograph unter den unzähligen Details einmal eines oder das andere antrifft, das er berichtigen zu können glaubt, ist so selbstverständlich, dass das Gegenteil kaum denkbar erscheint. So hat der Verfasser, wie anzuführen gestattet sei, von Anaximander, der doch den Erdkörper ganz bestimmt als walzenförmig definierte, eine etwas zu gute Meinung, und die Etymologie des Wortes „Mährisches Gesenke“, die im ersten Teile gegeben und im vierten durch Rückverweisung wiederholt wird, ist nach den Mitteilungen, welche 1901 die dem Geographentage gewidmete Festschrift des Geographischen Seminars in Breslau brachte, nicht mehr aufrecht zu erhalten. Der Unterzeichnete gedenkt solcher Kleinigkeiten gewissermassen nur zu seiner eigenen Legitimierung, um darzutun, dass er dem Inhalt sein volles Interesse widmete.

Wer, wie jetzt so Mancher tut, das Lehrbuch ganz und gar aus der Schule verbannen oder nur einen mageren Grundriss zulassen will, wird mit der Materialfülle des Pahdeschen Lehrbuches allerdings nicht einverstanden sein. Hier jedoch stehen sich zwei Ansichten gegenüber, für deren jede sich gute Gründe ins Gefecht führen lassen. Man kann es eben auch für angezeigt halten, dass der Schüler sich mit seinem Kompendium, falls der Ausdruck gestattet ist, auf einen intimeren Fuss stellt, es geradezu auch als Lesebuch benützt und sich in ihm Rats erholt, wenn er durch irgend eine Ursache veranlasst wird, sein geographisches Wissen aufzufrischen. Und nach dieser Seite hin wird das vorliegende Werk auch sehr weitgehenden Ansprüchen genügen. Unter allen Umständen ist es ein schönes Zeugnis für den Eifer, der sich auf dem didaktischen Gebiete geltend macht, und für die geographische Durchbildung der Lehrer, die sich diesem Führer anvertrauen. Denn derjenige, der nach diesem Buche unterrichten wollte, ohne selbst ganz auf dem Boden der Erdkunde von heute zu stehen, würde bald inne werden, dass er ein seine Kräfte übersteigendes Wagnis unternommen habe.

S. Günther (München).

* * *

Pokornys Naturgeschichte des Tierreiches. Für höhere Lehranstalten neu bearbeitet von Dr. Robert Latzel. Mit 73 farbigen Tierbildern auf 24 Tafeln von W. Kuhnert und H. Morin und 283 Abbildungen im Texte und einer Erdkarte. 26., nach biographischen Gesichtspunkten umgearbeitete Auflage. Preis gebunden 4 Mk. Leipzig 1903, Verlag von G. Freytag.

Das reiche in systematischer Anordnung gebotene Lernmaterial ist so verteilt, dass von den 233 Seiten des Buches 134 den Wirbeltieren, 10 den Weichtieren, 64 den Gliedertieren, 5 den Würmern, 3 den Stachelhäutern, 7 den Coelenteraten und Schwämmen, 1 den Protozoën gewidmet sind. Was die Behandlung des Stoffes im allgemeinen betrifft, so ist für den Bearbeiter dieser Auflage der Gedanke massgebend gewesen, dass der Schüler, um zu einer denkenden Betrachtung tierischen Lebens zu gelangen, überall auf den Zusammenhang zwischen Körperbau und Lebensweise der Tiere hingewiesen werden müsse; Schmeil's Leitfaden der Zoologie ist ihm dabei Vorbild gewesen. Die Einzelheiten zeigen, dass es dem Verfasser mit der Durchführung dieses Gedankens ernst gewesen ist.

Bei den Sängern und Vögeln wird mit je einem Haustiere begonnen (Katze resp. Taube), an welchem wichtige Merkmale der Klasse abgeleitet werden. Auch sonst sind wichtige Repräsentanten der einzelnen natürlichen Gruppen ausführlicher als die anderen beschrieben. Zahlreiche Ausführungen über besondere Lebensweisen sowie Darstellungen weniger wichtiger Formen sind in kleinem Drucke beigegeben. An der Ausstattung des Buches werden Lehrer wie Schüler Freude haben; namentlich werden die farbigen Tierbilder, die in einem besonderen Hefte beigegeben wurden, Effekt machen.

Auf den in der Einleitung ausgesprochenen Wunsch des Verfassers hin erlaubt sich Referent, mit einigen Bemerkungen nicht zurückzuhalten.

Der Hals ist doch etwas mehr, als „der vordere Teil der Wirbelsäule" (S. 1) und sollte bei der Darstellung der Katze sowohl wie der Taube (S. 1 und 65) neben Kopf, Rumpf, Schwanz usw. mit unterschieden werden. — „Drüsen des Bauches" würde Referent die Milchdrüsen nicht nennen (vergl. S. 3!), höchstens „Drüsen der Bauchwand"; sie sind doch Hautdrüsen, die auch in der Brustregion liegen können. — Mit der Anschauung, dass die Bedeckung der Eidechse und ihrer Verwandten nicht hinreichend sei, den Körper vor starker Abkühlung zu schützen (S. 105), kann sich Referent nicht befreunden; die Poikilothermie dieser Tiere hängt doch mit dem Steigen und Fallen des respiratorischen Gaswechsels zusammen! — Die Abbildung der Froscheier (S. 114) ist verbesserungsbedürftig, ein Schüler könnte darauf schliessen, die Embryonen seien spiralig eingerollt. — Wenn gesagt wird, dass die Zelle oder das Protoplasma nur „aus einem einfachen Eiweissklümpchen" bestehe (S. 223), so ist das wenigstens ungenau ausgedrückt. — Abgesehen von diesen für den Gebrauch des Buches wenig bedeutsamen Ausstellungen hätte nun aber Referent noch einen grossen Wunsch!

Wäre es denn nicht möglich, in einer neuen Auflage mit viel grösserer Gründlichkeit und Ausführlichkeit, als es hier geschehen ist, auf die Organisation eines einzelnen, bestimmten Sängers einzugehen, an dem die Grundzüge der Ernährungs-, Muskel- und Nervenphysiologie erläutert werden könnten? Durch solche Betrachtungsweise würde nicht nur ein viel tieferes Verständnis tierischen Lebens überhaupt angebahnt, es würde auch der Zusammenhang zwischen Bau und Leben noch viel deutlicher und namentlich ein besseres Verständnis des Menschen möglich, der selbst für diese Behandlung in erster Linie in Frage käme! Wenn statt der überflüssigen Erdkarte und der 24 bunten Tafeln in einer neuen Auflage auch nur 20 Seiten den Grundlagen der Anatomie und Physiologie z. B. des Menschen gewidmet wären, dann würde Referent darin einen grossen Fortschritt sehen.

F. Quelle (Göttingen).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Anleitung zu 30 der wichtigsten Schulversuche mit dem Differential- und Doppel-Thermoskop und mit dem sechsfachen Manometer von Bruno Kolbe. Berlin 1904, Ernecke.

Bauer, L., Lehr- und Uebungsbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Stuttgart 1904, Bonz & Co.

Bennecke, F., Zur Reform des Unterrichts in der Naturgeschichte. Sonderabdruck a. d. Ztschr. f. Gymnasialwesen, Jahrg. LVIII. Berlin 1904, Weidmann.

Blätter, Periodische, für Realienunterricht u. Lehrmittelwesen, herausgeg. von Robert Neumann und Julius Fischer, Jahrg. IX, 1903/04, Heft 3, 4. Tetschen 1904, Henckel.

Bollettino dell 'Associazione „Mathesis", Anno VIII 1903/04, Num. 3, 4. Torino, Tipografia degli Artigianelli 1904.

Bürgi, R. T., Der Elektronäther. Beiträge zu einer neuen Theorie der Elektrizität und Chemie. Berlin 1904, Junk. Mk. 1.20.

Claussen, F., Die rechnerische Behandlung der sozialpolitischen Gesetze nach dem neuesten Stande der Gesetzgebung. 1. Invalidenversicherung. 2. Krankenversicherung. 3. Unfallversicherung. Leipzig 1904, Hirt & Sohn. Mk. —.10.

Conwentz, Die Heimatskunde in der Schule. Berlin 1904, Gebr. Bornträger.

Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. 1. Teil. Mit Textfiguren und auf 2 Tafeln. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 10.—.

Griesbach, H., Der Stand der Schulhygiene in Deutschland. Leipzig 1904, Vogel. Mk. 1.50.

Grobben, K., Lehrbuch der Zoologie, begründet von C. Claus. 7. Aufl. 1. Hälfte. Mit 507 Figuren. Marburg 1904, Elwert. Mk. 8.50.

Halbmonatliches Literaturverzeichnis der Fortschritte der Physik, dargestellt v. d. deutschen physikalischen Gesellschaft, redig. v. K. Scheel und R. Assmann. 3. Jahrg., No. 1 bis 14. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn.

Hassak, K., Leitfaden der Warenkunde für höhere Handelslehranstalten. Mit 215 Abbild. Wien 1904, Pichlers Wwe. & Sohn. Mk. 4.— geb.

Kleiber, J., Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien. 2. Aufl. Mit 392 Fig., 4 farbigen Spektralbildern. München 1903, Oldenbourg. Mk. 3.— geb.

Kleiber, Joh., und Karsten, B., Lehrbuch der Physik. Mit Fig. 2. Aufl. Ebenda. Mk. 4.— geb.

Leppin & Masche, Verzeichnis der auf der Weltausstellung in St. Louis auszustellenden physikalischen Apparate. (Physicalapparatuses exhibited by Leppin & Masche), Berlin SO, Engel-Ufer 17). Selbstverlag 1904.

Marcolongo, R., Teoria matematica dello Equilibrio dei Corpi elastici. Mailand 1904, Hoepli.

Marpmanns illustrierte Fachlexika der gesamten Apparaten-, Instrumenten- und Maschinenkunde der Technik und Methodik für Wissenschaft, Gewerbe und Unterricht. Bd. I: Chemische analyt. Technik und Apparatenkunde. Lfg 1. Leipzig, Schimmelwitz. Mk. 1.50.

Müller, H., und Schmidt, O., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. Teil III: Für die oberen Klassen. In 2 Abteil. Leipzig 1904. Teubner.

Reichel, O., Vorstufen der höh. Analysis und analyt. Geometrie. Mit 30 Fig. Ebenda. Mk. 2.40 geb.

Remsen, J., Einleitung in das Studium der Chemie. Bearb. von Dr. Karl Seubert. 3. Aufl. Mit 41 Abb. und 2 Tafeln. Tübingen 1904, Laupp. Mk. 6.—.

Schiranoff, D., Lehrbuch der Differenzrechnung. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 4.— geb.

Schlauer, G., und Leichner, J., Stoff- und Lehrpläne für den Realien-Unterricht in der Volksschule. Wien 1904, Pichlers Wwe. & Sohn. Mk. 3.50.

Schönemann, Die Verwendung der einfachen Kamera zur Ermittelung von Höhen und Entfernungen. Bonn 1903, Georgi.

Stampfer, S., Sechsstellige logarithm.-trigonometr. Tafeln nebst Hilfstafeln. Neu bearb. von Ed. Dolezal. 20. Aufl. Schulausgabe. Wien 1904, Gerolds Sohn. Mk. 3.— geb.

Strasburger, E., Noll, F., Schenck, H., Karsten, G., Lehrbuch der Botanik für Hochschulen. Mit 741 Abb. 6. Aufl. Jena 1904. Fischer. Mk. 7.50.

Thomé, O., Flora v. Deutschland, Oesterreich u. d. Schweiz, Lfrg. 3—21 (Preis der Lfrg. Mk. 1.25). Dgl. V. Band: Kryptogamen-Flora, Lfrg. 10—16, herausgeg. von W. Migula. (Subskr.-Preis der Lfrg. 1 Mk.). Gera 1903, v. Zeschwitz.

Trappes Schul-Physik. 15. Aufl. bearb. von Dr. Maschke. Mit einem Anhange: Die einfachsten chemischen Erscheinungen von Prof. Dr. Schiff. Mit vielen Abb. Breslau 1903, Hirt. Mk. 4.50 geb.

Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Zweiter Band (Geometrie, Logarithmen, Trigonometrie etc.). Mit Figuren im Text. Leipzig 1903, Veit & Co. Mk 12.—.

Vogel, O. u. Ohmann, O., Zoologische Zeichentafeln im Anschluss an den Leitfaden für den Unterricht in der Zoologie von Vogel, Müllenhoff u. Röseler. Heft I, 9. Aufl., II, 7. Aufl., III, 5. Aufl. Berlin 1903, Winckelmann u. Söhne. Mk. —.80, 1.25, 1.—.

Waeber, R., Lehrbuch für den Unterricht in der Physik. Mit 417 Abb. und 1 Spektraltafel. 14. Aufl. bearbeitet von Oberlehrer Unverricht. Leipzig 1904, Hirt & Sohn. Mk. 3.75 geb.

Weber, H., Enzyklopädie der elementaren Algebra u. Analysis. Leipzig 1903, Teubner.

Weighardt, E., Mathematische Geographie. 2. Aufl. Bühl 1902, Verlag der Aktiengesellschaft Konkordia. Mk —.60.

Wienecke, E., Der geometrische Vorkurs in schulgemässer Darstellung. Mit 59 Fig. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 2.20 geb.

Wossidlo, P., Leitfaden der Botanik für höhere Lehranstalten. Mit 556 Abb. u. 16 Tafeln. 10. Aufl. Berlin 1903. Weidmann. Mk. 3.30 geb.

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe von Raphael Meyer. Mit 32 Fig. Leipzig 1903, Teubner. Mk. 16.—.

Ein Werk für Jedermann!

2. verbesserte Auflage.

Mit Karten u. Abbildungen

Die Erde

und die

Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Eine physische Erdbeschreibung nach E. Reclus von

Dr. Otto Ule.

Preis 10 Mk., geb. 12 Mk.

Verlag Otto Salle, Berlin W. 30.

Mineralien

Mineralpraeparate, mineralogische Apparate und Utensilien.

Gesteine

Geographische Lehrsammlungen.

Dünnschliffe von Gesteinen, petrographische Apparate und Utensilien.

Petrefacten

Sammlungen für allgemeine Geologie.

Gypsmodelle seltener Fossilien. Geotektonische Modelle.

Krystallmodelle

aus Holz, Glas und Pappe. Krystalloptische Modelle.

Preisverzeichnisse stehen portofrei zur Verfügung.

Meteoriten, Mineralien und Petrefacten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen.

Dr. F. Krantz,

Rheinisches Mineralien-Contor

Gegründet 1833. **Bonn am Rhein.** Gegründet 1833.

Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit

Max Kaehler & Martini

Berlin W, Wilhelmstr. 50

empfehlen **Materialien** zu den

Vorlesungs-Experimenten

über Aluminothermie n. Goldschmidt.

Einrichtung von chemischen Laboratorien. Preislisten 1903 frei.

M. Bornhäuser, Ilmenau

Hochspannungsbatterien

kleiner Akkumulatoren

für Unterrichtszwecke,

Kapazität 1 Amp.-Std. bei 10 stündiger Entladung. D.-R.-G.-M.

Modell der physikalisch-technischen Reichsanstalt.

Funkeninduktoren.

Präzisions-Reisszeuge

(Rundsystem)

für Schulen und Techniker.

Clem. Riefler, Nesselwang und München

(Nur die mit dem Namen Riefler gestempelten Zirkel sind echtes Riefler-Fabrikat.)

Hartmann & Braun A.-G.

Frankfurt a. M.

Spezial-Fabrik aller Arten

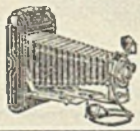
Elektr. u. magnet. Mess-Instrumente

für Wissenschaft und Praxis.

Kataloge stehen zu Diensten.

Photographische Apparate

und Bedarfs-Artikel zu Originalpreisen



Bruno Pestel,

Dresden 6,

Hauptstr. 1 Schlossstr. 6

Illustr. Katalog (ca. 160 S. stark) auf Verlangen grat.

Hartmann & Braun A.-G.

Frankfurt a. M.

empfehlen ihr

Elektr. Instrumentarium

für Lehrzwecke

welches allgem. Anerkennung findet.

Spezialkatalog zu Diensten.

Klapptafel n. Rühlmann auf Wunsch mit Zubehör z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie d. i. Aufgab. vorkommenden Bewegungen. (S. U.-Bl. VIII 2. S. 41.). Dynamos m. Handbetrieb, Dampfmaschinen, Wassermotore.

Rob. Schulze, Halle a. S.

Moritzzwinger 6.

E. Leybold's Nachf., Köln

Mechanische und **optische Werkstätten.**

Physikalische Apparate

in erstklassiger Ausführung.

Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette.

Fr. Klingelfuss & Co,

Basel

Induktorien und Teslaspulen

für langsame, mittlere und schnelle Schwingungen.

Ehrhardt & Metzger Nachf.

Darmstadt.

Fabrik und Lager

chemischer und physikal. Apparate.

Listen zu Diensten.

A. Krüss, Hamburg

Inhaber Dr. Hugo Krüss

Optisches Institut

Schul-Apparate nach Grimsehl

Spektral- u. Projektions-Apparate

Glasphotogramme.

Verlag von **Th. G. Fisher & Co.,**

Berlin W., Bleibtreustr. 20.

Wandtafeln zur allgemeinen Biologie

herausgegeben von

Prof. Dr. V. Haecker, Stuttgart.

Kataloge über unseren gesamten Wandbilderverlag auf Wunsch kostenfrei.

Projektions-Apparate

für Schulen

nebst allem Zubehör; Lichtquellen, Laternbilder in reichster Auswahl.

Kataloge und fachm. Auskunft steht zu Diensten.

Unger & Hoffmann, Dresden-A. 16.

Meiser & Mertig

Dresden-N. 6

Werkstätten für Präzisionsmechanik

Physikalische Apparate

◆ Chemische Apparate ◆

Preisverzeichnis kostenlos

Physikal. Apparate

Ferdinand Ernecke

Hoflieferant Sr. Maj. des deutschen Kaisers

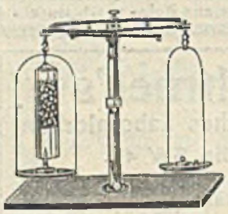
Berlin SW. 46.

Richard Müller-Uri,

Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.

Braunschweig, Schleinitzstrasse 19

liefert u. a.



sämtliche Apparate zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Das Wetter

Monatsschrift für Witterungskunde.

Herausgegeben von

Prof. Dr. R. Assmann,

Abteilungs-Vorsteher im Kgl. Preuss. Meteorologischen Institut.

21. Jahrgang.

Mit kolorierten Kartenbeilagen über die monatlichen Niederschläge nebst den Monats-Isobaren und -Isothermen.

Preis pro Jahrgang von 12 Heften 6 Mk.

Ein Probeheft gratis und franko.

Zur Herstellung von Zeitschriften und Werken

in moderner Satzausf. unter Verwendung leistungsfähiger Maschinen bei koulanter Bedienung u. mässigen Preisen empfehlen sich

H. Sievers & Co. Nachf.

Braunschweig

Gegründet 1845 — Fernsprecher 1449

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der

Beobachtungs-Unterricht

in

Naturwissenschaft, Erdkunde und Zeichnen

an

höheren Lehranstalten besonders als Unterricht im Freien

von **G. Lüddecke.**

Mit Vorwort von

Prof. Dr. Herm. Schiller.

Preis Mk. 2.40.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme,** Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 2. Aufl. Preis 1.40 M.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von **Oskar Lesser,** Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Arithmetik.

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 4. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 2. Aufl. Preis 1 M. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 2. Aufl. geb. 2 M.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. **H. Servus** in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima). Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. **J. Heussi.** 15. verbesserte Aufl. Mit 172 Holzschnitten. Bearbeitet von **H. Weinert.** Preis 1 M. 60 Pf. — Mit Anhang „Grundbegriffe der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. **J. Heussi.** 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. **Leiber.** Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. **Wilh. Levin.** 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **H. Weinert.** 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 50 Pf.

Verlagsanträge

werden gern entgegengenommen und sorgfältig behandelt von der Verlagsbuchhandlung **Otto Salle** in **Berlin W. 30.**

Für eine militärberechtigte Reallehranstalt in Südwestdeutschland wird ein **gepr. Lehrer** der Mathematik u. Physik womöglich zu dauernder Anstellung bei günstigen Gehaltsverhältnissen und Pensionsberechtigung gesucht. Eintritt Mitte September oder später. Offerten befördert der Verlag von Otto Salle in Berlin W 30.

Die Gestaltung des Raumes.

Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

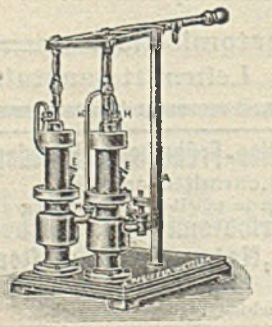
Von **Prof. F. Pietzker.**

Mit 10 Figuren im Text. — Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Präzisions-Optik.



Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung

zur Fabrikation der

Geryk-Oel-Luftpumpen

D. R.-P. in Deutschland.

Typen für Hand- und Kraftbetrieb.

Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. } Vacuum
Zweistiefelige „ „ 0,0002 „ „ }

Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

Viele gesetzlich geschützte Originalkonstruktionen.

Hierzu je eine Beilage der Firmen: **Hermann Gesenius,** Verlag in **Halle; Otto Petters,** Verlag in **Heidelberg,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.