Jahrgang XI. 1905. No. 1.

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten. (S. 1). — Mechanik und Turnen. Von Dr. Fritz Walther (S. 1). — Wie verteilen sich die freien Eckpunkte aller pythagoreischen Dreiecke über die Ebene, wenn die Dreiecke mit einer Kathete über einer festen Geraden stehen, und allen der auf dieser Geraden liegende Hypotenusenendpunkt gemeinsam ist? Von Oskar Lesser (S. 6). — Ueber den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta. Von Dr. Ernst Schultz (S. 11). — Vorschlag zum kinematischen Modell eines besonderen Gelenkvierecks. Von G. Holzmüller (S. 13). — Kleinere Mitteilungen (S. 14). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [6. Naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Frankfurt a. M.] (S. 16). — Vereine und Versammlungen [48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905; Vereinigung zur Errichtung eines Vega-Denkmals] (S. 17). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 17). — Bücher-Besprechungen (S. 17). — Zur Besprechung eingetr. Bücher (S. 20). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Anmeldungen von Vorträgen für unsere vierzehnte Hauptversammlung, die — wie bereits bekannt gegeben — in der Pfingstwoche d. J. zu Jena abgehalten werden wird, insbesondere von Vorträgen für die Abteilungssitzungen sind auch jetzt noch sehr willkommen. Wir bitten sie bis zum 15. März d. J. an den Hauptvorstand z. H. des Prof. Pietzker zu Nordhausen oder an den Ortsausschuss z. H. des Herrn Realschuldirektors Prof. Dr. Pfeiffer in Jena (Löbdergraben 8) zu richten.

Ferner werden die Vereinsmitglieder in Gemässheit des § 4 der Vereinssatzungen ersucht, den Beitrag für das laufende Jahr 1905, soweit es noch nicht geschehen ist, an den Vereinsschatzmeister (Prof. **Presler** in Hannover, Lindenerstr. 47) einzusenden, ein Postanweisungsformular für diesen Zweck liegt dieser Nummer bei. Die bis zum 1. April d. J. nicht eingegangenen Beiträge werden im Laufe des nächsten Vierteljahres durch Postnachnahme eingezogen werden (§ 5 der Satzungen).

Der Vereins-Vorstand.

Mechanik und Turnen.

Von Dr. Fritz Walther,
Oberlehrer am Französ. Gymnasium zu Berlin.

Die physikalischen Sammlungen unserer höhern Schulen sind, verglichen mit denen der Universitäten und der Fachschulen, meistens recht bescheiden. Das empfinden viele Lehrer als Beschränkung ihrer Wirksamkeit und sehen darum mit einem gewissen Neide auf die reicher ausgestatteten Sammlungen hin, die einige besonders freigebige Gemeinden ihren höhern Lehranstalten zur Verfügung stellen. Ich halte diesen Standpunkt nicht für berechtigt. Ich glaube vielmehr, für unsere Schüler haben im allgemeinen die Unterrichtsmittel um so höhern Wert, je einfacher sie sind. Besonders die für den Anfangsunterricht bestimmten können gar nicht einfach genug sein: simple, schematische Zeichnungen, Apparate aus den Materialien, die jeder Haushalt liefert, die womöglich vom

Lehrer zusammengestellt und von den Schülern leicht nachgemacht werden können — das ist das Beste und Wirksamste im Unterrichte, sozusagen geistige Hausmannskost, die vor jeder Ueberfütterung bewahrt. Komplizierte Apparate (ich füge hinzu: komplizierte Versuche), soweit sie nicht zu genauen Messungen dienen sollen, sind für Studierende und Techniker. Den Schüler verwirren sie nur und lenken ihn von der Aufmerksamkeit auf die Hauptpunkte ab. Sodann erwecken sie in ihm leicht die Vorstellung, als ob man der Natur sozusagen ein Feiertagskleid anlegen müsse, damit sie agiere. In dieser Vorstellung aber erblicke ich aus zwei Gründen die grösste Gefahr: sie hält die Erkenntnis, dass die Physik eine Wissenschaft ist, d. h. dass sie eine ganze Seite der Erscheinungswelt in lückenlosem Zusammenhange aufzeigt, im Dämmerzustande; sie drängt ferner das ethische Moment des physikalischen Unterrichts zurück, da sie nicht die Ueberzeugung aufkommen lässt, dass wir uns überall und jeder Zeit der Herrschaft unabänderlicher Naturgesetze demütig beugen müssen, so lange bis wir sie erkannt und zu unserm Wohle als Herren benutzen gelernt haben.

In demselben Sinne wie einfache Apparate wirken auch die Beispiele, die der Lehrer aus Haus und Schule, aus der alltäglichen Umgebung des Zöglings heranzieht, um an ihnen die physikalischen Gesetze zu veranschaulichen und umgekehrt die allergewöhnlichsten natürlichen Vorgänge wissenschaftlich zu durchdringen. Besonders der Mechanik stehen solche Beispiele in reicher Auswahl zur Verfügung, und sie sind jedesmal um so wertvoller, je bekannter sie dem Schüler sind, ja man möchte sagen, je gleichgültiger er sie bisher angesehen hat. Geräte wie Schere, Zange, Spaten sind prachtvolle Illustrationen für den Hebel, die menschlichen Glieder insonderheit für den Wurfhebel; Gegenstände, die der Junge täglich sieht und hundertmal in die Hand nimmt, ohne ihnen je besondere Aufmerksamkeit zu schenken, werden ihm mit einem Male bedeutungsvoll, wenn an ihnen die verschiedenen Gleichgewichtslagen veranschaulicht werden. Ich brauche dies nicht weiter auszuführen. Jedes Lehrbuch bringt eine Fülle solcher Beispiele, und jedem geschickten Lehrer werden sie in seinem Unterrichte zuströmen. Auch die Schüler schleppen ihrer eine Menge, oft mit überraschendem Scharfsinne herausgefundene, herbei, sobald sie erst die Anregung dazu empfangen haben.

Eine Anregung nun, solche Hilfsmittel in noch weiterem Umfange zu benutzen, sollen die folgenden Zeilen geben. Ich möchte auf den Reichtum an Anschauungsmaterial aufmerksam machen, das man dem menschlichen Körper und seinen Bewegungen für den Unterricht in der Mechanik entnehmen kann. Eine Probe gab ich schon oben beim Wurfhebel an, andere, z. B. solche, die die Abhängigkeit der Standfestigkeit von der Grösse der Unterstützungsfläche und der Lage des Schwerpunktes zeigen, darf ich als allgemein bekannt und benutzt ansehen. Die meisten aber muss m. E. erst eine gründliche methodische Durchmusterung des Stoffes zu Tage fördern. Den Leitfaden für eine solche gibt wohl am besten der Turnunterricht, in dem ja eine überaus umfangreiche Sammlung aller möglichen Bewegungen des Körpers mit und ohne Gerät schon fertig vorliegt. Diese Prüfung ist zunächst Sache der Physiker, die den Turnunterricht leiten oder einmal geleitet haben — ihre Zahl dürfte nicht klein sein —, aber auch die übrigen Kollegen werden ohne Schwierigkeit und erfolgreich auf diesem Gebiete arbeiten können und sicher sein, dass das Verständnis und das Interesse der überwiegenden Mehrzahl ihrer Schüler ihren Bestrebungen entgegenkommt. Die Grenze, bis zu der man in der Ausbeutung des Turnens für die Mechanik gehen darf, scheint mir da zu liegen, wo die Turnübungen so kompliziert werden, dass sie nicht mehr übersichtlich verlaufen, dass sie also weniger mechanische Gesetze klar beleuchten, als vielmehr selber von ihnen eine zeitraubende Aufhellung verlangen. Ich würde aber auch die Betrachtung eines solchen schwierigeren Falles nicht für einen argen Missgriff halten. Wird vielleicht mit ihm nicht gerade der physikalische Unterricht befruchtet, so doch im weiteren Sinne der naturwissenschaftliche. Denn wenn der Schüler Stellungen und Bewegungen seines Leibes, die er gemeinhin gedankenlos ausführt, jetzt einer scharfen Prüfung, einer Analyse auf Form und Gesetze hin unterwerfen lernt, so wird ihm damit der ganze menschliche Körper zum Gegenstande einer interessierten Beobachtung, die die Keime zu einem ganzen Felde naturwissenschaftlicher Erkenntnisse legt und zudem ein innigeres Verhältnis des jungen Menschen zu seinem Körper anbahnt. Und sollte ihm dabei gar eine Ahnung von der Schönheit des menschlichen Leibes und seiner Bewegungen aufdämmern, sollte sich so etwas wie ästhetisches Empfinden ungezwungen heranbilden — so braucht man diesen Erfolg wahrhaftig nicht als den geringsten zu veranschlagen!

Genaue Messungen, das möchte ich noch bemerken, wird man freilich von allen mechanischen Beispielen aus dem Turnbetriebe nicht erwarten dürfen. Das halte ich für keinen Fehler. Das exakte Messen sollte m. E. im Betriebe der Schule nur eine untergeordnete Rolle spielen. Um eine Probe von der peinlichen Gewissenhaftigkeit des wissenschaftlichen

Verfahrens zu geben, mag es zuweilen nötig sein. Im allgemeinen aber ist es nur ein notwendiges Uebel. Zur Entwickelung des Intellekts und der Sinne trägt es kaum bei und bleibt also an bildendem Werte weiter hinter der Abschätzung nach dem Augenmasse zurück, die zu pflegen, mit allen Mitteln zu pflegen, eine der wichtigsten Aufgaben des Realunterrichts ist.

Ich gebe nun, indem ich mich ungefähr an die Gruppierung des Stoffes in den Lehrbüchern halte, eine kleine Sammlung von Beispielen. Sie erhebt in keiner Weise den Anspruch darauf, vollständig zu sein. Ich beschränke mich bei ihr auf solche Uebungen, von denen ich annehmen darf, dass ihr Name bekannt ist und ihr Ablauf leicht vorgestellt werden kann.

1. Beharrungsvermögen (Trägheit).

Jeder Tiefsprung muss mittels einer Kniebeuge gebremst werden. Beim Weitsprung ist durch Schräghalten des Körpers Rücksicht auf sein Vorschnellen nach erfolgtem Niederspringen zu nehmen. Zu einem sehr weiten Sprunge ist unbedingt ein Anlauf erforderlich. Beim Schlusssprunge ohne Anlauf wird er durch kräftiges Vorschnellen der Arme ersetzt, das Weite und Höhe des Sprunges merkbar vergrössert.

Hierher gehören auch Erscheinungen bei Zentralbewegung. Ein Turner, der Rundlauf oder Ringe während des Schwunges loslässt, bewegt sich in der Richtung der Tangente weiter. Lässt er die Ringe in dem Augenblicke fahren, wo er vorn auf dem höchsten Punkte angekommen ist, so muss er dem Oberkörper einen kräftigen Ruck nach vorne geben, um auf die Füsse zu fallen.

2. Gleichgewichtslagen.

a. Labiles Gleichgewicht. Handstand am Barren, Stützwage an Reck oder Barren, gewöhnlicher Streckstütz am Barren, besonders mit hochgehobenem Gesäss, verlangen deutlich merkbares Balancieren. Bei jedem Uebergange über ein Gerät (Abzug vom Reck, Hocke am Pferd aus Stütz) muss man einen Augenblick die labile Gleichgewichtslage einnehmen, um die Uebung zum Abschlusse zu führen.

b. Indifferentes Gleichgewicht ist als ausgezeichneter Fall natürlich nur momentan, übergangsweise zu erreichen. Bei Stütz am Reck mit schwach gebeugten Armen und etwas zusammengeklapptem Körper können ungeschickte Schüler sich kaum in irgend einem Sinne drehen.

c. Stabiles Gleichgewicht. Alle Hangübungen sowie die Stützübungen an Barren und Ringen mit gebeugten Armen, also tief liegendem Schwerpunkte, erfordern keinerlei Anstrengung zur Herstellung des Gleichgewichts bei Erschütterungen.

d. Standfestigkeit (Stabilität unten unterstützter Körper). Ihre Abhängigkeit von der Grösse der Unterstützungsfläche sowie von der Tiefe des Schwerpunktes zeigt sich in der breitbeinigen, gebeugten Haltung beim Ringkampfe, beim Hilfegeben, beim Auffangen der Turner im Hechtsprunge, bei der Grätsche eines Turners über einen andern.

3. Zusammensetzung von Kräften.

Beim Tauziehen lässt sich die Addition und Subtraktion von Kräften, die in derselben Linie wirken, recht anschaulich zeigen. Das Gleiche gilt für Stossen an langen Stäben.

Die Zusammensetzung paralleler Kräfte, insbesondere das Kräftepaar, zeigen gewisse Gemeinschaftsübungen an hölzernen oder eisernen Stäben.

Das Kräfteparallelogramm kann man mit Hilfe von zwei Holzstäben darstellen lassen. Ein Schüler fasst beide an ihrem einen Ende so an, dass sie einen Winkel bilden, und sucht sie vor sich herzuschieben, während an den beiden anderen Enden je ein oder mehrere Schüler in der Richtung des betreffenden Stabes schieben. Die Uebung erlaubt reiche Variation durch Abänderung der Kräfte und des Winkels.

Das Verhalten eines Schülers an den Ringen, der während des Schaukelns einen seitlichen Stoss erhält, kann auch als Beispiel herangezogen werden.

4. Hebel.

a. Das Gleichgewicht eines gleicharmigen Hebels zeigt sehr deutlich die Stützwage an Barren oder Ringen. Die Schätzung ergibt mit hinreichender Genauigkeit, dass die beiden Teile des auf den Ellenbogen als Drehpunkt ruhenden, wagerecht ausgestreckten Körpers gleich schwer sind. Langbeinigen Personen gelingt es nicht, den Körper horizontal zu halten; sie müssen vielmehr durch Senken des Oberkörpers und Heben der Beine den Ueberschuss an Gewicht erst über den Drehpunkt schieben.

Die Hangwage (vorlings und rücklings) ist ein weniger einleuchtendes Beispiel für den Hebel, da die schräge Haltung der Arme die Anschauung erschwert. Doch lässt sich dafür an ihr schön zeigen, wie an einem hängenden Körper der Schwerpunkt sich immer in dieselbe Vertikale mit dem Aufhängepunkt zu stellen sucht. Und sieht man ferner von der Tätigkeit der Hände am Geräte ab, so bilden Arme und Körper einen Winkelhebel mit dem Schultergelenk als Drehpunkt. Durch Beugen des Hüftgelenks kann man das Moment der Last (des Körpergewichts) verringern und spürt sofort, dass entsprechend geringere Muskelkraft zur Herstellung des Gleichgewichts ausreicht.

An die Wippe in ihren verschiedenen Formen und die Herstellung des Gleichgewichts bei Schülern von verschiedenem Körpergewichte brauche ich nur kurz zu erinnern.

Im eigentlichen Sinne des Wortes „fühlbar" wird dem Schüler das Hebelgesetz, wenn er mit wagerecht ausgestrecktem Körper quer auf dem einen Holme eines Barrens liegt und mit den Beinen unter dem anderen Halt sucht. Wahrheiten sind oft schmerzlich. Diese wird es um so mehr, je weiter er den Oberkörper hinausschiebt, also den Lastarm (Oberkörper) verlängert und den Kraftarm (Schienbeine) verkürzt.

b. Dass die Drehung immer im Sinne des grösseren Moments erfolgt, zeigt jeder Felgaufzug und -abzug, jeder Kreuzaufzug am Reck oder an den Ringen. Werden z. B. beim Aufzuge Beine und Rumpf nicht ausreichend gehoben, so schwebt der Körper wieder zurück. Die Drehung zum Stütz gelingt erst, wenn der Schwerpunkt über das Reck (die Drehungsachse) geschoben wird, und vollzieht sich dann ohne jeden Kraftaufwand rein mechanisch.

Auch bei der Drehung bleibt das Hebelgesetz gewahrt. Man erkennt das leicht beim Knieaufschwung am Reck. Der Körper hängt zunächst am rechten Knie, das durch den Griff der Hände unterstützt wird, das linke Bein ist ausgestreckt, um Schwung zu holen und die Last des Körpers emporzutreiben. Schwächlichen Schülern gelingt nun die Uebung nicht, wenn sie das Moment der Last nicht dadurch möglichst verringern, dass sie den Rumpf an die Reckstange ziehen, und bessere Turner merken deutlich, wie sie in diesem Falle mit geringerem Schwunge des linken Beines auskommen.

Noch stärker leuchtet das Gesetz bei der entsprechenden Uebung an den Ringen ein. Hier muss das rechte Knie über den herabhängenden rechten Arm gelegt werden, der dann zu gleicher Zeit als Drehungsachse für das Knie und, was hier in Betracht kommt, als Hebelarm für die Körperlast dient. Die Uebung wird selbst tüchtigen Turnern unausführbar, wenn sie nicht das Knie hart an die Hand drängen, d. h. den Lastarm so sehr als möglich verkürzen.

Die beiden letzten Uebungen werden meistens mit mehrmaligem Hin- und Herschwingen ausgeführt. Sie finden dann ihre Stelle auch unter den Beispielen für das Trägheitsmoment und für das Pendel.

5. Schiefe Ebene.

Ich kann nur darauf hinweisen, dass recht verschiedene Kraft anzuwenden ist, je nachdem man an einer schrägen oder einer senkrechten Leiter emporklettert.

6. Zentralbewegung.

Begriffe und Gesetze der Zentralbewegung erfahren durch das Turnen eine besonders reiche Illustration. Das Schaukeln an den Ringen, das Schwingen am Reck stellen eine Pendelbewegung dar; die Rotation eines Körpers um eine feste Achse findet man in jeder Welle am Reck, in den Rollen am Barren und in den Ueberschlägen an Barren, Pferd, Bock veranschaulicht. Als Beispiel für das konische Pendel dient der Rundlauf, das Kreisen an den Ringen, bei dem entweder die Füsse fest auf dem Boden stehen und der Körper einen Kegelmantel beschreibt oder die Füsse kreisen und die Schultern in Ruhe bleiben (in letzterem Falle haben wir eigentlich einen Doppelkegel, da die Hände mitsamt den Ringen in entgegengesetztem Sinne kreisen).

Das Vorhandensein der Zentrifugalkraft bei Kreisbewegungen zeigt jedes unfreiwillige Abfliegen während des Schwingens an Reck, Ringen, Rundlauf, aber auch der Zug, den die festklammernden Hände während des Schwingens verspüren. Dieser Zug wächst merklich mit steigender Winkelgeschwindigkeit und wachsendem Radius (er ist viel grösser bei der Riesenwelle als bei der Sitz- oder Kniewelle), entspricht also durchaus dem durch die Formel $C = m \cdot r \cdot \omega^2$ angegebenen Gesetze. Durch die Zentrifugalkraft ist auch zu erklären, dass ein Turner, der am Reck im Ellenbogengelenk hängend schwingt, leicht bis zu den Händen abgleitet und dass man bei kräftigem Vorwärtsschwingen im Barren leicht aus dem Unter- oder Oberarmstütz in den Streckstütz übergeht (Zerrung der Drehungsachse). Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass es unmöglich ist, beim Rundlaufe die Füsse nach innen zu bringen.

7. Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung.

Eine Drehung erfolgt um so schwerer, je grösser das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse ist. Dieses allgemeine Gesetz wird durch den Vergleich der verschiedenen Wellen am Reck eindringlich bestätigt. Sie erfordern um so grösseren Kraftaufwand, je weiter der Körper vom Geräte entfernt ist, und bilden so eine übersichtliche Stufenfolge von der leichten Knie- oder Sitzwelle bis zur schwierigen Riesenwelle. Es lässt sich ferner durch eine Menge von Uebungen zeigen, dass die Winkelbeschleunigung bei gleichbleibenden Drehkräften dem Trägheitsmoment umgekehrt proportional ist. Eine Knie- oder Sitzwelle misslingt fast immer, wenn nicht gegen Schluss der Drehung der bisher ziemlich gestreckte Rumpf kräftig gegen den Oberschenkel gebeugt, also dem Gerät genähert wird, eine Riesenwelle, wenn nicht beim Aufsteigen die Arme gebeugt werden; der Ueberschlag an Barren,

Pferd oder Bock ist sehr schwer und erfolgt sehr langsam mit gestreckten Armen, vollzieht sich aber glatt und rasch, wenn die Arme einknicken, bevor der höchste Punkt der Kreisbahn erreicht ist. In allen diesen Fällen würde die bei dem ursprünglichen Trägheitsmomente erreichte Winkelbeschleunigung nicht zur Vollendung der Uebung hinreichen; die Verkleinerung des Trägheitsmoments aber lässt den Körper sichtbar schneller und darum auch weiter rotieren.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass diese Erscheinungen dazu dienen können, den Flächensatz zu bestätigen.

8. Pendel.

Die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Masse des schweren Körpers kann man zeigen, wenn man zwei Schüler von recht verschiedenem Körpergewicht, aber ungefähr gleicher Grösse an zwei Paar Ringen nebeneinander schwingen lässt. Man muss nur, um die Beobachtung zu erleichtern, dafür sorgen, dass beide zu gleicher Zeit die Bewegung anfangen, und muss sie zu diesem Zwecke bei Beginn so weit zurücktreten lassen, dass sie die Ringe gerade noch fassen können.

Da bald der Geschicktere von ihnen in grösserem Bogen schwingen wird, ohne dazu mehr Zeit zu brauchen, so weist die Uebung auch deutlich die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude nach.

Die Beziehung zwischen Dauer und Pendellänge erkennt man, wenn der eine Schüler im Streckhange, der andere im Streckstütze schaukelt, noch besser aber, wenn ein und derselbe Schüler aus dem Streckhange durch Stemme oder Kippe in den Stütz übergeht und dadurch das Pendel plötzlich verkürzt.

Bei der letzten Uebung wächst die Amplitude merklich. Dies ist von vornherein klar, wenn man Ringe und Turner als physisches Pendel auffasst und die bekannte Beziehung zwischen Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment berücksichtigt. Diese Beziehung kann man noch unter interessanten Variationen bei anderen pendelartigen Uebungen verfolgen. Die Schwungstemme am Reck gelingt (vorausgesetzt, dass durch ausgiebiges Schwungholen eine genügende Amplitude gewonnen ist) nur dann glatt, wenn man am Ende des Rückschwunges sich kräftig an das Reck heranzieht. Tut man dies zu spät oder zu matt, so kommt man nicht bis zum Stütze empor, sondern schwingt zurück und macht einen unfreiwilligen Felgumschwung um die Reckstange. (Diese Konsequenz kann man nur vermeiden, wenn man sich noch durch Vorwärtsbeugen des Rumpfes und Vorschnellen des Kopfes ein genügendes Drehungsmoment im entgegengesetzten Sinne zu geben vermag.) Es tritt also eine ähnliche Erscheinung ein, wie wenn man den Faden eines Pendels, das eben zurückkehrt, plötzlich verkürzt.

Verringerung des Trägheitsmoments und daraus folgende Vergrösserung der Winkelbeschleunigung erklärt auch den Felgaufschwung (halbe Riesenwelle), der hinten mit gestreckten Armen begonnen und vorn mit gebeugten Armen beendet wird. Diese Bewegung lässt sich mit der eines Fadenpendels vergleichen, das stark verkürzt wird, bevor es den höchsten Punkt erreicht hat.

Sehr interessante mechanische Probleme lassen sich an der Kippe erläutern. Die Hauptaufgabe des Turners bei dieser Uebung ist die, am Schlusse eines mässigen Vorschwunges die Beine so weit zu erheben, dass sie mit Fussrist oder Schienbein die Stange berühren. Man kann den Körper hier etwa mit einem um seinen Endpunkt drehbaren homogenen Stabe vergleichen, der um ein im Schwerpunkt befindliches Scharnier zusammengeklappt und dadurch auf die Hälfte verkürzt werden kann. Ist m die Masse des Stabes, a seine Länge, T sein Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse, l die reduzierte Pendellänge, so gilt die Gleichung: $l = \frac{T}{\frac{a}{2} \cdot m}$. Wird der Stab nun zusammengeklappt, so wird der Nenner dieses Ausdruckes halb so gross, der Zähler, wie leicht zu zeigen, sinkt auf den vierten Teil des ursprünglichen Betrages, die reduzierte Länge hat also die Hälfte des früheren Wertes. Der Stab muss dementsprechend mit vermehrter Geschwindigkeit schwingen. — Rückt man bei einem Stabe die Drehungsachse dem Schwerpunkte näher, so nimmt zunächst die reduzierte Pendellänge ab, dann aber wieder zu und wird unendlich gross, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht. Das Minimum wird erreicht, wenn das obere Ende des Stabes von der Achse die Entfernung $\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3} = \text{ca}\ \frac{1}{5}\,a$ hat, und beträgt $\frac{1}{3}\,a\sqrt{3} = \text{ca}\ 0{,}58\,a$. Werden also bei der Kippe die Füsse über die Reckstange gebracht, so kann dadurch zunächst die Ausführung der Uebung erleichtert werden; wird aber zuviel hinübergebracht, so wird sie wieder erschwert. Eine solche Erschwerung glaube ich auch bei der sogenannten Brust- oder Bauchkippe konstatieren zu können.

Ich schliesse diesen Punkt mit der Betrachtung der Fälle ab, in denen unter rythmischer Veränderung des Trägheitsmoments eine Pendelbewegung von geringer Amplitude allmählich zu immer grösserer gesteigert wird. Typisch für diese Fälle ist das Verhalten eines Turners, der mit den Füssen in den Ringen

stehend, mit den Händen die Seile umklammernd ohne fremde Hilfe seinen Schwung vergrössert. Jedesmal beim Sinken (nach der Mitte des Bogens zu) hockt er nieder und beim Steigen (nach den Endpunkten des Bogens hin) streckt er sich aus, d. h. er vermehrt und vermindert abwechselnd das Trägheitsmoment seines Körpers. Nun ist vollständig klar, dass er durch das erstmalige Strecken die Geschwindigkeit und damit die Amplitude steigert. Wie kommt es aber, dass das Niederhocken, welches unmittelbar darauf erfolgt, nicht den eben gewonnenen Zuwachs an Geschwindigkeit und Amplitude wieder vernichtet? Ich habe darauf keine befriedigende Antwort gefunden. Vielleicht hilft die Einführung des Begriffes der Arbeit. Beim Strecken wird tatsächlich Arbeit gegen die Schwere verrichtet, also ein Zuschuss zu der vom Pendel beim Steigen verbrauchten geleistet, und beim Niederhocken, das gleichzeitig mit dem Sinken erfolgt, kann man vielleicht an eine Stosswirkung denken. Wesentlich scheint mir, dass die Bewegungen des Körpers immer im Sinne der jeweiligen Pendelbewegung vollzogen werden. Möglicherweise ist auch der Umstand in Betracht zu ziehen, dass der Turner abwechselnd ein Paar seiner Stützen (Hände bezw. Füsse) gebrauchen und das andere freimachen kann. Doch kann ich dem keine entscheidende Bedeutung beimessen. Es bliebe sonst unverständlich, warum man auch im Hange an den Ringen, ohne Abstossen der Füsse vom Boden, durch abwechselndes Beugen und Strecken der Arme sich Schwung geben kann.

9. Energie.

Sehr viele der bisher angegebenen Beispiele geben unschwer Gelegenheit, den Begriff der Arbeit einzuführen. Auch für das Gesetz der Erhaltung der Energie bieten sich Illustrationen genug. Ich will nur auf folgende besonders aufmerksam machen. Keine Welle am Reck kann gelingen, wenn nicht bei Beginn der Uebung der Schwerpunkt des Körpers mindestens ebenso hoch gehoben war, wie er am Schlusse ruhen soll. Die durch Herabsinken gewonnene kinetische Energie setzt sich beim Emporsteigen vollständig in potentielle um; wegen des Energieverlustes infolge der Reibung und des Luftwiderstandes erreicht der Körper sogar nicht einmal die frühere Höhe wieder, und die Uebung kann nur dadurch vollendet werden, dass man den Körper dicht ans Gerät drängt, den Weg des Schwerpunktes also abkürzt. Aehnliche Betrachtungen lässt jeder Aufschwung, die Schwungstemme, der Ueberschlag zu. Wo Ausnahmen vorzuliegen scheinen, ist immer bei aufmerksamer Prüfung ein besonderer Energieaufwand nachweisbar.

10. Erhaltung des Schwerpunktes.

Wenn ich für diesen Satz turnerische Beispiele beizubringen suche, so bin ich mir bewusst, dass dies die schwächsten in meiner Zusammenstellung sind, dass es nur Vergleiche sind, die auf mehr als einem Fusse hinken. Immerhin mögen die folgenden Fälle nützlich sein, um für diesen schwer fasslichen und so überaus wichtigen Satz mehr Boden in der Phantasie des Schülers zu schaffen. Hin- und Herschaukeln an den ruhig herabhängenden Ringen (z. B. bei Beginn der Ruckstemme), mag es auch noch so krampfhaft erfolgen, hat nie die Wirkung, dass der Körper als Ganzes ins Pendeln gerät; der Oberkörper bewegt sich immer den Beinen entgegengesetzt, der Schwerpunkt bleibt in Ruhe. Auch bei langsamem Heben der Beine kann man genau beobachten, wie der Oberkörper entsprechend zurückweicht, das Gesetz also gewahrt bleibt. Aehnliches gilt für das schon oben (Nr. 6) erwähnte Kreisen an den Ringen. Hängt ein Turner im Beugehang an einem Ringe und streckt er den einen Arm kräftig seitwärts, so kommt er dadurch nicht in Schwung; dies geschieht erst, wenn er mit der freien Hand gegen den anderen Ring drückt, beruht aber dann auf einer Reaktion dieses halbstarren Körpers. Vielleicht ist auch der sogenannte Schwimmstoss, der bei einigen Reckübungen unwillkürlich gemacht wird, auf eine instinktive Benützung des Schwerpunktssatzes zurückzuführen, ebenso eine Bewegung, die ich öfters bei Schülern beobachtet zu haben glaube, die auf einem schmalen Balken vorwärtsschreiten: sie strecken, wenn sie nach einer Seite zu fallen fürchten, den Arm gerade nach dieser hin aus. Zur näheren Erläuterung dieser Gedanken muss ich auf die Beispiele verweisen, die E. Mach (Mechanik 1901, S. 323 ff.) für den Schwerpunktssatz anführt.

Wie verteilen sich die freien Eckpunkte aller pythagoreischen Dreiecke über die Ebene, wenn die Dreiecke mit einer Kathete über einer festen Geraden stehen, und allen der auf dieser Geraden liegende Hypotenusenendpunkt gemeinsam ist?

Von Oskar Lesser in Frankfurt a. M.

Wir sind im Unterrichte zuweilen genötigt, ein System von drei Zahlen zu bilden, die die Masszahlen eines rationalen oder pythagoreischen Dreieckes darstellen; sei es nun, dass der Schüler entscheiden soll, ob ein durch die Masszahlen der Seiten gegebenes Dreieck spitz- oder recht- oder stumpfwinklig ist, sei es, dass bei der Behandlung des Cosinussatzes der Fall vorgeführt werden soll, in dem der Cosinus des gesuchten Winkels verschwindet, sei es endlich, dass bei der Durchnahme der komplexen Zahlen beispielsweise solche mit Vorteil gewählt werden, deren Moduln rationale Zahlen sind.*) Da wir demnach im Unter-

*) Vergleiche auch die Aufgabenreihe 71 ff. der Seite 82 in Bardeys Aufgabensammlung.

richte weder auf die rationalen Dreiecke selbst, noch auf die Kenntnis des Bildungsgesetzes pythagoreischer Zahlen verzichten können, mag auch die Beantwortung der im Thema gestellten Frage nicht ganz ohne Interesse sein, umsomehr, als die Untersuchung eine Reihe von Einzelheiten zutage fördert, die auch im Unterrichte der analytischen Geometrie recht gut Verwendung finden können.

Es ist bekannt, dass wir ein Tripel pythagoreischer Zahlen erhalten, wenn wir in den Formeln

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\,m\,n, \\ y &= m^2 - n^2, \\ z &= m^2 + n^2 \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

für m und n irgend zwei (positive und von einander verschiedene) Zahlenwerte einführen. Wir erhalten dann in x und y die Masszahlen der Katheten, in z die Masszahl der Hypotenuse eines rationalen Dreieckes; eines Dreieckes also, für das

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

eine rationale Zahl ist. Enthalten die Zahlen x, y, z eines gegebenen Tripels einen gemeinschaftlichen Faktor, so ergibt sich durch Division aller drei Zahlen durch den gemeinschaftlichen Faktor ein neues Tripel, das dem gegebenen proportional ist: die durch beide Tripel dargestellten Dreiecke sind ähnlich; die beiden Zahlentripel gehören derselben Form an. Wir nennen dasjenige Dreieck einer Form, dessen Seiten durch die kleinsten ganzen Masszahlen ausgedrückt sind, das Grunddreieck, und die drei relativ primen Masszahlen selbst die Grundzahlen der betreffenden pythagoreischen Form, während wir die mit einer ganzen oder gebrochenen Zahl k multiplizierten Grundzahlen als erweiterte oder abgeleitete Tripel bezeichnen wollen.

Da wir aus jedem Grundzahltripel ohne alle Schwierigkeit beliebig viele der unendlichgrossen Schar der „erweiterten" bilden können, kommen für uns in erster Linie die Grundzahlen in Betracht, und es entsteht daher die Frage: Wie haben wir in den Formeln 1) die Zahlenwerte m und n zu wählen, wenn wir in x, y, z Grundzahlen erhalten wollen? Nun, eben so, dass x, y, z relativ prime Zahlen werden, wobei auch nicht zwei dieser Zahlen einen Faktor gemeinsam haben dürfen. Denn, wären zwei der Zahlen durch eine bestimmte andere Zahl ohne Rest teilbar, so würde aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

folgen, dass auch die dritte Zahl denselben Faktor enthielte, der den beiden ersten gemeinsam ist; das System x, y, z stellte dann abgeleitete Zahlen, aber keine Grundzahlen dar. Daraus folgt nun aber, dass auch nicht zwei der drei Zahlen gerade Zahlen sein können: nach dem Aufbau der Zahlen ist lediglich die Kathetenzahl $x = 2\,m\,n$ gerad, y und z sind stets ungerade Zahlen. Und daraus wieder erhellt, dass wir für m und n weder zwei gerade noch zwei ungerade Zahlen wählen dürfen; es muss vielmehr eine dieser Zahlen gerad und die andere ungerad sein. Weiter leuchtet ein, dass die Zahlen m und n überhaupt prim sein müssen. Denn, enthielten beide einen gemeinschaftlichen Faktor, so würden die Zahlen x, y, z das Quadrat dieses Faktors als Faktor gemeinsam haben. Sind dagegen m und n relativ prim, und ist entweder m oder n gerad, während die andere Zahl ungerad ist, so entbehren die Zahlen $2\,m\,n$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ stets eines gemeinsamen Faktors und das Tripel x, y, z ist ein Grundzahltripel.

Aus den Formeln 1) werden nur dann die Grundzahlen einer pythagoreischen Form gewonnen, wenn die Zahlen m und n relativ prim sind, und wenn zugleich eine dieser Zahlen eine gerade Zahl ist; die Befolgung dieser Regel führt stets auf Grundzahlen.

Wiewohl für die folgende Untersuchung lediglich die Beachtung dieser Regel notwendig ist, mag doch der Vollständigkeit halber auch auf die anderen bekannten Eigenschaften pythagoreischer Zahlen hingewiesen werden. Es sind dies die folgenden:

1. Eine der beiden Kathetenzahlen ist stets durch 2 teilbar. — Der Beweis ist vorstehend bereits geliefert worden.

2. Eine der beiden Kathetenzahlen ist stets durch 3 teilbar, während die Hypotenusenzahl nie 3 als Faktor enthält.

Beweis: Nach dem oben Gesagten ist der Fall ausgeschlossen, in dem sowohl m als auch n durch 3 ohne Rest teilbar ist. Ist keine der beiden Zahlen m, n ein Vielfaches von 3, so folgen nach einem Satze Fermats die Kongruenzen

$$m^2 \equiv 1 \pmod 3 \text{ und } n^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

und daher wird

$$\begin{aligned} x &= 2\,m\,n \equiv 1 \text{ oder } 2 \pmod 3 \\ y &= m^2 - n^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ z &= m^2 + n^2 \equiv 2 \pmod 3, \end{aligned}$$

d. h. es ist lediglich z durch 3 teilbar. Wird aber m oder n ein Vielfaches von 3, so wird die eine der zuerst angeführten Kongruenzen gestört, und es wird

$$\begin{aligned} x &= 2\,m\,n \equiv 0 \pmod 3 \\ y &= m^2 - n^2 \equiv \pm 1 \pmod 3 \\ z &= m^2 + n^2 \equiv \pm 1 \pmod 3; \end{aligned}$$

es ist dann also lediglich x durch 3 teilbar.

3. Eine der drei Zahlen eines pythagoreischen Tripels ist stets durch 5 teilbar.

Beweis: Wiederum ist der Fall ausgeschlossen, dass m und n zugleich den Faktor 5 enthalten. Ist m oder n durch 5 teilbar, so ist x ein Vielfaches von 5, und y und z können nach dem oben Ausgeführten den Faktor 5 nicht enthalten. Sind aber m und n prim zu 5, so folgt eine der Kongruenzen, bezw.

$m \equiv 1$ oder 2, 3, 4 (mod 5) und $n \equiv 1$, oder 2, 3, 4 (mod 5); daher wird

$$m^2 \equiv 1 \text{ oder } 4 \pmod 5 \text{ und } n^2 \equiv 1 \text{ oder } 4 \pmod 5$$

und

$$\begin{aligned} y &= m^2 - n^2 \equiv 0 \text{ oder } 2 \text{ oder } 0 \pmod 5 \\ z &= m^2 + n^2 \equiv 2 \text{ oder } 0 \text{ oder } 3 \pmod 5. \end{aligned}$$

Ist daher — wenn x den Faktor 5 nicht enthält, wie das angenommen wurde — y nicht durch 5 teilbar, so ist z ein Vielfaches von 5; ist aber y teilbar, so lässt z bei der Division durch 5 einen Rest.

Berechnen wir nun, zum Thema zurückkehrend, eine grössere Anzahl von Grundzahltripeln (z. B. 4, 3, 5; 12, 5, 13; 24, 7, 25; 40, 9, 41; 60, 11, 61; 84, 13, 85; . . . .) und konstruieren mit ihrer Hilfe die Dreiecke so, dass der der Hypotenuse und der geradzahligen Kathete gemeinsame Eckpunkt in den Ursprung, und eben dieselbe Kathete in die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems fällt, so bemerken wir sofort, dass die freien Eckpunkte, deren Koordinaten durch die Zahlen x, y angegeben werden, einem bestimmten Linienzuge folgen. Und dass die Lage der freien Eckpunkte keine wirre sein kann, sondern an ein bestimmtes Gesetz gebunden ist, erhellt in der Tat aus dem gesetzmässigen Bau der Zahlenreihen y_i, x_i, z_i.

Wir überzeugen uns, dass dort die Masszahl y der ungeraden Kathete, mit 3 beginnend, nach und nach alle ungeraden Zahlen der gewöhnlichen Zahlenreihe durchläuft, während die geradzahligen Katheten der Reihe nach als Masszahlen die Produkte 1.4; 3.4; 6.4; 10.4; 15.4; 21.4 . . . . besitzen, deren konstanter Faktor 4 ist, mit den laufenden Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10 . . . als Koeffizienten. Die Zahl z aber ist stets um 1 grösser als x.

Offenbar erhalten wir die Kurve, auf der die freien Eckpunkte aller pythagoreischen Dreiecke liegen, indem wir aus den allgemeinen Gleichungen

$$x = 2\,m\,n$$
$$y = m^2 - n^2$$

eine der Grössen m, n eliminieren. Geschieht dies mit m, so folgt

$$x^2 = 4\,n^2\,y + 4\,n^4 \qquad 2),$$

oder, wenn wir der Einfachheit wegen $2\,n^2 = p$ setzen,

$$x^2 = 2\,p\,y + p^2 \qquad 2').$$

Das ist die Gleichung einer Schar konfokaler Parabeln mit dem Koordinatenursprung als Brennpunkt und der y-Achse als gemeinsamer Parabelachse. Die Einzelkurven der Schar werden erhalten, wenn wir für n der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 . . . der Zahlenreihe einsetzen. Da für $n = 0$ die Parabel $x^2 = 2\,p\,y + p^2$ degeneriert, ist die erste ausgesprochene Parabel diejenige mit $n = 1$, die zweite diejenige mit $n = 2$ u. s. f. Der Parameter n ist daher zugleich die Ordnungszahl der Einzelkurven, wenn wir diese, vom Koordinatenursprung ausgehend, zählen.

Durch Elimination von n erhalten wir die Gleichung

$$x^2 = -4\,m^2\,y + 4\,m^4 \qquad 3),$$

oder, $2\,m^2 = q$ gesetzt,

$$x^2 = -2\,q\,y + q^2 \qquad 3'),$$

die wiederum eine Schar konfokaler Parabeln darstellt; wiederum mit dem Koordinatenursprung als Brennpunkt und (dem negativen Teile) der Ordinatenachse als gemeinschaftlicher Parabelachse. Für beide Scharen (2, 3) ist die x-Achse die Symmetrale. Jede Kurvenschar ist das Spiegelbild der andern.

Die Schnittpunkte der Kurven der einen Schar mit denen der anderen sind freie Eckpunkte pythagoreischer Dreiecke; wir finden für sie aus den Gleichungen 2' und 3' die Koordinaten

$$x_s = \sqrt{p\,q} \text{ und } y_s = \frac{q - p}{2}.$$

Es mag hier bereits bemerkt werden, dass von diesen Schnittpunkten eine ganze Reihe, als nicht Grundzahlen entsprechend, ausscheiden. Das leuchtet auch sofort ein, wenn wir daran denken, dass ja m und n nicht ganz beliebig gewählt werden dürfen, dass vielmehr die vorhin ausgesprochene Regel bei der Wahl von m und n zu befolgen ist.

Auf eine Eigentümlichkeit beider erhaltenen Parabelscharen sei hingewiesen. Bilden wir nämlich die (trigonometrischen) Tangenten

$$y_1' = \frac{x_1}{p} \text{ und } y_2' = -\frac{x_2}{q}$$

der Winkel, die die Kurventangenten mit der x-Achse bilden, so wird für die soeben gefundenen Schnittpunkte

$$y_1' = \sqrt{\frac{q'}{p}} \text{ und } y_2' = -\sqrt{\frac{p'}{q}}$$

und es folgt für den Winkel α, den die Tangenten beider Parabeln bilden,

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{p}{q}}}{1 - \sqrt{\frac{q}{p}}\sqrt{\frac{p}{q}}} = \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Wir sehen also, dass die Kurven der einen Schar die der anderen unter rechten Winkeln schneiden: Die beiden Scharen sind Orthogonalscharen von Parabeln. —

Nicht ohne Absicht haben wir vorhin als Beispielreihe eine Anzahl von Grundzahltripeln gewählt, für die die freien Eckpunkte der rechtwinkligen Dreiecke keiner der bis jetzt gefundenen Parabeln, sondern einem anderen Linienzuge folgen. Dort wurde auch auf den Bau der Zahlenreihen, insbesondere aber darauf hingewiesen, dass y_1 der Reihe nach, mit 3 beginnend, alle ungeraden Zahlen durchläuft. Setzen wir deshalb

$$y = 2\,m + 1,$$

wo m der Reihe nach alle Werte der Zahlenreihe annimmt, so genügen, da in

$$2\,m + 1 = (m + 1)^2 - m^2$$

die Zahlen $(m + 1)$ und m unter allen Umständen prim sind und eine von ihnen stets gerad ist, die Gleichungen

$$x = 2\,(m + 1) \cdot m$$
$$y = (m + 1)^2 - m^2$$
$$z = (m + 1)^2 + m^2$$

immer den Bedingungen unserer Regel, und wir erhalten hier lediglich Grundzahltripel.

Durch Elimination von m zwischen den Gleichungen für x und q erhalten wir

$$y^2 = 2\,x + 1,$$

d. h. die Gleichung einer Parabel, die den Koordinatenursprung zum Brennpunkt und die x-Achse zur Achse hat.

Um die Gesamtschar zu finden, der diese Parabel als Einzelkurve angehört, gehen wir aus von der Gleichung

$$y = m^2 - n^2$$

unseres Formelsystems 1) und beachten, dass stets eine der Zahlen m und n gerad, die andere ungerad sein muss. Da das letztere der Fall ist, wenn wir setzen

$$m = n + 1;\ m = n + 3;\ m = (n + 5);\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$m = n + (2\,r - 1),$$

so wird

$$y = (n + 1)^2 - n^2;\ y = (n + 3)^2 - n^2;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y = (n + (2\,r - 1))^2 - n^2,$$

und wir erhalten daher allgemein

$$y = (n + (2\,r - 1))^2 - n^2 = 2\,n\,(2\,r - 1) + (2\,r - 1)^2$$
$$x = 2\,(n + (2\,r - 1)) \cdot n$$
$$z = (n + (2\,r - 1))^2 + n^2;$$

ein System, das nicht notwendig Grundzahlen zu liefern braucht, da die Zahlen n und $2\,r - 1$ einen gemeinsamen Faktor wohl besitzen können.

Durch Elimination von n aus den beiden Gleichungen für x und y erhalten wir die Gleichung

$$y^2 = (2\,r - 1)^2\,(2\,x + (2\,r - 1)^2), \qquad 4$$

die wiederum eine Schar konfokaler Parabeln mit dem Koordinatenursprung als Brennpunkt und der x-Achse als gemeinschaftlicher Parabelachse darstellt. Und auch hier ist die Grösse r zugleich Ordnungszahl für die Einzelkurven, wie in 2) die Grösse n Ordnungszahl der Einzelkurven der Schar 2) war.

Indem wir in den Formeln 1)

$$n = m + 1;\ n = m + 3;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ n = m + (2\,\mu - 1),$$

setzen, erhalten wir als entsprechende Kurvenschar die durch die Gleichung

$$y^2 = -(2\,\mu - 1)^2\,(2\,x - (\mu - 1)^2) \qquad 5)$$

dargestellte; und diese Schar ist wieder das Spiegelbild der Schar 4 in Beziehung auf die y-Achse als Symmetrale. Schreiben wir die Gleichungen 4) und 5) einfacher, indem wir $(2\nu - 1) = r$ und $(2\mu - 1) = t$ setzen, so lehrt der Vergleich von

$$y^2 = 2\,r\,x + r^2 \qquad 4')$$
$$z^2 = -2\,t\,x + t^2 \qquad 5')$$

mit den Gleichungen 2′ und 3′, dass auch diese beiden neuen Scharen (4,5) Orthogonalscharen von Parabeln sind.

jeder zweite ausscheidet, dass dagegen jeder Schnittpunkt zwischen den Kurven der Scharen (4,5) einen gesuchten Eckpunkt liefert, wie auch jede Kurve 2 mit jeder Kurve 4 einen solchen Eckpunkt erzeugt. Wir wählen daher zur Bestimmung dieser Punkte das Gleichungenpaar

$$x^2 = 4\,n^2\,y + 4\,n \qquad 2)$$
$$y^2 = (2\,\nu - 1)^2\,(2\,x + (2\,\nu - 1)^2) \qquad 4),$$

deren Kurven das in Fig. 2

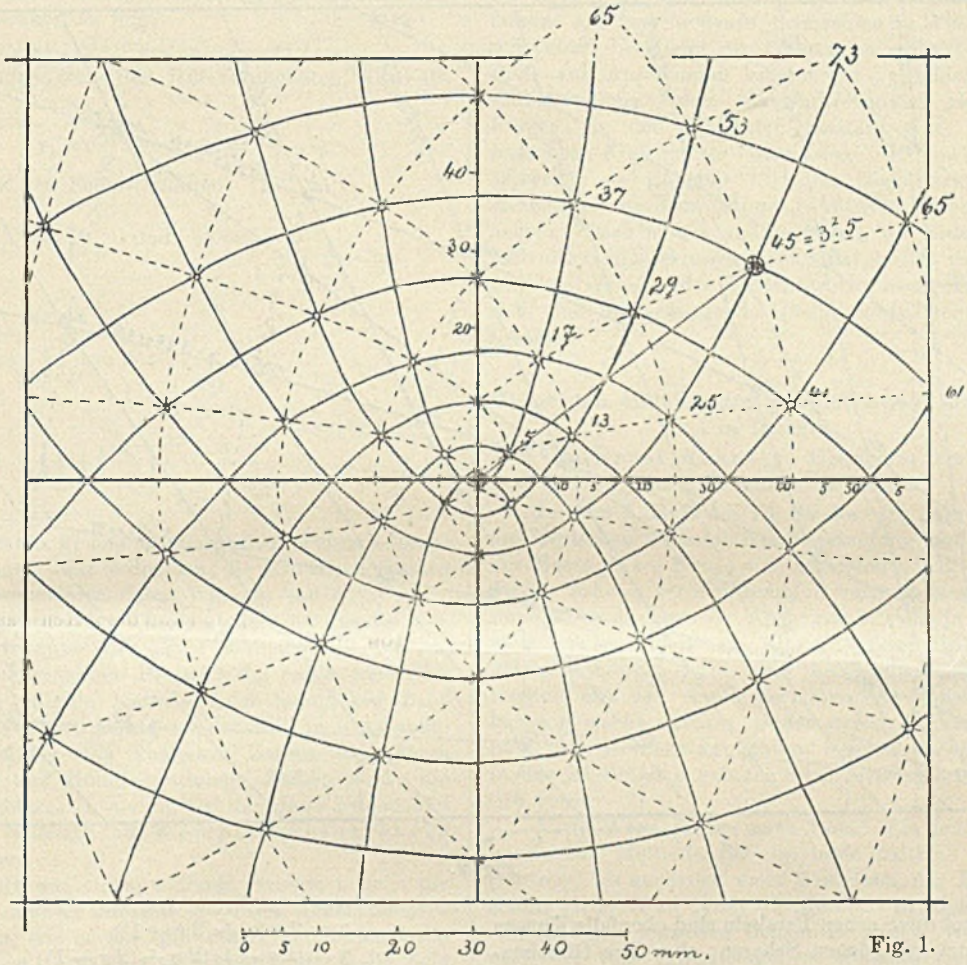


Fig. 1.

In vorstehender Figur (1) sind die ersten Parabeln beider Scharen (2,3) und (4,5) zur Darstellung gebracht worden: die Kurven der Schar (2,3) sind ausgezogen, die der anderen Schar (4,5) gestrichelt. Auf die Darstellung der pythagoreischen Dreiecke selbst wurde, um eine Häufung von Linien zu vermeiden, verzichtet, dagegen sind den Schnittpunkten die Masszahlen der Hypotenuse der zugehörigen Dreiecke beigesetzt worden. Die diesen Hypotenusenzahlen entsprechenden Kathetenzahlen mögen der Tabelle entnommen werden:

z	5	13	25	41	61	···	17	29	45	*65*	···	37	53	73	···	65	···
x	4	12	24	40	60	···	8	20	36	*56*	···	12	28	48	···	16	···
y	3	5	7	9	11	···	15	21	27	*33*	···	35	45	55	···	63	···

Unter dieser Reihe von Tripeln ist bereits eines vorhanden, das abgeleitete Zahlen darstellt, nämlich das Tripel $45, 36, 27 = 3^2\,(5, 4, 3)$; alle anderen sind Grundzahltripel. Wir bemerken jetzt auch, dass von den Schnittpunkten der Kurven der Scharen (2,3)

dargestellte Bild erzeugen. (Wir geben hier nur den ersten Quadranten, da die drei anderen die Figur nur wiederholen).

Als abgeleitete Zahlentripel ergeben sich ausser dem vorher erhaltenen 45, 36, 27 (innerhalb der Figur) noch die folgenden:

$125, 100, 75 = 5^2 \cdot (5, 4, 3)$; $245, 196, 147 = 7^2 \cdot (5, 4, 3)$;
$117, 108, 45 = 3^2 \cdot (13, 12, 5)$,
$153, 135, 72 = 3^2\ (17\ 15, 8)$.

Wegen der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke liegen jedesmal die freien Eckpunkte der Dreiecke einer Form auf demselben (durch den Koordinatenursprung gehenden) Träger. Dabei muss auffallen, dass wir nur solche ähnliche Dreiecke bekommen, deren Seiten zu denen des Grunddreieckes der Form in einem quadratischen Verhältnis stehen, und dass die Erweiterungszahlen immer die Quadrate ungerader Zahlen darstellen. Nirgends bemerken wir ein Tripel, das durch Erweiterung mit einem linearen Faktor oder mit dem Quadrate einer geraden Zahl aus dem Grund-

ahltripel entstanden wäre, da alle anderen Tripel, lediglich mit Ausnahme der soeben aufgezählten, Grundzahlen liefern. Nun lassen sich aber immer neue Parabeln einzeichnen, deren Zug die Diagonalecken der entstehenden Netzvierecke verbindet; da dies Verfahren sich bis ins Endlose fortsetzen lässt, erkennen wir, dass auch die mit linearem Faktor erweiterten Grundzahlen sich durch Parabelgleichungen bestimmen

Erheben wir die untere Gleichung ins Quadrat und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von 4), so ergibt sich

$$x = 2\,n\,(n + (2\,\nu - 1)),$$

und es folgt für z

$$z = (n + (2\,\nu - 1))^2 + n^2 = 2\,n^2 + 2\,n\,(2\,\nu - 1) + (2\,\nu - 1)^2.$$

Dieses, früher bereits erhaltene, Formelsystem

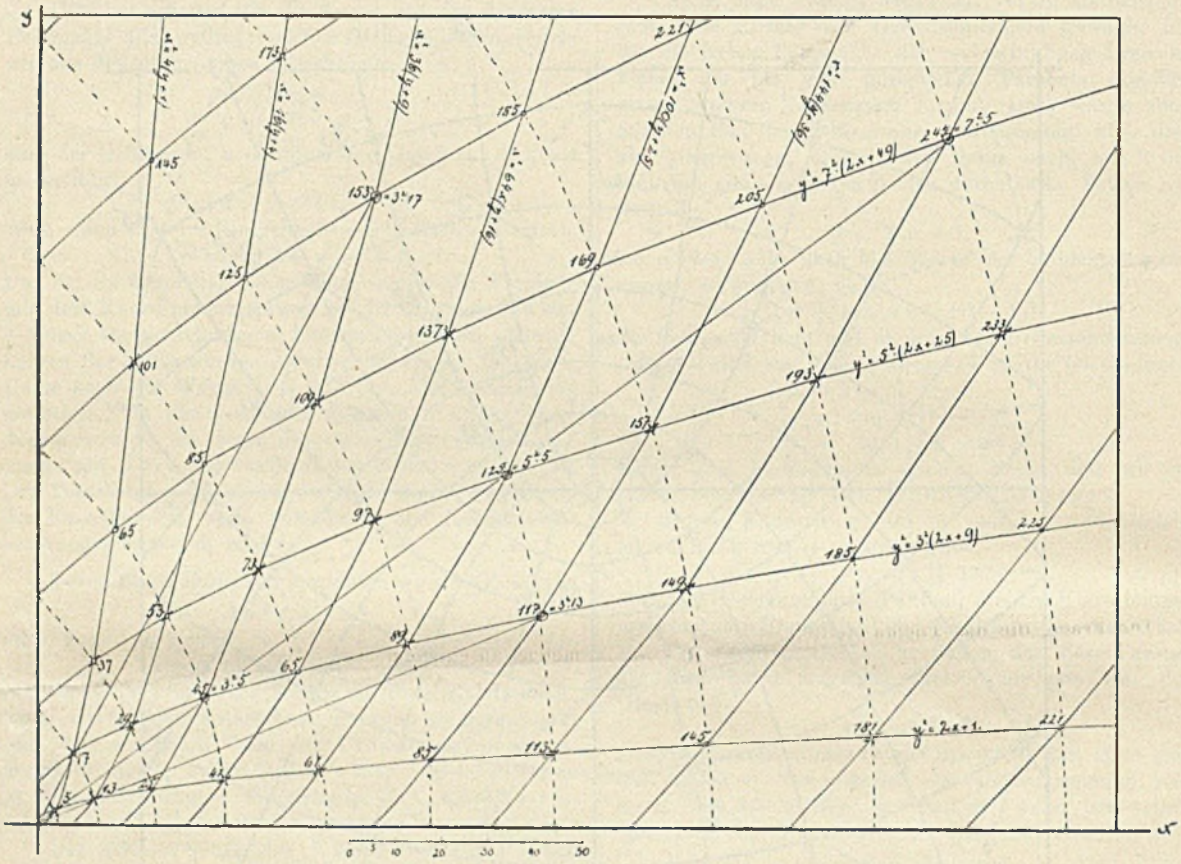


Fig. 2.

lassen. Und diese neuen Parabeln sind ebenfalls Kurven der bis jetzt gefundenen Scharen; aber ihre Gleichungen besitzen für m und n keine ganzen, sondern gebrochene Zahlen.

Es möchte hier die Fortführung der zu Figur 1) gegebenen Tabelle erwünscht sein, um auch zu allen H-zahlen der Figur 2) die zugehörigen K-zahlen zu erhalten. Anstatt eine neue Zusammenstellung zu geben, wollen wir einen bequemen Weg weisen, auf dem sich sofort die zu jedem Schnittpunkt gehörenden Zahlen x, y, z bestimmen lassen; der Leser wird dann ohne Mühe sowohl die in der Figur fehlenden Zahlen als auch alle beliebigen weiteren Zahlen ermitteln können.

Nach unserer Herleitung der Gleichung 4 liegen auf den Parabeln der Schar 4) die Punkte, deren y ist

$$y = (n + (2\,\nu - 1)^2 - n^2 = 2\,n\,(2\,\nu - 1) + (2\,\nu - 1)^2$$
$$= (2\,\nu - 1)\,(2\,n + (2\,\nu - 1));$$

wir erhalten daher das zugehörige x, indem wir diesen Wert von y in die Gleichung 4) einsetzen. Es wird dann

$$y^2 = (2\,\nu - 1)^2\,(2\,x + (2\,\nu - 1)^2) \qquad 4)$$

mit $\quad y = (2\,\nu - 1)\;(2\,n + (2\,\nu - 1)).$

$$x = 2\,n\,(n + (2\,\nu - 1))$$
$$y = (2\,\nu - 1)\,(2\,n + (2\,\nu - 1))$$
$$z = 2\,n^2 + 2\,n\,(2\,\nu - 1) + (2\,\nu - 1)^2$$

setzt uns in den Stand, die Zahlen jedes beliebigen Schnittpunktes zu bestimmen, da, wie wir gefunden hatten, n die Ordnungszahl der Kurven der Schar 2), und ν diejenige der Parabeln der Schar 4) darstellt. So finden wir z. B. für den 6-Eckpunkt auf der dritten Kurve der Schar 4) die Zahlen x, y, z, indem wir $n = 6$, $\nu = 3$ setzen, als

$$x = 2 \cdot 6\,(6 + 5) = 132$$
$$y = 5 \cdot (2 \cdot 6 + 5) = 85$$
$$z = 72 + 12 \cdot 5 + 25 = 157;$$

ebenso wird der 11. Eckpunkt auf der 9. Kurve der Schar 4) gefunden, wenn man $n = 11$ und $\mu = 9$ setzt usw. —

Wir dürfen die Untersuchung der Parabelscharen nicht schliessen, ohne geprüft zu haben, ob die beiden, in Figur 2) dargestellten Parabelscharen 2) und 4) ebenfalls Isogonalscharen sind, oder ob sie etwa in diesem Punkte von den anderen, vorher untersuchten Scharen abweichen.

Schreiben wir die Gleichungen 2) und 4) wieder in der einfacheren Form

$$x^2 = 2py + p^2,$$
$$y^2 = 2rx + r^2,$$

so folgt, indem wir die untere Gleichung von der oberen subtrahieren, dann ordnen und die Wurzel ziehen

$$x + r = y + p,$$

wobei wir, da wir uns auf den ersten Quadranten beschränken, das Doppelzeichen $\pm$ vernachlässigen. Verwenden wir diese einfache Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte, so folgt

$$x_s = p + \sqrt{2rp} \text{ und } y_s = r + \sqrt{2rp};$$

die Richtungsgrössen der Kurventangenten sind allgemein

$$y_1' = \frac{x_1}{p} \text{ und } y_2' = \frac{r}{y''}$$

und daher in den Schnittpunkten

$$y_1' = 1 + \sqrt{\frac{2r}{p}} \text{ und } y_2' = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2p}{r}}}$$

Danach folgt für α

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + \sqrt{\frac{2r}{p}} - \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2p}{r}}}}{1 + \left(1 + \sqrt{\frac{2r}{p}}\right) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2p}{r}}}} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Die Scharen 2) und 4) sind daher ebenfalls Isogonalscharen, und zwar schneiden die Kurven der einen Schar die der anderen unter Winkeln von 45°. —

Die Frage, die das Thema stellte, ist beantwortet. Verstehen wir unter der einen Kathetenzahl der gefundenen rechtwinkligen Dreiecke die reelle, unter der anderen die laterale Kathete einer komplexen Zahl, so stellen die Schnittpunkte der Parabeln in der Gaussischen Darstellung alle komplexe Zahlen dar, deren Koordinaten und Moduln rationale Zahlen sind; die Parabeln ergeben sich als der Ort für diese Zahlen und sind daher vielleicht als Komplexzahlparabeln zu bezeichnen.

Aber auch aus einem weiteren Grunde müssen die Parabelscharen unser Interesse erwecken. Jedem Schnittpunkt kommt, wie er ein Bild einer bestimmten komplexen Zahl ist, auch eine ganz bestimmte reelle Zahl als Masszahl der Hypotenuse des Dreieckes zu, dessen freier Eckpunkt er ist, und diese reellen Zahlen genügen — wenigstens, so lange x, y, z Grundzahlen darstellen — der Kongruenz

$$z \equiv 1 \pmod{4}.$$

Denn: es ist $z = m^2 + n^2$, worin eine der Zahlen m, n gerad, die andere ungerad ist. Daher wird

$$z = (2p)^2 + (2q - 1)^2 = 4(p^2 + q^2 - q) + 1 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Diese Hypotenusenzahlen z sind entweder Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen. Da nach Fermat alle Primzahlen von der Form $(4n + 1)$ sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lassen, müssen sich unter den Schnittpunkten unserer Parabeln alle Primzahlen befinden, die bei der Division durch 4 den Rest 1 ergeben. Spalten wir daher die Gesamtschar der Primzahlen in zwei Gruppen, von denen die eine diejenige von der Form $(4n + 1)$ enthält, während die zweite die Primzahlen von der Form $(4n + 3)$ umfasst, so werden wir hier alle Primzahlen der ersten Gruppe, aber keine einzige der zweiten Gruppe erhalten können. Die Zerlegung ist nach Fermat-Euler bei den Primzahlen $(4n + 1)$ nur auf eine einzige Art möglich, daher diese Zahlen in der Figur auch nur einmal auftreten; Zahlen dagegen, die das Produkt zweier Primzahlen von der Form $(4n + 1)$ darstellen, wie $65 = 5 \cdot 13$; $85 = 5 \cdot 17$; . . . , sind auf zweierlei Weise zerlegbar und erscheinen daher auch an zwei verschiedenen Stellen; Quadrate aber von der Form $(4n + 1)^2$ treten nur einmal auf. Wie steht es mit Zahlen, wie $153 = 3^2 \cdot 17$; $169 = 13^2$; $245 = 7^2 \cdot 5$; . . . . ? Wie mit den Produkten aus verschiedenen Primzahlen? Wie verteilen sich über die Figur die Primzahlen selbst? — Eine Fülle von Anregungen scheint die „graphische Primzahldarstellung" dem Zahlentheoretiker zu bieten. Fragen, in den vergilbten Blättern eines wurmzerfressenen Kollegheftes oder dem — innerlich und äusserlich — sicheren Dirichlet längst erledigt, erstehen, wie ehedem dringend Antwort heischend, von neuem. Dazu mögen andere treten, die bisher ausserhalb des Gesichtskreises lagen. Bekanntem und Neuem auf dem Gebiete der Zahlentheorie nachgehen, heisst sich eine nie versiegende Quelle hohen Genusses verschaffen.

Ueber den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta.

Von Dr. Ernst Schultz, Oberlehrer am Schiller-Realgymnasium zu Stettin.

In dem 5. Heft des 13. Bandes des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wird ein Brief des Herrn Max Simon in Strassburg i. E. an Herrn Felix Klein veröffentlicht, in welchem Herr Simon seine Methode über den Anfangsunterricht in der Geometrie auseinandersetzt. Das Charakteristische dieser Methode besteht darin, dass die Schüler rein experimentell mit den ersten geometrischen Weisheiten bekannt gemacht werden. Jeder strenge Beweis ist verpönt. Der Umfang des Stoffes, welcher den Quartanern in den 24 Stunden geboten wird, erscheint mir reichlich gross.

Viele Wege führen nach Rom! Ein jeder Lehrer wird seine Methode für die beste halten. Es fragt sich nur, ob auch der erste Grundsatz der Pädagogik erfüllt wird: Wird durch die Methode der Schüler zum selbständigen logischen Denken erzogen? Werden die nach der rein experimentellen Methode eingeführten Schüler imstande sein, die grösseren streng geführten Beweise zu überschauen?

Ueber die Erfolge seiner Methode sagt Herr Simon nichts. Hoffentlich hat er keine trüben Erfahrungen in den oberen Klassen mit den nach seiner Methode eingeführten Schülern gemacht. Für die erste Lehrstunde gibt Herr Simon folgende Lehrprobe: „Körper: In der Zwischenstunde bleibt der Raum unverändert, ist er leer? Luft: Sie kann ausgepumpt werden, dann wäre der Raum leer." Ich bezweifle, dass die Quartaner von selbst auf das Auspumpen der Luft kommen, und dann halte ich die ganze Geschichte für zwecklos. Dass die Schüler schon in der Quarta mit der Ebenheit, der Symmetrieebene, Symmetrieachse und mit der axialen Symmetrie bekannt gemacht werden, halte ich für viel zu weitgehend, um nicht zu sagen für ein pädagogisches Verbrechen. Nein, Herr Simon, die Schüler sollen von Anfang an in den mathematischen Unterrichtsstunden geübt werden, ihre Gedanken so zu formulieren, dass sie in mathematischer Form wieder

gegeben werden können. Ich halte dies für eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichtes, sei es in der Quarta oder in der Prima. Haben die Schüler das zunächst an den einfachsten Beispielen gelernt, dann werden die Schüler auch Gefallen an den strengen Beweisen der geometrischen Lehrsätze über die Winkel an Parallelen usw. finden. Ich spreche hier aus Erfahrung. Es ist viel leichter, die Schüler mit handwerksmässigen Kunstgriffen vertraut zu machen, als sie an die strenge mathematische Form zu gewöhnen. Der Mathematiker wird schon gemerkt haben, dass ich mich der rein experimentellen Methode sehr skeptisch gegenüber verhalte.

Meine erste mathematische Lehrstunde beginne ich damit, dass die Schüler mir Grössen nennen müssen. Mit grossem Interesse werden alle Klassengegenstände genannt. Alsdann führe ich sie zu dem Begriff der Gleichheit. Dass dies stets durch Frage und Antwort geschieht, brauche ich wohl nicht besonders hervorzuheben. Jetzt erhält die eine Grösse (Ofen) den Namen A, die andere Grösse (Ofen) den Namen B, und da sie gleiches Aussehen haben, so sehen die Schüler die Gleichheit von A und B ein, was mathematisch geschrieben wird: $A = B$.

Hiermit haben wir das durch Beobachtung gefundene Resultat an den Körpern A und B mathematisch formuliert und ausgedrückt. Jetzt suche ich den Schülern rein experimentell klar zu machen, dass gleiche Grössen einander ersetzt werden können, und sofort lernen sie dies in mathematischen Zeichen wiederzugeben. Hieran schliesst sich das Klarmachen und das mathematische Formulieren der Grundsätze Gleiches zu Gleichem addiert usw., und Gleiches von Gleichem subtrahiert usw. Mit diesen drei angeführten Grundsätzen komme ich in der Quarta völlig aus. Zuerst geschieht die Einübung an Grössen, welche mit einem Buchstaben bezeichnet werden, daran schliessen sich Grössen, welche mit zwei Buchstaben benannt werden, d. h. ich komme zu Strecken. Hier bespreche ich nun Strecke, Strahl, Gerade. Jetzt müssen sich die Schüler mit der eigentümlichen Bezeichnungsweise vertraut machen, dass $XY = YX$ ist. Nach hinreichender Uebung der Grundsätze an diesen so bezeichneten Grössen gehe ich zu Grössen über, die mit drei Buchstaben bezeichnet werden. Ich komme also zu den Winkeln. Natürlich werden an dieser Stelle die verschiedenen Winkel, ihre Bezeichnungsweise, die Addition und Subtraktion derselben besprochen. Es werden jetzt die Grundsätze an diesen so bezeichneten Grössen durchgeübt. Auf diese Weise wird der Gesichtskreis der Schüler langsam und stetig erweitert. Ich gebrauche ungefähr 16—20 Stunden, bis die Grundsätze und ihre Anwendung den Schülern in Fleisch und Blut übergegangen sind. Sehr viele Schüler schnattern die Sätze her, aber die Sätze selbständig anzuwenden, sind sie nicht imstande. Bei diesen Uebungsaufgaben kommen natürlich schon diejenigen Gleichungen vor, die in den Beweisen der geometrischen Lehrsätze enthalten sind. Dass meine Schüler wirklich die Sache verstanden haben, prüfe ich durch Extemporalien und ich habe stets die Freude, dass die Jungen mit einem grossen Eifer die Aufgaben für die Anwendung der Grundsätze zu lösen suchen. Der Erfolg dieser Methode zeigt sich später bei der Durchnahme der Gleichungen in der Tertia.

Bei der Durchnahme der geometrischen Lehrsätze hat der Quartaner so viele Schwierigkeiten zu überwinden, dass bei ungeschicktem Vorgehen der Schüler von vornherein die Lust verliert. Der Schüler sieht die Figur, aus ihr soll er Eigenschaften der Strecken und Winkel beobachten, sie in mathematischer Weise ausdrücken, die Grundsätze soll er selbständig anwenden und schliesslich soll er auch noch korrekt schliessen. Die grösste Schwierigkeit, die Anwendung der Grundsätze, ist schon überwunden, jetzt kommt es darauf an, das Auge des Schülers zu üben und ihn daran zu gewöhnen, an der Figur die entsprechenden Strecken und Winkel zu vergleichen und so zu dem betreffenden geometrischen Lehrsatz zu kommen. Es ist kein Oeden der Schüler, wenn die Quartaner die Beweise der Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel logisch entwickeln lernen, es fragt sich nur, wie das gemacht wird und wie das Wort des Lehrers den Unterricht belebt. Deshalb sollte der Anfangsunterricht stets in die Hand eines pädagogisch gewandten Lehrers und nicht in die eines Kandidaten gelegt werden. Es ist eben eine Kunst, die Quartaner in die Mathematik einzuführen. Haben die Schüler durch die Fragen des Lehrers die zu beweisende Eigenschaft erkannt, dann geht es an den streng logischen Beweis. Zuerst kommt man natürlich nur langsam vorwärts, jedoch nach drei bis vier Stunden sind die Schüler so sicher, dass sie den Satz von den Scheitelwinkeln in der Klasse ausarbeiten können. Diese Ausarbeitung sehe ich mir an. Man wird mir leicht entgegnen können, dass ich mich nicht des eingeführten Lehrbuches bediene. Hier führe ich zu meiner Verteidigung an, dass die Schüler durch das Ausarbeiten in der Klasse gezwungen werden, noch einmal ihre Gedanken zu konzentrieren und das Aufgefasste zu Papier zu bringen. Dadurch, dass die Ausarbeitung in der Klasse gemacht wird, werden auch die faulen Schüler gezwungen aufzupassen und mitzuarbeiten, denn bei der Ausarbeitung zeigt sich, dass sie mit ihren Gedanken spazieren gegangen sind. In der nächten Stunde müssen die Schüler den Beweis an der Tafel wiederholen. Von Anfang an müssen die Schüler daran gewöhnt werden, selbständig die Voraussetzung, die Behauptung zu finden und das aus der Figur abgeleitete Resultat in einem Lehrsatze wiederzugeben. So fahre ich fort und am Ende des Jahres habe ich ausser den Dreieckssätzen die Sätze vom Parallelogramm durchgenommen und das ganze Pensum repetiert. Auf die Einzelheiten des Unterrichtes will ich nicht näher eingehen, da er gar zu sehr von der Persönlichkeit des Lehrers abhängt. Ich möchte hier besonders hervorheben, dass man anfangs nicht langsam genug vorgehen kann. Es sei hier auch der Ort, auf das Unpädagogische hinzuweisen, in dem Anfangsunterricht den Sätzen sofort ihre Umkehrung anzuschliessen. Kaum hat der Schüler die eine Eigenschaft erkannt, so soll er auch sofort die Umkehrung erfassen und die Folge davon ist, dass ihm Voraussetzung und Behauptung völlig durcheinandergehen. Ebenso verkehrt ist es, die Quartaner mit indirekten Beweisen zu plagen, denn im ersten Halbjahr werden sie sicherlich nicht verstanden. Wenn auch die Lehrsätze in den Lehrbüchern nicht nach pädagogischen Grundsätzen geordnet sind, so soll sich der Lehrer eine solche Reihenfolge selbst aufstellen und nicht sklavisch dem Lehrbuche folgen.

Der Leser ersieht, dass in meiner Methode das Lehrbuch eine äusserst untergeordnete Rolle spielt, ja sogar gänzlich überflüssig erscheint. Und hiermit stimme ich mit Herrn Simon überein, dass ein Lehr-

buch für die Quartaner völlig überflüssig ist. Was der Quartaner aus dem Lehrbuche zu Hause lernt, das ist für seine mathematische Bildung gänzlich wertlos. Der Schwerpunkt liegt lediglich in dem Unterricht, in welchem der Schüler zu ruhigem Ueberlegen und logischem Denken erzogen, und sein Ideen- und Anschauungskreis erweitert wird. Der Schüler soll an der Figur sehen und denken lernen. Wenn dies dem Lehrer gelungen ist, dann kann er mit seinem Erfolge zufrieden sein, und die Schüler werden um so leichter dem Unterricht in den höheren Klassen folgen können. Bei der Lehrbuchfrage ist jedoch zu beachten, dass durch dasselbe eine gewisse Reihe von Sätzen festgelegt ist, welche der Schüler wissen muss und deren Kenntnis der Lehrer in der folgenden Klasse voraussetzen kann. Man sollte deshalb eine Lehrsatzsammlung aufstellen, da von den gedruckten Beweisen die Quartaner, Tertianer für ihre mathematische Entwickelung doch nichts haben.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich also, dass nach meiner Methode die Schüler den geometrischen Lehrsatz erst aus der Figur ablesen müssen, um dann das Resultat als Behauptung mathematisch zu formulieren, und schliesslich den Satz streng mit Hilfe der Grundsätze zu beweisen. Diese Methode befolge ich in allen Klassen und sicherlich ohne die Schüler zu öden, nur zu ihrem Nutzen.

Vorschlag zum kinematischen Modell eines besonderen Gelenkvierecks.

Von G. Holzmüller (Hagen i. W.).

Im Tangentenviereck ABCD ist $\sphericalangle AOB = 180^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}$. Macht man also $\sphericalangle AOK_1 = \frac{\gamma}{2}$, so wird $\sphericalangle BOK_1 = \frac{\delta}{2}$. Zerlegt man entsprechend $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ und $\sphericalangle DOA$, so werden die schraffierten Dreiecke kongruent, also $OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4 = e$, d. h. die Teilpunkte K liegen auf einem Kreise, der zum Inkreise konzentrisch ist. Auch ist $AK_4 = AK_1$ usw.

Dabei ist $\triangle AK_1O \sim K_3OC$, also ist $AK_1 : e = e : CK_3$, also ist zyklisch

1) $e^2 = AK_1 \cdot CK_3 = BK_2 \cdot DK_4 = \cdots$,

also

$$\frac{AK_1}{BK_2} + 1 = \frac{DK_4}{CK_3} + 1 = \frac{AK_1 + BK_1}{BK_2} = \frac{DK_3 + CK_3}{CK_2} = \frac{a}{BK_2} = \frac{c}{CK_2},$$

folglich 2) $\frac{BK_2}{CK_2} = \frac{a}{c}$,

d. h. die Seite b ist durch K_2 im Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt, und dasselbe gilt zyklisch von allen Seiten.

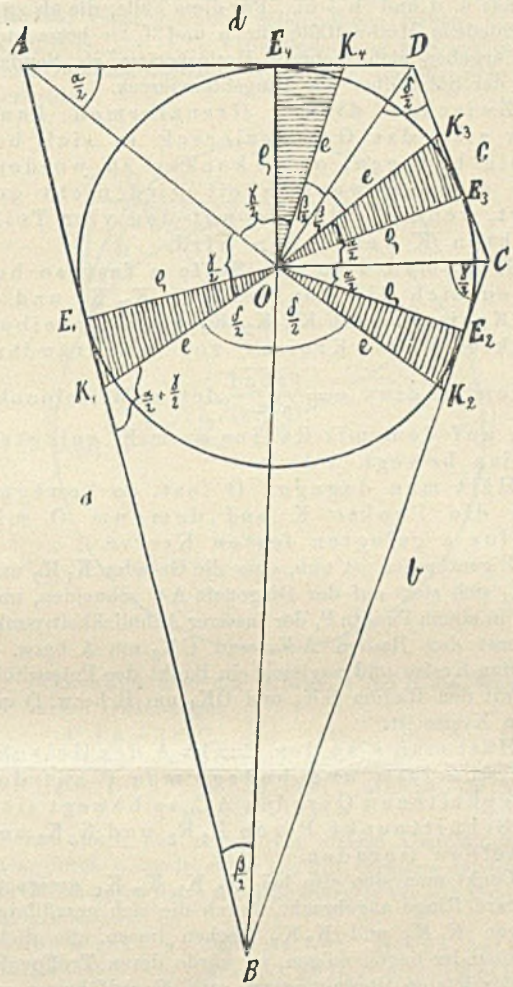
Demnach ist z. B.

$$AK_1 = \frac{ad}{b+d} = \frac{ad}{a+c} \text{ und } CK_3 = \frac{cb}{d+b} = \frac{bc}{a+c},$$

also

3) $$e^2 = \frac{abcd}{(a+c)^2} = \frac{abcd}{(b+d)^2}.$$

d. h. e ist nur von den Seiten a, b, c (und $d = a + c - b$) abhängig, von der besonderen Gestalt des Vierecks aber, z. B. auch von ϱ unabhängig. Unabhängig also bestimmt sich e z. B. aus der Proportion $(a + c) : \sqrt{cd} = \sqrt{ab} : e$, wo die Wurzeln mittlere Proportionalen bedeuten. Dies dürfte der einfachste Beweis für die Beziehung 3) sein, die bekanntlich die Konstruktion des Tangentenvierecks *) aus a, b, c und ϱ ermöglicht und eine Quelle für eine Reihe von anderen Sätzen, Beziehungen und Konstruktionen ist.



Der Inhalt $J = (a + c)\varrho = (b + d)\varrho$ ist natürlich proportional ϱ. Der Radius erreicht seinen Höchstwert, wenn er gleich e wird. Dann ist $J = (a + c)\frac{\sqrt{abcd}}{a + c} = \sqrt{abcd}$. Zugleich ist dabei $\sphericalangle \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle AOE_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$, also $\alpha + \gamma = 180^0$, d. h. das Viereck ist dabei ein Tangentenschnenviereck. Auch dies ist bekannt. Es ist also auch leicht, ein Tangentenschnenviereck aus a, b und c zu konstruieren.

In der Kinematik, die als Getriebelehre von der Kinetik (Bewegungslehre) zu unterscheiden ist, spielen die Gelenkvierecke eine bedeutende Rolle. Auf die Gelenkvierecke, für die $a + c = b + d$ ist, soll hier das Augenmerk gerichtet werden. Zunächst bleiben sie, so lange sie konvex sind, stets Tangentenvierecke.

Eine eingelegte kreisförmig gebogene dünne Feder von Stahl, deren Enden frei übereinander hingleiten

*) Herr W. Jaehnike in Bromberg machte mich gelegentlich auf diese aus der Seitenteilung folgende Konstruktionsmöglichkeit aufmerksam, worauf ich ihm den obigen Beweis mitteilte.

können, bleibt also für die betreffenden Formen des Vierecks stets kreisförmig.

Ist a die grösste Seite, so nimmt das Gelenkviereck zweimal die Form eines Dreiecks an, das einemal als Dreieck aus a, b, (c + d), das anderemal als Dreieck aus a, d und (b + c). Für diese Fälle, die als zwei verschiedene Minimalfälle für ϱ und J zu betrachten sind, ergeben sich mehrere Dreieckssätze als Sonderfälle der Sätze über das Tangentenviereck.

Zwischen diesen Grenzformen kann sich also das Gelenkviereck in sich beliebig bewegen, ohne konkav zu werden, und diese Beweglichkeit wird nicht gestört, wenn O gelenkig mit den vier Teilpunkten K verbunden wird.

Hält man also die Seite a fest, so bewegen sich die Punkte C, D, K_2, K_3 und O auf Kreisen, und K_1, K_2, K_3 und K_4 bleiben Punkte eines Kreises von unveränderlichem Radius $e = \frac{\sqrt{abcd}}{(a+c)}$, dessen Mittelpunkt sich auf dem mit Radius e um K_1 gelegten Kreise bewegt.

Hält man dagegen O fest, so bewegen sich die Punkte K auf dem um O mit Radius e gelegten festen Kreise.

Eigentümlich ist nun, dass die Geraden K_1K_2 und K_3K_4 sich stets auf der Diagonale AC schneiden, und zwar in einem Punkte P, der äusserer Aehnlichkeitspunkt der mit den Radien AK_1 und CK_3 um A bezw. C gelegten Kreise und zugleich ein Punkt der Potenzlinie der mit den Radien BK_2 und DK_4 um B bezw. D gelegten Kreise ist.

Hält man also den Punkt A des Gelenkvierecks fest, und bewegt man C auf der festgehaltenen Geraden AC, so bewegt sich der Schnittpunkt P von K_1K_2 und K_3K_4 auf derselben Geraden.

Denkt man sich also bei K_1, K_2, K_3, K_4 geeignete drehbare Ringe angebracht, durch die sich geradlinige Stangen K_1K_2 und K_3K_4 stecken lassen, die dicht übereinander liegen mögen, so würde deren Treffpunkt bei der letzten Bewegungsart eine Geradführung erhalten. Bei gegabelten Stangen liesse sich durch die Oeffnung ein Stift stecken, der nun geradlinig geführt würde.

Die Bewegung des Gelenkvierecks in sich wird auch dadurch nicht gestört, dass man die Punkte K durch an den Seiten angebrachte Stifte zur Bewegung auf Kreisbogen zwingt, die mit den Radien AK_1, BK_2, CK_3 und DK_4 um die beweglichen Ecken A, B, C, D gelegt sind. Dabei haben sich die Stifte in kreisförmigen Schlitzen zu bewegen.

Entsprechendes gilt vom Schnittpunkte Q der Geraden K_2K_3 und K_4K_1.

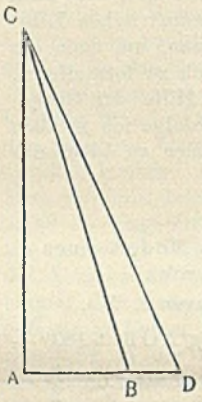
Aber auch der durch die Punkte K gelegte Kreis mit dem unveränderlichen Radius e kann in Schlitzform am Modell so angebracht werden, dass die Stifte auf ihm bleiben müssen, ohne dass die Beweglichkeit des Gelenkvierecks gestört wird.

Beiläufig sei bemerkt, dass für jede Form des Gelenkvierecks der um P mit dem Radius $p = \sqrt{PK_1 \cdot PK_2} = \sqrt{PK_3 \cdot PK_4}$ gelegte Kreis als Inversionskreis die Kreise A und C aufeinander abbildet, jeden der Kreise B und D und den Kreis der K auf sich selbst. Entsprechendes gilt von dem um Q mit dem Radius $q = \sqrt{QK_2 \cdot QK_3} = \sqrt{QK_4 \cdot QK_1}$ gelegten Kreise. Diese beiden Inversionskreise (Potenzkreise) schneiden einander stets rechtwinklig. Daraus ergeben sich noch weitere Beziehungen, die von einigem Interesse sind.

Der beschriebene Mechanismus, der lediglich der Bedingung a + c = b + d zu gehorchen hat, erscheint sehr geeignet, auf elementarem Wege anschaulich in die Kinematik gewisser Gelenkvierecke einzuführen. Sollte ein kinematisches Modell solcher Art noch nicht existieren, so dürfte die Anfertigung für Unterrichtszwecke sehr zu empfehlen sein.

Kleinere Mitteilungen.

Näherungsweise Konstruktion des Winkels von 1°.



I. In einem rechtwinkligen Dreieck ACD, dessen kleinster Winkel C gleich 1° 30′, dem halben Zentriwinkel für die Seite des regelmässigen 120-Ecks ist, teilt man die Gegenseite AD vom Scheitelpunkt A des rechten Winkels aus im Verhältnis 2 : 1 und verbindet den Teilpunkt B mit C, so ist Winkel ACB nahezu gleich 1°.

Es ist $AC = \frac{AD}{\operatorname{tg} ACD}$, $\operatorname{tg} ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{AB \operatorname{tg} ACD}{AD}$, d. h. $\operatorname{tg} ACB = \frac{2}{3} \operatorname{tg} 1^0 30'$ oder $= \frac{\operatorname{tg} 1^0 30'}{1{,}5}$.

Die Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen gibt ACB = 1° 0′ 0,457″, also eine Abweichung von + 0,457″.

II. In einem rechtwinkligen Dreieck ACB, dessen kleinster Winkel C gleich 56′ 15″, dem halben Zentriwinkel für die Seite des regelmässigen 192-Ecks ist, verlängert man die Gegenseite AB um den fünfzehnten Teil ihrer Länge über B hinaus und verbindet den Endpunkt D mit C, so ist Winkel ACD nahezu gleich 1°.

Es ist $AC = \frac{AB}{\operatorname{tg} ACB}$, $\operatorname{tg} ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{AD \operatorname{tg} ACB}{AB}$, d. h. $\operatorname{tg} ACD = \frac{16}{15} \operatorname{tg} 56' 15''$ oder $\frac{\operatorname{tg} 56' 15''}{0{,}9375}$.

Die Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen gibt ACD = 0° 59′ 955″, also eine Abweichung von − 0,045″.

III. Das vorstehend benutzte Dreieck lässt sich auch für die Dezimalteilung des Quadranten verwerten. Da 0,1 R = 9° als Winkel des regelmässigen Vierzigecks exakt konstruierbar ist, so handelt es sich nur um den Winkel 0,01 R = 0° 54′.

Nimmt man an, dass jetzt AD die halbe Seite des regelmässigen 192-Ecks ist, also $\sphericalangle ACD = \frac{1}{96} R = 56' 15''$, so hat man nur AD um den 25. Teil seiner Länge zu verkürzen, um für den $\sphericalangle ACB$ fast genau den Wert 0,01 R zu erhalten. In der Tat, wenn $AB = \frac{24}{25} AD$ ist, so ist $\operatorname{tg} ACB = \frac{AB}{AC} = 0{,}96 \cdot \frac{AD}{Ac} = 0{,}96 \operatorname{tg} 56' 15''$.

Die Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen ergibt $ACB = 0^0\,54'\,0{,}0224'' = 0{,}010004$ R.

Th. Harmuth (Gr. Lichterfelde).

* * *

IV. Vorstehende Konstruktionen verwerten, wie leicht ersichtlich, sämtlich das Prinzip, dass kleine Winkel sich annähernd wie ihre trigonometrischen Tangenten verhalten, die theoretische Annäherung ist besonders bei den beiden letzten Konstruktionen sehr stark. Die nachstehend angegebene Konstruktion steht hinter ihnen in doppelter Beziehung zurück, insofern sie nicht auf einem allgemeinen Prinzip, sondern auf einem zufälligen Zusammentreffen von Einzelumständen beruht und auch einen etwas geringeren Grad der theoretischen Annäherung aufweist. Trotzdem dürfte diese Konstruktion (auf die ich gelegentlich geraten bin) praktisch auch ihre Vorzüge haben, insofern sie nämlich mit Konstruktionselementen von verhältnismässig grosser Ausdehnung arbeitet, während die vorstehenden, zweifellos theoretisch interessanteren Konstruktionen an sehr kleinen Linien und Winkeln zur Ausführung kommen.

Bestimmt man den Winkel φ durch die Gleichung

$$\sin\varphi = \frac{\sin 45^0}{\sin\psi} = \frac{13}{12\cdot\sqrt{2}},$$

indem $\psi = 67^0\,22'\,48{,}5''$ der Winkel ist, der in dem pythagoreischen Dreieck (13,12,5) der grösseren Kathete gegenüberliegt, so findet sich für φ ein Wert, der um nicht volle 4 Bogensekunden hinter dem Werte 50^0 zurückbleibt, $\frac{\varphi}{2}$ ist also fast genau gleich 25^0 und übertrifft somit den bekanntlich leicht konstruierbaren Zentriwinkel des regelmässigen Fünfzehnecks um 1^0 (genauer $1^0 - 2''$). Daraus entspringt folgende Konstruktion: Ueber der Diagonale AB eines Quadrats von 12 cm Seitenlänge konstruiere man einen Halbkreis, in den man die Sehne AC = 13 cm einträgt, dann hat $\sphericalangle$ ABC die Grösse von 50^0. Diesen Winkel halbiert man durch die Linie BE; legt man an BC den in bekannter Weise zu konstruierenden Winkel CBF = 24^0 an, so ist $\sphericalangle$ EBF = 1^0. P.

* * *

Neue Konstruktion der Sehnen zu den Bogen von 36^0 und 108^0 nebst damit zusammenhängenden Beziehungen. Bezeichnet man die Sehnen der dem Einheitskreise angehörenden Bogen von 36^0 und 108^0 mit a und b, so ist bekanntlich

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Dann hat man, wie leicht zu sehen, die beiden Gleichungen

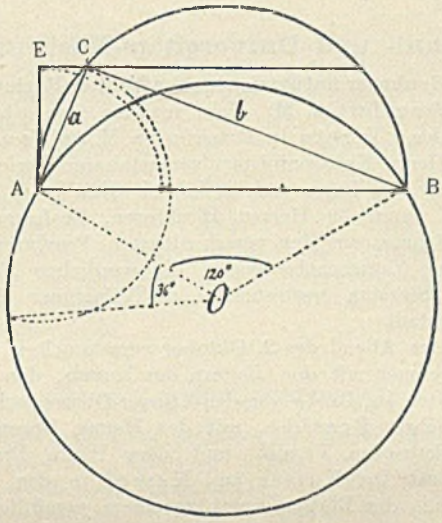
$$(1)\ \cdots\ a^2 + b^2 = 3 \qquad (2)\ \cdots\ ab = 1 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Die Gleichung (1) lässt erkennen, dass die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b die Länge $\sqrt{3}$ besitzt, während sich aus der Gleichung (2) für die Höhe dieses selben Dreiecks der Wert $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, also gerade ein Drittel der Hypotenusenlänge ergibt. Da nun $\sqrt{3}$ bekanntlich die Seitenlänge des dem Einheitskreise einbeschriebenen regelmässigen Dreiecks ist, so ergibt sich für die Herstellung der beiden Strecken a und b die aus der nachfolgenden Figur ersichtliche einfache Konstruktion.

Die oben benutzte Gleichung (1) ist ein einzelnes Glied aus einer ganzen Reihe von Relationen, nämlich den folgenden:

$$b - a = 1;\quad b^2 + a^2 = 3;\quad b^3 - a^3 = 4;\quad b^4 + a^4 = 7\ \cdots$$
$$\cdots\ b^n + (-1)^n a^n = G_n.$$

Die Bildung der linken Seite bei diesen Relationen ist unmittelbar ersichtlich, rechts steht jedesmal die Summe der Werte, die auf den rechten Seiten der beiden unmittelbar vorhergehenden Gleichungen stehen; d. h. es ist $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$. Die Bedeutung und der Grund dieser Zusammensetzung erhellt aus der nachstehenden Herleitung:



Bekanntlich sind die Grössen a und b die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$(3)\ \cdots\ a^2 + a - 1 = 0 \qquad (4)\ \cdots\ b^2 - b - 1 = 0.$$

Aus (3) folgen nun sofort die Relationen

$$(5)\ a^2 = 1 - a;\quad a^3 = a - a^2;\quad a^4 = a^2 - a^3\ \cdots$$
$$a^n = a^{n-2} - a^{n-1}.$$

Da nun nach der ersten von diesen Gleichungen a^2 linear durch a ausdrückbar ist, gilt vermöge der folgenden Gleichungen diese Ausdrückbarkeit für alle Potenzen von a und zwar ist

$$(6)\ a^2 = 1 - a;\quad a^3 = 2a - 1;\quad a^4 = 2 - 3a;$$
$$a^5 = 5a - 3\ \cdots\cdots\ a^n = (-1)^n L_{n-1} + (-1)^{n+1} L_n \cdot a$$

(wenn man die Glieder der Laméschen Reihe mit dem Buchstaben L bezeichnet).

Es ist nämlich vermöge der Relationen (5) ersichtlich, dass die in den Relationen (6) auftretenden Koeffizienten gerade die Glieder der (ohnehin zu dem Goldenen Schnitt ja in engster Beziehung stehenden) Laméschen Reihe sind und dass die Vorzeichen der dabei auftretenden Potenzen von a, der nullten und der ersten, wechseln müssen.

Ganz ähnlich hat man

$$(7)\ b^2 = 1 + b;\quad b^3 = b + b^2;\quad b^4 = b^2 + b^3;\ \cdots\cdot$$
$$b^n = b^{n-2} + b^{n-1},$$

und folgert hier ganz ähnlich wie bei (6), die Gültigkeit der Gleichungsreihe

$$(8)\ b^2 = 1 + b;\quad b^3 = 1 + 2b;\quad b^4 = 2 + 3b;$$
$$b^5 = 3 + 5b\ \cdots\cdot\ b^n = L_{n-1} + L_n \cdot b.$$

Nun ist offenbar $b - a = 1$; diesen Sachverhalt kann man benutzen, um aus je zwei einander entsprechenden Gleichungen der beiden Reihen (6) und (8) die irrationalen Grössen b und a zu eliminieren. Man hat nur diese Gleichungspaare durch Addition oder Subtraktion zu verbinden, je nachdem die Exponenten von b und a gerade oder ungerade sind. Man erhält dann

$$(9)\ b - a = 1;\quad b^2 + a^2 = 3;\quad b^3 - a^3 = 4\ \cdots\cdot$$

$b^n + (-1)^n a^n = 2 L_{n-1} \cdot 1 + L_n (b - a) = 2 L_{n-1} + L_n$, wenn, wie vorher, unter L_n das n^{te}-Glied der Laméschen Reihe verstanden wird. Es ist also

$$G_n = 2 L_{n-1} + L_n = L_{n-1} + L_{n+1}, \text{ entsprechend}$$

$$G_{n-1} = L_{n-2} + L_n, \quad G_{n-2} = L_{n-3} + L_{n-1},$$

aus welchen Gleichungen vermöge des Bildungsgesetzes der Laméschen Reihe sofort folgt

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2},$$

wie oben schon bemerkt worden war.

O. Schneider (Langendreer).

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Sechster naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Frankfurt a. M. Zum sechsten vom physikalischen Verein in Frankfurt a. M. auf Veranlassung des Herrn Kultusministers veranstalteten Ferienkursus, der in den Tagen vom 2. bis 15. Oktober d. J. stattfand, waren 39 Herren, Direktoren, Professoren und Oberlehrer, aus den verschiedensten Provinzen einberufen. Naturgemäss waren die westlichen Provinzen am stärksten vertreten, ein Teilnehmer war aus Darmstadt.

Am Abend des 2. Oktober versammelten sich die Teilnehmer mit den Leitern des Kursus, den Herren Direktor Dr. Bode von der Klinger-Oberrealschule und Oberlehrer Presber, mit den Herren Dozenten des physikalischen Vereins und dem Herrn Provinzial-Schulrat Dr. Kaiser aus Kassel in den schönen Räumen des Bürgervereins zu einem gemütlichen Zusammensein. Am folgenden Tage wurde dann im grossen Hörsaale des physikalischen Vereins nach einem Willkommensgruss des Vorsitzenden dieses Vereins, Herrn Dr. Rössler, der Kursus im Auftrage des Herrn Ministers durch den Provinzialschulrat Dr. Kayser eröffnet. Dieser Feier wohnten hervorragende Mitglieder des physikalischen Vereins und als Vertreter der Stadt Frankfurt der Herr Oberbürgermeister Adickes bei.

Nachdem auch Herr Direktor Bode als Leiter des Kursus die Teilnehmer an demselben begrüsst hatte, eröffnete der Leiter des chemischen Laboratoriums im physikalischen Verein, Herr Prof. Dr. Freund, die Reihe der Vorlesungen. Derselbe hatte sich zunächst die Aufgabe gestellt, in zweimal 2-stündigem Vortrage seine Zuhörer in die neuen chemisch-physikalischen Theorien und ihre Anwendung einzuführen. Er sprach demgemäss über den osmotischen Druck, über van't Hoffs Theorie der Lösungen und das van't Hoffsche Gesetz und die Lösungen der Elektrolyte über spezifische und molekulare Leitfähigkeit, über die Theorie der elektrolytischen Dissociation von Arrhenius, über die Mechanik der Stromleitung in elektrolytischen Lösungen, über die Wanderung der Jonen, über Jonenreaktion und die osmotische Theorie des Stromes der voltaschen Ketten usw.

Ausserdem beabsichtigte Herr Prof. Freund in zweimal zwei Stunden über Neuerungen auf dem Gebiete der Schwefelsäure- und Alkalifabrikation zu sprechen. Zum grössten Bedauern seiner Zuhörer konnte er indessen infolge eines Trauerfalles diese Vorlesungen nicht ganz zu Ende führen, und obschon sein Assistent Herr Dr. Kahn für ihn eintrat, so musste doch auf den Vortrag über die Chromgerbung verzichtet werden.

Die physikalischen Vorlesungen hatte der Leiter des physikalischen Laboratoriums, Herr Dr. Behn, übernommen. Derselbe sprach in dreimal zwei Stunden über die Elektronen, die Kathodenstrahlen, Kanalstrahlen, Röntgenstrahlen, Becquerelstrahlen, über die neueren radioaktiven Substanzen, ihre Zusammensetzung und die Eigenschaften ihrer Strahlung und über die Anwendung der Elektronentheorie auf die Probleme der atmosphärischen Elektrizität. In weiteren zwei Stunden zeigte Herr Dr. Behn neuere Schulapparate vor und stellte mit ihnen eine Reihe von einfachen Versuchen an, die ganz besonders den Beifall der Zuhörer fanden.

Der Leiter der Elektrotechnischen Lehr- und Untersuchungsanstalt des physikalischen Vereins, Herr Dr. Déguisne, hielt in sechsmal zwei Stunden Vorlesungen über Wechselströme und elektrische Wellen; insbesondere sprach er über Strom- und Spannungskurven und die Zusammensetzung von Strömen bezw. Spannungen, über Selbstinduktion und Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, über Wechselstromeffekt, Wattlose und Wattkomponente. Diese Vorträge wurden durch glänzende Versuche mit dem Oscillographen von Blondlot und Duddel veranschaulicht. Herr Déguisne sprach ferner über den Kondensator sowie über dessen Serien- und Parallelschaltung mit Spule, über Resonanz, elektrische Wellen, über Wellentelegraphie und abgestimmte Telegraphie. Selbstverständlich wurden auch diese Vorlesungen durch prächtige und wohlgelungene Versuche erläutert.

In zweimal zwei Stunden sprach Herr Dr. Bruger von der Firma Hartmann und Braun über starke magnetische Felder, deren Erzeugung und Messung, sowie über neuere Methoden und Apparate für Temperaturmessung.

Herr Prof. Dr. Eppstein, Oberingenieur der Elektrizitäts-Aktiengesellschaft vorm. Lahmeyer & Co. und früherer Dozent am physikalischen Verein, hielt einen zweistündigen Vortrag über technische Exkursionen als Unterrichtsmittel, der gleichzeitig eine Vorbereitung auf den Besuch der Lahmeyerschen Werke war.

Endlich sprach Herr Prof. Dr. Lepsius, Direktor der Chemischen Fabrik in Griesheim, über die Anwendung neuerer chemischer und physikalischer Erkenntnisse auf kosmische Probleme an der Hand der Darlegungen seines Freundes Arrhenius.

Damit war die Reihe der offiziellen Vorlesungen erschöpft. Wir dürfen es aber nicht unterlassen hervorzuheben, dass die Teilnehmer am Kursus auch zahlreich einer Einladung des technischen Vereins zu einem Vortrage des Herrn Prof. Hartmann über elektrische Messinstrumente folgten, sowie auch mit Interesse den Vorträgen beiwohnten, die ihnen bei Besuch der Klinger-Oberrealschule, des Wöhler-Realgymnasiums und der Musterschule gehalten wurden.

Ausser den Vorlesungen standen auf dem Programm des Kursus 2. Uebungen, 3. Exkursionen, 4. Mitteilungen der Teilnehmer, 5. Ausstellung von Lehrmitteln.

Die Uebungen bestanden in einem elektrotechnischen Praktikum und in einem Glasbläser-Kursus. Das elektrotechnische Praktikum, an welchem die Mehrzahl der Kursisten teilnahm, wurde in achtmal drei Stunden abgehalten und stand unter der Leitung des Herrn Dr. Déguisne und der Assistenten Dr. Schäfer, Skirl, Montanus und Marksen. Es wurden folgende Arbeiten ausgeführt: Eichung von Strommessern, Spannungsmessern und Wattmessern,

Widerstandsmessungen, Vergleichung von Kapazitäten mit dem ballistischen Galvanometer, Messung der Feldstärke, Eichung des ballistischen Galvanometers usw. Der Kursus im Glasblasen stand unter der Leitung des Herrn Dr. Kahn.

Exkursionen fanden statt nach der Platinschmelze von Heraeus in Hanau, nach der Elektrotechnischen Fabrik von Hartmann und Braun, nach den Werken der Elektrizitäts-Aktiengesellschaft vorm. Lahmeyer & Co., nach den Adler-Fahrrad- und Automobilwerken vorm. Kleyer, nach der Chemischen Fabrik Griesheim, in die Sammlungen der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft, in die bereits genannten Frankfurter Schulen und zur Saalburg bei Homburg.

Was die Mitteilungen der Teilnehmer anbetrifft, so waren dafür ursprünglich zwei Stunden am Nachmittag des 14. Oktober bestimmt. Man entschloss sich aber, um einen Nachmittag für den Ausflug zur Saalburg freizumachen, dieselben unmittelbar an andere Vorträge anzuschliessen, umsomehr, als leider nur wenige Anmeldungen zu solchen Mitteilungen eingelaufen waren.

Der Berichterstatter stellte einige Versuche an mit seinem verbesserten Gabelelektroskop und zeigte, wie sich dasselbe am einfachsten herstellen lässt. Herr Oberlehrer Schütte aus Düren sprach über Blasbergs Selbstkocher, eine von ihm ausgegangene erhebliche Verbesserung der sogen. Badischen Kochkiste. Herr Prof. Klingelhöffer aus Darmstadt besprach und zeigte eine Vorrichtung zur Bestimmung der Tourenzahl eines rotierenden Kreisels.

Diese Mitteilungen wurden mit grossem Beifall aufgenommen.

An Lehrmitteln waren in den Hörsälen des Senckenbergischen Instituts die neueste wissenschaftliche und pädagogische Literatur aus dem Gebiete der Chemie, Physik und Elektrotechnik sowie eine Sammlung von Schulapparaten aufgestellt. Von diesen wurde insbesondere die letztere fleissig besucht.

Wie man erkennt, wurde den Teilnehmern des Guten und Schönen viel, sehr viel, geboten. Es gehörten in der Tat kräftige Nerven dazu, bis zum Schluss auszuhalten, aber es war gewiss ein Zeichen von hohem Idealismus der Teilnehmer, dass bis zum letzten Tage kein Nachlassen im Besuche der Veranstaltungen eintrat, und dass selbst 60-jährige Herren nicht wankten und nicht wichen. Und so konnte denn der Leiter des Kursus, Herr Direktor Dr. Bode bei Gelegenheit der Abschiedsfeier, zu welcher sich die Mitglieder des Kursus mit den Herren Dozenten und ihren Assistenten sowie hervorragende Mitglieder des physikalischen Vereins im Gasthof Drexel zusammengefunden hatten, mit Befriedigung auf den Verlauf des Kursus zurückblicken und höchst anerkennende Worte an die Teilnehmer richten. Ein grosses Stück des Erfolges verdankt der Kursus freilich dem Herrn Direktor Bode selbst, der seine ganze Kraft und sein grosses Organisationstalent wieder in den Dienst der guten Sache gestellt hatte und in der Teilnahme an den Veranstaltungen allen mit glänzendem Beispiel voranging. Ihm sei auch an dieser Stelle noch einmal der Dank sämtlicher Teilnehmer am diesjährigen Kursus ausgesprochen.

F. Busch (Arnsberg).

Vereine und Versammlungen.

48. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Hamburg 1905. Obmänner der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion sind die Herren Direktor Prof. Dr. Thaer (Oberrealschule vor dem Holstentor) und Prof. Dr. Fr. Ahlborn (Realgymnasium des Johanneums), die Anmeldungen zu Vorträgen für die Sektion entgegennehmen.

* * *

Vereinigung zur Errichtung eines Vega-Denkmals. Ein Zentral-Aktions-Komitee für die Errichtung eines Denkmals in Laibach zur Erinnerung an Georg Freiherrn von Vega wendet sich mit der Bitte um Beiträge an die Gesamtheit aller Mathematiker. An der Spitze des Komitees stehen der k. u. k. Oberst a. D. Michael Lubanc Edler von Savenburg, der Landeshauptmann von Krain Otto Edler von Detela und der Bürgermeister von Laibach, Ivan Hribar. Beitragszahlungen in Deutschland anzunehmen ist bereit Professor Dr. Krazer in Karlsruhe (Baden), Westendstrasse 37.

Lehrmittel-Besprechungen.

Neuerungen in Lehrmittel-Katalogen. Eine bemerkenswerte Neuerung bringt der in diesem Jahre erschienene Hauptkatalog der Firma E. Leybolds Nachfolger in Köln, insofern er einer grösseren Zahl der in ihm aufgeführten physikalischen Apparate eingehende Angaben über die mit ihm anzustellenden Versuche beigibt. Nun gibt es ja dafür vorzügliche Werke (Frick, Weinhold usw.), auf die übrigens auch in dem Katalog überall verwiesen wird. Trotzdem bleibt für die Wahl seitens des an die Beschaffung eines Apparats gehenden Lehrers doch oft noch ein merklicher Spielraum, schon wegen der Rücksicht auf den Kostenpunkt. Da wird ihm die genannte Neuerung, die vermutlich vielfache Nachfolge finden wird, unter Umständen behilflich sein können, die für seine besonderen Verhältnisse bestgeeignete Wahl zu treffen.

P.

Bücher-Besprechungen.

Ostwald, W., Die Schule der Chemie. Erste Einführung in die Chemie für jedermann. 1. Teil: Allgemeines. VII u. 186 S. Mit 46 Abb. Braunschweig 1903. Preis geb. 5,50 Mk. 2. Teil: Die Chemie der wichtigsten Elemente und Verbindungen. VI u. 292 S. Mit 32 Abb. Braunschweig 1904. Preis geb. 8 Mk. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

Wie Stöckhardt das Studium des Parkeschen „chemischen Katechismus“ und der Hagenschen Experimentalchemie im Jahre 1846 zur Herausgabe seiner bis 1881 in 19 Auflagen erschienenen, viel gelesenen „Schule der Chemie“ anregte, so wurde durch deren Lektüre einer unserer angesehensten Vertreter der Chemie, Ostwald, veranlasst, einen „ganz modernen Stöckhardt“ in Gestalt des vorliegenden Werkes zu schaffen.

Beim ersten Durchlesen des Buches kann man leicht in Versuchung kommen, an der gewählten Form des Dialoges (zwischen Lehrer und Schüler) den äusserst lebhaften und intelligenten Schüler zu tadeln oder auch zu loben, der mit grossem Geschick häufig durch seine

Fragen den Plan des Unterrichtes zu bestimmen weiss. Geht man dagegen auf die Ostwaldschen Gedankengänge näher ein, so merkt man bald, dass der Verfasser nicht mehr und nicht weniger bezweckt als was der berühmte Schwede Oerstedt in seinem „Geist in der Natur" mit so schönem Erfolge (es sei nur der Aufsatz „Ueber die Gründe des Vergnügens, welche Töne hervorbringen" genannt) erstrebte: Eine so lebhafte Darstellung des Stoffes, dass der Leser unwillkürlich an der Diskussion teil nimmt, ja direkt zur Mitarbeit gezwungen wird. Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, muss man die beiden Teile als durchaus gelungen bezeichnen und anerkennen, dass der Verfasser ein Werk fertig gebracht hat, das sich durch weise Beschränkung, aber dafür gründlichere Behandlung des Stoffes sowohl vor dem „alten Stöckhardt" als auch vor Liebigs „Chemischen Briefen", in denen nicht selten grosse Schwierigkeiten für den unerfahrenen Leser zu finden sind, auszeichnet.

Die ersten 60 Seiten der Stöckhardtschen Schule sind unter Ostwalds Feder auf 186 Seiten, eben dem ersten Teil, angewachsen. Freilich sind schon in diesem so viele chemische Begriffe und Erscheinungen entwickelt, dass bereits das Studium dieses einen Teiles dem Anfänger einen guten Ueberblick über das grosse Gebiet der anorganischen Chemie gewährt. — Diese wird im zweiten Teile zu einem gewissen Abschlusse gebracht, unter Weglassung aller speziellen Einzelheiten. Nur an einigen Stellen wäre vielleicht ein etwas tieferes Eingehen angezeigt gewesen; es sei in dieser Hinsicht das Kapitel über die Photographie (S. 277—281) erwähnt. Der eifrige Leser wird zwar noch manche weitere, auf Ergänzungen hinzielende Wünsche haben, sollte jedoch bedenken, dass Ostwald keine erschöpfende Darstellung, sondern eine erste Einführung geben will.

Die Bücher sind jedenfalls den Schülern als äusserst nützliche Lektüre zu empfehlen, und auch der Fachlehrer kann zahlreiche Anregungen für eine möglichst anschauliche Behandlung einzelner Kapitel der Chemie aus ihnen holen.

Die guten Strichzeichnungen, welche Ostwald schon in seinen „Grundlinien" verwendet hat und die ohne Zweifel am besten das Wesentliche eines Experimentes zur Darstellung bringen, seien noch besonders hervorgehoben, während sich das Fehlen eines Sachregisters doch wohl nicht ganz mit der Eigenart des Buches entschuldigen lässt. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Schmid, Dr. Bastian, Lehrbuch der Mineralogie und Geologie für höhere Lehranstalten. I. Teil: Mineralogie. Mit zahlreichen schwarzen und farbigen Abbildungen. Verlag von J. F. Schreiber in Esslingen und München. 1904. 140 Seiten. Preis 3 Mk. II. Teil: Geologie und Paläontologie. Mit zahlreichen farbigen und schwarzen Abbildungen und einer geologischen Uebersichtskarte. Verlag derselbe. 1904. Preis 3 Mk. Gesamtausgabe: Mineralogie und Geologie. Preis 6 Mk.

Während auf dem Gebiete der Botanik und Zoologie seit einigen Jahren eine wahre Grossindustrie von Lehrbüchern sich breit macht, sind bislang nur relativ wenige Versuche unternommen worden, den Stoff der Mineralogie und Geologie in einer den Zwecken des Unterrichtes angepassten Weise zu behandeln. Wenn diese grosse Lücke in der pädagogischen Literatur sich vielleicht auch nicht überall in aufdringlicher Weise bemerkbar gemacht hat, da in zahlreichen Staaten die Mineralogie nur vorübergehend in dem chemischen Unterrichte gestreift werden kann, während die Geologie vollends ausgeschlossen bleiben muss, so war es doch ein dringendes Bedürfnis, ein brauchbares und gediegenes Schulbuch für die in Rede stehenden Lehrgegenstände zu schaffen. Dr. Bastian Schmid, ein Mann, dessen Name auf dem Gebiete der naturwissenschaftlichen Pädagogik einen ausgezeichneten Klang besitzt, hat uns nun in seinen oben namhaft gemachten Werken zwei Lehrbücher beschert, über die jeder Fachgenosse wahrhaft entzückt sein muss. Hat er es doch verstanden, den Stoff der Mineralogie und Geologie in einer Art zu behandeln, dass der hohe bildende Wert, der jenen sehr mit Unrecht in den Hintergrund gestellten Disziplinen der Naturwissenschaften innewohnt, in vollster Weise zur Geltung gebracht wird. Die eingehende Beachtung, welche die Schmidschen Lehrbücher von allen Seiten verdienen, wird hoffentlich vielerorts die Erkenntnis anbahnen, dass Lehrgebiete, die in dieser Weise sich für die Erziehung nutzbar machen lassen, eine bedeutendere Stellung im allgemeinen Lehrplane angewiesen bekommen müssen.

Von Einzelheiten erwähnen wir, dass der Verfasser im wesentlichen einen systematischen Gang in den vorliegenden Lehrbüchern eingeschlagen hat. Er dürfte auch in diesem Punkte einen glücklichen Griff getan haben, da so dem Fachlehrer die Möglichkeit gegeben ist, je nach den örtlichen Verhältnissen oder nach dem persönlichen Geschmacke den Stoff vorzutragen, ohne dass er die Fühlung mit dem Buche verliert. Ueberall ist ferner die experimentelle und genetische Behandlung in den Vordergrund gerückt; und ein weiterer grosser Vorzug besteht darin, dass überall die Beziehungen zu anderen Lehrgegenständen, wie Erdkunde, Geschichte oder zur Technik hervorgehoben worden sind. Kurz wir stehen nicht an zu bekennen, dass unter allen Schullehrbüchern der Mineralogie und Geologie die von Schmid verfassten durchaus den ersten Platz einnehmen. Das gilt einmal für die Behandlung des Stoffes selbst, dann aber auch noch ganz besonders für die wahrhaft überraschend prächtige Ausstattung mit zum grössten Teile farbigen Abbildungen, die nirgends ihres gleichen haben dürften, und die für den Unterricht ein überaus schätzbares Anschauungsmittel darstellen.

Walther Schoenichen (Schöneberg-Berlin).

* * *

Kienitz-Gerloff, Dr. Felix, Professor an der Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. d. Lahn, Methodik des Botanischen Unterrichts. Mit 114 zum Teil farbigen Abbildungen. Berlin W. 30, 1904, Verlag von Otto Salle. 290 Seiten gr. 8°, Preis 6,50 Mk.

Das Werk ist eine ausführliche Monographie des gesamten botanischen Unterrichts. In seinem ersten oder analytischen Teile gibt es einen Ueberblick über den gegenwärtigen Stand des botanischen Unterrichts in Preussen unter Berücksichtigung sämtlicher Lehranstalten von der einfachsten Volksschule bis hinauf zu den Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. Im Anschluss daran werden die Forderungen erörtert, welche von Kongressen an den botanischen Unterricht gestellt wurden; hierbei kommen in Betracht die Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen, die Thesen der Schulkonferenz vom Dezember 1890 und namentlich die vielbesprochenen und überall mit grösstem Beifall aufgenommenen Thesen der Naturforscher-

Versammlung in Hamburg 1901. Weiter wird die Frage aufgeworfen, in welcher Weise der botanische Unterricht zur Erreichung der den Lehranstalten gesteckten allgemeinen Bildungsziele mitzuwirken berufen ist. Verfasser erläutert die drei Lehrverfahren, das dozierende, das katechetische und das untersuchende Verfahren, und gibt dann einen Ueberblick über das zu verlangende Mass von botanischen Kenntnissen und über den Umfang, in welchem die Einzelgebiete der Wissenschaft: Morphologie, Systematik, Physiologie usw. zur Mitwirkung heranzuziehen sind. In Betreff der Deszendenzlehre sagt er unter anderem: „Die Schule wird — möglicherweise in nicht ferner Zukunft — ihre Vogel-Strauss-Politik der Deszendenztheorie und auch teilweise dem eigentlichen Darwinismus, also der Selektionstheorie gegenüber ebenso aufgeben müssen, wie sie und die Kirche es einst dem Kopernikanischen System und der Kant-Laplaceschen Theorie gegenüber tun mussten. Sie wird das schon deshalb müssen, um missverständlichen und übertriebenen Darstellungen in der Tagesliteratur wirksam entgegenarbeiten zu können. Vor der Hand aber ist es unumgänglich, dass der Gebildete wenigstens wisse, was man unter Verwandtschaft von Tieren und Pflanzen überhaupt versteht, und worauf die Ansichten über nähere und entferntere Verwandtschaft sich gründen.“ Bei der Besprechung des Lehrverfahrens im einzelnen wird die Bedeutung der Schulgärten, die mikroskopische Beobachtung, das Zeichnen mikroskopischer Objekte, das Bestimmen von Pflanzen, die Anlage von Herbarien usw. eingehend erörtert.

Der sehr ausführliche zweite oder systematische Teil des Werkes enthält eine Gliederung des Lehrgangs in vier Kurse, und zwar I. den vorbereitenden Kurs, II. den morphologisch-systematischen Kurs, III. den physiologisch-anatomischen Kurs, IV. den kryptogamischen und sexual-physiologischen Kurs. In jedem einzelnen der vier Kurse wird zunächst der für die betreffende Stufe einzuschlagende Lehrgang begründet und darauf an einem praktischen Beispiel durch wortgetreue Wiedergabe des ganzen Gespräches zwischen dem Lehrer und seinen Schülern vorgeführt.

Die Abbildungen sind meist Originalzeichnungen nach selbstgefertigten Präparaten des Verfassers. In allen Einzelheiten beruht die Arbeit auf reichen pädagogischen Erfahrungen und auf einem sorgfältigen Studium der ganzen botanischen und pädagogischen Literatur. Dabei ist sie anregend geschrieben und eignet sich deshalb vorzüglich zur Vorbereitung des Lehrers für die botanischen Unterrichtsstunden sowie zur Einführung der jüngeren Fachgenossen in das naturwissenschaftliche Lehramt. Sie ist daher namentlich den Lehrerbibliotheken und den pädagogischen Seminaren zur Anschaffung warm zu empfehlen.

Wilh. Levin (Braunschweig).

* * *

Kienitz-Gerloff, Dr. Felix, Professor an der Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. d. Lahn, Bakterien und Hefen, insbesondere in ihren Beziehungen zur Haus- und Landwirtschaft, zu den Gewerben sowie zur Gesundheitspflege nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft gemeinverständlich dargestellt. Mit 65 Abbildungen. Berlin W. 30, 1904, Verlag von Otto Salle. 100 Seiten 8⁰. Preis Mk. 1,50.

Die Arbeit ist eine Sammlung von populär-wissenschaftlichen Vorträgen, welche der Verfasser im Winter 1902/3 in Weilburg gehalten hat. Die 9 Vorträge behandeln folgende Themata: I. Urzeugung. II. Nahrungsmittel-Konservierung. III. Die Natur der Keime. Schimmel, Pilze, Bakterien und Hefen. IV. Die Lebensweise der Bakterien und Hefen. Gärung. Reinzucht. V. Die Hefen und die Alkoholgärung in der Praxis. VI. Die Essigsäure-, Milchsäure- und Buttersäuregärung. VII. Verschiedene sonstige Bakterienwirkungen. Cellulosevergärung, Röste von Flachs und Hanf. Fäulnis, Verwesung; Schwefel- und Eisenbakterien; Wärme, Licht und Farbstoff erzeugende Bakterien. VIII. Die Bakterien und der Stickstoff. IX. Die Bakterien und die Infektionskrankheiten. Wundinfektion. Milzbrand. Desinfektion, Antisepsis und Asepsis, Tuberkulose. Lungenentzündung, Influenza, Diphtherie, Unterleibstyphus, Cholera, Aussatz, Pest.

Der Verfasser behandelt demnach das Gebiet, welches durch die staunenswerten Entdeckungen von Rob. Koch, Behring, Pasteur, Hellriegel usw. in den Vordergrund des Interesses gerückt ist, und welches für Gesundheitspflege, Haushalt, Technik und Landwirtschaft gleich wichtig ist. Die Darstellung wird unterstützt durch eine reiche Zahl von Abbildungen, welche Originalzeichnungen nach mikroskopischen Präparaten, Reinkulturen von Bakterien oder Pasteursche Untersuchungsapparate darstellen. Die sehr inhaltsreiche und gediegene Schrift verdient weite Verbreitung und wird vielen willkommen sein.

Wilh. Levin (Braunschweig).

* * *

Demetrius Seliwanoff, Privatdozent a. d. Universität St. Petersburg. Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig 1904, Teubner, VI und 92 S., geb. 4 *M*.

Das vorliegende Lehrbuch gehört der Teubnerschen Sammlung an, die hauptsächlich Artikel der Enzyklopädie in erweiterter, mit Beweisen versehener Darstellung als den historischen Werdegang berücksichtigende Lehrbücher enthalten soll. In der Tat schliesst sich dasselbe auch vollständig dem Artikel „Differenzenrechnung“ des Verfassers in der Enz. Bd. I, S. 918—937 an. — Die Differenzenrechnung, von Brook Taylor 1715 begründet und dann bes. von L. Euler ausgebildet, ist ein begrenztes Gebiet der Mathematik, das auf den Universitäten wohl meist nur in Seminarien vorgetragen wird und, wie es scheint, überhaupt weniger bekannt ist. Ein Beweis dafür ist wohl die Tatsache, dass bis in die neueste Zeit seit Schloemilchs „Theorie der Differenzen und Summen“ (Halle 1848) kein deutsches Lehrbuch darüber erschien. Diese Lücke wurde erst durch die Uebersetzung des gleichfalls russischen Werkes von Markoff (Teubner 1896) ausgefüllt. Das vorliegende Buch hat, indem es sich auf die elementareren Probleme beschränkt, nur den halben Umfang des Markoffschen. Gerade des Gegenstandes wegen ist es vielleicht angezeigt, wenn wir hier eine etwas ausführlichere Inhaltsangabe geben.

Bekanntlich ist die Differenzenrechnung das, was entsteht, wenn man den Grenzübergang zur Differentialrechnung nicht ausführt, sondern die »Differenz« $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ bei endlichem h betrachtet. Es ist deshalb klar, dass hier überall Analogien vorhanden sind. Doch zeigen sich sofort auch wesentliche Unterschiede, indem z. B. nicht x^n als einfach zu differenzierende Funktion sich darstellt, sondern n^x usw. Nachdem der Verfasser die hauptsächlichsten Regeln

entwickelt hat, wendet er die Differenzenrechnung sofort auf die Interpolation und die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale an. — Dem Integral entspricht als Umkehrung der Differenz eine »Summe«, dem bestimmten Integral eine »bestimmte Summe« usw. Die Summenrechnung wird dann nach Erläuterung des Verfahrens auf die Summierung gewisser Reihen, wie $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 10 \cdot 11 \cdot 12$ u. a. angewendet. Hierauf folgt die Behandlung der Jacob Bernoullischen Funktion, die Eulersche Summationsformel und die Stirlingsche Reihe. Ein dritter Teil beschäftigt sich mit den »Differenzengleichungen« und deren Anwendung auf die Berechnung der Koeffizienten verschiedener Reihen, wie der Binomialreihe und der Entwicklung von cos xt nach Potenzen von cos t, sowie mit der Bestimmung des allgemeinen Gliedes in rekurrenten Reihen.

Es ist bedauernswert, dass der Verfasser sich nicht dazu entschloss, die — ja ohnehin nicht umfangreichen — Literaturangaben des Enzyklopädieartikels auch seinem Lehrbuche beizugeben, wie das gewiss im Sinne des Teubnerschen Unternehmens gelegen hätte. Die Herren, die an den Zentralstätten der Gelehrsamkeit sitzen, vergessen immer, dass es vielleicht doch auch Menschen gibt, die ihr Buch zur Hand nehmen, ohne mit der andern Hand gleich zur Enzyklopädie greifen zu können.

Die Darstellung des Buches ist ungemein klar; besonders die Satzbildung musterhaft. Dass der Verfasser kein Deutscher ist, merkt man nur an Geringfügigkeiten. Das Buch sei jedermann, der sich über Differenzenrechnung orientieren will, aufs wärmste empfohlen. H. Wieleitner (Speyer).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Pfannstiel, A., Einleitung in die Chemie. 2. Aufl. Schivelbein 1904, Druck von Waldow. Mk. —.50.

—„— Die Wertigkeit der Elemente (Separat-Abdruck aus der Chemiker-Zeitung 1904).

Plüss, B., Blumenbüchlein für Waldspaziergänger. 2. Aufl. Mit 254 Abb. Freiburg 1904, Herder. Mk. 2.— geb.

Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. La télégraphie sans fil. (Scientia No. 23.) Paris 1904, Naud.

Rauter, G., Anorganische chemische Industrie. I. Die Leblanc-Sodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. II. Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. III. Anorganische chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. (Sammlung Göschen.) Preis pro Band Mk. —.80. Leipzig 1904, Göschen.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikal. u. astronom. Tafeln. 4. Aufl. Gotha 1904, Thienemann. Mk. —.80 kart.

Rüdorff, Fr., Grundriss der Chemie. Mit Holzschn. und 1 Tafel. Ausg. B. 13. Aufl. Berlin 1904, Müller. Mk 3.60.

Ruefli, J., Lehrbuch der Stereometrie. 3. Aufl. Bern 1904, Francke. Mk. 1.60 kart.

Ruge, S., Kleine Geographie. 7. Aufl. Besorgt von Dr. W. Ruge. Leipzig 1904, Seele & Co.

Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. Mit 8 Fig. (Sammlung Schubert 32.) Leipzig 1904, Göschen. Mk. 7.— geb.

Scheid, K., Chemisches Experimentierbuch für Knaben. Mit 78 Abb. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 2.80 geb.

Scherling, Chr., Grundriss der Experimental-Physik. 6. Aufl. Bearb. von H. Rühlmann. Mit 272 Abb. Leipzig 1904, Haessel.

Schillings Kleine Schul-Naturgeschichte. Bearb. von R. Waeber, umgearb. von J. Seiwert. 1. Teil: Der Mensch und das Tierreich. 22. Aufl. Mit 316 Abb. und 4 Tafeln. Mk. 2.— geb. 2. Teil: Das Pflanzenreich. 22. Aufl. Mit 221 Abb. und 8 Tafeln. Mk. 2.— geb. Breslau 1904, Hirt.

Schlegel, C. W., Kanon der planimetrischen Lehrsätze. Für Realanstalten aufgestellt. St. Goarshausen 1904, Druck von Reese.

Schlesinger, J., Ueber die Sprache in den mathem. Schulbüchern. Berlin 1904, Weidmann. Mk. 1.—.

Schlesinger, L., Einführung in die Theorie d. Differential-Gleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. 2. Aufl. Leipzig 1904, Göschen. Mk. 8.— geb.

Schmehl, Chr., Aufgaben aus der analyt. Geometrie der Ebene. Giessen 1904, Roth. Mk. 1.60. Auflösungen dazu Mk. —.60.

Schmid, Bastian, Lehrbuch der Mineralogie u. Geologie für höhere Lehranstalten. I. Teil: Mineralogie. Esslingen 1904, Schreiber.

Schmidt, C., Die Zeitgleichung (Beiträge z. mathem. Geographie II) Jahresbericht d. Grossherz. Ostergymnasiums zu Mainz 1904. Mainz 1904, (Progr. 1904, Nr. 742.)

Schmidt, O., Metalloide (anorganische Chemie 1. Teil). (Sammlung Göschen.) Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Schnee, P., Zur Geologie des Jaluit-Atolls. Sonderabdruck aus Globus LXXXV, Nr. 21. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn.

Schoedler, F., Buch der Natur. 23. Aufl. Neu bearb. Ausgabe 3. Teil, Astronomie u. Physik, 1. Abteil. Astronomie. Neu bearb. von B. Schwalbe und H. Böttger. Mit Lebensbild B. Schwalbes von E. Schwalbe. Ebenda. Mk. 6.— geh.

Schreber, K., Die Kraftmaschinen. Mit 56 Abb. u. 1 Tafel. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 6.—.

Schubert, Th., Die Entstehung der Planeten-Sonnen und Doppelsternsysteme und aller Bewegungen in denselben aus den Elementen ihrer Bahnlinien nachgewiesen. Bunzlau 1903, Kreuschmer. Mk. 3.—.

Schulte-Tigges, Philosophische Propädeutik. 2. Aufl. Berlin 1904, Reimer. Mk. 3.—.

Schulze, E., Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einer Spitze. Mit 2 Tafeln. Berlin 1904, Weidmann. Mk. 1.—.

Schumann, E., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Mit 87 Fig. Stuttgart 1904, Grub. Mk. 2.20 geb.

Schumann, K., Praktikum für morphologische und systematische Botanik. Mit 154 Fig. Jena 1904, Fischer. Mk. 13.—.

Sellentin, R., Method. Lehrgang des Linearzeichnens für höhere Lehranstalten, nach den Elementen der Projektionslehre. Unterstufe. Für Realschulen bezw. Ober-Tertia und Unter-Sekunda neunklassiger Lehranstalten. Beilage zum Jahresbericht der Oberrealschule zu Elberfeld. Elberfeld 1904, Druck von Lucas.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bearb. von A. Harnack. 2. Aufl. 3. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 33 Fig. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 3.—.

Sprockhoff, A., Einzelbilder aus dem Tierreiche. 7. Aufl. Mit 71 Abb. Hannover 1904, Meyer. Mk. —.70.

—„— Einzelbilder aus dem Mineralreiche. 7. Aufl. Mit 48 Abb. Ebenda. Mk. —.60.

—„— Einzelbilder aus dem Pflanzenreiche. 7. Aufl. Mit 77 Abb. Ebenda. Mk. —.70.

—„— Einzelbilder aus der Physik. 9. Aufl. Mit 116 Abb. Ebenda. Mk. —.70.

Stäckel, P., Angewandte Mathematik an den preussischen Universitäten. Sonderabdruck aus Monatsschrift f. höhere Schulen III. Berlin 1904, Weidmann.

—„— Angewandte Mathematik an den deutschen Universitäten. Sonderabdruck a. d. Jahresberichten d. deutschen Mathematiker-Vereinigung. 13. Band, 6. Heft. Leipzig 1904, Teubner.

Stange, A., Die Zeitalter der Chemie in Wort und Bild. Teil I: Die ältesten Kenntnisse von der Materie. Teil II: Die philosophischen Anschauungen der Griechen und die Frage nach den Elementen. 1. Lfrg. Mk. 1.50. Leipzig, Schimmelwitz.

Steinbrinck, C., Ueber dynamische Wirkungen innerer Spannungsdifferenzen von Flüssigkeiten u. ihre Beziehungen zum Saftsteigeproblem der Bäume. Sonderabdruck a. d. „Flora“ 1904. 73. Band, 2. Heft.

Stephan, P., Die technische Mechanik. 1. Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Fig. Leipzig 1904, Teubner. Mk. 7.— geb.

Sterne, Carus, Werden und Vergehen. 6. Aufl. Bearb. von Wilh. Bölsche. Lfrg. 1/2. Berlin 1904, Borntträger.

Thomé, Flora von Deutschland, Oesterreich u. d. Schweiz. 2. Aufl., gänzl. neu bearb. Lfrg. 3—30. Preis der Lfrg. Mk. 1.25. Gera 1904, Zezschwitz.

Thomé-Migula, Kryptogamen-Flora (Thomés Flora Bd. V). Lfrg. 15/17. Ebenda. à Mk. 1.—.

Treubert, F., Die Sonne als Ursache der hohen Temperatur in den Tropen der Erde, der Aufrichtung der Gebirge und der vulkanischen Erscheinungen. München 1904, Kellerer. Mk. 1.80 kart.

Uth, K., Planimetrie. Mit Fig. 7. Aufl. Kassel 1904, Hühn.

Waeber, R., Lehrbuch der Botanik. 8. Aufl. Mit 194 Abb. und 23 Tafeln. Leipzig 1904, Hirt & Sohn. Mk. 4.— geb.

—„— Lehrbuch für den Unterricht in der Chemie mit Berücksichtigung der Mineralogie und chem. Technologie. Mit 107 Abb. 15. Aufl. Ebenda. Mk. 2.50 kart.

Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. Mit 12 Fig. 2. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt.) Leipzig 1904, Teubner. Mk. 1.25 geb.

Wedekind, E., Stereochemie. Mit 34 Fig. (Sammlung Göschen.) Leipzig 1904, Göschen. Mk. —.80 geb.

Werner, A. Lehrbuch der Stereometrie. Mit 116 Abb. Jena 1904, Fischer.

Zwicky u. Wermly, Grundriss der Planimetrie und Stereometrie nebst Uebungsaufgaben. 1. Teil: Planimetrie. 3. Aufl. Herausgeg. von G. Wermly. Bern 1904, Francke. Mk. 1.50 geb.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30

Bakterien und Hefen

insbesondere in ihren Beziehungen zur

Haus- u. Landwirtschaft

zu den Gewerben, sowie zur Gesundheitspflege nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft gemeinverständlich dargestellt von

Dr. Felix Kienitz-Gerloff

Professor a. d. Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. L.

Mit 65 Abbildungen. — Preis Mk. 1.50.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30

Methodik des

Botanischen Unterrichts

von

Dr. Felix Kienitz-Gerloff

Professor a. d. Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. L.

Mit 114 zum Teil farbigen Abbildungen

Preis Mk. 6.50.

Verlagsanträge

werden gern entgegengenommen und sorgfältig behandelt von der Verlagsbuchhandlung **Otto Salle** in **Berlin W. 30.**

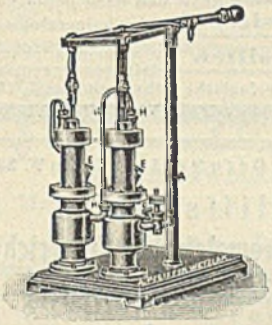
Die Gräfl. v. Baudissinsche Weingutsverwaltung Nierstein am Rhein 120 bringt zum Versand ihre hervorragend preiswerte Marke:

1901r Niersteiner Domthal

im Fass von 30 Liter an bezogen per Liter Mk. 1. ab Nierstein. ▭ Probekiste v. 12 Fl. Mk. 15 gegen Nachnahme oder Voreinsendung des Betrages. Frachtfrei jeder deutschen Eisenbahn-Station.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Präzisions-Optik.



Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung

zur Fabrikation der

Geryk-Oel-Luftpumpen

D. R.-P. in Deutschland.

Typen für Hand- und Kraftbetrieb.

Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. } Vacuum
Zweistiefelige „ „ 0,0002 „ „ }

Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

Viele gesetzlich geschützte Originalkonstruktionen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Der Unterricht in der

analytischen Geometrie

Für Lehrer und zum Selbstunterricht.

Von

Dr. Wilh. Krumme,

weil. Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig.

Mit 53 Figuren im Text.

Preis 6 Mk. 50 Pf.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 30

Die

Einheit der Naturkräfte

Ein Beitrag zur Naturphilosophie von

P. Angelo Secchi, S. J.

weil. Direktor der Sternwarte des Collegium Romanum.

Autorisierte Uebersetzung von

Prof. Dr. L. Rud. Schultze.

2. revidierte Auflage.

2 Bände mit 61 Holzschnitten.

Preis geheftet 12 Mk., gebunden 14 Mk.

Für **Schüler-Bibliotheken** und *** Prämien. ***

Die Erde

und die Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Nach E. Reclus von Dr. **Otto Ule.** Zweite umgearbeit. Auflage von Dr. Willi Ule, Privatdocent an der Universität Halle. Mit 15 Buntdruckkarten, 5 Vollbildern und 157 Textabbildungen.

Preis geh. 10 Mk., eleg. geb. 12 Mk.

Das Buch der **physikal. Erscheinungen.**

Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Neue Ausgabe. Mit 11 Buntdruckbildern, 9 gr. Abbildungen und 448 Holzschnitten. gr. 8°.

Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30 Maassenstrasse 19.

Die physikalischen Kräfte

im Dienste der Gewerbe, Kunst und Wissenschaft. Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Zweite ergänzte Auflage. Mit 416 Holzschnitten, 15 Separatbildern und Buntdruckkarten. gr. 8°

Preis 13 Mk.; geb. 15 Mk.

Verlag von O. Salle, Berlin W. 30.

Schriften des Nervenarztes
Dr. med. **Wichmann-Wiesbaden**
für

Neurastheniker

1. **Die Neurasthenie.** Ihre Behandlung u. Heilung. Ein Rathgeb. f. Nervenkranke. 2. Aufl. Preis 2 Mk.
2. **Lebensregeln für Neurastheniker.** 2. Aufl. Preis 1 Mk.
3. **Die Wasserkuren.** Innere u. äußere Wasseranwendung im Hause. 2. Aufl. Preis 1 Mk., geb. Mk. 1.25.

Normalverzeichnis
für die
physikalischen Sammlungen
der
höheren Lehranstalten.
Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.
Preis 30 Pfg.
Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle, Berlin W 30.

Physikalische Apparate und Versuche
einfacher Art
aus dem
Schäffermuseum.
Von
H. Bohn
Oberl. am Dorotheenst. Realgymnasium in Berlin.
Mit 216 Abbildungen im Text.
Preis 2 Mk.

Dr. F. Krantz
Rheinisches Mineralien-Contor
Fabrik und Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel
Bonn am Rhein.
Im Februar 1905 ist neu herausgegeben Katalog XVIII
Allgemeiner Lehrmittel-Katalog mit zahlreichen Illustrationen

Mineralien: Preisverzeichnis von einzelnen Stufen und losen Krystallen. Sammlungen in stufenweiser Ergänzung für den Unterricht nach Prof. Dr. R. Brauns in Kiel. Allgemeine Sammlungen, Kennzeichen-Sammlungen, Krystall-Sammlungen, Lötrohr-Sammlungen, Edelstein-Sammlungen, Edelstein-Modelle usw. — Mineralpräparate, Metallsammlungen und alle mineralogisch-geologischen Apparate und Utensilien.
Krystallmodelle aus Birnbaumholz, Tafelglas und Pappe, Achsenkreuze usw.
Gesteine sowohl einzeln, wie auch in systematisch geordneten Sammlungen nebst den dazu gehörigen Dünnschliffen.
Diapositive für den mineralogischen und geologischen Unterricht.
Leitfossilien in einzelnen charakteristischen Belegstücken, wie auch in kleineren u. grösseren systematisch geordneten Sammlungen: Geologische Lehrsammlungen für den geographischen Unterricht.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30

Hilfsbuch
für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten.
Von **Oskar Lesser,**
Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.
Das Buch umfasst die Elemente der Planimetrie, soweit dieselben nach den Lehrplänen Behandlung finden sollen. Es ist ein Uebungsbuch und ein Lehrbuch zugleich. Im Vordergrunde stehen die Aufgaben; möglichstes Hinausschieben der strengen Beweisführung, Gewinnung der Sätze aus reichlich gegebenen Aufgaben auf der unteren und mittleren Stufe, sowie Einführung neuerer Gesichtspunkte sollen den Unterricht erleichtern und fördern.
Preis 2 Mark.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Die Behandlung
des ersten Zeichenunterrichts
an höheren Lehranstalten
nach
Körpermodellen und nach der Natur
in ausgeführten Lektionen.
Von
Edmund Hartmann,
Gymnasiallehrer in Gießen.
Mit einem Vorworte von
Geh. Oberschulrat Dr. H. Schiller.
46 Figuren. Preis Mk. 1.50.

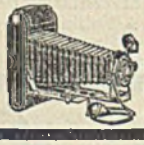
Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit.

Max Kaehler & Martini
Berlin W, Wilhelmstr. 50
empfehlen **Materialien** zu den
Vorlesungs-Experimenten
über Aluminothermie n. Goldschmidt.
Einrichtung von chemischen Laboratorien. Preislisten 1903 frei.

M. Bornhäuser, Ilmenau
Hochspannungsbatterien
kleiner Akkumulatoren
für Unterrichtszwecke,
Kapazität 1 Amp.-Std. bei 10stündiger Entladung. D.-R.-G.-M.
Modell der physikalisch-technischen Reichsanstalt.
Funkeninduktoren.

Präzisions-Reisszeuge
(Rundsystem)
für Schulen und Techniker.
Clem. Riefler, Nesselwang und München
(Nur die mit dem Namen Riefler gestempelten Zirkel sind echtes Riefler-Fabrikat.)

Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt a. M.
Spezial-Fabrik aller Arten
Elektr. u. magnet. Mess-Instrumente
für Wissenschaft und Praxis.
Kataloge stehen zu Diensten.

Photographische Apparate
und Bedarfs-Artikel zu Originalpreisen

Bruno Pestel,
Dresden 6,
Hauptstr. 1 Schlossstr. 6
Illustr. Katalog (ca. 160 S. stark) auf Verlangen grat.

Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt a. M.
empfehlen ihr
Elektr. Instrumentarium
für Lehrzwecke
welches allgem. Anerkennung findet.
Spezialkatalog zu Diensten.

Klapptafel n. Rühlmann auf Wunsch mit Zubehör z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie d. i. Aufgab. vorkommenden Bewegungen. (S. U.-Bl. VIII 2. S. 44.). Dynamos m. Handbetrieb, Dampfmaschinen, Wassermotore.
Rob. Schulze, Halle a. S.
Moritzzwinger 6.

E. Leybold's Nachf., Köln
Mechanische und **optische Werkstätten.**
Physikalische Apparate
in erstklassiger Ausführung.
Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien und Teslaspulen
für langsame, mittlere und schnelle Schwingungen.

Reisszeuge
in allen Façons
E. H. Rost
Berlin, Dorotheenstrasse 22
Reparaturen

Max Kohl, Chemnitz i. S.
Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Elektrotechnik.
Einr. physikal. u. chem. Laboratorien. Fabr. physikal. Apparate u. mathemat. Instr. Kompl. Röntgen-Einrichtungen.
Gold. Med. Leipz. 1897, Weltausstell. Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904, St. Louis 1904. Grand Prix, Weltausstell. St. Louis 1904. Ausf. Spez.-List. kostenfrei.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus
F. Apels Nachf., Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate.
Apparat zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante nach Nernst
Modelle von Dach- und Brückenkonstr. nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Krystallmodelle aus Holz- u. Glastafeln

Günther & Tegetmeyer,
Werkstatt für wissenschaftliche u. technische
Präzisions-Instrumente
Braunschweig, Höfenstrasse 12.
Physikalische Instrumente spez. nach Elster und Geitel.

Elektrizitäts-Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen.
Schalttafeln, Messinstrumente und Laboratorium-Widerstände
für Lehr- und Projektionszwecke.
Man verlange Preisliste Nr. 11.

Schotte's Tellurien
in verschied. Grössen und Preislagen von 8 Mk. an. Ausgezeichnet mit der „Silbernen Staatsmedaille".
Ausführl. illustr. Preislisten unserer sämtlichen Lehrmittel gratis u. franko.
Ernst Schotte & Co.
Berlin W. 35, Potsdamerstr. 41a.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Alleiniger Fabrikant: Julius Pintsch, Berlin O., Andreasstrasse 72/73.

Projektions-Apparate
für Schulzwecke.
Man verlange Prospekt: Msch.
Carl Zeiss, Jena.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Eigene Werkstätten.

Kröplin & Strecker
Hamburg-Altona. G. m. b. H.
Physik.-mech. Werkst. Versuchslaborat.
Spezialitäten: Demonstrationsapparate für Universitäten u. Schulen. Funken-Induktoren. Tesla-Apparate. Apparate nach Hertz, Lodge u. Lecher. Stationen f. Funkentelegraphie. Messinstrumente. Techn. Artikel für Industrie u. Sport. Ausarbeitung u. Fabrikation v. Neuh.

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Fabrik phot. Apparate auf Aktien
vormals R. Hüttig & Sohn, Dresden-A. 21
fabrizieren als Spezialität:
Klapp-Kameras — Rollfilm-Kameras
Schlitzverschluss-Kameras
Projektions-Apparate
und liefern sämtl. Zubehör.
Verlangen Sie Katalog Nr. 64.

A. Müller-Fröbelhaus, Dresden
Lehrmittel-Institut
liefert in tadelloser Ausführung
Unterrichtsmittel f. Mathematik, Naturwissenschaften und Physik.
Fachkataloge auf Wunsch.

Naturwissenschaftl. Institut
Wilhelm Schlüter, Halle a. S.
Lehrmittel-Anstalt.
Naturwissenschaftl. Lehrmittel für den Schulunterricht, in anerkannt vorzügl. Ausführung zu mässigen Preisen.
Seit 1890 in mehr als 900 Lehranstalten eingeführt. — Hauptkatalog kostenlos.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Fabrik und Lager
chemischer und physikal. Apparate.
Listen zu Diensten.

A. Krüss, Hamburg
Inhaber Dr. Hugo Krüss
Optisches Institut
Schul-Apparate nach Grimsehl
Spektral- u. Projektions-Apparate
Glasphotogramme.

Verlag von Th. G. Fisher & Co., Berlin W., Bleibtreustr. 20.
Wandtafeln zur allgemeinen Biologie
herausgegeben von
Prof. Dr. V. Haecker, Stuttgart.
Kataloge über unseren gesamten Wandbilderverlag auf Wunsch kostenfrei.

Projektions-Apparate
für Schulen
nebst allem Zubehör; Lichtquellen, Laternbilder in reichster Auswahl.
Kataloge und fachm. Auskunft steht zu Diensten.
Unger & Hoffmann A.-G., Dresden-A. 16.

E. Leitz
optische Werkstätte
Wetzlar.
— Mikroskope —
Projektions-Apparate.

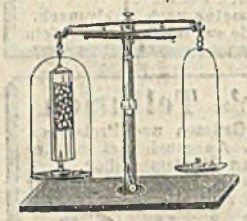
Physikal. Apparate
Ferdinand Ernecke
Hoflieferant Sr. Maj. des deutschen Kaisers
Berlin SW. 46.

Lehrmittel für den Unterricht in Naturkunde u. Zeichnen, in anerkannt vorzügl. Qualität und bedeutendster Auswahl.
Kataloge gratis und franko.
Ernst A. Böttcher
Naturalien- u. Lehrmittel-Anstalt
Berlin C. 2, Brüderstrasse 15.

R. Brendel
Fabrikant botanischer Modelle
Grunewald b. Berlin
Bismarckallee 37.
Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Meiser & Mertig
Dresden-N. 6
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
Chemische Apparate
Preisverzeichnis kostenlos

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert u. a.



sämtliche Apparate zu dem Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht i. d. Chemie v. Prof. Dr. Wilhelm Levin genau nach den Angaben des Verfassers, prompt und billigst.

Verlag
von Otto Salle in Berlin W. 30.

Das Wetter
Monatsschrift für Witterungskunde.
Herausgegeben von
Prof. Dr. R. Assmann,
Abteilungs-Vorsteher im Kgl. Preuss. Meteorologischen Institut.
22. Jahrgang.
Mit kolorierten Kartenbeilagen über die monatlichen Niederschläge nebst den Monats-Isobaren und -Isothermen.
Preis pro Jahrgang von 12 Heften 6 Mk.
Ein Probeheft gratis und franko.

Zur Herstellung von Zeitschriften und Werken
in moderner Satzausf. unter Verwendung leistungsfähiger Maschinen bei koulanter Bedienung u. mässigen Preisen empfehlen sich
H. Sievers & Co. Nachf.
Braunschweig
Gegründet 1845 — Fernsprecher 1449

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.
Der
Beobachtungs-Unterricht
in
Naturwissenschaft, Erdkunde und Zeichnen
an
höheren Lehranstalten
besonders als Unterricht im Freien
von **G. Lüddecke.**
Mit Vorwort von
Prof. Dr. Herm. Schiller.
Preis Mk. 2.40.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme,** Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von **Oskar Lesser,** Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Arithmetik.

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 4. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20 Teil II b (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 2. Aufl. geb. 2 M.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. **H. Servus** in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima). Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. Heussi. 15. verbesserte Aufl. Mit 172 Holzschnitten. Bearbeitet von **H. Weinert.** Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Grundbegriffe der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. **Heussi.** 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. **Leiber.** Preis 5 M.

Chemie.

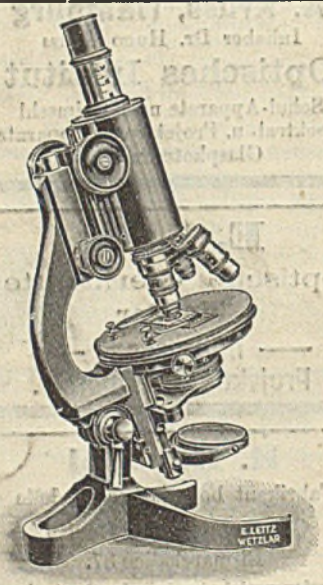
Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. **Wilh. Levin.** 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **H. Weinert.** 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 50 Pf.

Im Verlage von **Quandt & Händel** in **Leipzig** ist in neuer Aufl. erschienen:

Physikalische Demonstrationen

Anleitung zum Experimentieren im Unterricht an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und Gewerbeschulen. Von **Dr. Ad. F. Weinhold,** Prof. an den techn. Staatslehranstalten in Chemnitz. 4. verb. u. verm. Aufl. Mit 4 lith. Tafeln u. gegen 600 Textfig. (In 3 Lfrg.) **1. Lfrg. Preis 9 Mk.**



E. Leitz,
Optische Werkstätte
Wetzlar
Filialen: **Berlin NW.,** Luisenstrasse 45, **New-York, Chicago, Frankfurt a. M.,** Kaiserstrasse 64, und **St. Petersburg,** Woskressenski 11.
Vertreter für München:
Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Mikroskope
Mikrotome
Mikrophotographische Apparate.
Photographische Objektive. Projektions-Apparate.
Deutsche, englische und französische Kataloge kostenfrei.
75000 Leitz-Mikroskope
35000 Leitz-Oel-Immersionen
im Gebrauch.

☞ Hierzu ein Prospekt von **Fr. Ackermann's Verlag** in **Weinheim i. B.,** drei Prospekte von **Friedr. Vieweg & Sohn,** Verlag in **Braunschweig,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.