Jahrgang XII. 1906. No. 1.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten (S. 1). — Die Behandlung der Zykloide in einem angepassten Koordinatensystem. Von Dr. Th. Adrian in Flensburg (S. 1). — Die Bedeutung der Winkeldefinition für das Parallelenproblem. Von Kurt Geissler in Luzern (S. 5). — Negative Flächen im Schulunterricht. Von Oskar Lesser in Frankfurt a. M. (S. 10). — Elementare Berechnung bestimmter Integrale von Potenzen mit ganzen und gebrochenen Exponenten. Von O. Nitsche in Charlottenburg (S. 14). — Die Bazillenvermehrung, ein Beispiel für die Theorie der Potenzen. Von G. Junge in Berlin (S. 16). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [Die sächsischen Fachkreise und die Reform des mathematischen Unterrichts] (S. 17). — Vereine und Versammlungen [Ortsgruppe Berlin und Vororte des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften] (S. 18). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 18). — Bücher-Besprechungen (S. 18). — Zur Besprechung eingetr. Bücher (S. 20). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Anmeldungen von Vorträgen für unsere fünfzehnte Hauptversammlung, die — wie bereits bekannt gegeben — in der Pfingstwoche d. J. zu Erlangen abgehalten werden wird, insbesondere auch von Vorträgen für die Abteilungssitzungen sind auch jetzt noch sehr willkommen. Wir bitten sie bis zum 15. März d. J. an den Hauptvorstand z. H. des Prof. Pietzker zu Nordhausen oder an den Ortsausschuss in Erlangen, z. H. des Herrn Prof. Dr. E. Wiedemann, Direktor des physikalischen Instituts der Universität daselbst, zu richten.

Ferner werden die Vereinsmitglieder in Gemässheit des § 4 der Vereinssatzungen ersucht, den Beitrag für das laufende Jahr 1906, soweit es noch nicht geschehen ist, an den Vereinsschatzmeister (Prof. **Presler** in Hannover, Königswortherstr. 47) einzusenden, ein Postanweisungsformular für diesen Zweck liegt dieser Nummer bei. Die bis zum 1. April d. J. nicht eingegangenen Beiträge werden im Laufe des nächsten Vierteljahres durch Postnachnahme eingezogen werden (§ 5 der Satzungen).

Der Vereins-Vorstand.

Die Behandlung der Zykloide in einem angepassten Koordinatensystem.

Von Dr. Th. Adrian (Flensburg).

In seiner Abhandlung: „Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Kurven durch Gleichungen darzustellen“ hat Pluecker dem Gedanken Bahn gebrochen, eine Kurve durch die Bewegung ihrer Tangente entstehen zu lassen. Er nahm dabei als Ausgangspunkt seiner Entwickelung die allgemeine Gleichung $Ay + Bx + C = 0$ als Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf zwei unter einem beliebigen Winkel sich schneidende Koordinatenachsen. Gibt man den Grössen A, B, C bestimmte Werte, so erhält man eine bestimmte Gerade; fasst man dieselben aber als Veränderliche auf, so ergibt eine Gleichung zwischen ihnen eine einfach unendliche Schar von Geraden, welche eine Kurve einhüllen können, die dann also durch diese Linienschar bestimmt ist. Das reiche Gebiet der Dualitätsbeziehungen, das sich hieraus ergeben hat, soll an dieser Stelle nicht weiter berührt werden; vielmehr liegt mir daran, zu zeigen, dass auch die

Form der Gleichung einer geraden Linie, welche beim elementaren Unterricht vielfach bevorzugt wird, nämlich die Form $y = x \, tg \, \alpha + b$, recht wohl geeignet ist, um darauf ein Spezial-Koordinatensystem zu gründen, das für die Betrachtung einiger Kurven erhebliche Vorzüge bietet.

Sieht man in der letzten Gleichung den Winkel α und die Strecke b als veränderlich an, so ergibt eine Gleichung zwischen diesen beiden eine unendliche Schar von gesetzmässig auf einander folgenden geraden Linien, die ebenfalls als Tangenten eine Kurve bestimmen können. α und b können dann als die Koordinaten einer Geraden aufgefasst werden. Etwas einfacher wird die Sache, wenn man, um die y-Achse ganz auszuschalten, statt der Strecke b die Strecke nimmt, welche die Gerade von der x-Achse abschneidet; diese Strecke kann füglich mit a bezeichnet werden. Die Gleichung einer Kurve wird dann durch eine Gleichung zwischen dem Abschnitt ihrer Tangente auf der x-Achse und dem Winkel, den dieselbe mit der x-Achse bildet, gegeben.

Ich möchte diese Art der Koordinaten als Tangential-Koordinaten bezeichnen; sie bilden in einiger Hinsicht eine Brücke zwischen den gewöhnlichen Koordinaten und den Polar-Koordinaten. Unter den Kurven, die sich im Tangential-System vorteilhaft behandeln lassen, ist in erster Reihe die Radlinie oder Zykloide zu nennen. Bald wird sich zeigen, dass sie in diesem System die Linie erster Ordnung ist, insofern sie durch eine lineare Gleichung zwischen dem Tangentenabschnitt a und dem Tangentenwinkel α dargestellt werden kann.

Bekanntlich ist die Zykloide diejenige krumme Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, wenn dieser, ohne zu gleiten, auf einer festen geraden Linie fortgewälzt wird. Aus dieser Definition ergibt sich in ziemlich elementarer Weise die Richtung einer beliebigen Tangente an die Zykloide, wie folgt:

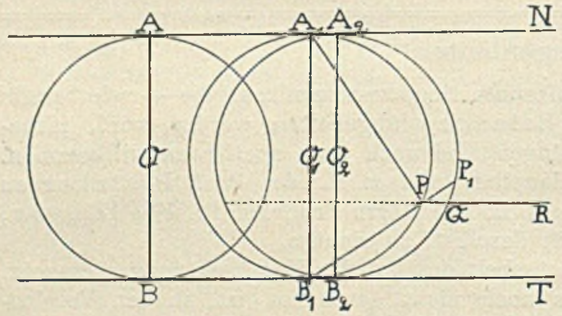


Fig. 1.

Es sei in Fig. 1 AB der Durchmesser des Kreises, welcher auf der Geraden AN rollt. Ist der Kreis in die Lage $A_1 B_1$ gekommen, so hat derjenige Punkt der Peripherie, welcher ursprünglich in B war, die Lage P bekommen, wenn der Kreisbogen $B_1 P$ gleich der Strecke AA_1 oder BB_1 ist. P ist dann ein Zykloidenpunkt. Für den unendlich nahen Zykloidenpunkt P_1 müsste Bogen $B_2 P_1 = BB_2$ sein. Zieht man durch P die Parallele zu BB_2, so ist das Stück PQ bis zur Peripherie des unendlich nahen Kreises gleich $B_1 B_2$. Da man nun aber die unendlich kleine Sehne $P_1 Q$ gleich dem Bogen $P_1 Q$ setzen kann, welcher als Differenz der Bogen $B_2 P_1$ und $B_1 P$ ebenfalls gleich $B_1 B_2$ ist, so ist das kleine Dreieck $PP_1 Q$ gleichschenklig; folglich ist $\sphericalangle P_1 PQ$ gleich der Hälfte des $\sphericalangle P_1 QR$. Die Richtung QP_1 kann als Richtung der Tangente aufgefasst werden, welche durch Q an den Kreis um O_2 gelegt wird. Stellt man durch die Verlängerung von RQ eine Sehne in diesem Kreise her, so ersieht man leicht, dass der Peripheriewinkel über dem doppelten Bogen $B_2 Q$ gleich dem Sehnentangentenwinkel $P_1 QR$ und daher der Peripheriewinkel über dem einfachen Bogen $B_2 Q$ gleich der Hälfte von $\sphericalangle P_1 QR$, also $= \sphericalangle P_1 PQ$ sein muss. Wegen der Kongruenz der Bogen $B_2 Q$ und $B_1 P$ kann man aber für den Peripheriewinkel über dem Bogen $B_2 Q$ den entsprechenden Peripheriewinkel $B_1 A_1 P = \alpha$ einsetzen. Verbindet man nun B_1 mit P, so ist auch $\sphericalangle PB_1 T = \alpha$, folglich liegt PP_1 in der Verlängerung von $B_1 P$. Bezeichnet man A_1 als den entsprechenden Berührungspunkt, B_1 als den entsprechenden Gegenpunkt des Kurvenpunktes P, dann lässt sich das gewonnene Resultat so aussprechen, dass die Tangente an einem beliebigen Zykloidenpunkte durch den entsprechenden Gegenpunkt geht, während die Senkrechte darauf, die sogenannte Normale, den entsprechenden Berührungspunkt passiert.

Betrachten wir die Zykloide als die Enveloppe, die Hüllbahn ihrer Tangente, so ist jede Tangente durch den Winkel α und durch die Strecke BB_1 bestimmt, welche von der Tangente auf der Geraden BT abgeschnitten wird; letztere ist passend als Achse zu nehmen. Bezeichnen wir BB_1 mit x, ferner den Radius des rollenden Kreises mit r, so geht die Gleichung: Strecke $BB_1 =$ Kreisbogen $B_1 P$, da der zu dem letzteren Bogen gehörige Zentriwinkel gleich 2α ist, in die Form $x = r \cdot 2\alpha$ oder $x = 2 r \alpha$ über. Wir haben also eine einfache Gleichung ersten Grades zwischen dem abgeschnittenen Achsenstück und dem Tangentenwinkel erhalten. x und α nennen wir dann also die Tangential-Koordinaten einer Zykloidentangente und, da jede Tangente einen Berührungspunkt hat, des betreffenden Zykloidenpunktes. Die Länge der Tangente vom Berührungspunkt bis zur Achse lässt sich durch diese beiden Koordinaten auch ziemlich einfach ausdrücken, denn sie ist, wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $A_1 B_1 P$ ergibt, gleich $2 r \sin \alpha$.

Mit diesen Mitteln gestaltet sich die Betrachtung über den Verlauf der Kurve zu einer sehr bequemen. Für den Anfangspunkt B sind beide Koordinaten gleich Null, also ist die Achse BT selbst Tangente (Fig. 2).

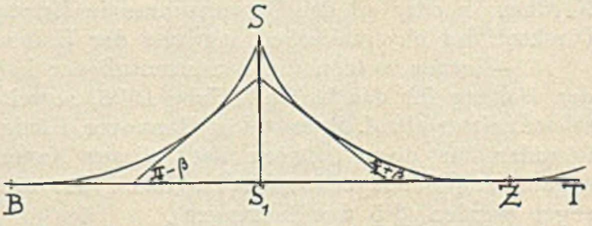


Fig. 2.

Dann wächst der Tangentenwinkel direkt proportional mit dem Abschnitt auf der Achse; aus dem Wachsen geht unmittelbar hervor, dass die Kurve der Achse ihre konvexe Seite zukehrt. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $x = r \pi$ gleich dem halben Umfange des rollenden Kreises. Für den zugehörigen Punkt S hat die Tangente $SS_1 = 2 r \sin 90^0$ den grössten Wert, den sie überhaupt erreichen kann, nämlich $2r$. Die ganze Kurve verläuft also zwischen der Achse und ihrer Parallelen im Abstande $2r$. Dass im Punkte S eine sogenannte Spitze entsteht, wird sich nachher deutlicher aus der Betrachtung des Krümmungsradius ergeben. Der absteigende Teil der Kurve hinter S muss mit dem aufsteigenden in bezug auf SS_1 symmetrisch liegen, denn den beiden Werten $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ und $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ entsprechen zwei symmetrische Punkte auf der Achse und zwei gleich lange Tangenten (s. Fig. 2). Für $\alpha = \pi$ hat die Kurve im Punkte Z wieder die Achse erreicht und berührt dieselbe ebenso wie in B. Der erste Zweig der Kurve ist beendet, ein zweiter kongruenter kann beginnen.

Die Quadratur der Zykloide macht sich mit unseren Koordinaten in folgender Weise ziemlich leicht.

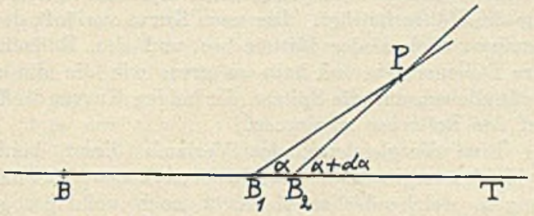


Fig. 3.

Es sei P ein Zykloidenpunkt (Fig. 3), welcher sich aus zwei unendlich nahen Tangenten mit den Koordinaten α und x, $\alpha + d\alpha$ und $x + dx$ als Schnittpunkt ergibt. Dann ist $\sphericalangle B_1PB_2 = d\alpha$, die Länge der Tangente B_1P aber, wie wir schon wissen, $= 2r \sin \alpha$. Da wir die beiden endlichen Linien B_1P und B_2P als gleich betrachten und den Sinus des unendlich kleinen eingeschlossenen Winkels gleich $d\alpha$ setzen können, so ergibt sich die Fläche des Dreiecks $B_1PB_2 = \frac{1}{2}(B_1P)^2 \cdot d\alpha = 2r^2 \sin^2\alpha\, d\alpha$. Also ist die Fläche, welche von dem Zykloidenbogen, der Achse und der Tangente mit den Koordinaten α und x gebildet wird, $F = \int 2r^2 \cdot \sin^2\alpha\, d\alpha = 2r^2 \int \sin^2\alpha\, d\alpha = 2r^2\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) = r^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$. Wird die Integration zwischen den Grenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ ausgeführt, so verschwindet beide Male das zweite Glied, und es ergibt sich für die Fläche, die zwischen einem ganzen Zweige und der Achse liegt, der Wert $r^2\pi$; diese Fläche ist also gleich derjenigen des rollenden Kreises. Durch Subtraktion folgt dann, dass die Fläche zwischen der Gleitlinie und dem ganzen Zykloidenbogen den Wert $3r^2\pi$ hat.

Was nun den Krümmungsradius für einen beliebigen Punkt des Zykloidenbogens anbetrifft, so ist bei der Ableitung desselben davon auszugehen, dass die Normale in einem Zykloidenpunkt durch denjenigen Punkt geht, in welchem der zugehörige Kreis die Gleitlinie berührt.

In Fig. 4 seien A_1 und A_2 diese Punkte für zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Kurvenpunkte P und P_1. Der Krümmungsmittelpunkt für den unendlich kleinen Bogen PP_1 ist dann der Punkt K, wo die Verlängerungen von PA_1 und P_1A_2 sich schneiden. Zieht man $PQ \parallel A_1A_2$ und verbindet Q mit A_2, dann ist A_1PQA_2 ein $\#$, folglich $A_2Q \parallel A_1P$. Da die letztere Linie Normale ist, so muss A_2Q auch senkrecht auf der kleinen Sehne PP_1 stehen, und es ergibt sich aus der Gleichschenkligkeit des kleinen Dreiecks PP_1Q, auf welche schon bei der Betrachtung von Fig. 1 hingewiesen wurde, dass PP_1 durch A_2Q halbiert wird. Daraus folgt aber sofort, dass A_2 der Halbierungspunkt von KP_1 und demgemäss $KP_1 = 2A_2P_1$ ist. Der Krümmungsradius in einem beliebigen Zykloidenpunkte wird also konstruiert, indem man die Normale durch den zugehörigen Gleitpunkt zieht und diese Verbindungsstrecke um sich selbst verlängert. Durch die Koordinaten ausgedrückt ist der Krümmungsradius $\varrho = 4r\cos\alpha$. Für die Punkte $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$ usw., also für die Punkte, wo die Zykloide die Achse berührt, hat der Krümmungsradius den grössten Wert $= 4r$; im weiteren Verlaufe nimmt er ab und hat für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ usw. den Wert 0, so dass dort also Spitzen entstehen.

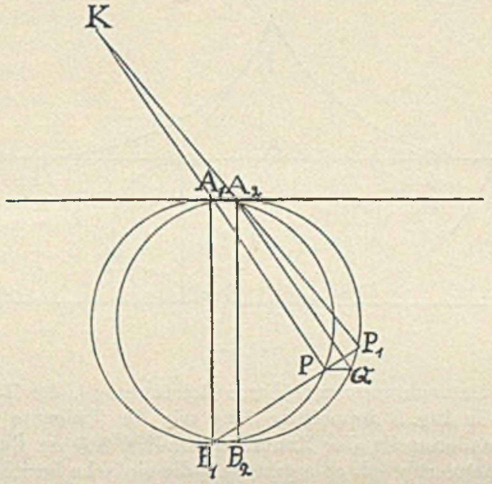


Fig. 4.

Ohne besondere Schwierigkeit lässt sich dann mit Hilfe des Krümmungsradius auch der Bogenwert berechnen. Bezeichnen wir das unendlich kleine Bogenstück PP_1, welches wir hierbei als identisch mit der zugehörigen Sehne betrachten können, mit ds, so ergibt sich (Fig. 4) aus dem Dreieck PP_1K unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Winkel an PP_1 als rechte aufgefasst werden können und dass zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Normalen um denselben unendlich kleinen Wert von einander abweichen wie die zugehörigen Tangenten, aus dem Sinussatz die Proportion: $ds : \varrho = d\alpha : 1$, also $ds = \varrho\, d\alpha$. Da aber ϱ, wie schon erwiesen, den Betrag $4r\cos\alpha$ hat, so erhält man für den Bogen die Gleichung:

$$s = 4r \int \cos\alpha\, d\alpha = 4r\sin\alpha.$$

Indem wir uns erinnern, dass BP, d. h. die Tangente im Punkte P, den Wert $2r\sin\alpha$ hat, erhalten wir für unsere Lage der Zykloide die einfache Beziehung, dass der Bogen vom Anfangspunkt bis zum Punkte P doppelt so lang ist wie der Tangentenabschnitt von demselben Kurvenpunkt bis zur Achse. Der halbe Zykloidenbogen ist demgemäss $= 4r$, der ganze $= 8r$.

Von der Betrachtung, die wir mit Hilfe von Fig. 4 über die Lage des Krümmungsmittelpunktes angestellt haben, führt ein kurzer Weg zu dem wichtigen Satze, dass die Evolute, d. h. der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte, wieder eine Zykloide ist. Die Normalen der Hauptkurve sind nämlich Tangenten der Evolute; der Punkt K, als Punkt der Evolute betrachtet, ist also der Schnittpunkt der beiden unmittelbar aufeinanderfolgenden Tangenten KA_1 und KA_2. Betrachtet man nun in Fig. 5 zur Bestimmung der Gleichung der

Evolute die Rollachse AN als x-Achse und verlegt den Anfangspunkt der Koordinaten auf U, so dass AU gleich der halben Kreisperipherie, also $= r\pi$ ist, so sind die Tangential-Koordinaten des Punktes K erstens $x_1 = UA + AA_1 = r\pi + x$, zweitens $\sphericalangle KA_1N = \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Verwandelt man nun die Gleichung der Hauptkurve. durch Addition von $r\pi$ in die Gleichung: $r\pi + x = r\pi + 2r\alpha = 2r\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, so hat man: $x_1 = 2r\beta$, d. h. der Krümmungsmittelpunkt K bewegt sich auf einer Zykloide, welche der Hauptkurve kongruent ist; einem aufsteigenden Teil der Hauptkurve entspricht dabei ein absteigender Teil der Evolute und umgekehrt.

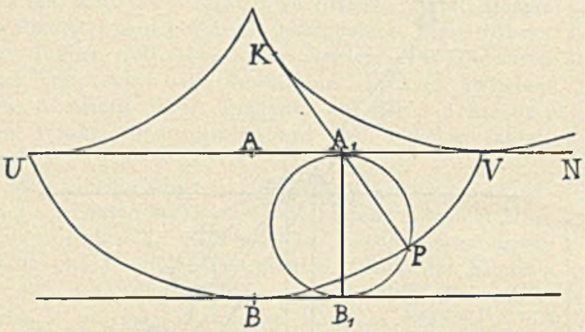


Fig. 5.

Da nach unseren früheren Betrachtungen der Bogen KV in Fig. 5 doppelt so lang wie die Tangente KA_1 ist, andererseits der Krümmungsradius KP im Punkte A_1 halbiert wird, so ergibt sich die einfache Beziehung, dass der Krümmungsradius KP gleich dem Evolutenbogen KV ist. Bekanntlich hat man darauf hingewiesen, dass diese Eigenschaft praktisch für ein Zykloidenpendel verwertet werden könne.

Wie in dem Falle der Zykloide und ihrer Evolute, so lassen sich auch in manchen anderen Fällen für die Beziehungen zweier Zykloiden zu einander aus den Tangential-Koordinaten Vorteile ziehen. Dies soll hier noch an einem Beispiele gezeigt werden.

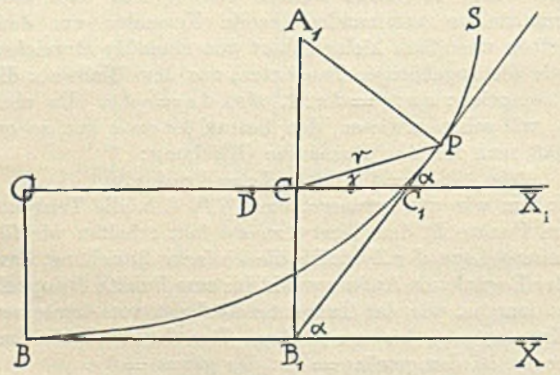


Fig. 6.

In Fig. 6 nehmen wir der einfacheren Ableitung wegen den Zykloidenpunkt P oberhalb der Mittelachse OX_1 an. Wenn nun PB_1 die Tangente im Punkte P ist, so sind $BB_1 = x$ und $\sphericalangle PB_1X = \alpha$ die Koordinaten von P. Nimmt man auf der Mittelachse OX_1 den Punkt C so an, dass seine Entfernung von $P = r$ ist, so muss, wie auch der Vergleich mit Fig. 1 zeigt (dort entspricht O_1 dem Punkte C), ein Kreis um C mit r die Achse BX in B_1 berühren und $\sphericalangle B_1CP$ als Zentriwinkel in diesem Kreise $= 2\alpha$ sein. Demgemäss hat $\sphericalangle PCX_1 = \gamma$ den Wert $2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Indem der Radius CP während des Rollens seine Lage ändert, wird er eine gewisse Kurve einhüllen, die wir sogleich als Zykloide erkennen werden. Für sie muss füglich OX_1 als x-Achse genommen werden. Da nun $OC = BB_1 = x$, andererseits $x = 2r\alpha$ ist, so ist auch $OC = 2r\alpha - r\frac{\pi}{2} + r\frac{\pi}{2} = r\gamma + r\frac{\pi}{2}$. Eine Verlegung des Anfangspunktes von O nach D, wobei $OD = r\frac{\pi}{2}$ ist, ergibt dann $DC = r\gamma$ als Gleichung einer Zykloide, deren Höhe im Vergleich mit der ursprünglichen Zykloide $x = 2r\alpha$ nur die Hälfte beträgt. Die neue Kurve verläuft demgemäss zwischen der Mittelachse und der Rollachse, ihre Dimensionen sind halb so gross wie die der ursprünglichen, und die Spitzen der beiden Kurven treffen auf der Rollachse zusammen.

Eine Vergleichung des Verlaufs dieser beiden Zykloiden ergibt nun gewisse bemerkenswerte Folgerungen, welche bisher vielleicht noch nicht gezogen sind. Um zu ihnen zu gelangen, vertauschen wir das Verhältnis der beiden Kurven und gehen von der kleineren Zykloide aus. (Fig. 7).

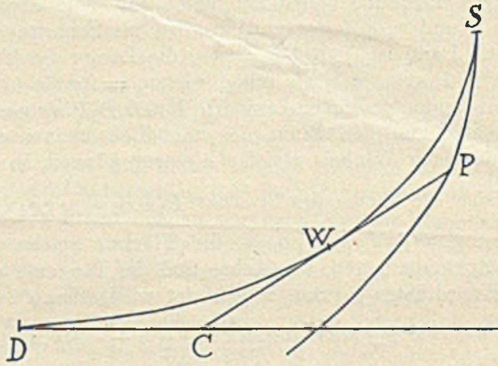


Fig. 7.

1. Bezeichnen wir den Punkt der kleineren Zykloide, welcher dem Punkte P der grösseren entspricht, mit W und berücksichtigen wir, dass $CP = r$ ist, so ergibt sich der Satz:

Zieht man in einem beliebigen Zykloidenpunkt W die Tangente, welche die x-Achse in C schneidet und trägt von C aus auf die Tangente eine Strecke gleich der Höhe der Zykloide ab, so ist der Ort der Endpunkte P wieder eine Zykloide, deren Dimensionen doppelt so gross sind wie die der ursprünglichen.

2. Nach den vorhergehenden Erörterungen ist der Abschnitt der Zykloidentangente bis zur x-Achse gleich der Höhe der Zykloide mal dem Sinus des Tangentenwinkels. Demgemäss ist $CW = r \sin\gamma$ und $WP = r - r \cdot \sin\gamma$. Andererseits ist aber der Zykloidenbogen WS gleich der Differenz der Bogen DS und DW, also $= 2r - 2r \sin\gamma$. Da also der Bogen WS doppelt so lang wie die Strecke WP ist, so kann man sagen:

Die Verlängerungen der Zykloidentangenten um eine Strecke gleich der halben Länge des Bogens von dem betreffenden Punkt bis zur Spitze ergeben als Ort der Endpunkte eine zweite Zykloide von doppelten Dimensionen.

3. Soll man durch einen Punkt ausserhalb der Zykloide an dieselbe eine Tangente legen, so ergibt sich eine besonders einfache Konstruktion für den

Fall, dass dieser Punkt P auf einer zweiten Zykloide von doppelten Dimensionen und mit zusammentreffender Spitze wie in Fig. 7 liegt. Alsdann hat man nur um P mit einer Zirkelöffnung gleich der Höhe der Zykloide einen Kreisbogen zu beschreiben und den auf der x-Achse erhaltenen Schnittpunkt C mit P zu verbinden.

Die vorstehenden Ausführungen werden vielleicht genügen, um dem Tangenten-Koordinatensystem einige Beachtung zuzuwenden. Der Nutzen, den dasselbe bietet, ist aber nicht auf die Zykloide beschränkt. Auch manche andere Kurve lässt sich in diesem System behandeln. Für die Parabel z. B. gilt die einfache Gleichung $x = a\, tg\, a$, wenn die Scheiteltangente als x-Achse und der Scheitelpunkt als Anfangspunkt genommen wird; der Parameter der betreffenden Parabel ist dabei gleich $4a$. Zwei interessante höhere Kurven werden durch die Gleichungen $x = a \sin a$ und $x = a \cdot \cos a$ gegeben; von diesen ist die zweite Kurve die Evolute der ersten. Ueberhaupt ist für die Aufstellung von Evoluten-Gleichungen und die Diskussion derselben, wie sich leicht einsehen lässt, das Tangentialsystem sehr günstig. Mit seiner Hilfe kann man sich auch an die Kaustiken einiger Kurven heranwagen, welche in rechtwinkligen Koordinaten durch sehr spröde Gleichungen einer Bearbeitung zu trotzen versuchen.

Die Bedeutung der Winkeldefinition für das Parallelenproblem.

Von Kurt Geissler (Luzern).

Man braucht keinem Mathematiker auseinander zu setzen, warum die Definition falsch sei: Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit rechten Winkeln und gleichen Diagonalen. Ja für keinen ordentlichen Schüler, der Unterricht in der Lehre vom Parallelogramm hatte, darf diese Frage zu schwer sein. Anders steht es mit gewissen Erklärungen, welche viel früher in der Schule vorkommen. Was sind Gerade, was ist ein Punkt, was sind parallele Linien? Wie kann man selbst heute eine zweifellos richtige Antwort auf diese Fragen verlangen, die den Mathematikern noch so viel Kopfzerbrechen verursachen? Als vierte scheinbar leichte, in Wahrheit, wenn sie ausreichend aussprechbar sein soll, schwere Vorstellung kommt dazu der Winkel. Wir werden sehen, dass diese vier auf das Innigste mit dem Parallelenproblem verknüpft sind und zwar alle vier wie dieses mit der Vorstellung vom Unendlichen. Mit Benutzung meiner Lehre von den Weitenbehaftungen sei es mir gestattet, über den letzten dieser Begriffe, über den ich früher einmal ausführlicher schrieb[1], Neues mitzuteilen, insbesondere über den Zusammenhang der Winkelvorstellung mit dem Parallelenproblem, und dabei die Formulierung zu benutzen, welche ich aus manchen Gründen den ersten drei Begriffen gab.

Parallele sind Gerade, welche einen unendlichfernen Punkt gemeinsam haben; damit werden die meisten heutigen Mathematiker einverstanden sein. Viele halten den unendlichfernen Punkt nur für einen einfachen Ausdruck, dem kein wirklich anschaulicher Sinn innewohne, andere halten das Unendliche für geometrisch vorstellbar und jenen Punkt für einen richtigen Punkt. Was ist aber ein richtiger Punkt? Statt auf die Streitigkeiten oder gar auf die Ansicht derer hier einzugehen, welche für die Grundbegriffe überhaupt keine Definition geben wollen, sondern erst durch die Axiome die Begriffe allmählich näher definieren wollen, will ich kurz anführen, dass man jedenfalls ohne Widerspruch sich Folgendes vorstellen kann. Ein Punkt, den man sich in der Geometrie endlicher Raumgebilde z. B. bei Dreiecken endlicher Seitenlänge vorstellt, hat keine endliche Ausdehnung. Bei Heranziehung des Unendlichkleinen, wie es z. B. bei Vorstellungen über Berührung nötig oder wenigstens möglich und klärend ist, könnte ein endlicher Punkt, eine Stelle der Berührung, ausgedehnt vorgestellt werden, z. B. als eine unendlichkleine Berührungsstrecke. Ich würde nun sagen: Bei gemischter Weitenbehaftung d. h. gleichzeitiger Vorstellung endlicher Grössen und unendlichkleiner, ist der endliche Punkt zwar noch etwas Ausgedehntes, aber nur ausgedehnt im Unendlichkleinen, in niederer Weitenbehaftung; in dieser ist er, versehen mit der Vorstellung der Begrenzung, etwa als kleine begrenzte Strecke, kein Punkt; für das Endliche aber ist er ein Punkt, indem man ihn als unendlichklein ausgedehnt, aber ohne Grenzen (die ja für das Endliche keine Bedeutung haben) sich vorstellt. Kurz der Punkt, definiert immer nur für eine bestimmte Weitenbehaftung z. B. für das Endliche, ist das Grenzenloskleine der niederen Weitenbehaftung, z. B. des Untersinnlichvorstellbaren. Dazu passt gut, dass jede endliche Grösse neben einer unendlichen in ihrer Grösse verschwindet, also für das Unendlichgrosse ein Punkt ist, falls man dabei an eine Begrenzung nicht mehr denkt, vielmehr diese endliche Grösse wie eine Stelle als Begrenzung des Unendlichen nimmt. Es passt auch gut dazu, dass eine unendlichkleine Strecke oder auch ein unendlichkleines Dreieck für das Endliche, wenn man die Vorstellung der Begrenzung hier fortlässt, ein Punkt ist, aber doch, sobald man die unendlichkleine Ausdehnung wieder heranzieht und auch die Begrenzung innerhalb des Unendlichkleinen, wieder durch Punkte, die Endpunkte oder Eckpunkte begrenzt wird. Diese Punkte, gültig für das Unendlichkleine als Punkte, sind dann das Grenzenloskleine der nächstniedrigen Weitenbehaftung: des Unendlichkleinen zweiter Ordnung δ^2 usw. Natürlich kann ein Punkt auch für mehrere Weitenbehaftungen zugleich scharf definiert werden, der Punkt des Endlichen, bei dem eine endliche Strecke beginnen soll, kann zugleich als Anfang einer ins Unendliche gehenden Verlängerung dieser Strecke gefasst werden usw.

Die von manchen Seiten gegen die Erklärung der Geraden als der Kürzesten vorgebrachten Gründe können mich nicht veranlassen, eine solche Erklärung für falsch zu halten. Das Folgende wird ganz von selbst auch davon zu sprechen haben. Jedenfalls aber ist nach vorstehender Definition des Punktes stets hinzuzufügen, was denn die beiden Punkte nach den Behaftungen seien, zwischen denen man sich die kürzeste Linie vorstellen soll. Im Endlichen wird man Verkürzungen von irgendwie langen, aber endlichen Wegen zunächst nur um Endliches annehmen, also eine endliche Gerade eine solche Linie nennen, die zwei endliche Punkte verbindet und nicht mehr um Endliches verkürzbar ist. Dann kann diese endliche Gerade noch ganz wohl bei Heranziehung des Unendlichkleinen einen unendlichkleinen Umweg machen z. B. durch einen Punkt gehen, (Punkt hier wieder entsprechend definiert) der um unendlichwenig ausserhalb einer Verbindung liegt, die nicht mehr um Unendlichkleines vermindert werden kann, also für das Endliche und

[1]) Siehe: „Der Winkel und das Unendliche", Unterrichtsbl. f. Math. und Naturw. IX, 1903 Nr. 1 und 2.

Unendlichkleine erster Ordnung zugleich eine Gerade ist (genannt Gerade zweiten Grades[2]). Man merkt wohl schon, dass für das Parallelenproblem die Definition der Geraden, die dabei vorkommen sollen, von Wichtigkeit ist. Verlängert man eine endliche Gerade in das Unendliche, so muss man, wenn man genau sein will[3]), nach der Lehre von den Weitenbehaftungen feststellen, ob solche unendliche Gerade als ersten Grades vorgestellt werden soll, [so dass sie um Unendlichgrosses als Weg zwischen zwei unendlichentfernten Punkten nicht mehr verkürzt werden kann] oder als zweiten Grades, so dass sie auch um Endliches nicht mehr verkürzt werden kann usw. Das hat die grösste Wichtigkeit für alles, was man über jene zuerst vorgestellte endliche Gerade und deren Verlängerung ins Unendliche etwa beim Parallelenproblem folgern will. Dass selbst eine wellenförmige oder treppenförmige Kurve, falls die Unterscheidung der Wellen oder Stufen nur für das Endliche gilt, für das Unendliche eine Gerade, natürlich dann nur ersten Grades sein kann und dass man mit entsprechender genauer Unterscheidung wichtige mathematische Fragen in neuer Weise lösen kann, habe ich an anderem Orte zu zeigen gesucht[4]).

Was sind nun parallele Grade? Man hat nicht selten darauf hingewiesen, dass folgende Definition nicht statthaft sei: Parallele sind solche, die ein gemeinsames Lot haben (in den Endpunkten einer geraden endlichen Strecke senkrecht stehen). Es könnte ja vielleicht sein, dass zwei solche Gerade doch im Endlichen einen Schnittpunkt hätten; es sei ja gerade ein Grundsatz, ein Axiom (nicht aber eine Definition), dass die beiden Geraden, falls die Innenwinkel supplementar sind, sich in endlicher Entfernung nicht schneiden. Solche ein gemeinsames Lot besitzende Gerade brauchten also vielleicht (falls man von Sätzen absieht oder eine Geometrie mit anderem Axiom annimmt) nicht parallel zu sein. Die Definition wäre dann zu dürftig. Wenn man andererseits definiere, Parallele seien solche Gerade, die überall von einander gleichen Abstand hätten, so stimme auch dies nicht, es könne ja vielleicht sein, dass zwei Gerade sich einander näherten und sich doch niemals oder im Endlichen nicht schnitten. Danach enthalte diese Definition zu viel und schlösse schon einen Satz ein. Man sieht, es läuft immer wieder auf die Vorstellung hinaus, dass Parallele sich im Endlichen nicht schneiden dürften; zugleich sieht man, dass die Definition der Parallelen danach Rücksicht nehmen soll auf die Eigentümlichkeit der Geraden, also auf eine etwaige Möglichkeit, zwei Gerade sich immer mehr nähern zu lassen, ohne dass sie sich im Endlichen schneiden, etwa asymptotisch wie eine Gerade und eine „Krumme der euklidischen Geometrie“.

Bei den vorkommenden Vorstellungen von Abständen zwischen beiden Geraden und vom gemeinsamen Lote bezüglich rechten Winkeln, überhaupt beim Parallelenaxiom kommt immer die Vorstellung des Winkels vor und muss demnach wohl von wesentlicher Bedeutung sein. Nun schliesst aber die Definition des Winkels grosse Schwierigkeiten in sich. Soll man etwa wie Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie, auf die Definition verzichten, nur vom System zweier Geraden sprechen, ohne auch diese Wörter zu definieren? Es ist, wie es zunächst scheint, vorteilhaft, die Definitionsstreitigkeiten herauszulassen, um ohne sie zu einem Aufbau der Geometrie zu kommen. Man darf auch nicht verlangen, dass bei einem solchen Versuche die Definitionen als für alle Zeiten sicher und lückenlos von vornherein gegeben werden. Lässt man in der Definition der Grundbegriffe in richtiger Weise gewissen Spielraum, so ist es wohl denkbar, dass sich derselbe nachträglich füllt bei weiterer Ausarbeitung, weiterer Klärung, und dass so diese Klärung zur Erklärung beiträgt. Aber freilich darf der Verzicht auf vollkommene anfängliche Definition auch nicht dazu benutzt werden, um die Tatsächlichkeit von verschiedenen Möglichkeiten nachträglich zu behaupten, die bloss durch die Lückenhaftigkeit der Definitionen rein formal offen gehalten werden. Eine geometrische Definition ohne irgendwelche Existenz wenigstens in der Vorstellung, kann nur mit Gewalt zur Geometrie gerechnet werden; oder es wird diejenige Geometrie, welche im wirklichen Raume oder in irgend einer vorstellbaren Räumlichkeit vorhanden ist, ihres existenzialen Charakters beraubt und zu einer Formalität gemacht. Man müsste, wenn man Derartiges vornimmt, stets betonen, dass die wirkliche d. h. auch wirklich vorstellbare Geometrie eine Art der Existenz besitzt, die sie ganz entschieden über die übrigen rein formalen Zusammenstellungen erhebt. Definiert man geometrische Grundbegriffe, welche den Charakter der eigentlichen Geometrie haben und das Wort „Räumlich“ ohne Zwang verdienen sollen, so wird man bei einer zuerst lückenhaften Definition feststellen müssen, dass diese Lückenhaftigkeit nicht nach Belieben, sondern nach dem Massstabe der räumlichen Tatsächlichkeit ausgefüllt wird. Vermag man solchen Spielraum von vornherein genau anzugeben, so um so besser für die Exaktheit des Folgenden.

Durch die Zulassung der Vorstellung von unter- und übersinnlichen räumlichen Grössen mit bestimmten, nicht willkürlichen Gesetzen will die Lehre von den Weitenbehaftungen von vornherein einen gewissen Spielraum lassen. Sie will den Punkt, die Gerade, die Parallelen, den Winkel zwar für das Endliche ausreichend definieren, zugleich aber auch diejenige Erweiterung andeuten, welche man mit diesen Begriffen vornehmen kann, wenn es sich um Probleme handelt, die durchaus nicht des Unendlichen entraten können. Danach ist auch der Winkelbegriff gleich anfänglich zu prüfen und festzustellen, nicht durch blosse, erst später in verschiedener Art auszudeutende Wörter wie etwa System. In dem zuerst genannten Aufsatze über den Winkel suchte ich zu zeigen, dass man zur Definition messbarer Winkel die unendlichkleinen Stücke des endlichen Kreises heranziehen muss, z. B. ein solches, für das Endliche und Unendlichkleine erster Ordnung als gerade auffassbares unendlichkleines Stück des Umfanges durch zwei Radien mit dem Mittelpunkte verbinden kann und ein Dreieck gemischter Weitenbehaftung bekommt. Unendlichviele solcher sich an einander schliessender Dreiecke (wie? Siehe gen. Aufsatz!) geben einen endlichen Winkel. Ebensowohl kann man sich einen unendlichgrossen Kreis um den Winkelpunkt herum vorstellen, endliche Streckchen desselben mit dem Mittelpunkte verbinden und einen

[2]) Vergl. meinen Aufsatz: Die geometrischen Grundvorstellungen und Grundsätze und ihr Zusammenhang; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinig. XII 1903, H. 5.

[3]) Näheres in meiner Einführung in die Lehre von den Weitenbehaftungen in: Die Kegelschnitte und ihr Zusammenhang durch die Weitenbeh. H. W. Schmidt, Jena 1905; 5 M.

[4]) Vergl. Die Grenzkurve nach der Lehre v. d. Weitenbeh., Mathem. Naturw. Blätter, Juni 1905.

endlichen Winkel auf dem unendlichen Kreisumfange als Summe unendlichvieler solcher Dreiecke (natürlich in Graden) ablesen. Durchschneiden sich zwei Kurven, so bilden sie daselbst den Winkel, den ihre Tangenten bilden. Wie lang hat man sich letztere vorzustellen? Nimmt man in der Vorstellung unendlichkleine Stückchen dieser endlichen Kurven als gemeinsam mit ihren Tangenten, so könnte man sagen, diese Stückchen der Kurven selbst bildeten diesen Winkel, und in Gedanken unendlichkleine Kreise um den Schnittpunkt (natürlich Punkt genau genug definiert!) zur Winkelmessung beschreiben. Man wird da sagen, dass doch auch die Radien dieser Kreise bis zu endlicher Länge verlängert werden könnten und zur brauchbaren Ablesung auch müssten, dass man also ebenso gut einen endlichen Kreis nehmen könnte oder einen unendlichen usw., je nachdem wie lang man sich die Tangenten vorstellen will. Solche Kreise verschiedener Weitenbehaftung hätten dann, wie man sagen würde, eine ähnliche Lage, die Dreiecke gemischter Behaftung z. B. mit zwei endlichen und mit zwei unendlichen Radien seien ebenfalls ähnlich. Dieser Einwurf oder diese Bemerkung darf bei Besprechung des Parallelenproblems nicht unberücksichtigt bleiben. Bekanntlich hat man schon lange das Euklidische Axiom der einzigen Parallelen gleichgesetzt mit der Möglichkeit über irgend einer Strecke ein zu einem gegebenen ähnliches Dreieck zu konstruieren. Verlängert man z. B. die Seite AB eines Dreiecks ABC über B hinaus bis zu einenem Punkte B_1 und konstruiert ein ähnliches Dreieck AB_1C_1, so sei dies gleichbedeutend mit der Möglichkeit, nur eine einzige Parallele durch B_1 zu BC_1 zu legen, d. h. den Winkel B in B_1 anzutragen und damit auch ganz sicher zu einem Schnitte des neuen Schenkels mit der verlängerten Geraden AC zu gelangen. Gäbe es einen solchen Schnitt C_1 in einer Geometrie etwa nicht, so gäbe es damit auch das Parallelenaxiom nicht. Entsprechend ist auch die Vorstellung einer nichteuklidischen Geometrie, in welcher ein bestimmtes Dreieck, wenn es verschoben wird, nicht seine Grösse beibehält, wenn es in der Seitenlänge vergrössert wird, nicht seine Winkel behält usw. Ich muss hier, freilich im Gegensatze zu vielen Mathematikern Folgendes behaupten. Wenn ein Dreieck bestimmter Grösse verschoben wird und durch blosse Verschiebung am neuen Orte andere Winkel haben soll oder andere Seitengrösse, so setzt diese Vorstellung voraus, dass man sich am neuen Orte auch dieselbe Grösse wie vorher vorstellen kann. Wie könnte man überhaupt ohne solche Fähigkeiten von anderem Orte und von a n d e r e r Grösse sprechen? Damit aber läuft die Verschiebung mit Veränderung nur darauf hinaus, sich am neuen Orte nicht mehr dasselbe Dreieck, sondern ein verändertes, anderes vorzustellen, welches da sitzt, wo auch, der Vorstellung nach, sehr wohl ein gleiches wie vorher sitzen könnte. Es wird die Geometrie in jener Auffassung zu einer Physik, die geometrischen Figuren werden gewissermassen zu elastischen Körpern, die durch eine geheime Kraft ihre Ausdehnung ändern, wenn man sie fortrückt. Solche geheime Kraft kann entweder in den physikalischen Eigenschaften der Körper selbst liegen oder in der sonderbaren Konstruktion oder der Mechanik des Spielraumes, in dem sie sich bewegen sollen. Wenn zum Beispiel ein weicher Körper sich im weiten Ende eines nicht ausdehnungsfähigen starren Trichters befindet und hineingeschoben wird, so zwingt ihn die starre Wand des Trichters zur Formveränderung. Aber das ist, wie gesagt, nicht geometrisch, und der starre Trichter ist gar nicht mehr verständlich, wenn er sich nicht in einem Raume befindet, der auch Weichheit zulässt oder der auch einen sich nicht verjüngenden schlauchartigen starren Körper anstatt des Trichters in der Vorstellung zulässt.

Wenn man sagt, es könne die Gerade auch so vorgestellt werden, dass sie in sich zurückkehrt, so hat dies Insichzurückkehren keinen Sinn ohne die entgegengesetzte Vorstellung, also nur geometrische Bedeutung durch Vorstellung etwa einer Kugeloberfläche, auf der sich die Linie befindet. Die Vorstellung solcher Kugeloberfläche aber ist unmöglich und sinnlos, wenn diese Kugel sich nicht als solche in einem Raum befindet, in dem sie z. B. Tangenten haben kann, also Gerade, die sich von der Kugeloberfläche entfernen. Nach der Lehre von den Weitenbehaftungen kann eine endliche Gerade sich sehr wohl im Unendlichen kreisartig krümmen, sie stellt dann aber für das Unendliche einen Kreis vor und nur für die Behaftung bloss mit dem Endlichen eine (endliche) Gerade. Zwei Kreise mit unendlichgrossem Radius können sich schneiden, so dass das gemeinsame Flächen-Stück an der breitesten Stelle nur endliche Breite hat. Für endliche Weitenbehaftung d. h. für die Vorstellung einer Gegend von endlicher Ausdehnung, welche keinen der Schnittpunkte mit hereinzieht, sondern nur eine Stelle mit endlicher Entfernung, sind die beiden daselbst betrachteten Kreisstücke als (endlich) gerade anzusehen und zwar als solche Gerade, die sich im Endlichen nicht schneiden, also als endliche Parallele. Gleichwohl haben sie bei Heranziehung der genannten Vorstellung höherer Behaftung sogar zwei Schnittpunkte.

Ich komme damit auf die Definition der Parallelen zurück. Sollen die beiden Geraden überall gleichen Abstand haben, so ist jedenfalls hinzuzusetzen, dass dieser Abstand nur mit dem Endlichen behaftet ist, indem derselbe sehr wohl sich beim Fortgehen um unendlichkleine Stücke verändern kann. Auch ist wohl anzugeben, inwiefern, für welche Behaftungen und welchen Grad sich diese Geraden vom Krummen unterscheiden sollen. Es können zwei im Endlichen betrachtete Gerade als parallel definiert werden, mit Heranziehung des Uebersinnlichvorstellbaren, indem sie sich im Endlichen nicht schneiden sollen, aber wohl im Unendlichen erster oder auch erst zweiter Ordnung usw. Man hat auf diese Weise erreicht, dass man irgend welche betrachtete Gerade stets mit einem Schnittpunkte (bezw. auch mit mehr) behaften kann, die je nach den übrigen Erfordernissen in irgend einer Ordnung des Unendlichen liegen. Haben sie zwei Schnittpunkte, so müssen sie natürlich, um parallel zu sein für das Endliche, diese nicht im endlichen Gebiete haben und daselbst richtig als Gerade definiert sein.

Nach diesen Vorstellungen gestaltet sich das Unendliche allerdings in einer Weise, bei der man nicht mehr wie seinerzeit Gauss sagen könnte, dass hier Unmathematisches vorkäme und die Sache an die Metaphysik streife. Zwar kann ein Philosoph die Grundlagen der Mathematik selbstverständlich auch in metaphysischer Weise betrachten, ebenso ein Mathematiker, falls er die seltne Eigenschaft hat zugleich Philosoph zu sein und falls er versteht mathematische Ausgestaltung scharf von der metaphysischen Betrachtung zu sondern. Aber dazu braucht der Gegenstand durchaus nicht unendlich zu sein. Alles, was in der Mathematik vorkommt, wie überhaupt alles, darf wohl — ob mit gutem Erfolge oder nicht, das ist eine andere Sache — vom metaphysischen Standpunkte aus untersucht werden. Gauss hat dann recht das Unendliche abzuweisen, wenn es sich in den Formen einer verschwommenen Metaphysik bewegt und der klaren Unterscheidungen entbehrt. Das Parallenproblem, also auch der Satz von der Winkelsumme darf das Unendliche heranziehen, wenn es in mathematisch klarer Weise geschieht. Dass das Unendliche damit zu tun hat, das hat auch Gauss nicht leugnen können. Von diesem Standpunkte aus muss man diese Aeusserungen des grossen Mathematikers betrachten, die derselbe z. B. im Briefwechsel mit Schumacher tat. Es ist damit nicht gesagt, dass er imstande gewesen wäre, etwa den Beweis des Satzes von der Winkelsumme für alle Zeiten zu widerlegen, den ihm damals Schumacher vorlegte. In der Tat hat er ihn auch nicht gründlich widerlegt, sondern nur abgewiesen, so dass sein ihn im höchsten Grade verehrender Freund nicht überzeugt werden konnte. Dasselbe Beweisverfahren hatte nach Engel und Stäckel*) schon Antoine Arnaud (1612—1694) und Bertrand (1778) sowie Schulz (1784) benutzt. Schumacher**) hatte schon am 3. Mai 1831 an Gauss einen Versuch des Beweises von der Winkelsumme ohne Parallelensatz (wie er meinte) gesendet; auch dabei ist von einem verschwindenden Dreiecke die Rede, bei welchem aber die Winkel nicht verschwinden. Gauss (Bd. II, S. 260) erwidert, Schumacher habe, ohne ihn auszusprechen, einen Zwischensatz gebraucht, welcher den zu beweisenden Satz schon enthalte. Offenbar, nach seinen sonstigen Aeusserungen, richtet sich die Widerlegung gegen den Gebrauch des „Verschwindens“, wie ihn Sch. benutzt. Gauss setzt immer voraus, dass bei verschiedenen Lagen eines Dreiecks die Winkel verschieden werden könnten (wie in Nichteuklidischer Geometrie); der Flächeninhalt aber auch bei unendlichgrossen Seiten nicht unendlich werde, sondern unter einer bestimmten Grösse bliebe. Offenbar ist Sch. von der Richtigkeit der Erwiderung nicht überzeugt, indem er den Beweis noch einmal in anderer Form schreibt (am 25. Mai): „Man verlängere die Seiten des geradlinigen Dreiecks unbestimmt, und nehme einen Radius R so gross, dass $a : R$, $b : R$, $c : R$ kleiner als jede gegebene Grösse werden (a, b, c sollen die Seiten sein, Sch. bedient sich des Ausdrucks: „kleiner als jede gegebene Grösse“ statt „unendlichklein“, weil Gauss, wie er weiss, vom eigentlichen Unendlichen nichts wissen will, und sucht den Beweis als richtig hinzustellen, auch wenn man nur die Grenzbegriffe anwendet). Mit diesem Radius beschreibe man aus C den Halbkreis . . (über der Seite $AC = b$). Weil in bezug auf diesen Halbkreis a, b, c als verschwindend zu betrachten sind, also die Punkte A, B als in C fallend, so ist dieser Halbkreis das Mass der drei Winkel des Dreiecks, die mithin weniger als jede gegebene Grösse von 180⁰ differieren“. Er schliesst auch daraus, dass die Konstante, die, wenn Euklids Geometrie nicht wahr wäre, zu der Summe der Winkel kommt, um die Gleichheit mit 180 zu bewirken, kleiner als jede gegebene Grösse ist, und da sich dies für jedes Dreieck beweisen lasse, so könnte diese Konstante ebensowenig von der Grösse des Dreiecks abhängen. Gauss geht auf den Beweis in seiner Antwort zuerst gar nicht ein, und Schumacher schreibt noch einmal (29. Juni, S. 267), da weder er noch seine Gehilfen noch Prof. Hansen einen Widerspruch in seinem Beweise finden könnten. Er setzt hinzu: „Sollte jemand den Satz, dass die Winkelpunkte eines Dreiecks als koinzidierende Mittelpunkte eines Kreises von unendlichem (brevitatis causa, unendlich genannt, wie Sch. vorsichtig hinzusetzt) Halbmesser betrachten könnte, eines Beweises bedürfend halten, obgleich ich dies nicht glaube, so lässt sich dieser Beweis strenge führen.“ Die nächsten Worte sollen wohl solcher Beweis sein, man kann ihn allerdings kaum so nennen. „Mir scheint, wenn zwei Punkte eine endliche Entfernung von einander haben, so wird diese Entfernung in bezug auf eine unendliche Linie $= 0$ zu setzen sein, sie koinzidieren mithin in bezug auf diese unendliche Linie betrachtet“.

Ich habe diesen Briefwechsel erst vor ganz kurzer Zeit kennen gelernt und war sehr überrascht über diese Uebereinstimmung der Ansicht Schumachers mit einem Grundsatze des Unendlichen oder der Weitenbehaftungen; freilich ist dies ein Satz, der angenähert auch bei der Grenzmethode, in der Differentialrechnung längst benutzt wird; das Eigentümliche hier ist nur, dass ein endliches Dreieck geradezu als ein Punkt angesehen wird in bezug auf das Unendliche. Allerdings fehlt jede Ausführung, jede Begründung einer exakten Lehre über das Unendliche, dieser Satz steht ganz unvermittelt und vereinzelt da, und man muss sich nicht wundern, wenn er auf Gauss keinen Eindruck macht und ihn nicht daran hindert, in seiner Antwort, die er nun gibt, einfach das Unendliche, das, wie er wohl merkt, doch in Schumachers Beweisführung steckt, kategorisch abzuweisen. Es scheint so, als wenn Gauss doch gemerkt habe, dass eine gründliche Widerlegung grosse Ausführlichkeit erfordere, dass also doch wohl etwas Gründlicheres mit Schumachers Bemerkung verbunden werden könne, aber ihm liegt der Gedanke fern, man könne eine mathematisch exakte Lehre entwickeln, in der jene Punktauffassung eine klar durchgeführte Rolle spielt. Ganz richtig sagt nun Gauss (S. 268), man könne den Beweis auch einfacher so gestalten, dass man über einer (endlichen) Strecke AB ein Dreieck (gezeichnet mit spitzem Winkel A und stumpfem Winkel B) mit zwei unendlichen Seiten hergestellt (ich würde sagen: ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung) und dann behaupten, die Summe der beiden Winkel A und B sei gleich 180⁰ (ich würde sagen: für die Weiterbehaftung der Winkel mit dem Endlichen!). Dies könne man dann nach Sch.'s „Manier“ wieder mit einem unendlichen Kreisbogen, der durch Punkt C geht, sofort aus der Figur zeigen, der Winkel A und der Nebenwinkel von B würden dann direkt durch denselben unendlichen Kreisbogen gemessen, der von C bis zur Verlängerung von AB geht. Dagegen sagt Gauss nichts Anderes als blosse Proteste und Behauptungen über die Nichteuklidische Geometrie. „Ich protestiere zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welche in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nichteuklidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes“. „In der Nichteuklidischen Geometrie gibt (ganz kategorisch!) es gar keine ähnlichen Figuren

*) Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Teubner, 1895, S. 231.

**) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. Altona 1860 Bd. II, S. 255.

ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von 2/3 *R*, sondern auch nach Massgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will". In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nichteuklidischen, dies ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die dies nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie, aber wie gesagt, nach meiner Ueberzeugung (!) ist dies blosse Selbsttäuschung". Es soll „nichts Widersprechendes darin liegen", dass, obgleich der Winkel *A* dem Nebenwinkel von *B* immer näher käme, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche (?) Differenz heruntergebracht werden könne. Gauss schlägt nun um *A* mit *AB* und um *B* mit *BC* grosse Kreise, so dass sich (bei endlicher Zeichnung) die Bogen, welche Winkel *A* und Nebenwinkel *B* messen und beide von *C* ausgehen, etwas unterscheiden (zwei verschiedene Endpunkte *D* und D^1 auf der Verlängerung von *AB*). Wenn Schumacher klar wäre, meint Gauss, so müsste er sagen: indem *AC* ins Unendliche wüchse, kämen *CD* und CD^1 der Wahrheit (!) immer näher. Er will dies wieder durch blosse Behauptung widerlegen, indem er sagt, das sei in der Nichteuklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter verstände, dass die geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen, wie man will. Er behauptet nun, wieder durch Hinstellen der Konstante: „In der Bildersprache (!) des Unendlichen würde man also sagen müssen, dass die Peripherien zweier unendlicher Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Grösse verschieden sind, selbst um eine Grösse verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältnis hat". Wenn dies „zu ihnen" heissen soll: „zu den unendlichen Kreisen", so ist diese Behauptung zweifellos falsch. Gauss führt fort: „Hierin ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen. Sie sehen, dass hier in der Tat der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift". Schumacher ist nicht überzeugt, was man ihm auch nicht verdenken kann, er glaubt sogar, dass Gauss' Widerlegung selbst dann nicht ausreiche, wenn man nur von Grenzen statt vom Unendlichen spreche.

Gauss hat recht darin, wenn er meint, man sollte das Unendliche nicht mit der gewohnten Anschauung umspannen, falls er unter dieser Anschauung etwa die Meinungen versteht, die sich in der Grenzmethode ausgebildet haben. Anders liegt es, wenn man das Unendliche systematisch und in sich widerspruchslos mathematisch entwickelt. Dann kann von einer Vermessenheit gar keine Rede sein, und der behaupteten Möglichkeit der Annahmen der Nichteuklidischen Geometrie, die er immer vorführt, steht die Möglichkeit einer anderen Erweiterung der endlichen oder Euklidischen Geometrie gegenüber (Vergleiche meine Grundlagen einer Uebereuklidischen Geometrie). Ich möchte, da ich eine ausgearbeitete Darstellung hier nicht geben kann, andeuten, wie sich die ersten für das Parallelenproblem wichtigen Grundbegriffe gestalten, falls man an Stelle der wenig exakten Schumacherschen Andeutungen einen exakten Beweis geben wollte. Gauss betonte es auf das Entschiedenste, man möchte seine Ansichten nicht laut werden lassen, weil er „das Geschrei der Böoter" fürchte; darunter verstand er diejenigen, welche an die Euklidische Geometrie zu sehr gewöhnt waren, um nicht wegen einer behaupteten Nichteuklidischen Geometrie Geschrei zu erheben. Ich möchte mich nicht eines ähnlichen Ausdruckes bedienen und sagen, es könne heute ein Geschrei entstehen, wenn man das Wort „Zweifel an der Nichteuklidischen Geometrie" oder gar das Wort „Beweis des Parallelenaxioms" überhaupt in den Mund nimmt. Keine einzige Ansicht oder Formulierung der Grundvorstellungen oder Grundbegriffe lässt sich beweisen, selbstverständlich auch nicht die, welche den Weitenbehaftungen zugrunde liegt, (ebensowenig wie die entgegengesetzten); wenn man demnach das Wort „Beweis des Satzes von der einzigen (Euklidischen oder endlichen, nicht etwa der unendlichvielen möglichen Uebereuklidischen) Parallelen" gebraucht, so ist dieser Beweis nur so zu verstehen, dass er geführt wird auf Grund der nicht widerlegten, der in sich widerspruchsfreien Grundannahmen der verschiedenen Weitenbehaftungen.

Das Axiom der einzigen Geraden zwischen zwei Punkten darf danach nur für bestimmte Behaftungen, nicht allgemein oder absolut ausgesprochen werden. Genau ist zu sagen, was die Gerade sein soll und ob zwischen den Punkten nur eine endliche Entfernung oder unendliche usw. möglich sein solle. Dann aber hängt dies Axiom nahe mit dem der Parallelen zusammen. Zwei endliche Parallele können aufgefasst werden als zwei für das Unendliche sich krümmende und in zwei unendlichfernen Punkten schneidende Linien; sie stellen aber bei Behaftung mit dem Unendlichen als unendliche Linien nur eine einzige kürzeste Verbindung der beiden unendlichentfernten Punkte dar, indem ihre endliche Entfernung in der Gegend, wo sie als endliche Parallele erschienen, für das Unendliche (!) keine („unendliche") Grösse hat. Für das Parallelenproblem ist besonders wichtig die Winkelauffassung. Es zeigt sich alsdann ein überraschender Zusammenhang mit dem Satze von der Gleichheit der Scheitelwinkel. Dazu ist nötig zuerst den Begriff der Nebenwinkel festzustellen.

Es sei *MN* eine unendliche Gerade (ich bestimme vorläufig noch nicht, welchen Grades), *A* ihr Mittelpunkt (für blosse Behaftung mit dem Unendlichen könnte man dafür ebensogut jeden Punkt setzen, der eine nur endliche Entfernung von *A* hat). Um *A* sei über *MN* ein unendlicher Halbkreis beschrieben. Da die Betrachtung richtig bleibt, wenn man statt der unendlichen Grössen erster Ordnung endliche nimmt und zugleich für endliche solche von um eine Ordnung niedrigerer Behaftung, so kann man den unendlichen Halbkreis endlich zeichnen und das Endliche recht klein, und dann mit letzterem die Vorstellung des Unendlichkleinen verbinden d. h., um Fehler zu vermeiden, die Beziehungen zwischen dem Endlichen und Unendlichkleinen richtig wahren. Es liege nun über *A* in endlicher Entfernung der Punkt *A'*; und oberhalb von *M*, beziehlich *N*, auf dem Halbkreise, in endlicher Entfernung von *M* bez. *N* Punkt *M'* bez. *N'*. Es fallen dann für die Behaftung ∞^1 sämtliche zwischen den 6 Punkten vorstellbaren Geraden (die, falls sie unterschieden werden, natürlich als Gerade zweiten Grades auch nicht mehr um Endliches verkürzbar sein sollen) zu einer einzigen unendlichen Geraden ersten Grades zusammen. Ein Winkel wie *N' AN* ist unendlichklein. Behaftet man die Winkelvorstellung nur mit endlichen Grössen und zieht einen Radius *AA'P*, welcher den Halbkreis in zwei unendliche Bogen zerlegt, so sind MAP und NAP oder MAP und $N'AP$, $NA'P$ und $MA'P$ usw. Nebenwinkel und supplementar.

Dies wäre aber sofort falsch, wenn der Bogen MM' oder NN' unendlich wäre, also in einem Verhältnis von endlichem Zahlenwerte zum unendlichen Halbkreise stände. In der endlichen Gegend (genauer gesagt: bei Behaftung der Punkte $A'A$, und der von ihnen ausgehenden Geraden, die nicht mehr um Endliches verkürzbar sind) von A sind zu MAN sowohl $A'N$ wie $A'N'$ parallel; es bilden aber diese Geraden unter einander bei A' einen unendlichkleinen Winkel, sie sind, falls unterschieden, also Uebereuklidische Parallele und fallen zur Euklidischen zusammen, falls man in genannter Gegend die unendlichkleinen Winkel nicht mit in Behaftung zieht. Die Winkel PAN und $PA'N$ sind für endliche Winkelbehaftung gleich und es betragen die Innenwinkel der beiden Parallelen AN und $A'N'$ bei der Schneidenden AA' ohne Heranziehung des Unendlichkleinen zur Winkelvorstellung danach zwei Rechte! Wir haben hier das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung $AA'N$, welches Gauss im genannten Briefe anführt. Verlängert man PA nach unten zu AQ, so entstehen bei endlicher Längenbehaftung der Gegend A die Scheitelwinkel PAN und MAQ, die nach bekannter Art wegen gleichen Nebenwinkels gleich sind. Man kann aber PAN durch den unendlichen Bogen PN messen und MAQ durch einen unten links liegenden entsprechenden Bogen des unendlichen Kreises mit dem Mittelpunkte A oder A', und es ist danach der Winkel PAN auch gleich dem Winkel $M'AQ$. Dies ist richtig, wenn man bei der Winkelmessung Unendlichkleines nicht mit hereinzieht d. h. wenn man die Bogen MM' und NN' endlich wählt, also gegenüber den unendlichen Bogen für diese Behaftung gleich Null. Es ist ganz dasselbe, wenn man sagt, man wähle die entsprechenden kleinen Bogen eines endlichen Kreises unendlichklein, beides bedeutet die Verhältnisse der Winkel nach Gradanzahlen endlicher Behaftung. Es ist danach der Satz von der Gleichheit der Scheitelwinkel genau derselbe wie der von der Gleichheit der Wechselwinkel bei Parallelen, natürlich unter Benutzung der endlichen beziehlich unendlichen Behaftung. Schlägt man endliche Kreise mit den beiden unterschiedenen Mittelpunkten A und A', so liest man darauf Wechselwinkel ab, wählt man den unendlichen, so entstehen für die Behaftung mit dem unendlichen Scheitelwinkel, und die gleichzeitige Uebersicht über beide Behaftungen ergibt ohne Widerspruch beide Sätze zusammen.

Einwände hiergegen mit Hilfe der Behauptung, es änderten sich die ähnlichen Figuren, also hier die Kreise (endliche und unendliche), treffen die Sache nicht. Denn es ist bei der Behauptung der Aenderung die Nichteuklidische Geometrie einfach angenommen worden und es müsste erst noch gezeigt werden, dass man sich bei der Vorstellung einer verschobenen und dadurch in den Winkeln veränderten Figur die unveränderte nicht doch vorstellte (als Gegensatz zu der veränderten und zur Herstellung des Begriffs der veränderten an diesem Orte!). Ferner aber ist ein Einwand nur stichhaltig, wenn er innerhalb der ganzen Auffassung durch Weitenbehaftungen innere Widersprüche ohne einfache Berufung auf entgegengesetzte Annahmen (!) nachwiese. Die Methode von Gauss, die er gegen Schumacher kurz anwendet, ist also nicht auffrischbar.

Negative Flächen im Schulunterricht.

Von Oskar Lesser in Frankfurt a. M.

Ich hatte meinen Primanern zur häuslichen Bearbeitung die Aufgabe gestellt: „Einem Halbkreis mit dem Radius r ist ein Rechteck einbeschrieben. Wie gross muss die Seite x, die in den Durchmesser fällt, genommen werden, damit der Inhalt ein Maximum wird?“ und war eben im Begriff, sie abzunehmen, als ein Schüler sich meldete und sogleich erklärte, „unsre“ Theorie der Maxima und Minima müsse doch wohl falsch sein. Auf meine erstaunte Frage, wie er zu dieser Meinung komme, gab er ungefähr folgende Erklärung:

„Variiert man die Höhe h des Rechtecks zwischen den möglichen Grenzen von $h = 0$ bis $h = r$, so wächst der Inhalt der Figur, mit Null beginnend, bis zu einem bestimmten Maximum, worauf er wieder abnimmt, um für $h = r$ von neuem zu verschwinden. Man erkennt also sofort, dass die Fläche ein bestimmtes Maximum erreicht; sie muss aber auch (zweimal) ihr Minimum mit Null erreichen, da eine Fläche nicht kleiner als Null werden kann.

Bilde ich nun die Funktion, die den Inhalt des Rechtecks aus der gesuchten Seite x herleiten lässt ($y = f(x)$), so liefert die Gleichung $y' = 0$ zwei Werte von x, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden; die zu erwartenden Werte $x = 0$ und $x = r$ ergeben sich nicht. Der eine der gefundenen Werte x führt auf das vorausgesehene Maximum der Fläche, der andre ist unbrauchbar, weil er eine negative Fläche liefern würde. Die Funktion $y = f(x)$ selbst aber wird für den einen aus $y' = 0$ erhaltenen Wert x zum Maximum, für den andren zum Minimum.“

Um mich ganz sicher zu überzeugen, legte mir der schon garnicht mehr Zweifelnde seine Darstellung der erhaltenen Funktion vor, wie ich sie in nebenstehender Figur wiedergebe: sie zeigt in A ein positives Maximum und in B ein im Negativen liegendes Minimum.

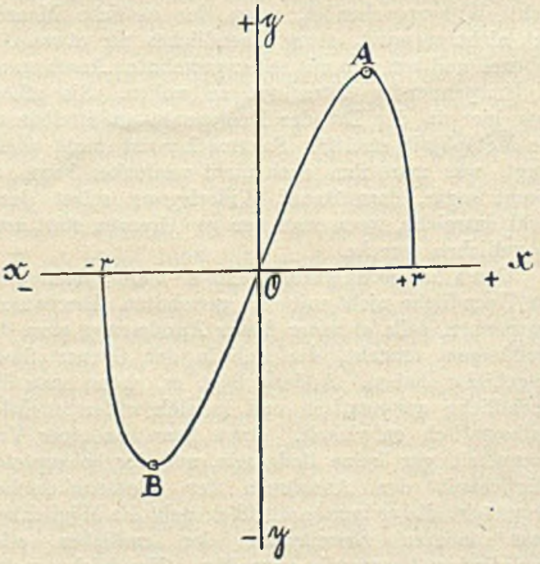


Fig. 1.

Nun erkläret mir . . . . !

Lassen wir zunächst unseren „Mathematiker“ rechnen:

Es sei x die halbe gesuchte Seite des Rechteckes, die Höhe h. Dann ist $h = \sqrt{r^2 - x^2}$ und somit der Inhalt

$$J = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Wir haben also zu untersuchen, ob, und für welche Werte von x die Funktion

$$y = x\sqrt{r^2 - x^2}$$

ein Maximum oder ein Minimum wird. Bilden wir den ersten und den zweiten Differentialquotienten, so ergeben sich diese als

$$y' = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \dots\; 1)$$

bezw.

$$y'' = \frac{2x^3 - 3r^2x}{(r^2 - x^2)^{3/2}} = x\,\frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \quad \dots\; 2).$$

Aus dem Nullwert von y' folgen aus 1) die Werte von x

$$x_1 = +\frac{r}{2}\sqrt{2} \text{ und } x_2 = -\frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Setzen wir den ersten dieser Werte in 2) ein, so wird

$$y'' = +\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{-2r^2}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}}$$

negativ, woraus folgt, dass für $x = +\frac{r}{2}\sqrt{2}$ die Funktion $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$ und somit auch der Inhalt des Rechteckes ein Maximum ist; setzen wir den zweiten erhaltenen Wert ein, so wird

$$y'' = -\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{-2r^2}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}}$$

positiv: die Funktion $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$ wird zu einem Minimum mit dem Werte $-\frac{r^2}{2}$; die Minimalfläche des Rechteckes müsste also negativ, und zwar $-r^2$ sein, was wohl nicht möglich ist.

Soweit unser Schüler.

Was zunächst die in Fig. 1 wiedergegebene Darstellung der Funktion $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$ betrifft, so erkennt man sofort, dass die Kurve [eine Kurve IV Gr.] unvollständig gezeichnet ist.

Es war $r = 10$ gesetzt worden. Daraus hatte der Schüler die Tabelle berechnet (ich lasse die Dezimalstellen weg):

$x =$	± 10	± 9	± 8	± 7	± 6	± 5
$y =$	± 0	± 39	± 48	± 49	± 48	± 44
$x =$	± 4	± 3	± 2	± 1	± 0	
$y =$	± 37	± 29	± 20	± 10	± 0,	

worin jedesmal dem positiven Wert x der positive Wert y, und umgekehrt jedem negativen Wert x der negative Wert y zugeordnet ist. Da aber die Wurzel aus $r^2 - x^2$ sowohl positiv, wie negativ sein kann, also gesetzt werden muss

$$y = \pm x\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad \dots\; 3)$$

gehört jedem der Werte x jeder der Werte y zu, wodurch sich die Kurve $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$ in ihrem ganzen Verlaufe konstruieren lässt. (Vgl. in Fig. 2 die stark ausgezogene Kurve. Die dort punktierte Kurve gibt den Verlauf der ersten Derivierten.)

Aus 3) folgen die Abgeleiteten

$$y' = \pm\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \dots\; 1')$$

und

$$y'' = \pm\frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \quad \dots\; 2'),$$

und danach ergeben sich, in Uebereinstimmung mit der Fig. 2), zwei Maxima (A_1 und A_2) für die Werte $x = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}$ und ebenso zwei Minima (B_1 und B_2) für die gleichen Werte x. Aber für den Kurventeil $y = +x\sqrt{r^2 - x^2}$ liegt ein Maximum (A_1) in $x = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, ein Minimum (B_1) in $x = -\frac{r}{2}\sqrt{2}$, während für den Kurventeil $y = -x\sqrt{r^2 - x^2}$ das Maximum (A_2) in $x = -\frac{r}{2}\sqrt{2}$, das Minimum (B_2) in $x = +\frac{r}{2}\sqrt{2}$ liegt.

Für den ersten Kurventeil ist $h = +\sqrt{r^2 - x^2}$, d. h. das

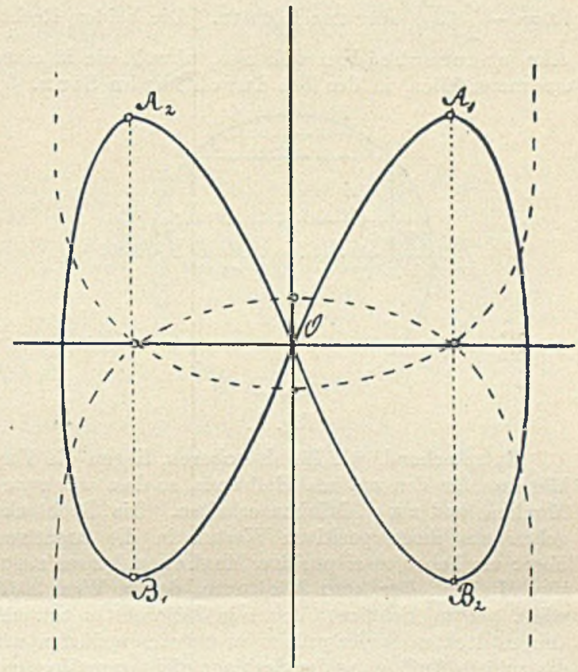


Fig. 2.

Rechteck liegt in dem vorgelegten (oberen) Halbkreis selbst; für den anderen ist h negativ, $h = -\sqrt{r^2 - x^2}$, d. h. das Rechteck liegt nach unten in dem Halbkreis, der den gegebenen zum Kreis ergänzt. Betrachten wir zunächst nur das Rechteck im oberen Halbkreis (vgl. auch Fig. 3!).

Hier hat das Rechteck $2x\sqrt{r^2 - x^2}$ den Inhalt

$$+r^2 \text{ für } x = +\frac{r}{2}\sqrt{2} \text{ und}$$

$$-r^2 \text{ für } x = -\frac{r}{2}\sqrt{2};$$

wir erkennen, dass beide Rechtecke in eines zusammenfallen. Die Verschiedenheit im Vorzeichen beider Flächen weist auf die Verschiedenheit des Sinnes der beiden, sonst kongruenten, Rechtecke hin, wie er, meines Wissens, zuerst von Moebius in seinem baryzentrischen Kalkül, als etwas durchaus Unabweisbares, eingeführt worden ist. Nach Moebius lässt sich der Sinn einer Fläche so feststellen: Man denke sich eine auf der Ebene der Fläche befindliche Person die Figur umlaufen; liegt dabei die Fläche zur Linken des Umlaufenden, so ist ihr Sinn [und damit ihr Inhalt] positiv, liegt aber die Fläche rechts, so ist ihr Sinn [und damit ihr Inhalt] negativ. Dabei setzen wir allerdings voraus, dass die positive Anfangsrichtung der umlaufenden Person — etwa durch die Richtung der positiven Achse x eines Koordinatensystems — festgelegt ist.

Rechnen wir nun, vom Mittelpunkt O des Kreises ausgehend (Fig. 3), den Radius nach rechts positiv, also nach links negativ, und umlaufen wir die für $x = +\frac{r}{2}\sqrt{2}$ und für $x = -\frac{r}{2}\sqrt{2}$ erhaltenen Rechtecke $2x\sqrt{r^2 - x^2} = +r^2$ und $2x\sqrt{r^2 - x^2} = -r^2$, wiederum vom Kreismittelpunkt ausgehend, im Sinne der Seite $2x = \pm\sqrt{2}$, so liegt die Fläche des Maximalrechteckes $\left(x = +\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$ links, die des Minimalrechteckes $\left(x = -\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$ aber zur Rechten. Die beiden Rechtecke unterscheiden sich also, obwohl sie in eines zusammenfallen, in der Tat durch ihren Sinn.

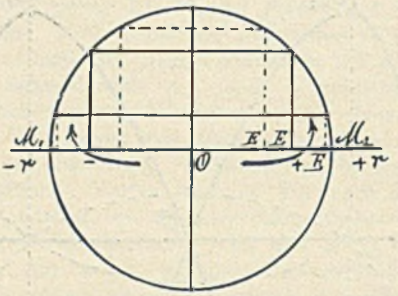


Fig. 3.

Entsprechend, wie für den oberen, liegen die Verhältnisse für den unteren Halbkreis, so dass wir zwei Maxima und zwei Minima erhalten. Die Rechtecke gehen aus ihren positiven Werten in die negativen über; sie haben zwei positive Maxima und zwei negative Minima, aber **kein Minimum**, dessen Wert **Null** wäre. Dem Schüler, der sein Möglichstes tat, um die entdeckten Widersprüche zu entwirren, dürfen wir die schiefe Auffassung der Sachlage nicht zum Vorwurf machen: wenn ein solcher erhoben werden soll, so trifft er den Lehrer, der das Anschauungsvermögen seiner Schüler nicht lückenlos entwickelte. Der bei der Variation des Rechtecks von $x = +r$ bis $x = -r$ beobachtete Vorgang in der Aenderung des Flächensinnes aber lässt sich sehr schön in seinem ganzen Verlaufe klar machen. Man denke sich eine Fläche, hier das Rechteck, als ein materielles Blatt, an dessen Ränder den positiven Umlaufsinn bezeichnende Pfeile gesetzt sind, so dass die Fläche einen positiven Wert besitzt. Betrachtet man das Blatt von der Rückseite, indem man es nötigenfalls gegen das Licht hält, so zeigen die Pfeile jetzt an, dass die Fläche ihren Sinn, ihr Inhalt demnach sein Vorzeichen geändert hat. War also die Vorderseite des Blattes positiv, so ist seine Rückseite negativ. Nachdem das festgestellt, lasse man das Rechteck nicht sogleich in unserem Halbkreis, sondern (Fig. 4) zunächst in dem halben Quadrat $ABCD$, also in AM_1M_2D variieren, indem man die Hochseiten, die zu Beginn unsrer Betrachtung in die Quadratseiten M_2D und M_1A fielen, gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit der Mittellinie ON_1 nähert, und fasse nun die Zeichnung als die Aufprojektion eines geraden Zylinders auf, in dem ein (grösster) Achsenschnitt rotiert. Dieser Achsenschnitt behält in Wirklichkeit seine Grösse, doch wird seine Projektion um so kleiner, je mehr sich der Schnitt der Vertikallage N_1O_1 nähert. War die Bewegung von M_2 ausgegangen, so war bis zum Eintritt in die Vertikallage die (positive) Vorderseite des Schnittes sichtbar. Sobald die Vertikallage überschritten wird, kehrt uns der Schnitt seine (negative) Rückseite zu, wie man am besten aus der beigefügten Horizontalprojektion des Zylinders erkennt. Was aber bezüglich des Flächensinnes von dem rotierenden Achsenschnitt gilt, das gilt auch von seiner Vertikalprojektion.

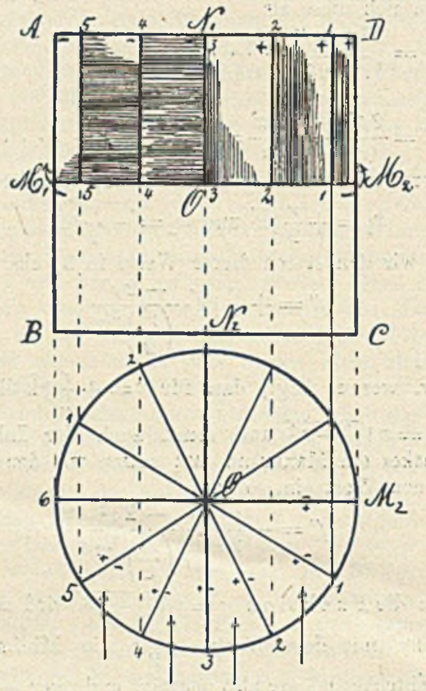


Fig. 4.

Dies vorausgesetzt, wird nun auch der Vorgang in Fig. 3 klar zu Tage treten. Fällt der Eckpunkt E des gesuchten Rechtecks mit M_2 zusammen, so ist der Inhalt der Fläche gleich Null. Die Fläche erscheint erst, und zwar positiv, wenn E den Punkt M_2 verlässt, um nach O hin zu wandern. Nun wächst die Fläche bis zum (ersten) Maximum, darauf nimmt sie wieder ab bis $OE = 0$, wo sie selbst wieder verschwindet und — umschlägt. Indem der Punkt E den Punkt O verlässt, um auf seiner Wanderung nach M_1 hin vorwärts zu schreiten, zeigt sich die Rückseite des Rechteckes; dessen Inhalt ist negativ und nimmt ab bis zum ersten Minimum, das er überschreitet, um sich dem Positiven, das in $EO = -r$ erreicht wird, wieder zuzuwenden. Bei $x = EO = -r$ schlägt die Fläche von neuem um, sie ist positiv, erreicht ihr zweites Maximum, geht wieder zurück, schlägt in $x = EO = 0$ ins Negative um, strebt ihrem zweiten Minimum und danach dem Positiven wieder zu, das sie in $x = EO = +r$ wieder erreicht.

Soll man dem Schüler das vorführen? Soll man zwischen positiven und negativen Flächen unterscheiden? Nun, es wird kaum in Abrede gestellt werden können, dass eine Betrachtungsweise, wie die soeben kurz skizzierte, für die Entwickelung des räumlichen Anschauungsvermögens der Schüler ausserordentlich wertvoll ist; zum andren aber lehrt die eingangs wiedergegebene Erfahrung, dass man — wenigstens in einzelnen Fällen — notgedrungen die negative Fläche mit in den Kreis der Betrachtungen einbeziehen **muss**. Denn nur so konnte hier die Theorie der Maxima und Minima dem erhobenen Protest gegenüber als unantastbar aufrecht erhalten werden. Wollte man, wi in den Lehrbüchern vielfach vorgeschlagen wird, sagen: Wir können nur den einen Wert von x gebrauchen, da der andere keine geometrische Deutung zulässt, so käme das einer direkten Bestätigung der Behauptung meines Schülers gleich — die Theorie der Maxima und Minima wäre nur für gewisse Fälle richtig, für andere aber zweifelhaft. Lieber aber keine, als solch eine unsichere Mathematik.

Sieht man sich die in unseren Lehrbüchern gegebenen, oder auch die Aufgaben einmal etwas näher an, die in dem Jahresprogramm der Realgymnasien und Oberrealschulen als Prüfungsaufgaben angeführt sind,*) so muss man erkennen, wie wackelig die uns durch die Lehrpläne vorgeschriebene elementare Theorie der Maxima und Minima ist. Da soll nicht untersucht werden, ob überhaupt, und für welche Werte der unabhängig Variablen die Funktion ein Maximum, für welche sie ein Minimum besitzt; die Fragestellung ist vielmehr *fast durchweg* die: Wie gross muss das oder das genommen werden, damit das oder das ein Maximum (*oder* ein Minimum!) wird?**) Dieselbe Rechnung führt zwar zu ganz verschiedenen Resultaten, aber das ist ja ganz gleichgültig, da der Text der Aufgabe selbst schon über das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums entscheidet. Aufgaben dieser Art aber haben mit der Theorie der Maxima und Minima herzlich wenig zu tun, sie lösen nur die Frage, ob, und für welchen Wert von x der erste Differentialquotient der erhaltenen Funktion verschwindet; jede Diskussion des Resultates ist überflüssig. Das ist ein Missstand, der ganz gewiss nicht dem die Aufgabe stellenden Lehrer, sondern dem System, den Lehrplänen, zur Last fällt, denn diese erlauben nur eine ganz unmathematische Behandlung der Theorie der Maxima und Minima. Hoffen wir, dass hier die im Gange befindlichen Reformbestrebungen bald und gründlich Wandel schaffen!

*) Die hier behandelte Aufgabe ist nach ihrem Wortlaut einem Jahresprogramm entnommen.

**) Vergl. die geg. Aufgabe, so wie die folgenden, aus Prüfungsarbeiten stammenden:

1. Der Inhalt eines geraden Zylinders, dessen Oberfläche O gegeben ist, soll ein *Max.* werden. Wie sind die Seiten des Achsenschnittes zu nehmen und welchen Inhalt hat der Zylinder?
2. Schneide aus einem zylindrischen Baumstamm den Balken von *grösster* Tragfähigkeit aus, . . .
3. Aus vier gleich breiten Brettern soll eine Rinne gefertigt werden, die *möglichst* viel Wasser fasst. Die beiden Seitenbretter stehen lotrecht; welchen Winkel müssen die Bodenbretter miteinander bilden?
4. Bei einem Kegelstumpf ist $R + r + h = 18$ cm, $R = 2r$. Wie gross müssen R, r, h genommen werden, damit der Inhalt ein Maximum wird?
5. Ueber der Grundlinie eines Dreiecks soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen obere Ecken auf den Dreiecksseiten liegen und dessen Inhalt ein Maximum wird. — (Warum stellen sich hier die beiden Rechtecke, deren Höhe gleich Null, bezw. gleich der des Dreiecks ist, nicht als Minima dar?)

Freilich gibt es auch gründlichere Aufgaben, wie die folgende, die an einem R.-G. gegeben wurde:

6. Von einem ebenen Dreieck ist eine Seite und die Summe der anderen beiden Seiten gegeben. Es soll untersucht werden, wann der Inhalt ein *Max.* oder *Min.* wird;

doch sind derartige Aufgaben gegen diejenigen der ersteren Art sehr in der Minderzahl.

Dennoch darf man mit der Fragestellung der unter 1.—5. wiedergegebenen Aufgaben wohl einverstanden sein, wenn die Schüler zu einer gründlichen Untersuchung angeleitet sind, d. h., wenn mit der Frage nach dem Grössten zugleich die nach dem Kleinsten, als selbstverständlich gestellt, verbunden ist. Gerade die *Durchführung* macht die Aufgaben der gegebenen Art erst wertvoll. Und eben, weil die aus einer Aufgabe erhaltene Funktion zu Maxima oder Minima führen kann, die nicht deutbar sind (vgl. Aufgabe 3, auch d. Verf. „Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima“: Berlin, bei *Otto Salle*, in kurzem erscheinend), ist volle Klarheit bezgl. der geometrischen Grundbegriffe unerlässlich.

Man verzeihe die Abschweifung! An der Hand des ausgeführten Beispiels glaube ich den Nachweis erbracht zu haben, dass es nicht allein notwendig, sondern auch sehr wohl möglich ist, negative Flächen in den Kreis unserer Betrachtungen im Unterricht zu ziehen, *sobald es die Verhältnisse selbst erfordern.* Erst dann sollte man zwischen positiven und negativen Flächen unterscheiden, wenn zugleich Gelegenheit geboten ist, den Schüler auf die *Notwendigkeit* der Unterscheidung, auf die Notwendigkeit der Einführung negativer Flächen hinzuweisen. Ist das einmal der Fall, so lassen sich schnell andere Betrachtungen und Beobachtungen zur Unterstützung heranziehen. Ich erinnere nur an das doppelte Vorzeichen der Formel

$$J = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

die den Inhalt eines Dreiecks aus den Koordinaten der Eckpunkte herleitet. Jetzt hat auch das $\pm$, das früher lediglich dazu da schien, *ein unbrauchbares Resultat willkürlich brauchbar zu machen*, Berechtigung und Deutung erhalten. Und noch auf ein Beispiel will ich hinweisen, das schon im Unterricht der Untertertia auf die Einführung negativer Flächen hindrängt, das aber doch erst auf späterer Stufe behandelt werden möchte. — Der Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte (Meran, Sept. 1905) erkennt in der „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ und in der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ die wichtigsten Aufgaben des mathematischen Unterrichts und befürwortet „diese Gewohnheit auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Aenderungen“ zu pflegen, „die die ganze Sachlage durch Grössen- und Lagenveränderung im einzelnen erleidet“ und zwar soll das nicht etwa erst auf späterer, sondern auf möglichst früher Stufe (in Tertia bereits) geschehen. Da darf wohl die Aufgabe erwähnt werden, die eine vorzügliche Uebung im funktionalen Denken bietet, und, wie schon erwähnt, bereits in Tertia behandelt werden *kann.*

Gegeben sind von einem Trapez der Inhalt J, die Höhe h und eine Grundlinie G; es soll die zweite Grundlinie berechnet werden

Die Diskussion des erhaltenen Resultats

$$g = \frac{2J - Gh}{h} \quad \cdots\cdot \; \odot$$

lehrt, dass $g \gtreqless 0$, je nachdem $2J \gtreqless Gh$ ist. Ist $g > 0$, so ist die Figur ein gewöhnliches Trapez; ist $g = 0$, so degeneriert das Trapez zu einem Dreieck und die Formel $\odot$ führt auf die Inhaltsformel des Dreiecks. Wird aber $g < 0$, so erhalten wir kein *gewöhnliches* Trapez, vielmehr ein solches, dessen eine (obere) Grundlinie „umgeschlagen“, „negativ“ geworden ist. Und für diese Figur muss die Inhaltsformel für das gewöhnliche Trapez gelten, wie die Formel $\odot$ gilt. So erhalten wir als erstes Resultat, dass bei Konstanten h und G, aber veränderlichem J, die *Zahlenwerte für g sowohl alle Werte der positiven, wie der negativen Zahlenreihe durchlaufen.*

Indem das Trapez $ABCD$ seine obere Grundlinie umschlägt, kreuzen (schneiden) sich seine Seiten, und der Inhalt zerfällt in zwei einzelne Dreiecke. Während im „normalen" Trapez der Inhalt sich als Summe zweier Dreiecke darstellt:

$$J = h\frac{G+g}{2} = \frac{hG}{2} + \frac{hg}{2},$$

ergibt sich im „umgeschlagenen" — unter g die absolute Länge der oberen Grundlinie verstanden —

$$J = \frac{hG}{2} - \frac{hg}{2},$$

der Inhalt ist also gleich der Differenz zweier Dreiecke. Wie verhält sich aber dieser Inhalt zu den Flächen der beiden, das „umgeschlagene" Trapez zusammensetzenden, Dreiecke? Er erscheint als Summe der beiden Dreiecke und ist dieser auch gleich, freilich unter Berücksichtigung des Sinnes beider Teilflächen.

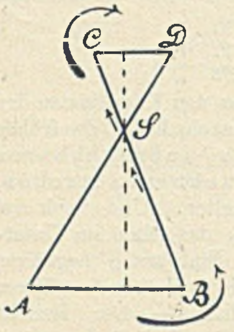


Fig. 5.

Die Umlaufrichtung BS des unteren Dreieckes (vgl. Fig. 5) bedingt die Umlaufrichtung SC des oberen, da BS und SC denselben Träger besitzen. Danach haben, wie man sich sofort überzeugt, beide Dreiecke entgegengesetzten Sinn, und es ist daher, unter ABS und SCD die absoluten Flächen verstanden, und das grössere Dreieck ABS positiv gerechnet:

$$J = ABS - SCD.$$

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich leicht durch ein Zahlenbeispiel überzeugen. Ist $J = {}^3/_2$; $G = 2$; $h = 3$, so folgt $g = -1$. Nun ist, da der Schnittpunkt S der Seiten die Höhe des Trapezes im Verhältnis der Grundlinien teilt, die Höhe des unteren Dreiecks gleich 2, die des oberen gleich 1, und daher (absolut!)

$$ABS = \frac{2\cdot 2}{2} = 2 \text{ und } CDS = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da der Inhalt der Gesamtfigur mit ${}^3/_2$ gegeben war, muss man den Inhalt des oberen Dreiecks von dem unteren abziehen: die Fläche des oberen Dreiecks ist demnach in der Tat negativ.*)

Ich könnte die gegebenen Beispiele sogleich um eine ganze Reihe weiterer vermehren, könnte auch meine Ausführungen erweitern und zeigen, dass bestimmte Fälle auch die Einführung negativer Körperinhalte erfordern; doch sehe ich davon ab, einmal weil die gegebenen Beispiele völlig ausreichen, und zum anderen, weil die Notwendigkeit, Körperinhalte negativ zu bewerten, im Schulunterricht ziemlich selten eintritt. Wo sie sich zeigt, ist auch ein Eingehen auf die Verhältnisse nicht schwer. —

Herr Geheimrat Prof. Klein weist in einer seiner Reformschriften darauf hin, dass der mathematische Schulunterricht nicht nur nicht auf die Universitätsstudien hinüberleite, sondern sie sogar erschwere, und dass der Uebergang von der Schulmathematik zur höheren stets erst eine „Revolution des Denkens" notwendig mache. Dabei ist in erster Linie an die Elemente der Infinitesimalrechnung gedacht. Wer sich einmal mit den Grundlagen des geometrischen Kalküls, mit der so fruchtbaren und überaus bequem anwendbaren Punkt- und Vektorenrechnung, beschäftigt hat, der weiss, dass das Eindringen durch nichts mehr erschwert wird, als durch die von der Schule anerzogenen, zu eng gefassten Definitionen der elementarsten Gebilde und die bisherige gänzliche Vernachlässigung gewisser, notwendiger Begriffe. Auch hier kann der Schulunterricht, ohne die ihm gesteckten Grenzen zu überschreiten und sich in mathematische Spekulationen zu verlieren, durch einfache Beachtung moderner Auffassungen und Anschauungsweisen fördern, wo er bislang hinderte. Und dahin gehört auch die Berücksichtigung des Körper- und Flächensinnes, und vor allem die Einführung negativer Flächen.

*) Auch hier kann der Hinweis auf den positiven Wert der Vorderseite und den negativen der Rückseite einer Fläche gute Dienste tun; beim Umschlagen der oberen Grundlinie bleibt von der Vorderseite des Trapezes nur das Dreieck ABS sichtbar, während das neu erscheinende Dreieck der Rückseite der Figur angehört.

Elementare Berechnung bestimmter Integrale von Potenzen mit ganzen und gebrochenen Exponenten.

Von O. Nitsche (Charlottenburg)*).

Vorübung: Es sei $y = x$.

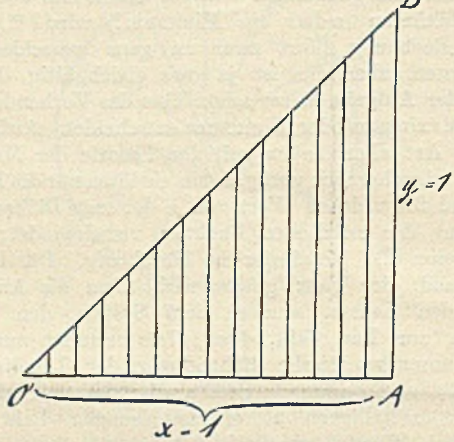


Fig. 1.

Die Linie OB, deren Koordinaten dieser Gleichung genügen, geht durch den Koordinatenanfangspunkt und halbiert den von den Achsen gebildeten Winkel. Die Fläche OAB ist also in jedem Falle die Hälfte eines Quadrats von der Seite OA oder x, also $= \frac{x^2}{2}$, für den speziellen Fall $x = 1$ ist $\varDelta\, OAB = \frac{1}{2}$.

Teilt man nun OA in 10 gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten die Ordinaten, so teilen diese die Fläche OAB in 10 Trapeze. Setzt man für diese Trapeze die Rechtecke von der Länge y und der Breite $\frac{1}{10}$, so ergibt ihre Summe einen Näherungswert für $\varDelta\, OAB$, nämlich

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\cdots\frac{10}{10}\right) = \frac{1+2+3\cdots+10}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{10\,(10+1)}{1\cdot 2\cdot 10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1{,}1}{2}.$$

*) Anm. d. Redaktion. Der obige Artikel schliesst sich an den in Nr. 6 des abgelaufenen Jahrgangs veröffentlichten Artikel von Dr. zur Kammer an (Die Summenformel anstatt des Integrals für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten). Die Ausführungen beider Artikel werden für manche Fachlehrer nichts neues bringen (zu dem Artikel des Herrn Dr. zur Kammer weist Herr Holzmüller darauf hin, dass er dasselbe Thema in grösserem Umfange bereits in seiner Ingenieur-Mathematik und an anderen Orten behandelt habe), manchem anderen aber vermutlich doch einen willkommenen Anhalt bei der Behandlung der Aufgaben gewähren, die für die Frage der etwaigen Hineinziehung der Anfangsgründe der Infinitesimal-Analysis in den Unterricht besonders bedeutsam sind.

Verfährt man ebenso, nur dass man OA in 100 Teile teilt, so erhält man als Summe der 100 Rechtecke von der Breite $\left(\frac{1}{100}\right)$ und der Länge y

$$\frac{1}{100}\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots\frac{100}{100}\right)=\sum_{x=1}^{x=100}\frac{x}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)=$$

$$\sum_{x=\frac{1}{100}}^{x=\frac{100}{100}} x\cdot\left(\frac{1}{100}\right)=\frac{100\,(100+1)}{1\cdot2\cdot100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)=\frac{1{,}01}{2}.$$

Bei der Teilung in 1000 Teile ergibt sich als Summe der 1000 Rechtecke

$$\frac{1}{1000}\cdot\left(\frac{1+2+3+\cdots1000}{1000}\right)=\sum_{x=1}^{x=1000}\frac{x}{1000}\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)=$$

$$\sum_{x=\frac{1}{1000}}^{x=\frac{1000}{1000}} x\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)=\frac{1{,}001}{2}\ \text{usw.}$$

$$\sum_{x=\frac{1}{1000000}}^{x=\frac{1000000}{1000000}} x\cdot\left(\frac{1}{1000000}\right)=\frac{1{,}000001}{2}$$

wobei also x sprungweise alle Millionstel von $\frac{1}{1000000}$ bis $\frac{1000000}{1000000}$ durchläuft. Werden, wie gewöhnlich, nur fünf Dezimalstellen in Rechnung gezogen, so gibt bereits für Millionstel dieses Näherungsverfahren ein befriedigendes Resultat. Uebrigens lässt sich, wie leicht ersichtlich ist, die Sicherheit der Rechnung ähnlich wie bei der Berechnung von π noch dadurch erhöhen, dass der wirkliche Wert in zwei Grenzen eingeschlossen wird, die bei zunehmender Teilungszahl einander näher rücken. Für nötig halte ich das nicht, da das Beispiel ohnehin nach meiner Erfahrung überzeugend wirkt und gerade durch seine Einfachheit geeignet ist, die Begriffsbildung vorzubereiten, da die Aufmerksamkeit durch rechnerische Schwierigkeiten nicht in Anspruch genommen wird.

Allgemein: Ist OA nicht gleich 1, sondern $=a$ (a endlich), so teilt man a in n-Teile und addiert die sich wie oben ergebenden n Rechtecke. Ihre Summe

$$=\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}+\frac{2a}{n}+\frac{3a}{n}\cdots+\frac{na}{n}\right)=\sum_{x=1}^{x=n}\frac{xa}{n}\left(\frac{a}{n}\right)=$$

$$\sum_{x=\frac{a\cdot1}{n}}^{x=\frac{a\cdot n}{n}} x\cdot\left(\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{a}{n}\right)\frac{a\cdot n\,(n+1)}{n\cdot1\cdot2}=\frac{a^2}{1\cdot2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Für $n=\infty$ wird $\frac{1}{n}=0$, also

$$\sum_{x=0}^{x=a\cdot\frac{\infty}{\infty}} x\cdot\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{a^2}{2}.$$

Bei dieser Darstellung ist auch in der Form der Uebergang zum Integral vorbereitet. Durchläuft nämlich x nicht sprungweise die Bruchreihe der $n$tel (was durch das Σ symbolisch angedeutet ist), sondern kontinuierlich alle zwischen 0 und a liegenden Zahlen (auch die irrationalen), was symbolisch durch ein nicht im Zickzack verlaufendes S ausgedrückt wird, so ist die Form

$$\mathop{S}_{x=0}^{x=a} x\,dx$$

sofort verständlich als Summe aller kontinuierlich sich ändernden Rechtecke von der Länge y und der Breite dx. dx bedeutet dabei den oben mit $\left(\frac{a}{n}\right)$ bezeichneten verschwindend kleinen Bruch, der sich von jenem nur dadurch unterscheidet, dass für seinen Nenner auch irrationale Werte zulässig sind. Demnach ist auch

$$\mathop{S}_{x=0}^{x=a} x\cdot dx=\frac{a^2}{2}$$

oder, da a jedes beliebige endliche Stück der x-Achse sein, also durch x selbst ersetzt werden kann,

$$\mathop{S}_{0}^{x} x\,dx=\frac{x^2}{2}.$$

Die Summierung ist durchgeführt unter Anwendung der Summenformel für die arithmetische Reihe $1, 2, 3\cdots n$.

Die Summenformeln für die Reihen höherer Ordnung

$$1^2+2^2+3^2\cdots n^2=\frac{2\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot2\cdot3}-\sum_{1}^{n} x$$

$$1^3+2^3+3^3\cdots n^3=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$$

$$-3\cdot\sum_{1}^{n} x^2-2\sum_{1}^{n} x,$$

die sich ohne Anwendung des bin. Satzes aus den Formeln für die figurierten Zahlen leicht ableiten lassen und für diese ein willkommenes Uebungs- und Anwendungsgebiet abgeben, gestatten, das obige Verfahren zu verallgemeinern zunächst auf Potenzen mit ganzzahligem Exponenten.

Man findet, wenn $y=x^2$,

$$\sum_{x=\frac{a}{n}}^{x=\frac{a\,n}{n}} x^2\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{a^3}{1\cdot2\cdot3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

also $$\mathop{S}_{x=0}^{x=a} x^2\cdot dx=\frac{a^3}{3}\quad\text{und}\quad\mathop{S}_{0}^{x} x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$$

ebenso $$\sum_{x=\frac{a}{n}}^{x=\frac{a\,n}{n}} x^3\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

also $$\mathop{S}_{x=0}^{x=a} x^3\,dx=\frac{a^4}{4}\quad\text{und}\quad\mathop{S}_{0}^{x} x^3\,dx=\frac{x^4}{4}.$$

Für die Behandlung höherer Potenzen liegt auf den Gymnasien kaum ein Bedürfnis vor.

Die Funktionen $y=c\cdot f(x)$ und $y=b+c\cdot f(x)$, wobei b und c Konstanten, $f(x)$ ganzzahlige Potenzen von x der behandelten Grade bedeuten, bewältigt der Schüler von selbst.

Mit einem kleinen Umwege lässt sich aber auch die Integration von gebrochenen Potenzen elementar durchführen. Beispiel $y=x^2$, $x=\sqrt{y}$.

Das von der Parabel, der Ordinate b und der Abscisse a begrenzte Stück F_1 ist $\mathop{S}_{0}^{a} x^2\,dx=\frac{a^3}{3}$.

Das Rechteck aus a und $b = a^3$, folglich der Rest, die Fläche $F_2 = \frac{2}{3} a^3$. Zerlegt man nun die Ordinate b in n gleiche Teile und F_2 durch Parallelen zur x-Achse in Streifen, so ist, wenn jeder Streifen als Rechteck

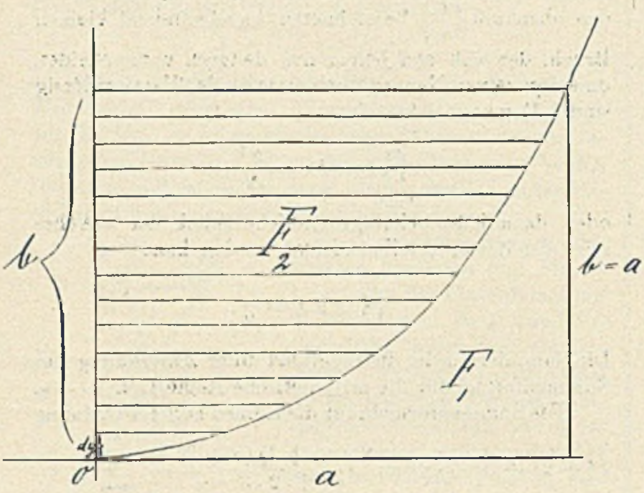


Fig. 2.

von der Breite $\left(\frac{a^2}{n}\right)$ oder dy berechnet wird, die Summe der kontinuierlich sich ändernden Rechtecke von der Länge x und der Breite dy

$$\mathop{S}_{x=0}^{x=a} x\,dy = \mathop{S}_{0}^{a^2} \sqrt{y}\,dy = F_2 = \frac{2}{3} a^3,$$ oder, wenn für a^2 b gesetzt wird,

$$\mathop{S}_{0}^{b} \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} \sqrt{b}^{3} \quad \text{und} \quad \mathop{S}_{0}^{y} \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} \sqrt{y}^{3}$$

In genau derselben Weise findet man

$$\mathop{S}_{0}^{y} \sqrt[3]{y}\,dy = \frac{3}{4} \sqrt[3]{y}^{4}$$

Funktionen von der Form $y = a\sqrt{x}$, $y = a + b\sqrt{x}$, $y = a + b\sqrt[3]{x}$ usw. sind weitere Anwendungen, die sich analog bewältigen lassen.

Bemerken möchte ich zum Schluss, dass, wenn in meiner Darstellung der Integralbegriff auch in der Form voll zum Ausdruck kommt — denn das S statt $\int$ kann als Unterschied nicht betrachtet werden — so ist doch das Wort Integral vermieden und dafür überall „Summe der kontinuierlich sich ändernden Rechtecke von der Länge y und der Breite dx" zu lesen, nicht weil ich Anstoss daran nehme, den Schülern gegenüber das Wort Integral zu gebrauchen, sondern um durch die Wiederholung den Begriff zu befestigen und den Ansatz, der sonst bei Schülern leicht zu einer leeren Form herabsinkt, in jedem einzelnen Fall zu begründen.

Diese wenigen Integrationen gestatten schon eine mannigfaltige Anwendung nicht nur bei der Berechnung von Trägheitsmomenten (vergl. Nr. 6 dieser Zeitschrift) sondern auch von Drehungsmomenten, Rotationskörpern und -Flächen (Guldinsche Regel) u. a.

Die Bazillenvermehrung, ein Beispiel für die Theorie der Potenzen.

Bericht über eine Abhandlung aus dem Zentralblatt für Bakteriologie.

Von G. Junge (Berlin).

Durch einen befreundeten Arzt wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass die Vermehrung der Bazillen ein schönes Beispiel für die Lehre von den Potenzen abgibt.

Die neueste Abhandlung über diesen Gegenstand scheint ein Artikel zu sein im „Zentralblatt für Bakteriologie und Parasitenkunde", Band 2, 1887, Seite 1 bis 7: „Ueber die Vermehrungsgeschwindigkeit der Bakterien" von H. Buchner, K. Longard und G. Riedlin. Die Herren haben in einer Nähr-Gelatine eine Kultur von Cholerabazillen angelegt, die höchstens einige hundert Individuen im ccm enthielt und schon vor Anstellung der Zählungen auf die optimale Temperatur von 37° gebracht war. Aus dieser Gelatine wurde eine Probe herausgenommen und sogleich deren Bakteriengehalt aufs ccm bestimmt; nach einigen Stunden wurde wieder eine Probe entnommen und wieder die Anzahl Bakterien im ccm bestimmt. Die erste Zahl, die die „Aussaat" misst, sei a, die zweite für die „Ernte" $= b$. Der Quotient $\frac{b}{a}$ gibt dann die durchschnittliche Anzahl von Bakterien, die aus einem Bakterium während der Versuchsdauer von t Stunden hervorgegangen ist. Da sich die Bakterien nur durch Zweiteilung vermehren, so bestimmt sich die Anzahl n der während der t Stunden auf einander folgenden Generationen aus der Gleichung $2^n = \frac{b}{a}$. Die mittlere Generationsdauer oder die Zeit von einer Zellteilung bis zur nächsten ist in Minuten $= \frac{t \cdot 60}{n}$.

Ein Beispiel: Man habe anfangs ein Bakterium, das soeben aus einer Teilung hervorgegangen ist. Nach 20 Minuten, eben der Generationsdauer, teile es sich aufs neue. Jetzt ist eine Generation vergangen. Nach weiteren 20 Minuten sind zwei Generationen vergangen, die beiden Bazillen haben sich wieder geteilt, die Anzahl der Individuen ist 4, usw.

Die Bestimmung der Generationsdauer ist die eigentliche Aufgabe.

Es werden von sieben Versuchsreihen die Ergebnisse mitgeteilt. Im folgenden sind sie tabellarisch zusammengestellt.

Monat und Jahr des Versuchs	2.1887	2.1887	2.1887	3.1887	3.1887	4.1887	6.1886
Versuchsdauer in Stunden	3	3	2	2	2	2	5
Aussaat a	18	149	3 583	15 345	3 550	143	35
Ernte b	7 250	95 952	90 666	138 545	27 608	1 291	981 792
$2^n = \frac{b}{a}$	403	644	25,3	8,7	7,8	9,03	28 051
n	8,7	9,3	4,7	3,1	3,0	3,18	14,8
Gener. Dauer in Min.	20,7	19,3	25,5	38,7	40,0	37,7	20,3

Ueber das Entnehmen der Proben und das Zählen seien noch folgende Einzelheiten erwähnt. Aus der Gelatine wurden jedesmal gleichzeitig 3 ccm entnommen und je 1 ccm auf 3 Glasplatten möglichst gleichmässig ausgebreitet. Die Bakterienzahl auf den Glasplatten wurde durch Abzählen unter dem Mikroskop festgestellt, und zwar wurden jedesmal die im Gesichtsfelde des Mikroskops sichtbaren Kolonien gezählt und für eine Platte aus 10 bis 30 solcher Zählungen das Mittel genommen. Aus der bekannten Grösse der Platte und der bekannten wahren Grösse des Gesichtsfeldes (bei dichter besetzter Platte musste ein stärkeres Okular mit kleinerem Gesichtsfelde genommen werden) wurde dann die wahrscheinliche Individuenzahl der einen Platte und endlich der Mittelwert für alle 3 Platten bestimmt.

Die „Aussaat“ resp. „Ernte“ ist danach schärfer zu bezeichnen als wahrscheinliche mittlere Zahl der Kolonien auf den primären resp. sekundären Platten.

Es sind nämlich nicht Zellen, sondern Kolonien gezählt. Die einzelnen Zellen der Spaltpilze lassen sich unter dem Mikroskop nicht direkt zählen, da sie meist zu mehrzelligen Wuchsformen — die Cholerabazillen oft zu schraubenförmigen Fäden — verbunden bleiben und die einzelnen Zellen dieser Fäden sich nicht unterscheiden lassen. Vorausgesetzt, dass man am Anfang und Ende des Versuches durchschnittlich gleich lange und relativ gleich viele Stäbchen mitzählt, so ist der resultierende Wert für die Generationsdauer offenbar derselbe als wenn man die einzelnen Zellen wirklich gezählt hätte. Mehrzellige Stäbchen und einzelne Zellen sind unter dem gemeinsamen Namen Kolonien zusammengefasst.

Die Ergebnisse der 7 Versuchsreihen sind recht verschieden. Die 6 ersten Versuche sind insofern am vergleichbarsten, als sie innerhalb dreier Monate ausgeführt sind, also zeitlich nahe zusammenfallen, und die benutzten Bazillen von der Krainer Cholera-Epidemie des Jahres 1886 her fortlaufend weiter gezüchtet waren. Die ersten drei Ergebnisse stimmen unter einander leidlich überein: es sind die aus dem Februar 1887; ebenso das 4., 5. und 6. aus März und April desselben Jahres. Der Gedanke liegt nahe, dass die Vermehrung mit der Zeit langsamer geworden ist, weil die Bakterien unter der längeren künstlichen Fortzüchtung leiden.

Dies vorausgesetzt würden für die Vermehrung der Cholerabazillen unter natürlichen Bedingungen, d. h. im menschlichen Darm, die kleinsten der gefundenen Werte für die Generationsdauer gelten.

Der Artikel bringt zum Schluss noch das Ergebnis einer Rechnung: auch wenn die Infektion eines Menschen nur durch einen Cholerabazillus bewirkt sein sollte, so können binnen 20 Stunden Zahlen erreicht werden, welche die im Darm Cholerakranker vorkommende Menge von Bakterien jedenfalls bei weitem übertreffen.

Um die Verifizierung dieser Angabe zu ermöglichen, will ich hinzufügen, dass nach Flügge, „Mikroorganismen“ Band 2 Seite 532 die durchschnittliche Länge des einzelnen Cholerabazillus 1,5 μ beträgt und etwa zwischen 0,8 und 2,0 μ schwankt, während die Dicke schätzungsweise etwa $^1/_6$ bis $^1/_3$ der Länge beträgt.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Die sächsischen Fachkreise und die Reform des mathematischen Unterrichts. Von Herrn Prof. Dr. Witting in Dresden geht uns die nachstehende Ergänzung des in der Nr. 6 des abgelaufenen Jahrgangs S. 131 gebrachten Berichts zu:

Nach dem von dem Vorstande des sächs. Gymnasiallehrervereins über die Versammlung am 25. April 1905 zu Dresden herausgegebenen Bericht nahmen an der Sitzung der Abteilung für Mathematik und Physik neben 4 Gästen 30 Mitglieder teil. Da die Herren Abendroth, Baumgarten, Lehmann und Weinmeister 44 Stimmen*) mit ihrem Rundschreiben eingesammelt haben, so ist die in jener Darstellung S. 131 gewählte Ausdrucksweise, dass „bei den Verhandlungen des Vereins auch die Mehrzahl der Fachvertreter fehlte“, nicht zutreffend.

Das Thema des von mir in jener Versammlung gehaltenen Vortrages bildeten nicht die „Dresdener Leitsätze“,**) vielmehr gab ich eine historische Darlegung der in den letzten Jahren auf die Reform des mathematischen Unterrichts abzielenden Bestrebungen. Darauf wurde die Besprechung über die 14 Tage vorher den sächsischen Gymnasien zugesendeten „Dresdener Leitsätze“ eröffnet. Die am Schlusse der langen und lebhaften Erörterungen gestellten Anträge und die Ergebnisse der Abstimmungen seien hier noch mitgeteilt:

Antrag Witting. Die Versammlung stimmt den ersten vier Leitsätzen zu, um so mehr als sie nach den bisherigen Bestimmungen nicht nur befolgt werden konnten, sondern auch vielfach bereits befolgt worden sind.

Es stimmen 11 Mitglieder dafür.

Antrag Ihle. Eine besondere Zustimmung zu den vier ersten Leitsätzen ist unnötig, da sie nach den bestehenden Bestimmungen bisher nicht nur befolgt werden konnten, sondern bereits wirklich befolgt worden sind.

Es stimmen 16 Mitglieder dafür, während sich 3 Mitglieder der Stimme enthalten.

Antrag Baldauf. Im Anschluss an die einfachsten Beispiele dürfen die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung analytisch und geometrisch entwickelt werden.

Es stimmen 12 Mitglieder dafür.

Antrag Lamprecht und Zürn. These V wird abgelehnt.

Es stimmen 15 Mitglieder dafür, während sich abermals 3 Mitglieder der Stimme enthalten.

A. Witting.

* * *

Nachschrift der Redaktion. Die in der vorstehenden Zuschrift gerügten Ungenauigkeiten fallen nicht den Herren Abendroth und Genossen zur Last, sondern der Redaktion, die aus den ausführlicheren Angaben jener Herren einen kurzen Auszug hergestellt hatte. Was den Vortrag des Herrn Prof. Dr. Witting anlangt, so hatten sie angegeben, dass dieser über das Thema: Zur Reform des mathematischen Unterrichts auf Grund der Dresdener Leitsätze vom

*) Hier sei berichtigend bemerkt, dass in den Zahlenangaben des früheren Berichts ein Versehen untergelaufen ist, auf die Frage 2) sind nur 6 bejahende Vota (nicht 7) eingegangen, die Zahl der befragten Fachlehrer betrug bei beiden Fragen 44.

**) Vergl Zeitschrift f. math. u. naturw. U. 36. Jahrgang 3. Heft S. 228.

16. Febr. 1905 gesprochen habe. Hinsichtlich des Besuches hatten sie gesagt, dass „in jener Sitzung die grössere Hälfte der auf sächsischen Gymnasien in den Oberklassen Mathematik und Physik lehrenden Kollegen nicht anwesend war.“ Uebrigens ist auch die Zahl der Abstimmenden, die nach den obigen Mitteilungen des Herrn Prof. Witting bei keiner der stattgehabten Abstimmungen über 19 hinausging, kleiner als die Hälfte der 44 Fachlehrer, an die sich die vorgenommene Umfrage gerichtet hat.

Vereine und Versammlungen.

Ortsgruppe Berlin und Vororte des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Die erste, sehr gut besuchte Sitzung im Winterhalbjahre wurde vom Vorsitzenden Professor Dr. von Hanstein eröffnet durch einen warm empfundenen Nachruf auf den verstorbenen Geh. Reg.-Rat Professor Dr. von Richthofen.

Es folgte ein Bericht über die Arbeiten der von der Naturforscherversammlung eingesetzten Kommission für Erweiterung des biologischen Unterrichts (u. a. Durchführung desselben durch alle Klassen) an den höheren Lehranstalten. — Die betreffenden Thesen sind s. Zt. in diesen Blättern besprochen. An den Bericht schloss sich eine ausgedehnte und äusserst anregende Debatte, deren Resultat in folgenden Sätzen zusammengefasst wurde.

1. Der Verein spricht der Kommission seinen Dank aus für ihre mühevolle Tätigkeit und erklärt sich mit den von der Kommission aufgestellten Forderungen einverstanden, sieht aber diese Forderungen als das Mindestmass an.
2. Insbesondere erscheint es durchaus notwendig, dass auch in den oberen Klassen der Gymnasien Raum für den biologischen Unterricht geschaffen werde, solange die Gymnasien noch in grosser Ueberzahl vorhanden sind.
3. Um der Individualität der Schüler gerecht zu werden, ist dahin zu streben, dass alle wissenschaftlichen Fächer bei der Beurteilung der Leistungen als gleichwertig zu betrachten sind.
4. Es ist dahin zu streben, dass an allen höheren Lehranstalten nur zwei fremde Sprachen obligatorisch getrieben werden.

Lehrmittel-Besprechungen.

Die Kristallgestalten der Mineralogie in stereoskopischen Bildern, konstruiert und herausgegeben von Prof. Th. Hartwig, Verlag von A. Pichlers Witwe & Sohn, Wien. 120 Bilder, Preis 8 K., Stereoskop dazu 3 K., Bilder und Stereoskop in einer Schachtel vereinigt 12 K.

Der Herausgeber, der schon seit Jahren beim Unterricht in Stereometrie und darstellender Geometrie das Stereoskop mit Vorteil verwendet hat, bietet hier den Fachkreisen ein Lehrmittel, bei dessen Zusammenstellung er sich an das Lehrbuch der Mineralogie von Hochstetter und Bisching angelehnt hat. Die Sammlung zerfällt in zwei Teile: A. Einfache Gestalten (67 Nummern), B. Kombinationen (53 Nummern), jede geordnet nach den Kristallsystemen, bei den Kombinationen unter Angabe eines Minerals, bei dem die Gestalt wirklich vorkommt.

Die Bilder, die sämtlich für eine nahezu gleiche, etwas rechtsseitige Stellung des Beobachters konstruiert sind, zeichnen sich sämtlich durch grosse Korrektheit aus, die Lage der einzelnen Flächen tritt überall plastisch hervor, namentlich aber ist die Lage der Achsen deutlich erkennbar und das ist besonders zu begrüssen, da gerade dieser Umstand wohl bei zusammengesetzten Gebilden die meiste Schwierigkeit macht. Der Herausgeber ist eventuell bereit, bei den Kombinationen, falls der Wunsch danach in grösserem Umfange laut werden sollte, auch die ihnen zugrunde liegenden einfachen Gestalten sichtbar zu machen, was in den jetzt veröffentlichten Bildern nicht geschehen ist — ich möchte das keineswegs für wünschenswert erachten, die Erkennung der einfachen einer Kombination zugrunde liegenden Gestalten scheint mir durchaus Aufgabe des Beschauers zu sein, dem der Verfasser selbst gerade auch diese eigene Gedankenarbeit um ihres Bildungswertes willen nicht ersparen möchte.

In neuerer Zeit ist — und gewiss mit Recht — eine Zurückdrängung des kristallographischen Elements des mineralogischen Unterrichts von vielen Seiten verlangt worden. Aber eine gewisse Berücksichtigung der Grundzüge der Kristallographie wird sich doch nicht umgehen lassen, namentlich auch, wenn bei der Wiedereinführung des entsprechenden Unterrichts in die oberen Klassen ein grösseres Mass von mathematischer Vorbildung vorausgesetzt werden kann. Dann wird die Verwendung solcher stereoskopischen Bilder gerade auch die Möglichkeit gewähren, das wünschenswerte Minimum von kristallographischem Verständnis in kürzerer Zeit zu erzielen, um so die für den eigentlich mineralogischen Unterricht erforderliche Zeit reichlicher zu bemessen. Zum Teil kann auch der stereometrische Unterricht den mineralogischen Unterricht nach dieser Seite hin entlasten, z. B. gehört die — in den Bildern sehr gut zur Darstellung kommende — Entstehung der hemiëdrischen Gestalten geradezu an sich auch zum Stoff des stereometrischen Unterrichts.

Beigegeben ist ein amerikanisches Stereoskop mit verschiebbarem Bildträger, so dass eine Einstellung für jede Sehweite möglich ist. der Augenabstand ist nicht variabel, was aber bei dem geringen Abstand (6 cm) der Einzelbilder kein Mangel ist — übrigens passen die Bilder für jedes Stereoskop. Das ganze Lehrmittel kann nur sehr warm empfohlen werden. P.

Bücher-Besprechungen.

Physikalische Freihandversuche unter Benutzung des Nachlasses von Prof. Dr. Bernh. Schwalbe, zusammengestellt und bearbeitet von Hermann Hahn, Oberlehrer am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin, 1. Teil: Nützliche Winke. Masse und Messen. Mechanik der festen Körper. Mit 269 Fig. XVI u. 187 S. Berlin 1905, Otto Salle. Preis 3 Mk.

Mit der Herausgabe des vorliegenden Buches erwirbt sich der Verfasser ein grosses Verdienst um das Andenken an den begeisterten Vorkämpfer für die moderne Richtung im physikalischen Unterricht, B. Schwalbe. Als Amtsnachfolger Schwalbes vertritt Hahn auch die Schwalbeschen Ideen. Gleich Schwalbe pflegt Hahn die physikalischen Schülerübungen; seine Arbeiten auf diesem Gebiete sind genügend bekannt und gewürdigt. Dass Hahn auch in der Wertschätzung der physikalischen Freihandversuche seinem Vorgänger nicht nachsteht, davon zeugt das vorliegende Werk.

In diesem Buche ist der Schwalbesche Nachlass verarbeitet. Das ist gewiss nicht leicht gewesen, da der Nachlass nur aus einzelnen Blättern bestand, auf denen Stoffanordnungen und Versuche nur ganz knapp in Schlagwörtern aufgezeichnet waren. Hahn hat sich hiermit aber nicht begnügt, sondern er hat die Schwalbeschen Versuche durch eine grosse Anzahl neuer Versuche ergänzt, die zum Teil aus schon bestehenden Büchern und Zeitschriften (die Literatur ist ausführlich angegeben) entnommen, teils eigene Erfindung des Verfassers sind. In einem einleitenden Abschnitte werden „nützliche Winke“ gegeben über die Art und Weise, wie die bei physikalischen Versuchen verwandten Rohmaterialien, Pappe, Holz, Glas, Gummi, Metall verarbeitet werden. Wenngleich derartige Zusammenstellungen von nützlichen Winken schon mehrfach bekannt sind, so sind die hier gebotenen Winke deshalb von grossem Werte, weil sie sich auf die einfachsten Verhältnisse beschränken. Es ist wichtiger, dass ein Anfänger im Experimentieren oder ein Physiker, dem nur beschränkte Hilfsmittel zu Gebote stehen, nur wenige, aber bewährte Anleitungen bekommt, als dass ihm eine grosse Anzahl von Rezepten oder Vorschriften geboten wird, aus der er erst auswählen muss. Eine einzige bewährte Anleitung ist von grösserem Werte als eine Zusammenstellung von verschiedenen Möglichkeiten, die kritiklos, oder ohne dass der Verfasser sie selbst erprobt hat, gegeben sind. Ob dabei die Anweisung die überhaupt beste ist oder ob es noch bessere gibt, ist von untergeordneter Bedeutung, wenn man nur die Sicherheit hat, dass die gegebene Anleitung gut ist. Das kann man aber von den Hahnschen „nützlichen Winken“ behaupten. — Nach den Worten des Verfassers „ist ein Hauptzweck dieser Sammlung von Freihandversuchen, den Lehrer auch an der kleinsten Dorfschule in den Stand zu setzen, den Unterricht in der Naturlehre auf Versuche zu gründen.“ Daraus folgt, dass die Versuche mit den denkbar einfachsten Hilfsmitteln ausgeführt werden sollen. Selbst die Messung des Raumes und des Gewichtes sowie der Dichte werden mit einfachen Hilfsmitteln ausgeführt. So wird z. B. das Gewicht mit einer selbst anzufertigenden Federwage bestimmt. Als Gewichtseinheiten werden Zusammenstellungen von Reichsmünzen verwandt. Die Aufzählung und Beschreibung der einzelnen Sonnenuhren ist lehrreich. Bei den Bewegungen wird der Fall, der Wurf und die Pendelbewegung durch etwa 40 Freihandversuche dargestellt. Eine Reihe von zum Teil scherzhaften Anordnungen belehrt uns über das stabile Gleichgewicht. Verschiedene Zusammenstellungen von Dominosteinen, Weingläsern usw. sind unter der Ueberschrift „Standfestigkeit“ vereinigt. Die Lehre von den festen Körpern wird eingeleitet durch einige Paragraphen über Teilbarkeit, Durchlässigkeit, Elastizität, Dehnbarkeit, Härte, Festigkeit und Adhäsion. Die Kraftübertragung durch das Seil, der Stoss elastischer und unelastischer Körper, die Kraftübertragung durch den Hebel, die Wage in den mannigfaltigsten Formen, das Rad an der Welle bilden einen weiteren Abschnitt. Dann folgen einige Versuche über die Schwungkraft. Ein Kapitel über Kreiselbewegungen beschliesst den vorliegenden ersten Teil des Werkes. Vielfach sind kleine, billige Spielzeuge, die man für wenige Pfennige kaufen kann, zu lehrreichen Demonstrationsapparaten verwandt. Verfasser zeigt, wie in der Hand eines geschickten Lehrers das Spielzeug zu einem wichtigen und brauchbaren physikalischen Apparat werden kann. Wenn auch, wie der Verfasser selbst im Vorwort hervorhebt, für einen jungen, versuchsfrohen Lehrer die Gefahr besteht, dass er sich einseitig auf Freihandversuche wirft und dabei die Grenzen des zulässigen Anwendungsgebietes überschreitet, so muss doch besonders demjenigen Lehrer, dem nur beschränkte Hilfsmittel für den physikalischen Unterricht zur Verfügung stehen, die Lektüre und das Studium des Buches dringend empfohlen werden, denn je mehr ein junger Lehrer experimentiert, um so mehr verschafft er sich ein eigenes Urteil über die richtigen Grenzen des Experiments. E. Grimsehl (Hamburg.)

* * *

K. Th. Vahlen. Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1905, Teubner. 302 S. 8⁰ m. zahlr. Fig. im Text. Preis geb. 12 M.

In der Vorrede zum 2. Bd. der *Enzyklopädie der Elementarmathematik* sagt Joseph Wellstein: „Nichts ist so geeignet den Lehrer innerlich zu heben und mit dem Gefühl der Grösse seines Berufes zu erfüllen, als die klare Einsicht, dass die Grundlegung der Geometrie eine beinahe unüberwindlich schwere Aufgabe ist, mit deren Lösung er sein ganzes Leben hindurch ringen muss, fortwährend vermittelnd zwischen den Forderungen der strengen Logik und der Rücksicht auf die erst zu erschliessende Auffassungsfähigkeit der Schüler, zwischen wissenschaftlicher Strenge und naiver Anschauung.“ In diesem Sinne ist jedes neue Buch über die Grundlagen der Geometrie auch für den Lehrer von Interesse, besonders da wir in Deutschland noch kein Lehrbuch der Elementar-Geometrie haben, das auch nur den Versuch machte, die Errungenschaften der Wissenschaft auf diesem Gebiet für den Mittelschulunterricht zu verwerten.

Die neue Bewegung begann mit der Kritik der von Euklid aufgestellten Grundsätze und Postulate. Ein weiterer Schritt war der, dass man sich überlegte, was dann aus der Geometrie würde, wenn der oder der Grundsatz nicht gültig wäre und man stellte so ganze logische Gebäude auf, die man als nichteuklidische, nichtarchimedische, nichtdesarguessche Geometrieen bezeichnete. Der Verfasser des vorliegenden Buches präzisiert seine Aufgabe dahin, die Geometrie in der Weise aufzubauen, dass die Anzahl der einzuführenden Grundbegriffe und der Inhalt jedes einzelnen Grundbegriffes und Grundsatzes möglichst klein sei, bei jedem der nach und nach eingeführten Grundsätze die Unabhängigkeit von den übrigen nachzuweisen sei und falls zwei gleichberechtigte Annahmen auftreten, beide zu verfolgen seien. Das Wort „abstrakt“ bedeutet dabei, dass die Grundbegriffe (Punkt, Gerade usw.) ihres konkreten Anschauungsinhaltes entkleidet gedacht werden müssen und mit ihnen nur auf Grund der aufgestellten Definitionen und Grundsätze operiert werden darf. Hierbei wird in ausgedehntem Masse die Theorie der Zahlensysteme verwendet, weswegen der Verfasser seinem Buche auch eine für den vorliegenden Zweck bearbeitete Darstellung der Grundlagen der Arithmetik beigegeben hat. Da wir hier hauptsächlich zu Kollegen sprechen, sei betont, dass das Studium des Buches nur von solchen mit Nutzen in Angriff genommen werden kann, denen die Haupttatsachen sowohl der Arithmetik, wie der nichteuklidischen Geometrieen schon bekannt sind. Als

Einführung in diese Betrachtungsweise würde es sich nicht eignen.

Wie die reine Anschauung trügen kann, so kann dies aber fast noch mehr die reine Logik. Es wird deshalb niemand wundern, wenn bei der grossen Geistesarbeit, die bei einem solchen Aufbau zu leisten ist, Fehler oder wenigstens Unzweckmässigkeiten oder Unklarheiten unterlaufen. Nach dem Eindruck aber, den wir von dem Werk gewonnen haben, möchten wir in dem Streit, der zwischen dem Verfasser und seinem ersten Rezensenten wegen eines ziemlich absprechenden Urteils des letzteren entbrannt ist (s. Jahrsb. Dtsch. Math.-Ver. 14, 1905, S. 535 u. 591), uns mehr auf die Seite des Verfassers stellen. Auf diese Diskussion verweisen wir den, der Genaueres über den Inhalt des Buches erfahren möchte. H. Wieleitner (Speyer).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abel, G., Chemie in Küche u. Haus. (Aus Natur u. Geisteswelt 76). Leipzig 1905, Teubner. Mk. 1.—.

Atmanspacher, O., Der Rechenunterricht im ersten Schuljahre. Leipzig 1906, Teubner. Mk. 1.—.

Blätter für deutsche Erziehung, herausg. v. Artur Schulz. Jahrg. VII, Heft 11. Friedrichshagen (Berlin) 1905. Verlag der Blätter für deutsche Erziehung.

Boltzmann, Ludwig, Populäre Schriften. Leipzig 1905, Barth. Mk. 8.—.

Duncker, Hans, Wanderzug der Vögel. Preisschriften mit 2 Karten, 2 Fig., 1 Tabelle. Jena 1905, Fischer. Mk. 4.—.

Dyck, Walther v., Ueber die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. Festrede. Leipzig 1905, Teubner. Mk. 2.—.

Elsässer, W., Leitfaden der Stereometrie. Hilfsbch. zum Gebrauch beim Unterricht an höh. Lehranstalten. Stuttgart 1906, Gruh. Mk. 1,50 geb.

L'Enseignement Mathématique, Revue Internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl, VII. Année No. 1. Paris 1906. Gauthier-Villars. et Genève, Georg & Cie.

Die Fortschritte der Physik, Halbmonatl. Literaturverzeichnis, red. v. K. Scheel u. R. Assmann. Jahrg. IV, Heft 22—24., V, Heft 1, 2. Braunschweig 1905/6, Vieweg & Sohn.

Göschen, Sammlung, Bd. 26: Günther, S., Physische Geographie. 3. Aufl. mit 32 Fig. Leipzig 1905, Göschen. Mk. —.80 geb.

—„— Bd. 42: Hoernes, M., Urgeschichte der Menschheit. 3. Aufl., 1905. Ebenda. Mk. —.80 geb.

—„— Bd. 252: Danneel, Heinr., Elektrochemie I. Theoretische Elektrochemie und ihre physikal.-chem. Grundlagen m. 18 Fig. Ebenda. Mk. —.80 geb.

—„— Bd. 256: Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur analyt. Geometrie der Ebene, mit 32 Fig. 1905. Ebenda. Mk. —.80 Lbd. geb.

—„— Bd. 260: Vonderlinn, S., Parallelperspektive Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, m. 121 Fig. 1905. Ebenda. Mk. —.80 geb.

Harms, Chr., Rechenbuch für die Vorschule. Heft 1. 13. Aufl. Mk. —.60 kart. Heft 2. 15. Aufl. Oldenburg 1905, Stalling. Mk. —.90 kart.

Hartwig, Th., Leitfaden d. konstruierenden Stereometrie mit 55 Fig. Wien 1906, Fromme.

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905, Göschen. Mk. 10.—geb.

Hubrich, Ed., Deutsches Fürstentum und deutsches Verfassungswesen. (Aus Natur und Geisteswelt 80). Leipzig 1905, Teubner. Mk. 1.—.

Kobold, Hermann. Der Bau des Fixsternhimmels, mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. (Sammlung, naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien, Heft 11). Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. Mk. 5,60.— geb. Mk. 7,30.

Kraepelin, Karl, Naturstudien im Hause. Plaudereien in der Dämmerungsstunde. 3. Aufl. Leipzig 1905, Teubner. Mk. 3,20 geb.

—„— Naturstudien in der Sommerfrische. Reise-Plaudereien Leipzig 1906, Teubner. Mk. 3,20 geb.

Lanner, Alois, Die wissenschaftlichen Grundlagen des ersten Rechenunterrichts. Wien 1905, Fromme.

Lotsy, J. P., Vorlesungen über Deszendenztheorien m. bes. Berücksichtigung d. botan. Seite der Frage. Jena 1906, Fischer. Mk. 8.—.

Mahlert, A., Lehrbuch d. Planimeterie f. höhere Mädchenschulen, m. 107 Fig. Leipzig 1906, Teubner. Mk. 1.20 geb.

Mevius, W., Methodik des Unterrichts im Rechnen und in d. Raumlehre m. 63 Fig. Leipzig 1905, Teubner. Mk. 1.80.

Meyers historisch-geographischer Kalender für 1906. Leipzig, Bibl. Institut. Mk. 1.85.

Müller, H., u. Plath, J., Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium mit 121 Fig. Leipzig 1906, Teubner. Mk 4.— geb.

—„— Sammlung von Aufgaben zur Vorbereitung a. d. Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Ebenda, 1906. Mk. 4.— geb.

Neeson, F., Die Physik in gemeinfasslicher Darstellung für höhere Lehranstalten, Hochschulen und zum Selbststudium. 2. Aufl. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. Mk. 4.—.

Neumayer, G. v., Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Lfg. 5/6. Hannover 1905, Jaenecke.

Reimers, J. F., Anleitung zur Herstellung geometr. Körper und Vielflächner, mit 50 Abbild. Zeitz 1905, Rittler. Mk. —.50.

Righi, Aug., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen. (Radioaktivität, Jonen, Elektronen) übers. v. Dessau, mit 17 Abb. Leipzig 1905, Barth. Mk. 2.80 geb.

Rogel, Franz, Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfassl. d. zahlr Beisp. erl. Darstellung empf. Vorteile u. abkürz. Verfahren. Leipzig 1905, Teubner Mk. —.80.

Schleichert, F., Beiträge z. Methodik des botan. Unterrichts mit 3 Fig. Leipzig 1905, Teubner. Mk. 1.—.

Schreber, K., u. Springmann, P., Experimentierende Physik. Zugleich vollst. umgearb. deutsche Ausgabe von Abrahams recueil d' expériences élémentaires de physique I mit 230 Abbild. Leipzig 1905, Barth. Mk. 3.60.

Schubert, Herm., Auslese aus meiner Unterrichts- u. Vorlesungspraxis II. Bd. Leipzig 1905, Göschen Mk. 4.— geb.

Staude, O., Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, mit 387 Fig. Leipzig 1905, Teubner. Mk. 14.— geb.

Steinbrinck, C., Untersuchung der Kohäsion strömender Flüssigkeiten mittels des Vakuum-Ueberhebers. Sonderabdruck aus der Physik. Zeitschrift. Jahrg. VI, No. 25. Leipzig, Hirzel.

Strasburger, Ed., Die stofflichen Grundlagen der Vererbung im organ. Reich. Versuch einer gemeinverständl. Darstellung. Jena 1905, Fischer. Mk. 2.—.

Thomés, Dir. Dr., Flora von Deutschland, Oesterreich und der Schweiz in Wort und Bild. Lief. 44 bis 57. Preis der Lief. Mk. 1,25. Gera 1905 F. v. Zezschwitz, Botanisch. Verlag.

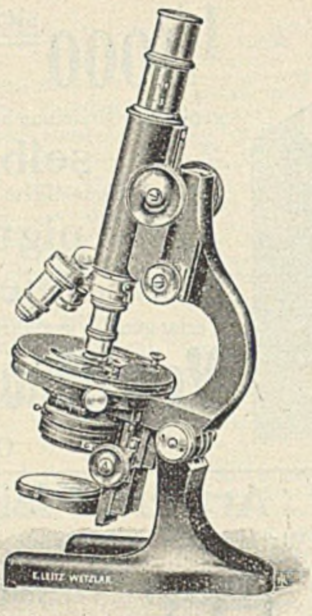
Waeber, R., Lehrbuch für den Unterricht in der Physik. Fünfzehnte Aufl., neubearb. v. Oberlehrer J. Unverricht. Leipzig 1905, F. Hirt & Sohn. Mk. 4.— geb.

Wieleitner, Heinr., Theorie d. ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, mit 82 Fig. Leipzig 1905, Göschen. Mk. 10.— geb.

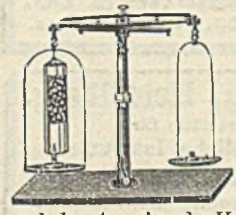
Wien, W., Ueber Elektronen. Vortrag geh. a. d. 77. Vers. der Naturf. und Aerzte in Meran. Leipzig 1905. Teubner. Mk. 1.—.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen u. pädagogische Literatur, herausgeg. v. Franz Frisch. Jahrg. I, Heft 9, 10. Wien 1905. Pichlers Wwe. u. Sohn.

ANZEIGEN.



Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert auch



sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Normalverzeichnis
für die
physikalischen Sammlungen
der
höheren Lehranstalten.
Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.
Preis 30 Pfg.
Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Soeben erschien:

Methodisches Lehrbuch
der
Chemie und Mineralogie
für
Realgymnasien und Oberrealschulen.
Von
Prof. Dr. Wilh. Levin.
Teil I: Unterstufe
(Sekunda des Realgymnasiums, Untersekunda der Ober-Realschule).
Mit 72 Abbildungen. Preis Mk. 1.40

Der Verfasser hat in dieser „Unterstufe" seines seit langem erwarteten grösseren Lehrbuches nur die allerwichtigsten Tatsachen aus der Chemie und Mineralogie durch einfache Versuche und Demonstrationen zur Veranschaulichung gebracht; er war bestrebt, den Schüler durch die Beschreibung des von ihm selbst Wahrgenommenen mit chemischen Vorgängen vertraut zu machen und ihn dann auf **induktivem Wege** ganz allmählich zur Erkenntnis der Naturgesetze hinüberzuleiten. Meist ist die Betrachtung eines Gegenstandes zugrunde gelegt, der dem Schüler bereits aus dem alltäglichen Leben bekannt ist, z. B. **Luft, Wasser, Kochsalz, Eisen.** Am Anfang ist alles Theoretische streng vermieden. Besondere Sorgfalt wurde auf die Auswahl der Aufgaben verwendet.

Gleich dem bereits an zahlreichen Lehranstalten eingeführten **„Leitfaden"** (4. Aufl.) wird auch diesem „Lehrbuch" eine sehr günstige Aufnahme gewiss sein.

(**Teil II: Oberstufe erschien Anfang 1905**).

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme**, Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von **Oskar Lesser**, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Arithmetik

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. **H. Servus** in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima) Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. **J. Heussi.** 15. verbesserte Aufl. Mit 172 Holzschnitten. Bearbeitet von **H. Weinert.** Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Grundbegriffe der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. **J. Heussi.** 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von **Dr. Leiber.** Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor **Dr. Wilh. Levin.** 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Levin: **Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Ober-Realschulen.** Von Prof. **Dr. Wilh. Levin.** Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Unter-Sekunda der Ober-Realschule). Mit 72 Abbild. Preis Mk. 1.40. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 M. 40 Pf.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **H. Weinert.** 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 50 Pf.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Physikalische
Freihandversuche.

Unter Benutzung des Nachlasses
von
Prof. Dr. Bernhard Schwalbe
weil. Geh. Reg.-Rat und Direktor des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin.
Zusammengestellt und bearbeitet
von
Hermann Hahn,
Oberlehrer am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin.
I. Teil:
Nützliche Winke. Mass u. Messen. Mechanik der festen Körper.
Mit 269 Figuren im Text.
Preis geh. 3 Mk., gebd. Mk. 3.75.

Ein Werk für Jedermann!
2. verbesserte Auflage.
Mit Karten u. Abbildungen

Die Erde
und die
Erscheinungen ihrer Oberfläche.
Eine physische Erdbeschreibung nach
E. Reclus
von
Dr. Otto Ule.
Preis 10 Mk., geb. 12 Mk.
Verlag Otto Salle, Berlin W. 30.

☞ Hierzu je eine Beilage der Verlagsbuchhandlungen **Julius Springer in Berlin, B. G. Teubner in Leipzig, Otto Salle in Berlin,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.