Jahrgang XII. 1906. No. 2.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von Bernhard Schwalbe, herausgegeben von F. Pietzker, Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. — Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Hauptversammlung zu Erlangen, Pfingsten 1906.

Das Programm der diesjährigen Hauptversammlung wird unmittelbar nach Ostern den einzelnen Vereinsmitgliedern mittels besonderer Sendung zugehen. Für die Unterkunft in Erlangen werden die Hotels „Zum Schwan“, „Zum Walfisch“ und „Kaiserhof“ empfohlen, doch werden die Vereinsmitglieder dringend ersucht, ihre desfallsigen Wünsche und Anfragen nicht direkt an die Hotels, sondern an den Ortsausschuss z. H. des Herrn Professors Dr. Lenk, Direktor des mineralogisch-geologischen Universitäts-Instituts zu richten. Der Ortsausschuss hat mit Rücksicht auf den infolge der Nürnberger Ausstellung auch für Erlangen zu erwartenden starken Fremdenzudrang Zimmer in diesen Hotels bereits fest belegt.

Wegen Urlaubserteilung an die Versammlungsteilnehmer wird der Vorstand auch in diesem Jahre bei den Unterrichtsverwaltungen der grösseren Bundesstaaten, insbesondere bei dem königlich preussischen und dem königlich bayerischen Unterrichtsministerium einkommen, es ist zu hoffen, dass seine Gesuche, wie es bisher regelmässig geschehen ist, Gewährung finden werden.

Der Vereinsvorstand.

Ueber die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen.

Von E. Haentzschel in Berlin.

Die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen ist in den letzten Jahren mehrfach Gegenstand von Erörterungen gewesen. Die Anregung dazu ist im wesentlichen durch die von Herrn Lemoine veröffentlichte Schrift: Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris, Gauthiers-Villars, 1902, gegeben worden. Zur Erläuterung des von Herrn Lemoine eingeführten Begriffs „Genauigkeit“ greife ich aus derselben eine beliebige Aufgabe heraus. Auf S. 30 heisst es: Aufgabe 27. Durch einen Punkt E zu einer der Winkelhalbierenden des von den Geraden AB und AC gebildeten Winkels die Parallele zu ziehen.

Geometrographische Konstruktion. Man nehme AE in den Zirkel, setze in A ein und beschreibe mit AE den Kreis, der AB in B und B', AC in C und C' schneiden wird. Jetzt nehme man BE in den Zirkel und beschreibe um C' den Kreis, der den um A beschriebenen Kreis in E' treffen wird. EE' ist die gesuchte Parallele. Wünscht man die Halbierungslinie des Nebenwinkels zu zeichnen, so setze man in C den Zirkel ein mit BE als Radius. Der um A beschriebene Kreis wird dann in E'' geschnitten, es ist EE'' die gesuchte Parallele.

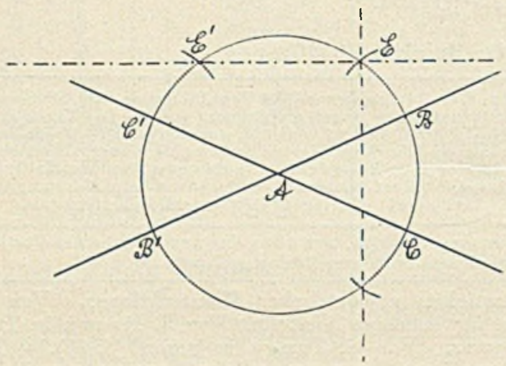


Fig. 1.

Da wir, um EE' zu ziehen, das Lineal so anlegen mussten, dass es durch die beiden Punkte E und E' geht, so haben wir nach Herrn Lemoine die Operation R_1 (=règle), d. h. ein Lineal so anzulegen, dass es durch einen gegebenen Punkt geht, zweimal vollführt, also das Symbol R_1 zweimal zu notieren. Wir mussten die Zirkelspitzen in A, E, B, E, C' einsetzen, d. h. fünfmal die Operation C_1 (=centre) machen, wofür Herr Lemoine $5\,C_1$ anschreibt. Daraus ergibt sich nach ihm die Genauigkeit $2 + 5 =$ Sieben.

Dieses mechanische Abzählen der ausgeführten Operationen hat merkwürdigerweise einige Anhänger und Verteidiger gefunden, obschon doch jedem Mathematiker einleuchten müsste, diese durchaus oberflächliche Art, den schwierigen Begriff „Genauigkeit einer geometrischen Konstruktion“ zu definieren, ist unhaltbar. Man fühlt, dass hier ein Fehler gemacht wird; aber, wenn es nicht gleich gelang, ihn genau festzulegen, so liegt dies meines Erachtens an folgendem Umstande. Die Praezisions-Mathematik kennt ihrem Sinn und ihrer Bedeutung nach ein Unterscheiden der Genauigkeit bei geometrischen Konstruktionen überhaupt nicht.

Die theoretische Geometrie lässt jede Gerade durch zwei Punkte, jeden Punkt durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt sein. Die natürliche oder Approximations-Geometrie aber muss hinzufügen: „wenn die beiden Punkte nicht zu nahe beieinander liegen“, oder „doch dürfen die beiden Geraden nicht einen gar zu spitzen Winkel einschliessen“ (Weber und Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. 2, S. 115, Leipzig 1905).

Die Geometrographie gehört der Praezisionsmathematik an. Sehr richtig sagt deshalb Herr Lemoine l. c. S. 18: Eine Konstruktion ist geometrographisch, wenn sie 1. allgemein ist, d. h. sich anwenden lässt, wie auch Grösse und Lage der gegebenen Stücke beschaffen ist, 2. unter allen möglichen Konstruktionen die einfachste ist. Er nimmt daher unter die Annahmen, die der Geometrographie zugrunde liegen, mit Recht die folgende auf: Sie setzt voraus, dass ein Punkt vollkommen bestimmt ist, wie klein auch der Winkel sein mag, unter dem sich die beiden ihn festlegenden Geraden schneiden. (Lemoine, Archiv der Math. und Phys. 3. Reihe, Bd. 1, S. 99, 1901).

In gleichem Sinne sagt Herr Reusch im Vorwort seiner Schrift: Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig, Teubner, 1904, S. VIII: Die Geometrographie ist rein theoretischer Natur. Herr Lemoine beging daher einen fundamentalen Fehler, als er den Begriff „Genauigkeit“ in sein System aufnahm. Denn, indem dieser Begriff der Approximations-Mathematik eigentümlich ist, gab er Anlass zur Verwirrung, vermischte Herr Lemoine zwei sich scharf sondernde Zweige der Geometrie. Deshalb sprach sich in kurzen treffenden Worten schon die Autorität eines Guido Hauck scharf ablehnend gegen den Lemoineschen Standpunkt aus (Berl. Math. Gesellsch. Oktober 1903).

Die Polemik der Herren Mehmke (Deutsche Mathematiker-Vereinigung zu Karlsbad, 1902) und Holzmüller (Unterrichtsblätter für Math. und Naturw., Jahrgang 11, 1905) gegen den der Approximationsgeometrie entlehnten Bestandteil der Geometrographie hat meines Erachtens um deswillen nicht die erhoffte Wirkung gehabt, weil die Anhänger der Geometrographie ihre Gegengründe aus dem Arsenal der Praezisionsgeometrie holen, gegen die sich natürlich nichts einwenden lässt, da es sich in der Geometrographie bloss darum handelt, einige mehr oder weniger bekannte Sätze der elementaren Planimetrie für Konstruktionsaufgaben zu verwerten. Die Schwierigkeiten für eine erschöpfende Diskussion häufen sich aber um deswillen, weil, um mit Herrn Geheimrat Klein zu reden, „in der zeichnenden Geometrie eine rationelle Fehlertheorie, wie sie in der Geodäsie vorliegt, bisher nicht entwickelt ist. Dabei nenne ich eine Fehlertheorie rationell. welche auf Verwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen basiert ist, so dass wir, um die Genauigkeit einer Konstruktionsmethode zu beurteilen, sie wiederholt auf dieselbe Aufgabe anwenden und dann die erhaltenen Resultate mit der Methode der kleinsten Quadrate oder sonstwie abgleichen." (F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Autographiertes Vorlesungsheft, Leipzig, B. G. Teubner, S. 352, 1902). Herr Professor W. Franz Meyer an der Universität in Königsberg (Preussen) hat daher einen jüngeren Fachgenossen veranlasst, auf diesen Punkt sein Augenmerk zu richten. Herr Konrad Nitz hat das Ergebnis seiner Studien in einer Dissertation: Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Königsberg 1905, niederlegt. Eine reiche Literatur ist über diesen Punkt vorhanden, die mit Bravais (Analyse mathém. sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Paris. Mém. prés. par divers savants. **9**, 1846) beginnend, u. a. Arbeiten von Chr. Wiener (Darstell. Geom. Bd. 1, S. 190. 1884), Helmert (Studien über rationelle Vermessungen, Zeitschr. für Math. und Phys. **13**, 1868), Jordan (Ueber die Genauigkeit einfacher geodätischer Punktbestimmungen. Zeitschr. für Math. und Phys. **16**, 1871), Czuber (Theorie der Beobachtungsfehler. 3. Teil, Leipzig 1891), aufführt, und mit den Dissertationen der neuesten Zeit von F. Geuer (Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren. Freiburg 1902) und P. Böhmer (Ueber geometrische Approximationen. Göttingen 1904) schliesst. Es ist merkwürdig, dass Herr Lemoine nicht einmal die Arbeiten seiner Landsleute Bravais, Bienaymé, (1852), Bertrand (C. R. 1888), d'Ocagne (C. R. 1894; Bull. Soc. Math. de France, 1895) kennt, oder doch wenigstens achtlos an ihnen vorübergeht.

Um einen Einblick in diesen Ideenkreis zu geben, knüpfe ich an die im Eingang dargestellte Konstruktionsaufgabe an. Offenbar ist es doch bei Ausführung derselben keineswegs gleichgiltig, unter welchem Winkel sich die beiden gegebenen Geraden schneiden. Ist er sehr klein, der Punkt A also ein sog. schleifender Punkt, so ist man von vornherein im Zweifel, ob man auch wirklich in A den Zirkel eingesetzt hat; es ist praktisch unmöglich, A von den benachbarten Punkten zu unterscheiden. Abgesehen hiervon versagt die Konstruktion auch dann. wenn E und E' sehr nahe beieinander zu liegen kommen. Der stolze Bau einer geometrographischen Konstruktion erweist sich also in Hinsicht auf Genauigkeit (exactitude) und Einfachheit (simplicité) als ein Nebelgebilde; sie war eben doch nur, um mit Steiner zu reden, eine mit der Zunge ausgeführte Konstruktion. Ein Hinweis auf weniger einfache Konstruktionen für solche Fälle wäre in völligem Widerspruch mit dem Prinzip der Lemoineschen Geometrographie.

Die Fehler-Theorie stellt den Satz auf: Alle Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit bei Ausführung der Operation C_1 für den Schnittpunkt zweier Geraden liegen auf konzentrischen, ähnlich liegenden Ellipsen um den gegebenen Schnittpunkt; dies sind die sog. Fehlerellipsen. Es ist dies das Theorem von Bravais. Macht man die gegebenen Geraden zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, bezeichnet man den Durchschnittswinkel mit w, die mittleren Fehler beim Einsetzen des Zirkels in Beziehung auf jede Gerade mit m_1 bezw. m_2, — bei einer Strichbreite von 0,10—0,15 mm schwanken bei verschiedenen Personen und unter verschiedenen Umständen diese mittleren Fehler in den Grenzen 0,035—0,06 mm, — und ist k eine willkürliche Konstante, so ist die Gleichung der Fehlerellipse:

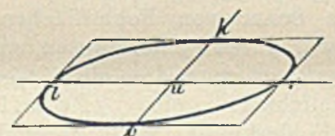


Fig. 2.

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \frac{2k^2}{\sin^2 w}.$$

Für $k^2 = \frac{1}{2}$ erhält man die sog. mittlere Fehlerellipse. Unsere Ellipse ist dem Parallelogramm eingeschrieben, das von den Parallelen zu den sich schneidenden Geraden im Abstande $\pm m_1$ bezw. $\pm m_2$ gebildet wird. In dem wichtigsten Sonderfall $m_1 = m_2 = m$ ist die Länge der Halbachsen:

$$a = \frac{km}{\sin\frac{w}{2}} \text{ und } b = \frac{km}{\cos\frac{w}{2}}.$$

Für $w = 90^0$ haben wir also einen Fehlerkreis.

Schwieriger ist die Bestimmung der Fehlerfläche für die Punkte B und C', die sich als Schnittpunkte je einer der beiden Geraden und eines Kreises ergeben haben. Die Theorie zeigt hier, dass man es mit Kurven 4. Ordnung, den sog. Fehlerovalen 4. Ordnung, zu tun hat. Punkt E' ergab sich als Schnittpunkt zweier Kreise. Die Fehlerfläche für einen solchen Punkt wird von einem Fehleroval 8. Ordnung begrenzt.

Zum Schluss wird in der Konstruktion die Gerade EE' gezogen. Nimmt man den einfachsten Fall an, nämlich den, dass zwei Punkte als Schnittpunkte von rechtwinkligen Geraden oder noch besser als kreisförmige Bleistiftpunkte gegeben sind, so dass der mittlere Fehler des Anlegens des Lineals nach jeder Richtung gleich gross ausfällt, so ist die Genauigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte charakterisiert durch eine Schar konfokaler Hyperbeln in der Art, dass alle Geraden gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Hyperbeln umhüllen. Die Gleichung dieser Hyperbeln ist:

$$\frac{y^2 (m_1^2 + m_2^2)}{k^2} - \frac{x^2 (m_1^2 + m_2^2)^2}{2 e^2 - k^2 (m_1^2 + m_2^2)} = 2 m_1^2 m_2^2;$$

sie vereinfacht sich für $m_1 = m_2 = m$ zu

$$\frac{y^2}{k^2 m^2} - \frac{x^2}{e^2 - k^2 m^2} = 1.$$

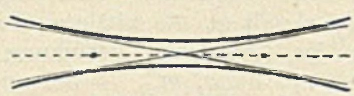


Fig. 3.

Endlich bedarf noch der Erwähnung die Genauigkeit, mit der ein Kreis charakterisiert ist, der mit gegebenem Radius um einen gegebenen Punkt beschrieben werden soll. Da die Genauigkeit des Einsetzens der Zirkelspitze durch eine Schar von Fehlerflächen gegeben ist, und zwar durch Fehlerellipsen und Fehlerovale, so erkennt man, dass alle Kreise gleicher Wahrscheinlichkeit eine Parallelkurve zu einer Fehlerkurve des Mittelpunktes umhüllen. Handelt es sich im besondern um die Fehlerellipse, so sind es die Parallelkurven der Ellipse, die sog. Toroiden. Das Problem der Zusammensetzung von zwei oder mehreren solcher Fehlerellipsen hat Herr d'Ocagne in allgemeinster Form gelöst, doch sind die Formeln sehr kompliziert.

Zu diesen Ausführungen bieten die oben genannten Arbeiten von Mehmke und Holzmüller sehr wertvolle Ergänzungen.

Zum Schluss möchte ich auf die photographische Nachbildung einer Zeichnung hinweisen, die mit Instrumenten der weltbekannten Firma Clemens Riefler in München und Nesselwang vom Ingenieur Esseling angefertigt, ein regelmässiges Sechzigeck mit seinen sämtlichen Diagonalen, also insgesamt 1770 gerade Linien, darstellt. Sie ist geeignet zu den mannigfachsten Gedanken, so über die Güte des Zeichenmaterials, als eine der Vorbedingungen für die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen, und ferner über die Befähigung des Zeichners zu seiner Arbeit, also gleichsam über dessen persönliche Gleichung anzuregen.*)

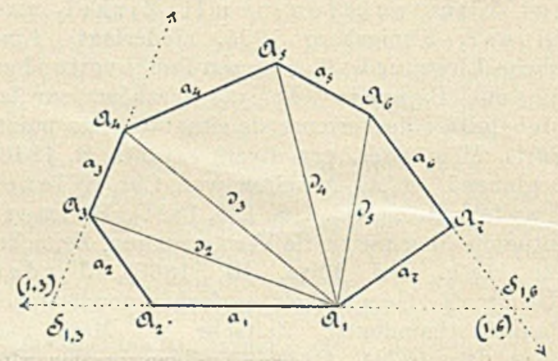
*) Vergl. die Besprechung dieser Zeichnung, Unt.-Bl. XI, Nr. 6, S. 132.

Der Cosinussatz für beliebige Vielecke.

Von J. Braun (Trier).

Wenn von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so kann die dritte Seite planimetrisch durch Konstruktion und trigonometrisch durch den Cosinussatz gefunden werden. Zu einer Verallgemeinerung dieses Satzes gelangt man durch den Gedanken, dass sich ein Vieleck von $(n+1)$ Seiten konstruieren lässt, wenn n-Seiten bekannt sind und die von je zwei benachbarten bekannten Seiten eingeschlossenen Winkel. Die algebraisch-trigonometrische Darstellung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Seite durch die bekannten Stücke ist nun der Gegenstand des erweiterten Cosinussatzes.

Um ihn abzuleiten, bezeichnen wir die Ecken des Polygons mit $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n, A_{n+1}$; die Seiten seien: $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, $A_3 A_4 = a_3$, $A_4 A_5 = a_4$, $\cdots$ $A_n A_{n+1} = a_n$, $A_{n+1} A_1 = a_{n+1}$, und die Diagonalen: $A_1 A_3 = d_2$, $A_1 A_4 = d_3$, $\cdots$ $A_1 A_n = d_{n-1}$.



Es erschien zweckmässig, das Zeichen d_1 zu übergehen, welches indessen mit a_1 identifiziert werden darf; ebenso kann man das fehlende Zeichen d_n gleich a_{n+1} setzen. In der Figur wurde $n+1=7$, also $n=6$ gewählt. Der von den Seiten a_1 und a_2 eingeschlossene Innenwinkel sei $\sphericalangle\, [a_1, a_2]$ mit Anwendung eckiger Klammern, während die runden Klammern für den zugeordneten Neben- oder Aussenwinkel gebraucht werden, der also $\sphericalangle\, (a_1, a_2)$ heissen möge oder auch kurz $\sphericalangle\, (1, 2)$, wenn kein Missverständnis zu befürchten ist. Verlängert man a_1 und a_3 über ihren Durchschnittspunkt $S_{1,3}$ hinaus, so erhält man einen Aussenwinkel $\sphericalangle\, (1, 3) = (1, 2) + (2, 3)$; ebenso gehen folgende Gleichungen aus einer einfachen Betrachtung der Figur hervor, in welcher die weiteren Aussenwinkel allerdings nicht mehr gezeichnet sind.

$$\sphericalangle\, (1, 4) = (1, 3) + (3, 4) = (1, 2) + (2, 3) + (3, 4).$$
$$\sphericalangle\, (1, n) = (1, 2) + (2, 3) + (3, 4) + \cdots + (n\text{-}1, n),$$
$$\sphericalangle\, (2, n) = (2, 3) + (3, 4) + \cdots + (n\text{-}1, n) = (1, n) - (1, 2) \text{ usw.}$$

Bei der gewählten Winkelbezeichnung geht immer die niedrigere Seitenziffer der höheren voran; die zugrunde liegende Drehung beginnt dann bei der positiven Richtung der niedrigeren (d. i. niedriger bezifferten) Seite und erstreckt sich um den Schnittpunkt herum im Sinne des Uhrzeigers bis zur positiven Richtung der höheren Seite; man vergleiche den Winkel (1, 3). Die so definierten Winkel liegen zwischen 0^0 und 360^0, sind also teilweise konvex. Subtrahieren wir von einem solchen konvexen Winkel 360^0, so erhalten wir einen negativen konkaven Winkel, zwischen 0^0 und -180^0, der für die trigonometrischen Funktionen dieselben Werte ergibt wie der positive konvexe Winkel. In diesem Sinne ist in der Figur der negative Winkel (1, 6) bezeichnet; ihm entspricht eine Drehung von der positiven Richtung der Seite a_1 aus um den Schnittpunkt $S_{1,6}$ herum, entgegen der Bewegung des Uhrzeigers, bis in die Verlängerung von a_6. Nun hat aber der positive oder negative Charakter eines Winkels auf seinen Cosinus keinen Einfluss, und da hier nur Cosinusfunktionen vorkommen werden, so kann man den Winkel (1, 6) mit seinem absoluten Wert ohne weiteres in Rechnung bringen.

Ausserdem kommen noch Winkel und Aussenwinkel vor, welche von den Diagonalen $d_2, d_3 \cdots d_{n-1}$ mit anstossenden Seiten gebildet werden, z. B.

$$\sphericalangle [d_2, a_3] + (d_2, a_3) = 180^0.$$

Die Diagonale d_2 soll sich im positiven Sinne von A_1 über A_3 hinaus erstrecken und kommt als solche bei dem Aussenwinkel (d_2, a_3) vor, während der Innenwinkel $[d_2, a_3]$ den entgegengesetzten Schenkel $A_3 A_1$ besitzt.

Nun erinnern wir noch an den Satz, dass die Projektionen der aufeinanderfolgenden Seiten eines beliebigen, geschlossenen Polygons, bezogen auf irgend eine, nach Lage und Richtung gegebene Achse, die Summe Null ergeben. Sei a_3 die von A_3 nach A_4 gerichtete Achse, so führen die darauf projizierten Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zu der Gleichung:

$$a_1 \cos (1,3) + a_2 \cos (2,3) + d_2 \cos [d_2, a_3] = 0, \text{ oder}$$

$$1) \quad a_1 \cos (1,3) + a_2 \cos (2,3) = d_2 \cos (d_2, a_3).$$

Nach diesen Erklärungen ergibt sich der verallgemeinerte Cosinussatz folgendermassen. In dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ ist

$$d_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2\, a_1 a_2 \cos [a_1, a_2] \text{ oder}$$

$$2) \quad d_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 \cos (1, 2).$$

Aus dem Dreieck $A_1 A_3 A_4$ findet man

$$3) \quad d_3^2 = a_3^2 + d_2^2 + 2\, a_3 d_2 \cos (d_2, a_3).$$

Für d_2^2 und $d_2 \cos (d_2, a_3)$ werden die bei 2) und 1) dargestellten Ausdrücke eingesetzt und alle Glieder passend geordnet.

$$4) \quad d_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\, a_1 a_2 \cos (1, 2) + 2\, a_1 a_3 \cos (1, 3) + 2\, a_2 a_3 \cos (2, 3).$$

Fasst man d_3 als die vierte und letzte Seite des Vielecks auf, so ist in 4) $d_3 = a_4$ zu setzen und man hat den Ausdruck des Cosinussatzes für das Viereck:

$$\begin{aligned} 5) \quad a_4^2 = a_1^2 &+ a_2^2 + a_3^2 \\ &+ 2\, a_1 a_2 \cos (1,2) + 2\, a_1 a_3 \cos (1,3) \\ &+ 2\, a_2 a_3 \cos (2,3). \end{aligned}$$

Will man aber zu einer grösseren Seitenzahl übergehen, so kann man das begonnene Verfahren fortsetzen und durch vollständige Induktion zum Abschluss bringen. Zu dem Ende nehmen wir an, es bestehe für einen positiven ganzzahligen Wert ν, welcher der Bedingung $3 \leqq \nu \leqq n$ genügt, die Gleichung:

$$\begin{aligned} 6) \quad d^2_{\nu-1} = a_1^2 &+ a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a^2_{\nu-1} \\ &+ 2\, a_1 a_2 \cos (1,2) + 2\, a_1 a_3 \cos (1,3) + \cdots + 2\, a_1 a_{\nu-1} \cos (1, \nu-1) \\ &+ 2\, a_2 a_3 \cos (2,3) + \cdots + 2\, a_2 a_{\nu-1} \cos (2, \nu-1) \\ &+ \cdots + \cdots \\ &+ 2\, a_{\nu-2} a_{\nu-1} \cos (\nu-2, \nu-1). \end{aligned}$$

Das von den Seiten $d_{\nu-1}$, d_ν und a_ν gebildete Dreieck ergibt

$$7) \quad d^2_\nu = d^2_{\nu-1} + a^2_\nu + 2\, a_\nu d_{\nu-1} \cos (d_{\nu-1}, a_\nu),$$

und die Projektionen von $a_1, a_2 \cdots a_{\nu-1}$ und $d_{\nu-1}$ auf die Achse a_ν liefern das der Gleichung 1) entsprechende Ergebnis:

$$8) \quad d_{\nu-1} \cos (d_{\nu-1}, a_\nu) = a_1 \cos (1, \nu) + a_2 \cos (2, \nu) + \cdots + a_{\nu-1} \cos (\nu-1, \nu).$$

In Gleichung 7) setze man für $d^2_{\nu-1}$ den ganzen Ausdruck 6) ein und ausserdem für $d_{\nu-1} \cos (d_{\nu-1}, a_\nu)$ die Summe 8). Hierdurch erhält man für d^2_ν bei passender Anordnung der Glieder ein Schema, welches sich von 6) nur dadurch unterscheidet, dass eine weitere Vertikalreihe angegliedert ist. Wir schreiben es mit Anwendung des Summenzeichens Σ für den besonderen Fall $\nu = n$, in welchem d_n die Bedeutung a_{n+1} erlangt:

$$9) \quad d^2_n = a^2_{n+1} = \Sigma_\alpha a^2_\alpha + 2 \Sigma_{\lambda,\mu} a_\lambda a_\mu \cos (\lambda, \mu);$$

für α sind nacheinander alle Zahlen $1, 2, 3 \cdots n$ zu setzen, d. h. alle Unionen der genannten n-Elemente; für die Verbindung λ, μ kommen alle aus denselben Elementen ohne Wiederholung gebildeten Kombinationen zweiter Klasse oder Amben zur Verwendung.

Im Falle einer einspringenden Ecke hat das Vieleck an dieser Ecke einen erhabenen Innenwinkel; subtrahiert man ihn von 180^0, so erhält man einen negativen hohlen Winkel, der als der zugeordnete Aussenwinkel gilt; so gedeutet, bleibt die Herleitung und der Ausdruck 9) unseres Satzes auch bei einspringenden Ecken gültig. Wir unterlassen es, statt der Aussenwinkel die ursprünglich gegebenen Innenwinkel in die allgemeine Formel 9) einzuführen, weil der Satz hierdurch an seiner Uebersichtlichkeit Einbusse erleiden würde.

Nähern wir bei 9) die Seite a_{n+1} der Null, so geht das Polygon in ein n-Eck über, und für dieses gilt die Gleichung:

$$10) \quad 0 = \Sigma_\alpha a^2_\alpha + 2 \Sigma_{\lambda,\mu} a_\lambda a_\mu \cos (\lambda, \mu),$$

in welcher α und λ, μ dieselbe Bedeutung haben wie bei 9). Sie ist eine Verbindung des Cosinussatzes und des benutzten Projektionssatzes, was wir noch zeigen wollen, indem wir in 9) $n = 3$, in 10) $n = 4$ setzen, so dass wir jedesmal eine auf das Viereck bezogene Gleichung erhalten.

$$\begin{aligned} 11) \quad a_4^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2\, a_1 a_2 \cos (1,2) + 2\, a_1 a_3 \cos (1,3) + 2\, a_2 a_3 \cos (2,3) \\ 12) \quad 0 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2\, a_1 a_2 \cos (1,2) + 2\, a_1 a_3 \cos (1,3) + 2\, a_1 a_4 \cos (1,4) + \\ &\quad + 2\, a_2 a_3 \cos (2,3) + 2\, a_2 a_4 \cos (2,4) + 2\, a_3 a_4 \cos (3,4). \end{aligned}$$

Man subtrahiere 11) von 12), schaffe alle Glieder nach rechts und dividiere die ganze Gleichung durch $2\, a_4$, welche Grösse notwendig von Null verschieden ist, da es sich um ein Viereck handelt. So findet man

$$13) \quad 0 = a_4 + a_1 \cos (1,4) + a_2 \cos (2,4) + a_3 \cos (3,4).$$

Wenn ein Punkt, welcher der Reihe nach die Seiten a_4, a_1, a_2 und a_3 durchläuft, die positive Richtung dieser Seiten angibt, und wenn die so definierte Seite a_4 zugleich als Projektionsachse dient, so stellt die Gleichung 13) genau den Inhalt des Projektionssatzes dar. Führt man die Zeichen a, b, c und d für die Seiten des Vierecks bei 11) ein, und ferner die Innenwinkel $\sphericalangle [a, b] = B$, $\sphericalangle [b, c] = C$ statt der dortigen Aussenwinkel, so entsteht die Gleichung

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\, ab \cos B - 2\, bc \cos C + 2\, ca \cos (B + C).$$

Der erste Bestandteil auf der rechten Seite von 9),

$\Sigma_\alpha a^2_\alpha$ ist ebenso wie die linke Seite wesentlich positiv; der zweite Bestandteil hingegen, $\Sigma_{\lambda,\mu} a_\lambda a_\mu \cos(\lambda, \mu)$, setzt sich aus positiven und negativen Gliedern zusammen; er kann verschwinden, und hierüber besteht der Satz:

Wenn $\Sigma_{\lambda,\mu} a_\lambda \cdot a_\mu \cos(\lambda, \mu) = 0$, so ist $a^2_{n+1} = \Sigma_\alpha a^2_\alpha$ und umgekehrt.

Um ein Viereck zu erhalten, welches diesem Satze entspricht, zeichnen wir aus unserer Figur das Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ heraus mit der Abänderung, dass $\sphericalangle [a_1, a_2] = [d_2 a_3] = 90^0$ wird; statt d_3 haben wir a_4 zu schreiben, und es ist

$$a_4^2 = d_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Ferner ist $a_1 a_2 \cos(1, 2) = a_1 a_2 \cos 90^0 = 0$; die Projektionen der Seiten a_1 und a_2 auf a_3, nämlich $-a_1 \cos(1, 3)$ und $-a_2 \cos(2, 3)$, fallen in der Figur zusammen, sind also numerisch gleich; die Verschiedenheit ihrer Vorzeichen ergibt sich aus der Beziehung

$$\sphericalangle (1, 3) = (1, 2) + (2, 3) = 90^0 + (2, 3);$$

der Winkel (2, 3) liegt im ersten, $\sphericalangle$ (1, 3) im zweiten Quadranten. Es ist also

$$a_1 a_2 \cos(1, 2) + a_1 a_3 \cos(1, 3) + a_2 a_3 \cos(2, 3) = 0.$$

Wünscht man, dass die Seiten eines solchen Vielecks ganzzahlige Werte erhalten, so kann man sich der Gleichung bedienen:

$$(x^2 - y^2 - z^2)^2 + (2\,x\,y)^2 + (2\,x\,z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

mit welcher die Bedingung $x^2 > y^2 + z^2$ verbunden werde. Die besonderen Werte $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ liefern $4^2 + 12^2 + 6^2 = 14^2$, wo noch sämtliche Glieder durch 2^2 dividiert und passend geordnet werden mögen.

$$6^2 + 3^2 + 2^2 = 7^2.$$

Ein solches Viereck (Vieleck), bei welchem das Quadrat einer Seite gleich ist der Summe von den Quadraten aller andern Seiten, und bei welchem ausserdem die Masszahlen der Seiten ganze Zahlen sind, wird man passend ein pythagoreisches Viereck (Vieleck) nennen; wir fanden dafür das Beispiel

$$a_1 = 6,\; a_2 = 3,\; a_3 = 2,\; a_4 = 7.$$

Da ein Viereck durch die vier Seiten nicht bestimmt ist, so gibt es unzählige pythagoreische Vierecke mit den gegebenen vier Seiten. Das Viereck wird aber vollständig bestimmt, sobald zu den gegebenen Stücken ein Winkel hinzutritt, etwa der Innenwinkel $[a_1 a_2] = [1, 2]$. Hier erhebt sich die Frage, innerhalb welcher Grenzen dieser Winkel [1, 2] willkürlich gewählt werden könne. Darüber entscheiden die, dem Dreieck $A_1 A_3 A_4$ entnommenen Beziehungen

$$a_1 - a_3 < d_2 < a_1 + a_3, \text{ oder}$$

$$(a_1 - a_3)^2 < a_1^2 + a_2^2 - 2\,a_1 a_2 \cos[1, 2] < (a_1 + a_3)^2.$$

Setzt man die gewählten Seitenzahlen ein und löst dann jede Ungleichung nach $\cos[1.2]$ auf, so ergibt sich

$$25 < 45 - 36 \cos[1, 2] < 81; \qquad -1 < \cos[1, 2] < \frac{5}{9}.$$

Für den Winkel [1, 2], der hier hohl und erhaben sein kann, geht nun die doppelte Eingrenzung hervor

$$56^0\,15'\,3.''7 < [1, 2] < 180^0;$$

$$180^0 < [1, 2] < 303^0\,44'\,56.''3.$$

Hat man mit Hilfe eines, der ersten Eingrenzung entsprechenden, hohlen Winkels [1, 2] die Ecken $A_1 A_2$ und A_3 festgelegt, so ist A_4 als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt, also zweideutig und führt im allgemeinen zu zwei verschiedenen Vierecken. Hierbei besteht die Möglichkeit, dass jedes Viereck den gewählten hohlen Winkel als Innenwinkel wirklich enthalte, und in diesem Falle liefert der zugeordnete erhabene Winkel $A_1 A_2 A_3 = 360^0 - [1, 2]$ kein Viereck. Es kann aber auch so kommen, dass nur eines der beiden Vierecke den hohlen Winkel in sich aufnimmt, während das andere statt dessen den erhabenen Innenwinkel $360^0 - [1, 2]$ empfängt; man würde also dieselben beiden Vierecke gefunden haben, wenn man von vornherein $\sphericalangle A_1 A_2 A_3 = 360^0 - [1, 2]$ gewählt hätte. Eine ausführliche Erörterung der verschiedenen Möglichkeiten ist an dieser Stelle nicht beabsichtigt. Der Begriff des pythagoreischen Vierecks kann ohne weiteres auf ein Vieleck von beliebiger Seitenzahl ausgedehnt werden, und das Verfahren, solche pythagoreischen Vielecke zu konstruieren, ist dem beschriebenen durchaus analog.

Der gewöhnliche, pythagoreische Lehrsatz erlaubt eine Verallgemeinerung in dem Sinne, dass die über den Seiten errichteten Quadrate durch ähnliche, geschlossene Figuren ersetzt werden dürfen, denen jene Seiten als homologe Stücke angehören. Will man eine solche Verallgemeinerung auch bei 9) anbringen, so ist zunächst jedes, dem zweiten Summenausdruck angehörende doppelte Rechteck aus einer Seite und der Projektion der anderen auf diese in ein Quadrat zu verwandeln

$$14) \qquad 2\,a_\lambda a_\mu \cos(\lambda, \mu) = a^2_{\lambda,\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda,\mu},$$

wo $\varepsilon_{\lambda,\mu} = +1$, wenn $\sphericalangle (\lambda, \mu)$ dem ersten oder vierten Quadranten angehört; wenn hingegen $\sphericalangle (\lambda, \mu)$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, ist $\varepsilon_{\lambda,\mu} = -1$ zu setzen. Diese, mit den gehörigen Vorzeichen versehenen Quadrate 14) setzen wir in 9) ein und multiplizieren die ganze Gleichung mit einem positiven, sonst aber unbestimmten Faktor k; hierdurch wird

$$15) \qquad k \cdot a^2_{n+1} = k\,\Sigma_\alpha a^2_\alpha + k\,\Sigma_{\lambda,\mu} \varepsilon_{\lambda,\mu} a^2_{\lambda,\mu}.$$

Errichtet man nun über der Seite a_{n+1}, über allen Seiten a_α und ebenso über allen Strecken $a_{\lambda,\mu}$ Figuren, die sämtlich einander ähnlich sind und sich daher wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, so werden die Inhalte dieser Figuren bei passender Bestimmung des Faktors k beziehungsweise durch $k\,a^2_{n+1}$, $k\,a^2_\alpha$ und $k\,a^2_{\lambda,\mu}$ dargestellt, und es ist die Figur über a_{n+1} gleich dem auf der rechten Seite von 15) dargestellten Aggregate der Figuren, die über den anderen Seiten und Strecken errichtet worden sind.

Zur Einführung in den Satz von Pythagoras.

Von G. Junge (Berlin).

„Ebenso lehrt der Pythagoreische Lehrsatz uns eine qualitas occulta des rechtwinkligen Dreiecks kennen: des Eukleides stelzbeiniger, ja hinterlistiger Beweis verlässt uns beim Warum, und beistehende, schon bekannte, einfache Figur gibt auf einen Blick weit mehr, als jener Beweis, Einsicht in die Sache und innere feste Ueberzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel:

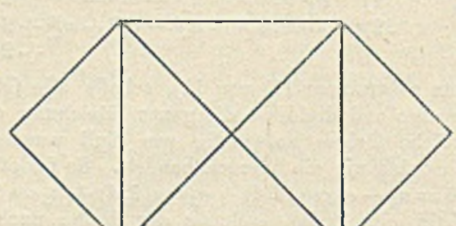


Fig. 1.

Auch bei ungleichen Katheten muss es sich zu einer solchen anschaulichen Ueberzeugung bringen lassen, wie überhaupt bei jeder möglichen geometrischen Wahrheit, schon deshalb, weil die Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen ward" . . .

So urteilt Schopenhauer über den euklidischen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, den Beweis, den schon Proklus als sehr augenfällig und neuerdings Herr Simon als den anschaulichsten rühmt, den Beweis, der noch heute in unseren Lehrbüchern der verbreitetste ist.

Doch vielleicht kannte Proklus keinen anderen Beweis des Satzes als den euklidischen. Und unsere Lehrbücher bringen ihn vielfach in verbesserter Form. So macht Herr Schuster in seiner Planimetrie einen, wie ich denke, recht gelungenen Versuch, den Satz von Euklid aus einer Aufgabe heraus zu entwickeln, nämlich aus der Aufgabe, ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln.

Aber es gibt einen ganz anderen Weg, der von dem anschaulichen, aber gar zu speziellen Falle der gleichen Katheten allmählich zu dem pythagoreischen Satze in voller Allgemeinheit überleitet. Dieser Weg führt über Dreiecke, deren Katheten rationales Verhältnis haben. Er könnte seit dem Erscheinen von Cantors Geschichte der Mathematik allgemein bekannt sein, ist es aber, soviel ich weiss, durchaus nicht. Ich werde ihn daher im folgenden darstellen, und die Stellen bei Cantor, die mir die Anregung gegeben haben, im Texte erwähnen.

Ich stelle den Schülern die Aufgabe, Quadrate von gegebener Fläche zu zeichnen, zuerst von 1, 4, 9 usw. qm, dann von der doppelten Fläche. Die Schüler benutzen Papier, das nach ganzen oder halben cm karriert ist. Bei der ersten Reihe von Quadraten fallen die Seiten der Quadrate mit den vorgezeichneten Linien zusammen, bei der zweiten Reihe laufen sie diagonal. Weiterhin fordere ich, einige der fehlenden Quadrate zu zeichnen, etwa das von der Fläche 5 qm. In der Regel verfällt bald ein Schüler auf die Figur 2 angegebene Konstruktion.

Sonst komme ich zu Hilfe durch die Zwischenforderung, ein Kreuz von der Fläche 5 qm zu zeichnen und in ein Quadrat zu verwandeln; s. Figur 3.

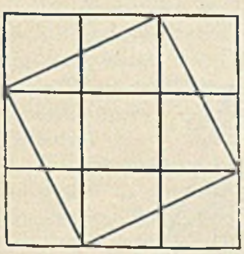


Fig. 2.

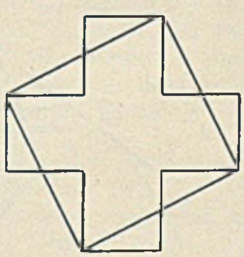


Fig. 3.

Diese Konstruktion ist von einem meiner Schüler einer bei Cantor angegebenen nachgebildet (Verdreifachung eines Quadrates, Cantor I S. 700.)

Aehnlich lassen sich alle Quadrate zeichnen, deren Fläche in qcm als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, deren Fläche also = 10, 13, 17, 20 usw. qcm. Die Zeichnung für das Quadrat von der Fläche 25 = 16 + 9 findet sich Cantor I S. 638; sie ist nach den Angaben einer chinesischen Quelle konstruiert; s. Figur 4.

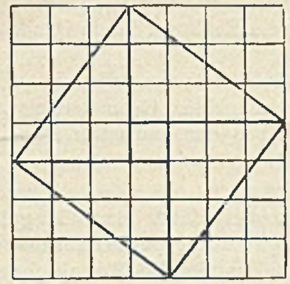


Fig. 4.

Die Schüler berechnen die Fläche der Quadrate durch Zerlegung in ein kleines Quadrat in der Mitte, dessen Seiten mit den Linien des Papiers zusammenfallen, und vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten ebenfalls mit Linien des Papiers zusammenfallen.

Diese Flächenberechnungen sind so anschaulich und einfach wie nur möglich. Nur denkt man noch kaum dabei an den Satz von Pythagoras.

Ich lasse weiterhin Quadrate zeichnen und berechnen über der Hypotenuse von Dreiecken, deren Katheten in cm und mm gegeben sind. Bei der Lösung solcher Aufgaben verfallen dann die Schüler früher oder später auf das Gesetz, das durch den Pythagoras ausgesprochen wird, und dessen Kenntnis eine schnellere Berechnung der Quadratfläche ermöglicht.

Der allgemeine Beweis ist nach diesen Vorbereitungen sehr einfach, gleichviel ob er rein geometrisch oder mit Buchstabenberechnung geführt wird. Im ersten Fall entsteht der sog. indische Beweis, den Bretschneider wegen seiner Einfachheit für den altpythagoreischen hält.

Litteratur-Nachweise.

Die eingangs zitierte Stelle ist aus „Welt als Wille und Vorstellung", Band 1, Buch 1, § 15 vor der Mitte.

Die Stelle aus Proklus' Kommentar ist zitiert und übersetzt bei Bretschneider: „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides" S. 81.

Herr Simon in Baumeister's „Erziehungs- usw. Lehre" Teil IX, Rechnen und Mathematik S. 88": „Von den 46 Beweisen des Hauptsatzes ist nächst dem euklidischen der indische der anschaulichste, d. h. am unmittelbarsten einleuchtende . . . "

Die Entwickelung des Satzes von Euklid gibt Herr Schuster in seinem Buche; „Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie", Ausgabe A erster Teil S. 53. Der Gedankengang ist etwa der folgende: (Figur 5.)

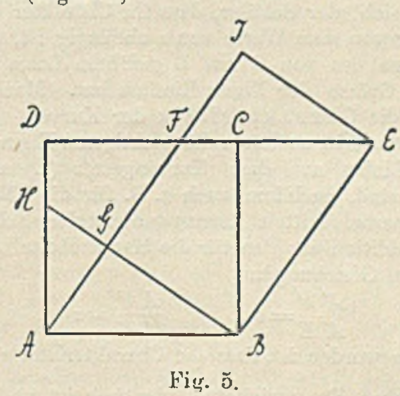


Fig. 5.

Das Quadrat $ABCD$ ist in ein Parallelogramm $ABEF$ und dies in das Rechteck $BEJG$ verwandelt worden. Die Seite BE war gegeben. Die Verlängerung von BG schneide AD in H. Die Bemerkung, dass

$BH = BE$, gibt den Satz von Euklid und die Lösung der umgekehrten Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Ueber den mutmasslich ältesten Beweis des pythagoreischen Satzes s. Bretschneider „Geometrie usw." S. 81 f, Cantor I S. 172; über den indischen Beweis s. Cantor I S. 614 und 701.

Die Bestimmung der Charakteristik eines Kegelschnitts aus dem Neigungswinkel der Kegelkante und dem der Schnittebene gegen die Kegelachse.

Von R. Haage (Dresden).

Beim Eintritt in die Behandlung der Kegelschnitte, sei sie synthetisch, sei sie analytisch, definiert man Ellipse, Parabel und Hyperbel in der Regel nicht als die ebenen Schnittfiguren eines Kreiskegels, sondern rein planimetrisch als ebene geometrische Oerter. Man tut dies mit gutem Recht, da in der Tat Ellipse, Parabel und Hyperbel ebene Kurven sind, die alle und nur solche Punkte enthalten, die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben, und da alle übrigen Eigenschaften dieser Kurven sich ohne alle Stereometrie auf rein planimetrischem Wege aus dieser einen primären Eigenschaft herleiten lassen.

Als solche primäre Eigenschaft, als die Definitionseigenschaft von Ellipse, Parabel und Hyperbel kann man unter anderen z. B. hinstellen

$$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon, \qquad \text{(I.)}$$

Dann hat der Schüler lauter Punkte P derartig zu bestimmen, dass für einen jeden unter ihnen der Abstand von einem festen Punkte F (Brennpunkt) zu dem von einer gegebenen Geraden L (Leitlinie) in einem gegebenen Verhältnis ε steht, und diese Punkte zu einer Kurve zu verbinden. Führt er dies aus mit Bezug auf einen und denselben Brennpunkt und ein und dieselbe Leitlinie, aber nacheinander für beliebig viele verschiedene Werte von ε, so erhält er, wenn

a) $\varepsilon < 1$ b) $\varepsilon = 1$ c) $\varepsilon > 1$ (II.)

bezw. a) geschlossene Kurven,
b) eine einzweigige Kurve,
c) zweizweigige Kurven,

und diese nennt man

bezw. a) Ellipsen,
b) Parabel,
c) Hyperbeln.

Bereits bei dieser punktweisen Konstruktion dieser Kurven sieht der Schüler, dass ihr Charakter, ihre Gestalt nur von dem Werte von ε abhängig ist, und dass die Länge des von F auf L gefällten Lotes FE nur auf die Grösse der Figur Einfluss hat. Man nennt ε deshalb die Charakteristik der Kurve.

Später erst, nachdem die wichtigsten Eigenschaften dieser Linien aus dem Kurvengesetz (I.) abgeleitet worden sind, nachdem auch z. B. für die Ellipse und die Hyperbel mittels korrespondierender Subtraktion bezw. Addition aus den für die Hauptscheitel A' und A geltenden Gleichungen

$$\frac{A'F}{A'E} = \varepsilon \qquad \frac{AF}{AE} = \varepsilon$$

gefunden worden ist, dass die Charakteristik ε mit der numerischen Exzentricität $\frac{e}{a}$ identisch ist, und dass infolgedessen ähnliche Ellipsen oder Hyperbeln solche mit gleichem ε sind, erst dann geht man zum Stereometrischen über.

Der Schüler erkennt, dass die ebenen Schnittfiguren, die an einem unbegrenzten Doppelkegel möglich sind, von dreierlei Art sein können:

a) Geschlossene Kurven,
b) einzweigige Kurven,
c) zweizweigige Kurven.

Welcher Gruppe ein Kegelschnitt angehört, das hängt davon ab, ob seine Ebene

a) beide Seitenlinien eines Achsenschnitts schneidet
oder b) nur die eine schneidet und der andern parallel läuft, oder
c) die eine selbst, die andere in ihrer Verlängerung über die Kegelspitze hinaus schneidet.

Bezeichnet man mit φ den Winkel, den eine Kegelkante, mit ψ den Winkel, den die Schnittebene mit der Kegelachse einschliesst, so ist bezw.

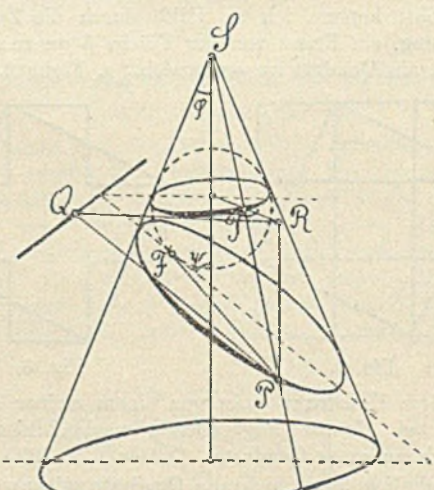
a) $\psi > \varphi$ b) $\psi = \varphi$ c) $\psi < \varphi$ (III.)

Der Schüler sieht leicht aus der Anschauung ein, dass parallele Ebenen an demselben Kegel ähnliche Schnittfiguren liefern, dass also φ und ψ die Gestalt des Kegelschnitts völlig bestimmen.

Schliesslich ist zu zeigen, dass zu jeder Kegelschnittfigur ein Punkt F und eine Gerade L existiert, mit Bezug auf die für jeden Punkt P des Kegelschnitts der Quotient $\frac{PF}{PQ}$ einen konstanten Wert besitzt, dass also die Kegelschnittfiguren die Eigenschaft (I.) haben, durch die früher Ellipse, Parabel und Hyperbel definiert wurden. Dann erst hat man bewiesen, dass Ellipse, Parabel und Hyperbel den Namen Kegelschnitte verdienen.*)

Die planimetrische Betrachtung hat ergeben, dass die Gestalt einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel durch ε bestimmt ist (vergl. Formeln II); die stereometrische lehrt, dass sie nur von φ und ψ abhängt (vergl. Formeln III). Ein Vergleich beider sagt, dass ε eine Funktion der Winkel φ und ψ sein muss.

Eine Beweisführung dafür, dass jeder beliebige ebene Schnitt eines geraden Kreiskegels die Grundeigenschaft (I.) besitzt, die obendrein den Wert der Charakteristik ε unmittelbar als Funktion von φ und ψ ergibt, ist die folgende:



F sei der Punkt, in dem die eine der beiden Kugeln, die man den beiden durch eine Kegelschnitt-

*) Vergl. W. Erler. Elemente der Kegelschnitte. 6. Aufl. bes. v. L. Huebner Seite 43 und 44, und H. Müller. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen A. II. Seite 304.

ebene abgetrennten Kegelräumen einschreiben kann, diese Kegelschnittebene berührt. Die nach einem beliebigen Punkte P der Schnittfigur führende Kegelkante schneide den Berührkreis dieser Kugel in T. Ausserdem sei von P auf die Ebene dieses Kreises das Lot PR und auf die Spur, in der sie die Kegelschnittebene schneidet, das Lot PQ gefällt. Dann ist

$$\widehat{QPR} = \psi \qquad \widehat{TPR} = \varphi$$

$$\frac{PR}{PQ} = \cos\psi \qquad \frac{PR}{PT} = \cos\varphi$$

$$\frac{PT}{PQ} = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$$

$$PT = PF$$

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \qquad \text{(IV.)}$$

$$\varepsilon = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \qquad \text{(V.)}$$

Mit Formel (IV.) ist die Grundeigenschaft (I.) für jeden beliebigen Kegelschnitt bewiesen; und Formel (V.) steht in völligem Einklang mit den Formeln (II.) und (III.).

Ist nämlich a) $\psi > \varphi$, so wird in (V.) $\varepsilon < 1$
b) $\psi = \varphi$ $\varepsilon = 1$
c) $\psi < \varphi$ $\varepsilon > 1$

Damit ist bewiesen der folgende

Lehrsatz: Die Charakteristik eines Kegelschnitts ist gleich dem Quotienten der Kosinus der Neigungswinkel der Schnittebene und der Kegelkante gegen die Kegelachse.

Im Anschluss hieran wäre unter anderen die Aufgabe zu lösen:

Aufgabe: Gegeben sind zwei gerade Kreiskegel mit verschiedenem Kegelwinkel; der eine ist durch eine Ebene unter einem gegebenen Winkel geschnitten. Der andere soll durch eine zweite Ebene so geschnitten werden, dass seine Schnittfigur der des ersten a) ähnlich, b) kongruent werde. Wie hat man diese Ebene zu legen?

Beitrag zur Lehre von den negativen Flächen.

Bemerkung zu dem Aufsatze von Herrn Lesser: „Negative Flächen im Schulunterricht."*)

Von Dr. H. Wieleitner (Speyer).

Im Anschlusse an den in der Ueberschrift genannten Aufsatz von Herrn Oskar Lesser, dessen Schlussfolgerung wohl eine zwingende ist, möchte ich nur einige Dinge anführen, die keineswegs neu, aber doch vielleicht nicht so allgemein bekannt sind, als sie es verdienen.

Ich nehme an, der Inhalt eines $\triangle ABC$ sei definiert und gleich f. Der entgegengesetzte Sinn sei schon bei Strecken und werde jetzt auch bei Dreiecksflächen durch das „—"-Zeichen ausgedrückt**). Dann kann man zunächst für jeden Punkt P der Ebene, indem man die verschiedenen Gebiete berücksichtigt, den Satz beweisen:

$$(1) \qquad \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA = f.$$

Hat man nun irgend vier Punkte A, B, C, D, so ist für einen ganz beliebigen Punkt P der Ebene

$$\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA = \triangle ABC$$
$$\triangle PAC + \triangle PCD + \triangle PDA = \triangle ACD, \text{ also}$$

$$(2) \quad \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCD + \triangle PDA = \triangle ABC + \sim \triangle ACD = \text{Const.}$$

*) Unt.-Bl. Jahrg. XII, Nr. 1, S. 10.
**) Es ändert sich ja nur der Sinn der Grundlinie, während der der Höhe bleibt!

Diese Konstante wird man demnach als naturgemässe Erweiterung von (1) für den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ in jedem Falle nehmen dürfen, während die rechte Seite von (2) zeigt, dass sie denselben bei einem nicht überschlagenen Viereck auch anschauungsgemäss darstellt. Diese rechte Seite erscheint nun aber zugleich als spezieller Fall der linken, indem A für P genommen wurde. Ebenso ist, wenn für P der Schnittpunkt S von BC und AD genommen wird, für jedes Viereck

$$\text{Fläche} = \triangle SAB + \triangle SCD$$
$$= \triangle SAB - \triangle SDC.$$

Ich zweifle nicht, dass auch diese Fassung schon auf Tertia verständlich wäre. Die Erweiterung des Satzes (2) auf einen beliebigen n-mal gebrochenen geschlossenen Linienzug kann man ja gelegentlich später dazufügen.

Diese von Gauss und Möbius herrührende allgemeine Fassung des Flächenbegriffes findet man bei Baltzer, leider, wie manches andere, nicht bei Weber-Wellstein.

Vielleicht ist es auch für einige Leser nicht ohne Interesse zu erfahren, dass die benützte Kurve eine sogenannte „virtuelle Parabel" ist, von jener allgemeineren Art, die im Briefwechsel zwischen Huygens und R. de Sluse öfters vorkommt (s. Loria, *Spezielle Kurven*, Teubner 1902, S. 174). Ihre Gleichung lässt sich in der Form schreiben

$$x = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{y}{2}}.$$

Man erhält sie also, indem man die Abszissen zweier Parabeln addiert, bezw. subtrahiert. Die Kurve ist rational, da sie im unendlichfernen Punkt der y-Achse einen Berührungsknoten besitzt.

Flächenwerte von entgegengesetztem Zeichen.

Von F. Pietzker.

Der interessante Artikel des Herrn Oscar Lesser über negative Flächen im Schulunterricht*) hat, wie ja u. a. auch die vorstehenden Ausführungen des Herrn Wieleitner**) zeigen, in Fachkreisen vielfach Beachtung gefunden. Ich möchte mich den Darlegungen beider Herren insoweit anschliessen, als auch ich der Meinung bin, dass die Berücksichtigung negativer Flächenwerte im Unterricht nicht zu umgehen ist, wenngleich ich über die Art dieser Berücksichtigung und namentlich über die Begründung des einer Fläche etwa beizulegenden negativen Wertes wesentlich anderer Meinung bin.

Mein Standpunkt erhellt am besten aus der Betrachtung eines einzelnen Falles und zwar eines Falles derselben Art, wie des von Herrn Wieleitner herangezogenen, bei dem ein Polygon als Summe der Dreiecke erscheint, die durch Verbindung seiner Ecken mit einem in seiner Ebene gelegenen Punkte auftreten. Ich wähle dazu das Dreieck ABC, dessen Ecken ich mit den Mittelpunkt O des ihm umbeschriebenen Kreises verbinde. Dann ist $\triangle ABC = BCO + ACO + ABO$. Lasse ich jetzt den Winkel $BAO = \alpha$ seine Grösse ändern, während die Seite BC ihre Länge behält, so fällt für einen stumpfen Wert des Winkels α der Punkt O ausserhalb des Dreiecks und die eben aufgestellte Gleichung lässt sich auch auf diese Sachlage nur da-

*) Unt.-Bl. XII, S. 10—14.
**) S. diese Nummer, diese Seite.

durch ausdehnen, dass man die Fläche des Dreiecks BCO als eine negative Grösse in Rechnung stellt.

Soweit herrscht volle Uebereinstimmung, nun kommt aber die Differenz. Die Herren Wieleitner und Lesser motivieren beide die Anwendung eines negativen Wertes für eine Fläche, wie diese Dreiecksfläche mit demselben Argument, sie weisen darauf hin, dass die Umfänge der von ihnen als negativ angesehenen Flächen in jedem Einzelfalle gerade in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden, wie bei der Sachlage, wo diese Flächen als positiv galten, und eben aus diesem Gegensatz leiten sie das Recht zur Anwendung entgegengesetzter Vorzeichen her, indem sie dabei sich zugleich auf das Vorangehen von Möbius und Gauss stützen.

Wohin diese Auffassung führt, zeigt sich besonders deutlich in dem kleinen Artikel von Herrn Wieleitner, der ausdrücklich sagt, wenn der angenommene Punkt (P nach seiner Bezeichnung) ausserhalb des Dreiecks fällt, ändere sich in dem Teildreieck BCO nur der Richtungssinn der Basis, während die Höhe ihren Sinn behalte.

Ich bin der gerade entgegengesetzten Ansicht. Lässt man in dem von mir gewählten Beispiel den Winkel α variieren, während BC unveränderlich bleibt und O seine Rolle als Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises beibehält, so bewegt sich der Punkt O auf der Mittelsenkrechten zu BC, die Höhe des Teildreiecks BOC ist ein Stück dieser Mittelsenkrechten, das für den Fall eines spitzen Winkelwertes von α die Basis BC gerade von der entgegengesetzten Seite trifft, wie in dem Falle, wo bei stumpfem α der Punkt O ausserhalb des Dreiecks liegt, d. h. für die Höhe dieses Dreiecks besteht in den beiden Fällen $\alpha < R$, $\alpha > R$ ein augenscheinlicher Richtungsunterschied, den man auch in Tertia bereits in einer für die Schüler verständlichen Weise durch die Verwendung entgegengesetzter Vorzeichen zum Ausdruck bringen kann. Hält man dann daran fest, dass die Basis BC hierbei keinerlei Aenderung erfährt, und drückt unter Berücksichtigung dieses Umstandes die doppelte Dreiecksfläche als das halbe Produkt aus Basis und Höhe aus, so erhält man in den beiden genannten Fällen Flächenwerte von entgegengesetztem Zeichen, also bei der Annahme, dass eine die Dreiecksseiten von innen her treffende Richtung als positiv gelten soll, für $\triangle OBC$ einen negativen Wert, sobald O nach aussen fällt.

Durch die Verwendung des Produkts als Ausdruck des Flächeninhalts gewinnt man also ohne weiteres den Anschluss des negativen Flächenwerts an die negativen Streckengrössen, wesentlich dabei ist aber, dass in dem Produkt nur der eine Faktor sein Zeichen ändert, während der andere Faktor völlig denselben Sinn behält. Den Sachverhalt bestätigt man dann später durch die Trigonometrie, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks OBC durch den Ausdruck $\frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$ darstellt, worin r den Radius des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises bezeichnet, denn dieser Grössenausdruck wird ja für $\alpha > 90^0$ negativ. Man kann ihn weiterhin auch in Vergleich mit gewissen Sachverhältnissen in der Mechanik setzen, wo z. B. das Drehungsmoment einer drehenden Kraft sich ebenfalls aus zwei Faktoren zusammensetzt, von denen jeder einen doppelten Richtungssinn haben kann, so dass durch die Vorzeichenänderung bei einem Faktor der Sinn des Moments umgekehrt, durch Aenderung des Richtungssinnes bei beiden Faktoren aber nicht alteriert wird.

Und man kann an die Betrachtung des erwähnten Falles gleich andere ähnliche Fälle anschliessen, von denen namentlich die Legung des Punktes O in den Höhenschnittpunkt des Dreiecks besonders instruktiv ist, weil da die Auswahl der negativen Strecken und und der negativen Flächenwerte sich im einzelnen auf beinahe entgegengesetzte Weise vollzieht, wie bei dem hier behandelten Fall, während die allgemeinen Gesichtspunkte die gleichen bleiben.

Das ist sehr lehrreich und nach meiner Ansicht für Tertianer wohl verständlich.

Jetzt könnte vielleicht Jemand sagen: das ist ja erfreulich, man kann die Sache auf die eine oder auf die andere Art angreifen, bei der einen verändert die Höhe des Dreiecks BOC für die beiden einander entgegengesetzten Lagen des Punktes O ihren Sinn, bei der anderen die Basis, der Endeffekt ist bei beiden Auffassungen der gleiche.

Aber auch das kann ich nicht zugeben. Bei der Auffassung, die die Herren Lesser und Wieleitner vertreten, fehlt der stetige Uebergang vom Positiven zum Negativen durch die Null. Die Basis BC ist nicht geeignet, diesen Uebergang zu vermitteln, da sie während des ganzen Prozesses unverändert die gleiche Länge behält und nur bei dem Durchgang des Punktes O durch sie plötzlich und sprungweise ihr Zeichen ändern würde. Wohl aber erfüllt die Höhe des Dreiecks BOC die eben aufgestellte Forderung des Ueberganges vom Positiven zum Negativen durch eine allmähliche Grössenänderung, bei der die Null eine Station bildet.

Der verschiedene Sinn, den eine innerhalb einer Ebene erfolgende Umlaufsbewegung aufweist, je nachdem man die Ebene von der Vorderseite oder von der Rückseite betrachtet, kann keinen Grund abgeben, den Inhalt des umlaufenen Flächenstücks bei der Ansicht von der einen Seite als positiv, von der anderen als negativ anzusehen, weil dabei keine stetige Variation eintritt. Ob man der Ebene nah oder fern steht, das Flächenstück bietet dem Beschauer von der Vorderseite immer den gleichen Anblick, und ebenso bietet es dem Beschauer von der Rückseite stets das gleiche Bild, auch hat der Durchgang des Beschauers durch die Ebene nicht die Folge, dass sich nun etwa die Fläche annulliert, sie behält ihre Grösse, die nur nach der von mir bekämpften Auffassung in diesem Moment gleichzeitig auf das doppelte Zeichen Anspruch haben würde.

Damit komme ich auf einen besonderen Punkt der Lesserschen Ausführungen. Herr Lesser lässt (a. a. O. S. 12, Fig. 4) ein Rechteck, dessen Fläche für den Beschauer der Vorderseite als positiv, für den der Rückseite als negativ gelten soll, um seine Mittellinie rotieren und betrachtet dabei die veränderliche Projektion dieser Fläche auf eine durch die Mittellinie gelegte Ebene.

Weil nun das rotierende Rechteck während einer vollen Umdrehung teils als positive, teils als negative Fläche erscheine, darum müsse man — wie gefolgert wird — auch für die Projektionen dieser Fläche, während der beiden Hälften der Umdrehungszeit den gleichen Zeichengegensatz annehmen, dessen einleuchtende Motivierung ja der eigentliche von Herrn Lesser verfolgte Zweck ist.

Mit der Zeichenunterscheidung für die beiden Projektionshälften $ONDM_2$ und $ONAM_1$ in der Lesserschen Figur 4 bin ich nun sehr einverstanden, aber aus einem ganz anderen, als dem von Herrn Lesser angeführten Grunde. Aus der Verschiedenheit der beiden Seiten des Rechtecks, dessen Projektionen die dort genannten Rechtecke sind, können die entgegengesetzten Zeichen für diese letzteren schon darum nicht gefolgert werden, weil ja die Projektionen des rotierenden Rechtecks immer gleichzeitig rechts und links von ON fallen, also gleichzeitig positiv oder negativ sein müssten, je nachdem das rotierende Rechteck seine Vorderseite oder seine Rückseite zeigt.

Aber man bedarf auch solcher Begründung gar nicht. Das Rechteck, das durch Parallelverschiebung einer zu ON parallelen Geraden von ON aus entsteht, weist in der Tat alle Eigenschaften auf, die einer algebraisch ausdrückbaren Grösse zukommen. Es hat einen je nach dem Abstand von ON, den die Gerade erhält, veränderlichen Wert, fällt die Gerade mit ON zusammen, ist seine Fläche gleich Null, die Verschiebung nach links (auf M_1A zu) ist das direkte Gegenteil der Verschiebung nach rechts (auf M_2B zu.)

Und nun enthüllt sich auch deutlich der — nach meiner Ansicht einzig mögliche — Sinn, in dem man von Vorzeichen bei Flächen überhaupt sprechen kann.

Die Variation vom Positiven durch die Null zum Negativen ist ein linearer Prozess, der an sich auf Flächen als zweifach ausgedehnte Gebilde gar nicht anwendbar ist. Keine Flächengrösse an sich ist negativ oder positiv, den Anspruch auf ein Vorzeichen erhält sie erst durch eine Auffassung, bei der ihre fortwährende Grössenänderung als das Ergebnis eines linearen Prozesses erscheint.

Bis zu einem gewissen Grade wird ja dem Rechnung getragen auch bei der von mir bekämpften Auffassung, denn das Umlaufen eines geschlossenen Flächenstücks ist ein linearer Prozess, der in zwei zu einander entgegengesetzten Richtungen erfolgen kann. Aber dieser Prozess ist nicht der, der die Fläche erzeugt, wie man schon daraus erkennt, dass von einem messbaren Flächeninhalt überhaupt erst in dem Augenblick gesprochen werden kann, in dem die Umgrenzungslinie sich zusammenschliesst. Die Flächengrösse ist demnach keine Funktion des veränderlichen Streckenwertes, den man beim Umlaufen der Fläche allmählich durchmisst.

Dagegen wird die Forderung der Flächenerzeugung durch einen linearen Prozess erfüllt für das eben in Betracht gezogene Rechteck, das durch Parallelverschiebung einer Geraden von der Anfangslage ON aus entstand und sich in seiner Grösse ganz nach dem Massstabe dieser Verschiebung richtete, sie wird auch erfüllt von dem im Anfang meiner Ausführungen betrachteten Dreieck BOC, das durch unter stetiger Verkürzung erfolgende Parallelverschiebung einer Geraden von der Anfangslage BC aus bis zum Punkte O entstand.

Sie wird auch erfüllt, wenn man als Fläche des Dreiecks, dessen drei Ecken der Nullpunkt O, der Punkt mit den Koordinaten u, v und der Punkt mit den Koordinaten p, q sind, den Wert $pv - uq$ hinstellt, denn ob man dieser Fläche eben diesen Wert oder den entgegengesetzten Wert $uq - pv$ beilegt, das hängt ganz davon ab, ob man sie als den Raum ansieht, den ein von O ausgehender Strahl überstreicht, wenn er unter Festhaltung einer geradlinigen Bahn für seinen Endpunkt von der Lage $O - (u, v)$ in die Lage $O - (p, q)$ übergeführt wird oder umgekehrt, der Unterschied gegen die beiden vorhergehenden Beispiele liegt allein darin, dass der lineare Prozess hier in einer Drehung, dort in einer Verschiebung bestand.

Im übrigen braucht aber der lineare Gegensatz nicht gerade auf der Verschiebungsrichtung zur Erscheinung zu kommen, die Sache kann auch so liegen, dass die Verschiebungsrichtung dieselbe bleibt, während dagegen die verschobene Strecke ihren Sinn ändert. Das trifft z. B. für die Sachlage zu, die Herr Lesser unter Illustration durch seine Figur 5 auf S. 13 und 14 seines Artikels behandelt. Ich stimme ihm darin bei, dass die Flächenformel für das Trapez auch für die Figur 5 gilt, sobald man nur das Dreieck SCD als negativ ansieht. Aber dass dieses Dreieck negativ ist, folgt nicht aus dem gegensätzlichen Umlaufssinn für die beiden Dreiecke ABS und SCD, der wahre Grund liegt vielmehr in der Auffassung der ganzen Figur als des Ergebnisses einer Verschiebung. Indem eine Strecke von der Anfangslage AB aus parallel mit sich selbst verschoben wird, erzeugt sie, wenn ihr einer Endpunkt eine Gerade beschreibt, bei stetig gleichmässiger Verkürzung eine Fläche, die anfänglich die Form eines Trapezes hat, dann zum Dreieck wird, um weiterhin die Form der Fig. 5 anzunehmen.

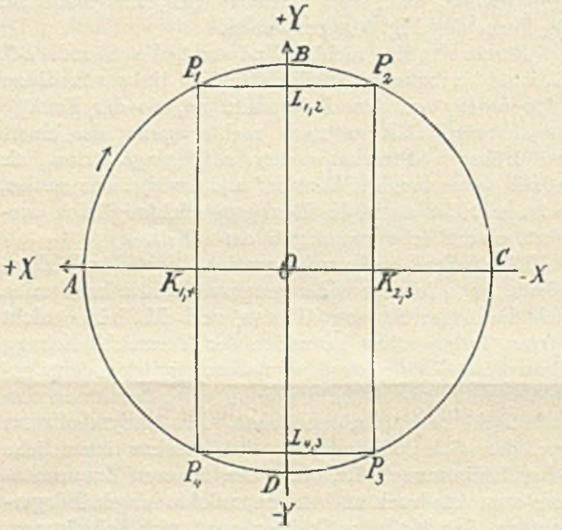
Beschreibt ihr rechter Endpunkt die Gerade BC, so liegt das bewegte Stück anfänglich links von dieser Leitgeraden, von dem Zeitpunkte an, wo der Punkt S erreicht wird, fällt es nach rechts, weist also einem den früheren Streckenwerten entgegengesetzten, als negativ anzusehenden Wert auf und erzeugt demgemäss, so lange nicht auch die Bewegungsrichtung sich umkehrt, eine Fläche von negativem Inhalt.

Eine andere Auffassung negativer Werte für Flächengrössen halte ich für widerspruchsvoll, darin kann mich auch die Autorität von Gauss und Möbius nicht beirren, insbesondere kann ich der Veranschaulichung negativer Grössen durch den Sinn, in dem ein geschlossenes Flächenstück umlaufen wird, höchstens eine symbolische Bedeutung zugestehen, solchem Symbolismus aber, der sich lediglich an eine gewisse äusserliche Uebereinstimmung hält, ohne den inneren Zusammenhang zum Ausdruck zu bringen, möchte ich ein Bürgerrecht in der Mathematik überhaupt nicht einräumen.

Wie sich nach der von mir vertretenen Auffassung die Sache für die Behandlung der Maximumaufgaben gestaltet, will ich nun auch an der Hand der Aufgabe erörtern, die Herrn Lesser als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen gedient hat. Dabei muss ich zuvörderst bemerken, dass durch die analytische Behandlung dieser Aufgabe ihr ursprünglicher Charakter zum Teil verwischt worden ist. Ursprünglich handelte es sich um die Aufsuchung des Maximalwertes für ein einem Halbkreis einzubeschreibendes Rechteck, bei der durch die Figur 3 des Lesserschen Aufsatzes erläuterten Behandlung wird die Basis dieses Rechtecks in zwei Hälften zerlegt, die als $+x$ und $-x$ in Rechnung gestellt werden, eine Behandlung, die mit der Auffassung des Rechtecks als eines Ganzen absolut nicht in Einklang zu bringen ist, da können die beiden Basishälften nur als ganz gleichwertige, auch im Vorzeichen keinen Unterschied aufweisende Grössen behandelt werden.

In Wahrheit wird auch gar nicht das eigentlich in Rede stehende Rechteck, sondern seine Hälfte, d. h. ein einem Kreisquadranten einbeschriebenes Rechteck betrachtet, wobei es ja in der Ordnung ist, wenn die beiden Hälften des Durchmessers in dem diesen Quadranten enthaltenden Kreise durch ihre Vorzeichen unterschieden werden. D. h., es wird die Aufgabe untersucht: an welchen Stellen treten Maximalwerte und Minimalwerte für ein veränderliches Rechteck auf, von dem zwei Seiten auf zwei zu einander senkrechten Kreisdurchmessern liegen, während die vierte Rechtecksecke die Kreisperipherie durchläuft, oder analytisch: wann erhält das Produkt $x y$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert, wenn x und y variieren, während immer die Bedingung $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllt ist?

Das Durchlaufen des Kreises ist hier ein linearer Prozess, der auf die Grössenänderung von x und y und mithin auch auf die Aenderung des Produkts $x y$ Einfluss hat, aber in einem ganz anderen Sinne, als bei der M ö b i u s schen Auffassung. Hier gründet sich die Unterscheidung der auftretenden positiven und negativen Flächenwerte in keiner Weise auf den Gegensatz der Richtung, in dem der Kreis durchlaufen wird, vielmehr wird durch den linearen Prozess des Kreisdurchlaufens ein zweiter linearer Prozess — genauer gesprochen, eine Folge von zwei linearen Prozessen — hervorgerufen, wobei eine gewisse Fläche zwischen zwei dem Zeichen nach einander entgegengesetzten Lagearten wechselt.



Durchläuft der Punkt P von A ausgehend die Kreisperipherie im Sinne des Uhrzeigers, so erleidet die vertikale Gerade PK eine (unter fortwährender Grössenveränderung erfolgende) Verschiebung, vermöge deren der zwischen ihr und der Vertikalachse BD liegende Rechteckstreifen bei Ueberschreitung des vertikalen Radius so zu liegen kommt, dass seine Lage eben gegen diese Vertikalachse gerade die entgegengesetzte ist, als vorher; dadurch rechtfertigt es sich, den Inhalt dieser Fläche im zweiten Quadranten als negativ anzusehen. Tritt der Punkt P bei C in den dritten Quadranten ein, so erhält die Rechtecksfläche in bezug auf die Horizontalachse die entgegengesetzte Lage, wie vorher, das bedingt einen neuen Zeichenwechsel, vermöge dessen die Fläche eines in diesem Quadranten liegenden Rechtecks wieder als positiv anzusehen ist, während sie im vierten Quadranten wieder negativ wird. Dass dabei das im dritten Quadranten liegende Rechteck dasselbe Zeichen aufweist, wie das im ersten liegende, verliert alles befremdende, was ihm etwa für den naiven Beschauer noch anhaften könnte, wenn man erwägt, dass zwei Figuren von denselben Grössenabmessungen, die man dem ersten und dem dritten Quadranten einbeschreibt, einander vollständig kongruent sind, während zwei solche Figuren, die im ersten und zweiten Quadranten liegen, nur symmetrische Kongruenz aufweisen. Im übrigen sind alle Bedingungen, die weiter oben für die Anwendbarkeit der Vorzeichen als unerlässlich hingestellt waren, erfüllt, es liegen zwei aufeinanderfolgende lineare Prozesse vor; während des ersten von beiden wird eine positive, während des zweiten eine negative Strecke verschoben, überall, wo ein Uebergang vom Positiven zum Negativen oder umgekehrt stattfindet, geht der Flächenwert durch die Null hindurch.

Sehr wesentlich ist dabei der Umstand, dass der Punkt P während seiner Bewegung die ganze Peripherie durchläuft, nicht nur die halbe Kreislinie, von der in der eigentlichen Aufgabe die Rede war. Denn bei der von Herrn L e s s e r angewendeten analytischen Behandlung kommt diese Beschränkung auf den Halbkreis überhaupt nicht zur Geltung, die Gleichung $y^2 + x^2 = r^2$, aus der der auch von Herrn L e s s e r benutzte Wurzelfaktor $\sqrt{r^2 - x^2}$ stammt, gilt für die ganze Kreislinie. Wenn also den analytischen Formeln, die den Sachverhalt zum Ausdruck bringen, die Deutung gegeben wird, dass die auf ihre etwaigen Maximal- oder Minimalwerte zu prüfende Fläche fortwährend innerhalb des oberen Halbkreises bleibt, um durch wiederholtes „Umschlagen" immer neue Zeichenwechsel zu erfahren und a n d e r s e l b e n S t e l l e, je nachdem sie ihre Vorderseite oder Rückseite zeigt, als positiv oder negativ zu gelten, so ist diese Deutung meines Erachtens nicht nur an sich anfechtbar, sie entbehrt auch der gehörigen Begründung, weil sie auf einer Annahme beruht, die erst von aussen in die analytische Auffassung der Sachlage hineingetragen wird.

Zugleich ergibt sich auch hier, dass der Sinn, in dem eine Fläche umkreist wird, mit dem Zeichen für den dieser Fläche zukommenden Inhalt nichts zu tun hat. Lasse ich den Punkt P meiner Figur die Kreislinie in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, wie vorher, so behalten alle dabei entstehenden Flächenwerte dasselbe Zeichen, wie es bisher angenommen war; der einzige Unterschied ist der, dass dann die beiden Maxima und Minima in der gerade entgegengesetzten Reihenfolge auftreten.

Aber, wie gesagt, bei dieser ganzen Behandlung kommt nicht die eigentliche Aufgabe zur Geltung, sondern vielmehr eine andere, ihr stillschweigend substituierte. Will man der eigentlichen Aufgabe gerecht werden, so muss man überhaupt eine andere Behandlung eintreten lassen, bei der vor allen Dingen wesentlich ist, dass man die als Basis des Rechtecks dienende Strecke $2x$ nicht in zwei durch gegenteilige Zeichen von einander unterschiedene Hälften zerlegt.

D. h., man darf in diesem Falle die ganze Sachlage nicht von der Variation der Grösse x zwischen den Grenzen $+r$ und $-r$ abhängig machen, vielmehr muss man aus den beiden Gleichungen $2xy = F$ und $x^2 + y^2 = r^2$ jetzt die Grösse x eliminieren und den dann entstehenden Ausdruck $F = 2y\sqrt{r^2 - y^2}$, in dem der die Rechtecksbasis darstellende Faktor $2\sqrt{r^2 - y^2}$ als dem Zeichenwechsel nicht unterworfen, also als positiv anzusehen ist, auf die Werte prüfen, die er innerhalb des durch den Wortlaut der eigentlichen Aufgabe festbegrenzten Gebietes erhält. Man sieht sofort, dass um ein dem Halbkreis einbeschriebenes Rechteck zustande zu bringen, für y nur eine Grössenänderung von $+r$ bis O (oder umgekehrt) zulässig ist, dann fällt allerdings jeder Anlass zur Annahme eines Zeichenwechsels für die betrachtete Fläche fort, für die es auch dann nur ein Maximum vom Werte $(+r^2)$ gibt, das für $y = r : \sqrt{2}$ erreicht wird.

Doch kann man auch hier die Auffassung der Sachlage so erweitern, dass für negative Flächenwerte Platz gewonnen wird. Man würde dann die Grösse y zwischen den Grenzen $+r$ und $-r$ variieren lassen, d. h. man würde das Rechteck entstehen lassen durch gleichzeitiges Vorwärtsgehen von zwei Punkten P_1 und P_2, deren einer die linke Kreishälfte BAD, deren anderer die rechte Kreishälfte BCD durchwandert. Das heisst, um auch den unteren Halbkreis in die Betrachtung hineinzuziehen, würde man das auf seine Grössenveränderung zu prüfende Rechteck definieren als einen rechteckförmigen Flächenstreifen, gelegen zwischen dem festen Horizontaldurchmesser (AC) der obigen Figur und einer beweglichen durch den ganzen Kreis sich allmählich — von B aus bis D — verschiebenden horizontalen Sehne, wie sie z. B. $P_1 P_2$ darstellt. Bei Ueberschreitung des Horizontaldurchmessers durch die Sehne wird dann die Rechtecksfläche zu Null, um darauf gegen den Horizontaldurchmesser die entgegengesetzte Lage wie vorher zu erhalten, also mit Recht als negativ angesehen zu werden.

Dann ergibt sich für die betrachtete Fläche ein Maximalwert von der Grösse $+r^2$ und ein Minimalwert von der Grösse $-r^2$, beide treten bei Rechtecken auf, deren Basis die Länge $r\sqrt{2}$ besitzt, das Maximal-Rechteck ist dem oberen, das Minimal-Rechteck dem unteren Halbkreis eingeschrieben, wenn man — wie bei der eben angestellten Betrachtung geschehen — als Ausgangsstelle des die Grössenänderung der Rechtecksfläche verursachenden linearen Prozesses die Mitte des oberen Halbkreises wählt.

Wenn ich mich nun weiter der Frage zuwende, in welchem Umfange diese Sachverhältnisse für den Unterricht verwertbar sind, so darf ich die Meinungsverschiedenheit, die über sie zwischen einigen Lehrern selber besteht, wohl als ein Zeugnis dafür anführen, dass die ganze Materie ihre eigentümlichen Schwierigkeiten hat, dass also bei ihrer Hineinziehung in den Unterricht eine gewisse Vorsicht geboten ist.

Eine Auffassung, die ich an sich für anfechtbar halte, wie die Möbiussche, die das Zeichen eines Flächenwertes nach der bei dem Umlaufen der Fläche beobachteten Richtung beimisst, eine solche Auffassung würde ich ja natürlich auch für die Verwertung im Unterricht nicht empfehlen. Aber auch wenn ich sie an und für sich für zutreffend hielte, würde ich ihre Verwendung in Tertia deswegen für ungeeignet halten, weil sie des Zusammenhanges mit den in dieser Klasse sonst vorhandenen räumlichen Vorstellungen entbehrt. Ich möchte aber auch die von mir selber vertretene prinzipielle Auffassung, die in dem Zeichenwechsel bei einer ihre Grösse verändernden Fläche nur den selbstverständlichen algebraischen Ausdruck des die Grössenveränderung zustandebringenden linearen Prozesses erblickt, in den mittleren Klassen nur ausnahmsweise zur Geltung bringen, weil sie eine Fähigkeit der begrifflichen Verallgemeinerung voraussetzt, die der Unterricht bei der Mehrzahl der Schüler erst erzeugen soll.

Für die mittleren Klassen scheint mir vielmehr gerade die Behandlung am Platze zu sein, die einfach eine Fläche dann für negativ erklärt, wenn von den beiden Strecken, die durch ihre Multiplikation den algebraischen Ausdruck des Flächenwerts ergeben, die eine ersichtlich den entgegengesetzten Sinn hat, wie bei der den Ausgangspunkt der Betrachtung darstellenden Sachlage, also die Behandlung, die ich selbst durch das am Eingang meiner Ausführungen benutzte Beispiel der Teilung eines Dreiecks vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises aus illustriert habe.

Diese knüpft unmittelbar an bekannte Begriffe an, nämlich an die Flächenberechnung mittels Streckenmultiplikation und an die Darstellung des Richtungsgegensatzes von Strecken durch den Vorzeichenunterschied, wie sie bei der Einführung der negativen Grössen in der Arithmetik sich ganz von selbst ergibt und auch in der Geometrie bei verschiedenen Gelegenheiten, z. B. bei der Anwendung des erweiterten pythagoreischen Satzes auf die verschiedenen Dreiecksformen zur Geltung kommt.

Durch solche Behandlung wird dann die der höheren Stufe vorzubehaltende und dort namentlich auch an geeigneten Maximumaufgaben immer wieder zu betätigende prinzipielle Auffassung in geeigneter Weise vorbereitet. Herr Lesser führt einen Satz aus den Vorschlägen der Unterrichtskommission der Naturforscher-Gesellschaft an, über dessen Sinn und Tendenz ich selbst sehr gut Aufschluss geben kann, weil er von mir persönlich herrührt. Ich habe, als ich ihn zur Aufnahme in den Kommissionsbericht vorschlug, u. a. auch gerade an diese eben von mir skizzierte Stoffbehandlung gedacht. Das funktionale Denken, dessen besondere Pflege unsere Vorschläge so nachdrücklich betonen, soll nach unserer Meinung auf den unteren Stufen mehr praktisch und instinktiv unter Verwertung der jedem Einzelfalle für sich eigentümlichen Sachverhältnisse herangebildet werden, während die Erhebung dieser Denkweise zu einer klar bewussten, die allgemeinen Gesichtspunkte in den Vordergrund stellenden Geistestätigkeit dem Unterricht auf der oberen Stufe zufallen würde.

Die Grundformel des Parallelogrammgesetzes.

Von Th. Schwartze (Berlin-Friedenau).

In Dührings kritischer Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik (2. Aufl. 1877, S. 151) wird die Frage aufgeworfen, ob das Zusammensetzungsprinzip auch lehre, wie Kräfte, die nicht an derselben, sondern an verschiedenen Massen wirken, sich gegenseitig bestimmen. Es wird dabei auf die Mehrheit der durch eine Hebellinie verbundenen Massen hingewiesen, wobei deren Verschiedenheit die gegenseitigen Beziehungen der darauf einwirkenden Kräfte vermitteln und die Ansicht ausgesprochen, dass in entsprechender Weise auch für das Parallelogramm der Kräfte anstatt einer Masse bezw. eines Punktes zwei in Betracht gezogen werden könnten, die mit einander unmittelbar und untrennbar verbunden sind. Man könne sich alsdann jeden Teil eines Systems von einer besonderen, von der Geschwindigkeit des anderen Teils verschiedenen Geschwindigkeit beeinflusst denken, so dass jeder Teil für sich in Bewegung versetzt werde, bevor die Ausgleichung zwischen Wirkung und Gegenwirkung stattfinde. Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass nicht, wie üblich, die Bedingungen des bestehenden Gleichgewichts zwischen Wirkung und Gegenwirkung, sondern die des sich entwickelnden Gleichgewichts in Betracht gezogen werden sollen oder, mit anderen Worten, das Parallelogrammgesetz der Kräfte soll nicht als ein statisches, sondern als ein dynamisches Prinzip behandelt werden. Selbstverständlich muss dies auf Grund zulässiger Axiome geschehen. Man kann dabei von der folgenden Voraussetzung ausgeben.

Auf eine Masse M wirken zwei elementare durch ihre Beschleunigungen j_1 und j_2 gekennzeichnete Kräfte ein, von denen jede im Beginn der Einwirkung einen entsprechenden Teil der Masse in Beschlag nimmt. Hierdurch wird die Masse M in die Teile $m_1 = M \frac{j_1}{j_1 + j_2}$ und $m_2 = M \frac{j_2}{j_1 + j_2}$ zerlegt, so dass eine gegenseitige Beziehung der Kräfte $m_1 j_1 = \frac{M j_1^2}{j_1 + j_2}$ und $m_2 j_2 = M \frac{j_2^2}{j_1 + j_2}$ in Betracht kommt. Da die Summe dieser beiden Kräfte offenbar kleiner als die von beiden Kräften einheitlich beeinflusste Masse, d. i. kleiner als die Kraft $M(j_1 + j_2)$ ist, so muss angenommen werden, dass neben der freien statischen Kombinationswirkung ein verborgener innerer Vorgang stattfindet, durch welchen bei Zusammensetzung ein Teil der sich beeinflussenden Kräfte gebunden wird. Dieser Verlust wird von den zwischen den beiden Kräften stattfindenden, einer Phasendifferenz derselben entsprechenden virtuellen (oder eigentlich aktuellen) Momenten herbeigeführt. Diese Phasendifferenz wird durch den von 90^0 verschiedenen, den statischen Ausgleich zwischen Wirkung und Gegenwirkung kennzeichnenden und somit jene Momente erzeugenden Zusammensetzungswinkel herbeiführt, wobei die Winkel unter 90^0 das Ueberwiegen der Extensität und die Winkel über 90^0 das Ueberwiegen der Intensität anzeigen. Demnach ist bei phoronomischer, d. h. nur die einseitige, geometrisch darstellbare, aber nicht die dynamische Bedeutung der Kraftentfaltung berücksichtigender Betrachtung dem Ausdruck der inneren kinetischen, als relativer Verlust angesehenen Kraftbetätigung die Funktion des Kosinus jenes Winkels als charakterisierender Faktor beizufügen. Unter dieser Voraussetzung besteht für $M^0 = 1$ die Gleichung

$$\frac{j_1^2}{j_1 + j_2} + \frac{j_2^2}{j_1 + j_2} + x \cos \alpha = j_1 + j_2,$$

woraus folgt

$$x \cos \alpha = \frac{2 j_1 j_2}{j_1 + j_2}$$

wodurch immerhin das für $\cos \alpha = 1$ eintretende Maximum dieses relativen Verlustes zum Ausdruck kommt. Dieses relative Maximum, welches für irgend einen dauerlosen Zeitpunkt des dynamischen Vorganges der Kraftentfaltung sich geltend macht, ist aber bei der einseitigen phoronomischen, auf die geometrische Darstellung bezogenen Betrachtung der Differenz der beiden, durch die relative Ausgleichs- oder Endgeschwindigkeit v gemessenen Beschleunigung gleichwertig zu setzen, somit besteht die Gleichung

$$1) \quad j_1^2 - j_2^2 = 2 j_1 j_2$$

oder inbezug auf die lebendigen Kräfte und für einen beliebigen Zeitpunkt der Kraftentfaltung

$$2) \quad \frac{j_1^2}{2} - \frac{j_2^2}{2} = j_1 j_2 \cos \alpha,$$

wofür auch inbezug auf das phoronomische Mass der Beschleunigung

$$3) \quad \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cos \alpha$$

gesetzt werden kann.

Aus der auf Maximum der inneren Kraftwirkung bezogenen Formel (1) folgt

$$j_1^2 - 2 j_1 j_2 = j_2^2 \text{ oder } j_2^2 + 2 j_1 j_2 = j_1^2$$

Geht man nun auf die von vornherein gegebene Summe der von einander abhängigen Kräfte zurück, so erhält man

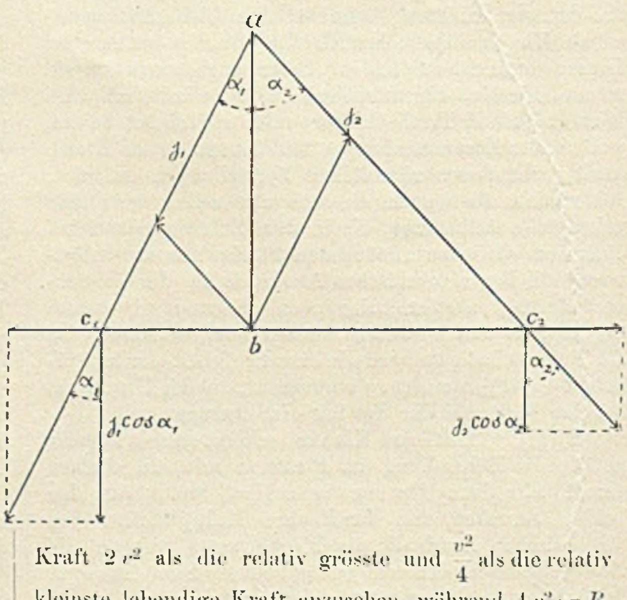
$$4) \quad 2 j_1^2 - 2 j_1 j_2 = j_1^2 + j_2^2 \text{ bzw. } 2 j_2^2 + 2 j_1 j_2 = j_1^2 + j_2^2$$

Hieraus ergeben sich unter Wiedereinführung von $\cos \alpha$ die gebräuchlichen, dem Parallelogrammgesetz entsprechenden Gleichungen

$$5) \quad 2 j_1^2 = j_1^2 + j_2^2 + 2 j_1 j_2 \text{ bezw. } 2 j_2^2 = j_1^2 + j_2^2 - 2 j_1 j_2$$

wobei in der üblichen Behandlungsweise des Parallelogrammgesetzes $2 j_1^2$ durch die Kombinationsresultante R_1^2 und $2 j_2^2$ durch die Kompensationsresultante R^2, also in phoronomischer Hinsicht $j_1 \sqrt{2} = R_1$ und $j_2 \sqrt{2} = R_2$ gesetzt wird.

In den Gleichungen (5) kann j_1 als eine Konstante, als z. B. als die an einem bestimmten Orte wirkende Intensität der Schwere angehen werden. Alsdann ist die Gleichung $2 j_1^2 = j_1^2 + j_2^2 + 2 j_1 j_2 \cos \alpha$ auf einen unter dem Einfluss der Schwere um eine freie Achse mit gegebener Winkelgeschwindigkeit und also mit gegebenem Trägheitswiderstande rotierenden Körper zu beziehen, welcher der Präzession und Nutation unterliegt. Die Grösse $2 j_1^2$ bezeichnet das relative Maximum der im Kräftespiel zeitweis abnehmenden, die Grösse $2 j_2^2$ das relative Minimum der im Kräftespiel zunehmenden Kraft inbezug auf einen Zeitpunkt. Wird z. B. ein Stein senkrecht emporgeworfen, so ist in dem Zeitpunkte, wo er mit der Ausgleichsgeschwindigkeit v der Hand entfliegt, der dieser Geschwindigkeit phoronomisch gleichwertige Widerstand der Schwere ausgeglichen und ausserdem die freie Geschwindigkeit v, also die relative Geschwindigkeit $2 v = V$ entwickelt, mit welcher der Widerstand v überwunden wird. Somit wird die Kraft $2 v_1^2 = R_1^2$ erzeugt, wofür auch, inbezug auf das konventionelle Mass der Beschleunigung $2 j_1^2 = R_1^2$ zu setzen ist. Eine ähnliche Betrachtung erläutert die Bedeutung des Ausdruckes $2 j_2^2 = R_2^2$ für die zunehmende, dem Widerstande entsprechende Kraft. Hieraus folgt inbezug auf die lebendigen Kräfte $\frac{R^2}{2} = \frac{v^2}{4} = c^2$, wenn mit c die mittlere oder relativ konstante aktive Geschwindigkeit bezeichnet wird. Demnach wird, inbezug auf das von Lagrange an Stelle des metaphysischen Prinzips der kleinsten Wirkung aufgestellte Prinzip der grössten und kleinsten lebendigen



Kraft $2 v^2$ als die relativ grösste und $\frac{v^2}{4}$ als die relativ kleinste lebendige Kraft anzusehen, während $4 v^2 = R_2$ die Gesamtkraft des Systems bedeutet, wie sich auch wenigstens rechnerisch inbezug auf die Wirkungsweise des Fallapparats nachweisen lässt, worauf wir jedoch, um nicht zu weitläufig zu werden, hier verzichten, indem wir noch kurz auf den von Dühring (S. 151) vermuteten Zusammenhang des Parallelogramm- und Hebelgesetzes einzugehen haben.

In dem beistehenden phoronomischen Diagramm ist a der Angriffspunkt der beiden durch ihre Extensitäte dargestellten elementaren Kräfte j_1 und j_2, deren Zusammensetzungswinkel α durch die Kombinationsresultante $ab = R_1$ an die Teilwinkel α_1 (an j_1) und α_2 (an j_2) zerlegt wird.

Durch den Angriffspunkt b der Gegenkräfte ist zur vertikalen Richtung der Resultante R_1 eine die Hebellinie darstellende Horizontale gelegt, an deren Punkten c_1 und c_2 die längs ihrer Wirkungsrichtungen verschobenen Kräfte angreifen und mit den Momenten $j_1 \cos \alpha_1$ und $j_2 \cos \alpha_2$ als Hebelkräfte zur Wirkung kommen, während in der Richtung der Hebellinie sich die Momente $j_1 \sin \alpha_1$ und $j_2 \sin \alpha_2$ betätigen. Soll sich der Hebel im Gleichgewicht befinden, so muss die Gleichung bestehen

$$j_1 \cos \alpha_1 \operatorname{tang} \alpha_1 = j_2 \cos \alpha_2 \operatorname{tang} \alpha_2 ,$$

woraus folgt $$j_1 \sin \alpha_1 = j_2 \sin \alpha_2$$

Nach dem Lamischen Satze ist aber $j_1 \sin \alpha_1 = j_2 \sin \alpha_2 = \frac{j_1 j_2 \sin \alpha}{R_1}$. Führt man die durch die zweite Diagonale des Parallelogramms phoronomisch dargestellte Kompensationsresultante R_2 und den Zusammensetzungswinkel γ der beiden Resultanten ein, so besteht die Gleichung

$$\frac{R_2}{2} \sin \gamma = \frac{j_1 j_2 \sin \alpha}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{2} \sin \gamma = \frac{j_1 j_2 \sin \alpha}{R_1} \text{ oder } \sin j = \frac{2 j_1 j_2 \sin \alpha}{R_1 R_2}$$

Inbezug auf die Gleichungen

$$R_1^2 = j_1^2 + j_2^2 + 2 j_1 j_2 \cos \alpha \text{ und}$$
$$R_2^2 = j_1^2 + j_2^2 - 2 j_1 j_2 \cos \alpha$$

ist aber

$$\sin \gamma = \frac{2 j_1 j_2 \sin \alpha}{\sqrt{(i_1^2 + j_2^2)^2 - 4 j_1^2 j_2^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{2 j_1 i_2 \sin \alpha}{\sqrt{(i_1^2 - j_2^2)^2 + 4 j_1^2 j_2^2 \sin^2 \alpha}}$$

woraus für $\sin \gamma = \sin \alpha$ folgt

$$j_1^2 - j_2^2 = 2 j_1 j_2 \cos \alpha .$$

Demnach ist diese Formel als die Grundformel des Parallelogrammgesetzes anzusehen, die unter der Voraussetzung $R_1^2 = 2 j_1^2$ und $R_2^2 = 2 j_2^2$, sowie Winkel $\gamma =$ Winkel α besteht und für ein astatisches System Geltung hat. Für $\cos \alpha = 1$ folgt

$$j_1 = j_2 (\sqrt{2} - 1) \text{ bew. } j_2 = j_1 (\sqrt{2} + 1)$$

und hieraus ergibt sich die Formel

$$j_2^2 (\sqrt{2} + 1) = j_1^2 (\sqrt{2} - 1) \text{ bezw. } r_2^2 (\sqrt{2} + 1) = r_1^2 (\sqrt{2} - 1),$$

auf deren kosmische Bedeutung der Verfasser schon im Jahrgange 1902 Nr. 4 S. 89 hingewiesen hat und welche auch in der Form

$$j_2^2 \operatorname{cotang} \frac{45^0}{2} = j_1 2 \operatorname{tang} \frac{45^0}{2}$$

aufzustellen ist.

Vereine und Versammlungen.

Bericht über die 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Meran (24. bis 30. September 1905) von H. Schotten (Halle a. S.).

Bei der ungeheuren Vielseitigkeit einer Versammlung, wie es die der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft ist, muss ein Referat — wenn es nicht zu umfangreich werden soll — sich eine weise Beschränkung auferlegen. Es soll daher in dem Folgenden im wesentlichen nur darüber referiert werden, was für den Unterricht von Interesse ist. In anderen Jahren würde daher das Referat sich auf ein solches über die Sitzungen der pädagogischen Sektion haben beschränken können. Das ist diesmal wesentlich anders. Bekanntlich hatte F. Klein veranlasst, dass die Reform des gesamten mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Breslauer Versammlung zur Diskussion gestellt wurde, während ursprünglich die Reformbewegung bei den biologischen Fächern einsetzte, eine Bewegung, die in den sogenannten „Hamburger Thesen" zum Ausdruck kam. Das Resultat war, dass der Vorstand der Gesellschaft in äusserst dankenswerter Weise die Mittel zur Verfügung stellte, um eine gründliche Bearbeitung der einschlägigen Fragen durch eine zwölfgliedrige Kommission vornehmen zu lassen. Ueber die Tätigkeit dieser Kommission erstattete in Meran Herr Professor Gutzmer-Halle Bericht, und zwar in der „Gesamtsitzung beider Hauptgruppen". So trat denn die Erörterung spezieller pädagogischer Fragen aus dem engen Rahmen der Fachsektion heraus vor die Allgemeinheit — und, wie wir gleich vorwegnehmen wollen, diese Fragen erweckten ein Interesse, das in dieser Breite und Tiefe wohl kaum erwartet worden war. Der Bericht des Herrn Gutzmer über die Tätigkeit der „Unterrichtskommission" wurde von der sehr zahlreich besuchten Versammlung mit grösster Aufmerksamkeit entgegengenommen, verschiedentlich von spontanem Beifall unterbrochen und zum Schluss mit sehr lebhafter Zustimmung begrüsst. Der Bericht war den Besuchern der Versammlung schon gedruckt zugänglich und ihm lagen die von der Kommission ausgearbeiteten Vorschläge zu Lehrplänen in Mathematik, Physik, Chemie und Biologie bei. Obwohl für eine grosse Zahl von Exemplaren gesorgt war, reichten sie bei weitem nicht aus: auch ein Zeichen dafür, in welchem Masse der Vortrag des Vorsitzenden der Unterrichtskommission das Interesse der weitesten Kreise zu erwecken verstanden hatte. Auf den Bericht und die Lehrpläne hier näher einzugehen, erübrigt sich, da inzwischen ein völliger Abdruck in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" (Doppelheft 7/8 des 36. Jahrgangs) erschienen und auch im Buchhandel unter dem Titel „Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" zu haben ist (Leipzig, B. G. Teubner).*) — Es liegt in der Natur der behandelten Materie, dass eine sofort sich anknüpfende Diskussion ohne ein genaueres Studium der vorgelegten Lehrpläne keinen besonderen Wert hätte beanspruchen können; es ist daher nur mit Dank zu begrüssen, wenn der Vorsitzende der Gesellschaft bei der Eröffnung der Diskussion die Bitte aussprach, nur allgemeine Wünsche und Zusätze vorzubringen: dagegen zu vermeiden, in ausführlicher Diskussion auf einzelne Thesen oder sonstige Details näher einzugehen, da doch ein bestimmtes Ziel nicht erreicht werden könnte. Diesem Wunsche wurde auch seitens der Versammlung entsprochen; die Diskussion beschränkte sich auf die Anregung des Herrn Professors Dr. Herz-Wien, eine analoge Kommission auch für Oesterreich einzusetzen. Dieser Antrag wurde aber,

*) In den „Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte" findet sich der Bericht mit den Beilagen im ersten Teile, Seite 142—200.

nachdem Professor Gutzmer und Professor Czuber-Wien dagegen sich ausgesprochen, von der Versammlung abgelehnt.

In engstem Zusammenhange mit einer der wichtigsten Fragen in den Reformvorschlägen der Unterrichtskommission standen zwei Vorträge, die ursprünglich für die pädagogische Sektion angemeldet waren, aber in der Abteilung für Mathematik gehalten wurden.

Czuber-Wien behandelte das Thema: „Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkte". Er führte etwa folgendes aus: Das Programm der Versammlungen hat eine sehr wichtige und dankenswerte Bereicherung durch Einbeziehung von Unterrichtsfragen erfahren. Eine eingehende und vielseitige Erörterung hat Platz gegriffen, besonders in bezug auf deutsche Verhältnisse, jedoch verfolgt man in Oesterreich diese Bestrebungen mit grösster Aufmerksamkeit und lebhaftem Interesse. Die in dem Thema erwähnte Frage ist das Ergebnis einer historischen Entwicklung. In Frankreich haben die Bestrebungen schon Erfolg gehabt, in Deutschland sind sie durch die Lehrpläne von 1901 verbreitet. Daher soll die jetzige Versammlung benutzt werden, um auch für Oesterreich eine Entscheidung herbeizuführen; dazu ist die Tagung der Naturforscher-Gesellschaft besonders geeignet, da hier eine Allseitigkeit und Freiheit der Meinungsäusserung gesichert ist, wie kaum sonst.

Der Vortragende gibt hierauf einen historischen Rückblick über den mathematischen Unterricht in Oesterreich, indem er zunächst von den Universitäten spricht. Im 18. und der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hält sich dort der mathematische Unterricht auf sehr elementarem Niveau, auch formell gleicht er erst dem heutigen Standpunkte an den Mittelschulen. Mit der Reorganisation 1849 vollzieht sich aber ein vollständiger Umschwung und damit steht in Verbindung auch eine völlig andere Vorbildung der Lehrer an den Mittelschulen. Es wird sodann näher, zum Teil von statistischen Angaben gestützt, auf das Mittelschulwesen in Oesterreich eingegangen, die Lehrpläne der Gymnasien und Realschulen geschildert und auch die Lehrerausbildung in den verschiedenen Etappen ihrer Entwicklung behandelt.

Sodann geht der Vortragende auf den jetzigen Stand des Unterrichts und auf die Reformbestrebungen ein, betont die Wichtigkeit der Ausbildung im funktionalen Denken und spricht sich für eine sorgfältige Sichtung des herkömmlichen Lehrstoffes aus, um dadurch freie Bahn für neue Gebiete und Methoden zu schaffen. Zum Schluss befürwortet er folgende Resolution: „Nicht aus äusseren, sondern aus Gründen innerer Notwendigkeit ist eine Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an unseren Mittelschulen, den Gymnasien und den Realschulen, in dem Sinne zu empfehlen, dass der bisherige Lehrstoff einer sorgfältigen Sichtung unterzogen und mit den Grundgedanken der elementaren Funktionenlehre bis hin zu den beiden Fundamentalbegriffen der Infinitesimalrechnung organisch durchsetzt werde.

An die Unterrichtsverwaltung wäre die Bitte zu richten, zur Anbahnung dieser Reform eine aus Vertretern der Wissenschaft und der Schule gebildete Kommission einzusetzen, mit der Aufgabe, die Grenzen des neuen Stoffes mit sorgfältiger Bedachtnahme auf die zur Verfügung stehende Zeit und die Fassungskraft der Jugend abzustecken und seine zweckmässige Gliederung in einem detaillierten Lehrplane festzustellen.

Die Unterrichtsverwaltung wäre ferner zu ersuchen, die Abfassung von Lehrbüchern auf der so geschaffenen Basis mit allen ihr zu Gebote stehenden Mitteln zu fördern und die Einführung solcher Lehrbücher über begründeten Antrag der Lehrkörper zuzulassen.

Die hierbei gemachten Erfahrungen, sowie die im Auslande in der gleichen Richtung erzielten Erfolge hätten bei weiteren Massnahmen als Richtschnur zu dienen." *)

An den Vortrag knüpfte sich eine sehr lebhafte Diskussion, in der allgemein zum Ausdruck kam, dass die Abteilung den Gedanken des Vortragenden durchaus zustimmte und für Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der Mittelschulen ist. Eine Beschlussfassung aber wurde abgelehnt, da es nicht Sache der Abteilung sein könne, spezielle Wünsche über den Unterricht an den österreichischen Mittelschulen an die Regierung zu bringen.

Es sprach sodann Hogevar-Graz über das Thema: „Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht?" Da schon die Diskussion über den ersten Vortrag vorangegangen, fasst der Vortragende seine Ausführungen kurz zusammen. Er legt die Gründe für Einführung dar (Hoher Bildungswert; Vorbereitung auf gewisse Fachstudien an den Hochschulen; Möglichkeit besonders wichtige mathematische und physikalische Aufgaben zu behandeln) und verschweigt auch nicht, was dagegen spricht (Schwierigkeit; Mehrbelastung), wobei auch er für eine weise Sichtung des Lehrstoffs eintritt. Zum Schluss stellt er folgende These auf: „Die Elemente der Infinitesimalrechnung sind an sämtlichen Mittelschulen oder höheren Lehranstalten einzuführen. Bei der Bestimmung des Umfanges, in dem dies zu geschehen hat, berücksichtige man 1. das Auffassungsvermögen der Schüler; 2. die Zeit, die durch Kürzungen des jetzt vorgeschriebenen Lehrstoffes und Einschränkung allzuweit eingreifender Uebungen gewonnen wird, wobei in Oesterreich zugleich eine mässige Vermehrung der Mathematikstunden und speziell für die Realschulen die Erweiterung um einen Jahrgang anzustreben wäre; 3. jene mathematischen und physikalischen Aufgaben an den Mittelschulen, welche die Anwendung der Infinitesimalrechnung erfordern. Den neuen Lehrstoff suche man anschaulich darzustellen und an zahlreichen Beispielen zu erläutern, ohne jedoch die Gesetze der Logik ausser acht zu lassen. Denn die Mathematik soll dem Schüler in allen ihren Teilen als das Muster einer exakten Wissenschaft erscheinen."

Auch an diesen Vortrag knüpfte sich eine ausführliche Diskussion an, die allerdings mehr auf Einzelheiten einging, da ja der Standpunkt der Anwesenden inbetreff der Hauptfrage schon in der Diskussion des ersten Vortrags zum Ausdruck gekommen war.

Die übrigen Vorträge der ersten Abteilung (für Mathematik, Astronomie und Geodäsie) haben kein unterrichtliches Interesse mehr, es wurden behandelt partielle Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Zahlentheorie und Verwandtes, schliesslich Geometrie.

In der 12. Abteilung (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht) fanden zwei Sitzungen statt, deren eine von 7 Teilnehmern besucht war, während die zweite 16 Teilnehmer aufwies. In der

*) Der Vortrag findet sich vollständig in der „Wiener Zeitschrift für das Realschulwesen", 30. Jahrgang.

ersten sprach Lanner-Wien über: Der naturgeschichtliche Unterricht an den österreichischen Mittelschulen und die neuen Reformbestrebungen. Referent ist leider nicht in der Lage, über den sehr interessanten Vortrag zu berichten, da das schnelle Ablesen es nicht gestattete Notizen zu machen und ihm das Manuskript nicht zugänglich war. Ausgezeichnet war in der zweiten Sitzung der Vortrag von Epstein-Strassburg: „Die dualistische Ergänzung der Potenzlehre in der Geometrie des Kreises“. Der Vortrag, der von hoher Bedeutung für den Schulunterricht ist, wird in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ in extenso zum Abdruck kommen. Die Vorträge von Kirchmayr-Innsbruck und Krebs-Flottbeck, die noch in der zweiten Sitzung erledigt wurden, verdienen keine Erwähnung; allgemein war die Verwunderung, dass man solchen Darbietungen auf der Naturforscher-Versammlung ausgesetzt war.

Die Erfahrungen der letzten Versammlungen drängen leider alle die Ueberzeugung auf, dass die Abteilung für mathematischen Unterricht auf der Naturforscher-Versammlung sich überlebt hat. Das ist traurig, aber eine Tatsache. In Kassel betrug die Zahl der Teilnehmer 3 oder 4, in Breslau ungefähr ebensoviel, in Meran einmal 7, das andere Mal allerdings 16: das beruhte aber offenbar auf einem Versehen. Es ist ja aber auch sehr natürlich, dass die Teilnahme an zwei Versammlungen im Jahre im allgemeinen nicht Jedermanns Sache ist: und da ziehen die Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften wohl die Pfingstversammlung des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts vor. Es wäre aber doch wohl ernstlich zu erwägen, ob man nicht lieber die 12. Abteilung in der ersten Abteilung aufgehen liesse, statt sie eine äusserst traurige Rolle spielen zu lassen. Warum wurden die Vorträge von Czuber und von Hoçevar nicht in der Abteilung für mathematischen Unterricht gehalten? Das fragt man sich vergeblich; sie gehörten doch unbedingt dahin.

Referent will aber seinen Bericht nicht mit einem Missklang ausklingen lassen und gedenkt daher zum Schluss noch der ganz hervorragenden Rede, mit der in der ersten allgemeinen Sitzung der Statthalter von Tirol und Vorarlberg, Freiherr von Schwarzenau, die Versammlung begrüsste. Einige Stellen mögen wörtlich angeführt werden. „Ich begrüsse Sie auch ganz speziell als die Vertreter jener wissenschaftlichen Disziplinen, welche, das gesamte Weltall umfassend, alle Rätsel unseres Daseins, alle jene Fragen in sich schliessen, deren Ergründung nicht allein durch die fortschreitende Vermehrung unserer Erkenntnis die Schätze unserer ideellen Güter mehrt, sondern auch tief ins praktische Leben eingreift und in dessen wechselnde Gestaltung.“

„Die Geschichte der Naturwissenschaften ist auch eine Geschichte der menschlichen Kultur. Wer sie durchblättert, erblickt staunend das ungeheuere Gebäude, das ehrfurchtgebietende Denkmal, welches der Menschengeist hier im Laufe der Jahrtausende seiner eigenen Grösse gesetzt hat, einen Zyklopenweg, der Stein für Stein mühsam zusammengetragen dahin führt, der den Werdegang der menschlichen Entwicklung bedeutet.“

„Es ist eine verhängnisvolle Tatsache, dass auf dem Gebiete der exakten Forschung jede neue Entdeckung auch neue Rätsel mit sich bringt. . . . Es besteht hier eine merkwürdige Wechselwirkung zwischen Suchen und Finden und neuerlichem Suchen, zwischen Irrtum und Wahrheit, zwischen Dunkel und Licht. . . . Wir fragen uns vergeblich, welches Endziel der Naturforschung endlich gesteckt ist. Wird es gelingen, Stück für Stück den Schleier zu lüften, welcher das Bild von Saïs verhüllt, welchen, kaum entfernt, eine unsichtbare Hand stets aufs neue wieder zu ersetzen scheint, und wenn es selbst gelänge, würde der Mensch den Anblick der entschleierten Wahrheit zu ertragen vermögen?“

„Fragen auf Fragen türmen sich hier auf. Eines aber wissen wir bestimmt; als vorläufiger Ersatz für die Wahrheit ist dem Menschen die Sehnsucht, das Streben nach ihr, ins Herz gelegt, das an sich schon bei allen denen, die ihm anhängen, so intensive Glücksgefühle auslöst, wie kaum eine andere Form menschlicher Betätigung.“

„Es ist ein glückliches Omen, dass die moderne Naturforschung im Zeichen des Gesetzes von der Erhaltung der Arbeit steht. · Die Arbeit ist ewig und unzerstörbar, ihr gehört der Sieg.“

Das sind goldene Worte und unter ihrem Eindrucke wollen wir das Referat beschliessen.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht an den Reformschulen. Dieses Thema, das schon 1904 den Verein für Schulreform auf seiner Hauptversammlung in Berlin beschäftigt hatte, (s. Unt.-Bl. X, S. 40, 68) steht erneut auf der Tagesordnung der am 8. April d. J. in Stettin abzuhaltenden diesjährigen Hauptversammlung des Vereins.

Ausserdem bildet es den Gegenstand eines eingehenden Berichts, den die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte voraussichtlich der diesjährigen Naturforscher-Versammlung in Stuttgart erstatten wird.

* * *

Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht an den höheren Mädchenschulen. Im Schosse der preussischen Unterrichtsverwaltung wird eine Reform des höheren Mädchenschulwesens erwogen, die den Gegenstand der Beratungen einer besonderen aus Männern und Frauen zusammengesetzten Kommission bildet.

Dem Vernehmen nach ist die Errichtung von einem Lyceum mit 7jährigem Kursus in Aussicht genommen, an das sich für die jungen Mädchen, die später in ein gelehrtes Studium eintreten wollen, ein Oberlyceum mit dreijährigem oder vierjährigem Kursus anschliessen soll.

Wie es heisst, soll in den einzelnen Klassen des Lyceums durchweg der mathematische Unterricht mit je drei, der naturwissenschaftliche mit je zwei Wochenstunden dotiert werden, während in jeder Klasse des Oberlyceums für die Mathematik je sechs, für die Naturwissenschaften je drei Stunden in Aussicht genommen sind. Doch scheint es, dass definitive Beschlüsse hierüber noch nicht vorliegen.

Uebrigens bildet auch dieses Thema den Gegenstand eines Berichtes, den die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte der diesjährigen Naturforscher-Versammlung in Stuttgart erstatten wird.

* * *

Fragebogen betreffend den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren

Schulen. Auf Anregung der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte hat das preussische Unterrichtsministerium an alle ihm unterstellten höheren Schulen Fragebogen versandt, in denen (getrennt) über die für den physikalischen, den chemischen und den biologischen Unterricht bestehenden Einrichtungen, sowie die pekuniäre Dotation der betreffenden Unterrichtsfächer Angaben verlangt werden. Eine früher einmal (s. Unt.-Bl. III. S. 75) von dem Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts veranstaltete Umfrage über dasselbe Thema hatte keinen Erfolg gehabt; die gegenwärtig von amtlicher Stelle aus angeordnete Feststellung wird zum erstenmale ein Bild des Zustandes geben, in dem sich der Unterricht in den gesamten Lehrfächern tatsächlich befindet.

Lehrmittel-Besprechungen.

Anatomische Wandtafeln für den Unterricht an höheren Lehranstalten, bearbeitet von Ferd. Frenkel. Tafel VII, VIII. Jena 1906, Gustav Fischer. Preis der Tafel 6 M.

Das bedeutsame Unterrichtswerk, auf das bereits in Jahrg. II, S. 77 und Jahrg. IV, S. 31 der Unt.-Bl. hingewiesen worden ist, findet nunmehr seinen Abschluss in den beiden vorliegenden Tafeln, von denen Tafel VII die wichtigsten Muskeln, besonders die Gliedmassenmuskeln und die Kaumuskeln, Tafel VIII Gehirn, Rückenmark, einen Abschnitt des peripherischen Nervensystems und die Sinnesorgane (namentlich den Bau von Auge und Ohr) zur Darstellung bringt. Das hohe Lob, das die gesamte Fachpresse den bisher erschienenen Tafeln einmütig gespendet hat, verdienen auch diese neuesten Tafeln in vollem Masse. Hingewiesen sei noch auf einige Federzeichnungen des Verfassers, die ein Anhang des beigegebenen Textheftes enthält, diese zur Ergänzung der grossen Tafeln bestimmten ganz prachtvollen Zeichnungen sind z. T. wissenschaftlichen Werken über Histologie und Anatomie entlehnt, z. T. unmittelbar nach mikroskopischen Präparaten mit dem Grimsehlschen Zeichenapparat ausgeführt.

* * P.

Zeichenskizzen zum naturkundlichen Unterricht nach biologischen Grundsätzen bearbeitet im Auftrage des Bezirkslehrervereins München von Franz Engleder, Heft 2. 4°. 15 Tafeln, Preis M 0,90. Kommissionsverlag von Max Kellerer, München.

Das vorliegende Heft 2 dieser Zeichenskizzen zeigt zunächst eine Reihe einzelner Pflanzen, Schneeglöckchen, Apfelbaum, Erbse, Gartenbohne (2 Tafeln), weisse Taubnessel, Löwenzahn, Hopfen; die Föhre (Kiefer); Wurmfarn, Ackerschachtelhalm, Haarmoos, die drei letzten Tafeln befassen sich mit den verschiedenen Wurzelarten überhaupt, der Sprossachse (Stamm) und den wichtigsten Veredelungsarten. Die Bilder — weiss auf schwarzem Grunde — sind äusserst sauber und deutlich, wohlgeeignet, den Blick des Schülers auf die charakteristischen Eigentümlichkeiten der dargestellten Teile zu lenken und ihm als Muster eigener zeichnerischer Wiedergabe zu dienen. Jede Tafel bringt eine ganze Reihe von Einzelheiten, die für die behandelte Pflanze von Wesenheit sind, begleitet von einem kurzen, aber gut verständlichen Text, der der gegenüberstehenden Rückseite des vorhergehenden Blattes aufgedruckt ist. Das Lehrmittel erscheint sehr empfehlenswert. P.

Bücher-Besprechungen.

La Cour, Paul und Appel, Jakob. Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Autorisierte Uebersetzung von G. Siebert. Mit 799 eingedruckten Abbildungen und 6 Tafeln. Erster Band XII und 496, zweiter Band VIII und 491 S. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. Gesamtpreis geh. M. 15.—, in Leinw. geb. M. 16.50.

Das Buch, das ursprünglich in dänischer Sprache unter dem Titel „Historisk Fysik" veröffentlicht worden ist und nun in sehr guter, die Uebersetzung nicht verratender deutscher Ausgabe vorliegt, nimmt eine Mittelstellung ein zwischen den gewöhnlichen Lehrbüchern und den Werken, die die Geschichte der Physik zum eigentlichen Gegenstand haben. Von den letzteren unterscheidet es sich durch die Einteilung nach den einzelnen Stoffgebieten, wodurch es sich dem Zuschnitt der Lehrbücher nähert, von diesen weicht es in der Einteilung ab, die die einzelnen Abschnitte in sich zeigen, diese entspricht dem geschichtlichen Gange. In der Vorrede führen die Verfasser zur Begründung ihres Unternehmens an, dass bei dem gewöhnlichen Lehrgange die Fähigkeit, das gewonnene physikalische Wesen auf die täglich zu beobachtenden Naturvorgänge anzuwenden, zu wenig entwickelt werde, sie erhoffen von einem nach ihrem Prinzip gestalteten Lehrgange eine Abhilfe dieses Uebelstandes. Ich möchte dies nicht gelten lassen, trotzdem aber das ganze Werk mit besonderer Freude begrüssen, weil es in der Tat der Bildungsaufgabe des physikalischen Unterrichts eine neue Seite abgewinnt.

Der erste Abschnitt behandelt das Weltgebäude, der zweite das Licht, der dritte die Kraft, der vierte den Schall, im zweiten Bande folgen dann die Wärme, der Magnetismus, die Elektrizität bis 1790, der elektrische Strom, das Wetter. Schon an dieser Reihenfolge erkennt man, wie die Verfasser bemüht gewesen sind, sich dem Gange anzupassen, den die allmähliche Erweiterung unserer physikalischen Einsicht allmählich genommen hat, denn die, die der Beobachtung sich unmittelbar aufdringenden astronomischen Vorgänge haben ja zweifellos die Rolle des ersten Lehrmeisters nach dieser Richtung hin gespielt. Andererseits erkennt man aus der Zusammenfassung der Mechanik in dem Abschnitt „die Kraft" die Absicht, die Art aufzuzeigen, in der wir allmählich bis zu den die Gegenwart beherrschenden Grundbegriffen und Prinzipien gelangt sind. Dass die Verfasser dabei ihren Zweck überall erreicht hätten, kann man nicht ganz zugeben, die Schwierigkeiten, die eine rationelle Stoffeinteilung findet, sind allerdings sehr grosse. Bei der Elektrizität sollte offenbar der Tatsache Rechnung getragen werden, dass die ungeheure Bedeutung, die diese Naturkraft für unsere Zeit gewonnen hat, erst mit der Erschliessung stetig erneuter Elektrizitätsquellen beginnt, dabei musste in den Abschnitt, der als „die Elektrizität bis 1790" bezeichnet ist, im Untertitel allerdings auch noch die Reibungselektrizität nennt, mancherlei hineingenommen werden, was viel jüngeren Datums ist, z. B. die Influenzmaschine, übrigens alles das auch nur sehr kurz abgemacht.

Auch manches andere hat bei dem gewählten Gange nicht zu seinem Recht kommen können, u. a. vermisse ich eine zusammenfassende Darstellung der Art, wie das gegenwärtig die ganze Naturwissenschaft beherrschende Energieprinzip zu dieser dominierenden Stellung gelangt ist, das Buch legt den Schwerpunkt allzu einseitig auf die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents, wobei es neben Robert Mayer, den es im ganzen zutreffend würdigt, noch Joule wie den in Deutschland so gut wie unbekannten Dänen Colding besonders anführt.

Ob das Buch also seinen Zweck, eine besonders geeignete und der bisherigen Methode überlegene Einführung in die Physik zu gewähren, voll erreicht, ist mir zweifelhaft, dagegen besitzt es einen erheblichen Wert als Ergänzung der sonst für das Studium und den Lehrbetrieb der Physik vorhandenen Mittel. Es bringt eine grosse Menge von biographischen Notizen und Porträts der einzelnen Forscher und neben einigen bereits allgemein bekannten Darstellungen älterer Versuche eine ganze Reihe von Abbildungen, die mir wenigstens neu waren, meist mit eingehender Erläuterung.

Im Gegensatz zu den üblichen Lehrbüchern, die bei Darstellung des gegenwärtigen Standes unserer Erkenntnisse das sachliche Moment in den Vordergrund stellen, betont es die Bedeutung der Persönlichkeit, es lässt uns einen vielfach höchst interessanten Einblick in die Geistesarbeit der einzelnen Forscher tun, es führt uns die Schwierigkeiten vor Augen, die sich dem Fortschritt der Erkenntnis immer neu entgegenstellten und zeigt die Stadien auf, die die einzelnen uns jetzt so geläufigen und so einleuchtend erscheinenden Begriffe durchmachen mussten, ehe sie ihre gegenwärtige Formulierung erlangten. Auf die Heranziehung dieser geschichtlichen Momente in den Unterricht legt man mit Recht jetzt besonderen Wert; dass auf diesem Wege sowohl die eigene Einsicht wie die unterrichtliche Einführung in die physikalischen Vorzüge eine wesentliche Vertiefung und Bereicherung erfahren müssen, liegt ja auf der Hand. So darf das frisch und anregend geschriebene Buch eben als eine Ergänzung der üblichen Lehrbücher zur Verwertung namentlich im Unterricht aller Anstalten mit Recht empfohlen werden. P.

* * *

Reis-Penzold, Elemente der Physik, Meteorologie und mathematischen Geographie, Hilfsbuch für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen und -Aufgaben. Von Prof. Dr. Paul Reis, siebente vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Ed. Penzold. Mit 435 Figuren im Text. X und 419 S. Leipzig 1905. Quandt u. Händel. Preis M. 4.80.

Die fast vollständige Umarbeitung des ursprünglichen Buches, die hier vorliegt, ist zum Teil von dem Bestreben diktiert, an Stelle des ursprünglichen sehr deduktiv gehaltenen Charakters des Buches eine mehr an die Beobachtung anknüpfende Stoffbehandlung zu setzen, zum anderen durch die Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Fachschulen, für die das Buch in erster Linie bestimmt ist.

Nach einer die theoretischen Grundlagen gebenden, übrigens dem folgenden Abschnitt über Mechanik mehrfach vorgreifenden Einleitung, folgen dann 7 Hauptabschnitte, die Lehre von der Körperbewegung oder Mechanik, die schwingende Bewegung der Körper (zerfallend in die allgemeine Wellenlehre und die Lehre vom Schall), die Lehre vom Licht, die Lehre von der Wärme, die Lehre vom Magnetismus, die Lehre von der Elektrizität, mathematische Geographie, die im Titel des Buches besonders aufgeführte Meteorologie bildet einen Unterabschnitt des Abschnittes über Wärme.

Die Einteilung des Stoffes ist, wie man sieht, anfechtbar; gegen die theoretische Behandlung im Einzelnen lässt sich manches einwenden, die Definitionen von so fundamentalen Begriffen wie Masse und elektrischer Widerstand sind rein formalistisch, bei dem magnetischen „Ohmschen Gesetz“ wäre viel stärker zu betonen gewesen, dass dies lediglich auf einer Analogie zu dem Ohmschen Gesetz in der Elektrizitätslehre beruht, überhaupt tritt bei der Behandlung der elektrischen Maschinen das praktische Bedürfnis des künftigen Elektrotechnikers etwas einseitig in den Vordergrund. Ob die Pernter'sche Theorie des Regenbogens durch die sehr kurz gehaltene Erklärung der Wellenflächen, die sich an anderer Stelle findet, genügend vorbereitet ist, erscheint fraglich.

Nach anderer Richtung hat das Buch sehr grosse Vorzüge, die seine Verwendung auch an den nicht besonderen Fachbildungszwecken dienenden höheren Schulen empfehlenswert machen, es verfolgt vielfach die einzelnen Vorgänge rechnerisch bis ins Einzelne, diese sehr klar und übersichtlich gehaltenen Darlegungen erscheinen zur Erzeugung einer wirklich lebendigen Kenntnis der einzelnen Prozesse recht geeignet. Das gilt u. a. auch von dem Schlussabschnitt über mathematische Geographie, wo z. B. Sonnen- und Mondfinsternisse in ihrer Dauer verfolgt, auch die Breite des Totalitätsstreifens für die Sonnenfinsternis auf der Erde untersucht wird. (Dabei ist ein Fehler untergelaufen, indem die Totalität der Mondfinsternis von Eintritt des Mondmittelpunktes in den Kernschatten der Erde bis zum Austritt eben desselben Mondmittelpunktes gerechnet wird.)

Die Figuren sind, soweit sie nicht der früheren Ausgabe und den Weinhold'schen physikalischen Demonstrationen entnommen sind, fast sämtlich schematischer Art, aber für den Zweck der Klarlegung sehr geschickt entworfen, die Ausführung ist weniger schön.

Im ganzen kann das Buch auch für den Unterricht eines mit der theoretischen Behandlung des Verfassers nicht immer einverstandenen Lehrers wohl empfohlen werden. P.

* * *

L. Heffter, Prof. a. d. Universität Kiel und **C. Koehler**, Prof. a. d. Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig 1905, B. G. Teubner. XVI u. 526 S. gr. 8^0 m. 136 Fig. im Text. Preis geb. 14 Mk.

Das vorliegende Buch wird, wenn wir nicht irren, für immer als ein Markstein in der vielgliedrigen Reihe der Lehrbücher über analytische Geometrie betrachtet werden müssen. Nicht weil die Verfasser völlig neue Resultate brächten, sondern weil sie längst ausgesprochene Ideen allgemeiner Art zum erstenmal einem Lehrbuch zugrunde legen, das vom Einfachsten beginnend alle Gebiete der Geometrie analytisch zu behandeln sich vornimmt. Das leitende Prinzip des Buches ist durch die Theorie der Transformationsgruppen gegeben. Demgemäss wird zuerst die Geometrie der projektiven Gruppe in voller Allgemeinheit dargestellt. Als spezieller Fall ergibt sich dann — durch Auszeichnung der uneigentlichen Geraden — die affine Untergruppe und als weitere Untergruppe der letzteren — durch Auszeichnung der unendlichfernen Kreis-punkte — die äquiforme Geometrie. Ein Beispiel: In der projektiven Geometrie gibt es nur einen eigentlichen Kegelschnitt, in der affinen Geometrie Ellipse, Parabel, Hyperbel und erst in der äquiformen Geometrie Kreis und gleichseitige Hyperbel. Im Rahmen dieser Einteilung ist jedesmal beim einfachsten Gebilde begonnen und wird zum zusammengesetzten vorgeschritten, immer mit genauester Bestimmung des jeweils passendsten Koordinatensystems. Jede sich bietende Möglichkeit wird aufs eingehendste verfolgt. Wenn wir hier etwas besonders hervorheben wollen, so mögen dies einerseits die musterhaften Klassifikationstabellen der geometrischen Gebilde, andererseits vielleicht die eingehende Behandlung der linearen Kegelschnittsysteme in allen drei Geometrien sein.

Das sind jedoch nicht die einzigen Vorzüge des Buches. So ist, neben der umfassenden Verwendung der imaginären Elemente, besonders hervorzuheben, dass der ganze Aufbau des Buches ein durchaus den neuesten Errungenschaften entsprechender ist. Was die Verfasser von elementarer Geometrie voraussetzen, ist ausserordentlich wenig. Das treffendste Beispiel hierfür mag sein, dass der Pythagoreische Lehrsatz etwa in der Mitte des Bandes bewiesen wird und zwar in zwei Formen für die affine und äquiforme Geometrie je nach der benutzten Eichkurve. Auch dieser letztere Begriff ist wohl zum erstenmal in einem elementaren Lehrbuch der analytischen Geometrie verwendet.

Angesichts all dieser Umstände möchte man es fast bedauern, dass die Verfasser mit Rücksicht auf jüngere Leser die Konzession gemacht haben, nicht von vornherein alle Grundsätze scharf zu fixieren, wie dies Vahlen in dem auf S. 19 ds. Jahrg. besprochenen Buche versucht hat. Auch gibt das vorliegende Buch natürlich nur Euklidische Geometrie. Insofern stellt das Buch von Vahlen eine wünschenswerte Ergänzung desselben dar.

Wir möchten nicht versäumen, noch besonders anzumerken, dass auch alle Aeusserlichkeiten, wie die Angabe der Nummern am Bundsteg, die Fassung der Kolumnentitel, sowie die Druckrevision mit einer seltenen Gewissenhaftigkeit behandelt sind.

H. Wieleitner (Speyer).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Baumberger, G., Lehrbuch der Planimetrie m. Aufgabensammlung für Mittelschulen. Bern 1906, Stämpfli & Co. Kart. Mk. 1.60.

Blätter, Periodische, f. Realienunterricht u. Lehrmittelwesen, herausg. v. J. Fischer u. R. Neumann. XI. Jahrg. 1906, Heft 1, 2. Tetschen a. Elbe 1906, Otto Henckel.

Bohnert, F., Physikalische Schülerübungen auf der Mittelstufe der Realanstalten. Sonderabdruck aus „Natur und Schule", Band V, Heft 2. Leipzig 1906, Teubner.

Börnstein, R., Leitfaden der Wetterkunde. M. 61 Abb. u. 22 Taf., II. Aufl. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. Mk. 6.—.

Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 8.40.

Dennert, E., Die Pflanze ihr Bau und ihr Leben. Mit 141 Abb., III. Aufl. (Slg. Göschen, Bd. 44). Leipzig 1905, Göschen. Mk. —.80.

Doehlemann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. M. 91 Fig., III. Aufl. (Slg. Göschen, Bd. 72). Leipzig 1905, Göschen. Mk. —.80.

Dressel, A., Immerwährender Ferien-, Fest- u. Mondkalender der christl. Zeitrechnung alten u. neuen Stils. Feldkirch 1906, Unterberger. Mk. —.80.

Dressler, Heinr., Rechenbuch f. Lehrerbildungsanstalten. Ein Lehrbuch mit Aufgabensammlung. Dresden 1906, Bleyl & Kämmerer (O. Schambach). Geh. Mk. 2.40, geb. Mk. 2.75.

Ebeling, M., Lehrbuch der Chemie u. Mineralogie f. höhere Lehranstalten. II. Organische Chemie. M. 63 Abb. u. 1 Taf. Berlin 1906, Weidmann. geb. Mk. 2.80.

L'Enseignement mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl. VII. Année No. 2. Paris 1906, Gauthier-Villars, et Genève, Georg & Cie.

Fischer, V., Grundbegriffe u. Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. Mit 12 Fig. Leipzig 1906, Barth. Mk. 4.50.

Fortschritte, Die, der Physik, Halbmonatl. Literaturverzeichnis, red. von K. Scheel u. R. Assmann. Jahrg. V, Heft 3—5. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn.

Frenkel, Ferd., Anatomische Wandtafeln mit erläuterndem Text, Tafel VII und VIII. Jena 1906, G. Fischer. Preis der Tafel Mk. 5.—.

Goldschmidt, L., Baumanns Anti-Kant. Eine Widerlegung. Gotha 1906, Thienemann. Mk. 2.80.

Hagen, Joh. G., Synopsis der höheren Mathematik. III. Bd., Lfg. 5-7. Berlin 1905, Dames.

Hoppe, J., Analytische Chemie. I. Theorie und Gang der Analyse. II. Reaktionen der Metalle und Metalloide. (Slg. Göschen, Bd. 247-248). Leipzig 1905, Göschen. à Mk. —.80.

Horn, E., Das höhere Schulwesen der Staaten Europas. Berlin 1906, Trowitzsch & Sohn.

Lesser, O., Die Infinitesimalrechnung für den Unterricht der Prima mit 30 Fig. Berlin 1906, Salle. Mk. 1.60.

Lorentz, H. A., Lehrbuch der Physik. Aus dem Holländ. übersetzt von G. Siebert I. Mit 236 Abb. Leipzig 1906, Barth. Mk. 8.—.

Laisant, C. A., L'Initiation Mathématique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance. Avec 97 figures dans le texte. Genève, Georg & Cie., Paris 1906. Hachette & Cie.

Mahler, G., Ebene Geometrie. Mit 110 Fig., 4. Aufl. (Slg. Göschen 41). Leipzig 1905, Göschen. Mk. —.80.

Maurer, H., Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in bildlicher Darstellung. I. enth. Aufg. 1—840. Zürich 1906, Speidel. Mk. 2.50.

Mellor, J. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. Herausg. von Wogrinz u. Szarvassi m. 109 Fig. Berlin 1906. Springer. Mk. 8.—.

Moeller, M., Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Ein Beitrag. Wien 1906, Hoelder. Mk. —.90.

Müller, Friedrich C. G., Technik des physikalischen Unterrichts nebst Einführung in die Chemie. M. 251 Abb, Berlin 1906, Salle. geh. Mk. 6.—, geb. Mk. 7.—.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. in vier Bänden. Zehnte umgearbeitete u. vermehrte Aufl., herausgeg. v. Leop. Pfaundler. Erster Band (Mechanik u. Akustik), zweite Abteilung. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. geh. Mk. 3.50.

Neumayer, G. von, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Lfg. 7-8. Hannover 1906, Jaenicke. à Mk. 3.—.

Newest, Th., Einige Weltprobleme. III. Ergründung d. Elektrizität ohne Wunderkultus. Wien 1906, Konegen. Mk. 2.—.

Ramsay, William, Moderne Chemie. II. Systematische Chemie. Ins Deutsche übertragen von Huth. Halle 1906, Knapp. Mk. 3.—.

Remus, K., Der dynamologische Lehrgang. Versuch einer geschlossenen Naturkunde. M. 36 Abb. Leipzig 1906, Teubner. Mk. 2.60.

Rohr, M. von, Die optischen Instrumente. M. 84 Abb. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 88.) Ebenda. geb. Mk. 1.25.

Roesen, K., Grundzüge der Physik. M. Anhang: Chemie u. Mineralogie. Leipzig 1906, Leiner. Mk. 2.—.

Rosenberg, K., Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der höheren Schulen. M. 615 Fig. u. 1 Tafel. Ausg. für Gymnasien. Wien u. Leipzig 1906, Hölder. geb. Mk. 5.—.

—.— für Realgymnasien u. Oberrealschulen. Ebend. Mk. 4.80.

—.— Resultate der Uebungsaufgaben a. d. Lehrb. d. Physik. M. 3 Fig. Ebend. Mk. —.52.

Scheffers, Otto, Das Linearzeichnen an realistischen Lehranstalten. Sonderabdruck aus dem Jahrbuch für den Zeichen- und Kunstunterricht. Jahrg. II. Hannover 1906, Helwing.

Schmid, Bastian, Philosophisches Lesebuch zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. Mk. 2.60.

Stavenhagen, A., Wölbling, H. u. Winter, H., Anleitung zum analytischen Arbeiten. Berlin 1906, Müller. kart. Mk. 2.—.

Tesař, L., Elemente der Differential- und Integralrechnung. M. 83 Fig. im Text. Leipzig u. Berlin 1906, B. G. Teubner.

Thomé-Migula, Kryptogamen-Flora (Thomés Flora von Deutschland V. bis VII. Band). Lief. 22—26. Gera, F. von Zezschwitz. Subskriptionspreis der Lieferung Mk. 1.—.

Thomé, O. W., Lehrbuch der Zoologie für Gymnasien usw., sowie zum Selbstunterrichte. 7. Aufl. m. 463 Fig. u. 18 farb. Tafeln. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. Mk. 4.—.

Le Traducteur, Halbmonatsschrift zum Studium der französischen und deutschen Sprache XIVe Année, 1906. Nr. 1.

The Translator, Halbmonatsschrift zum Studium der englischen und deutschen Sprache. Volume II, 1905. No. 1. Volume III, 1906. Nr. 1. La Chaux de Fonds, Verlag des Traducteur und des Translator.

Vater, R., Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Mit 48 Abb. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 86.) Leipzig 1906, Teubner. Mk. 1.25 geb.

Vivanti, G., Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Deutsch von Gutzmer. Ebenda. Mk. 12.—.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. v. Franz Frisch. Jahrg. II, Heft 1. Wien 1906, Pichlers Wwe. u. Sohn.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30

Bakterien und Hefen

insbesondere in ihren Beziehungen zur

Haus- u. Landwirtschaft

zu den Gewerben, sowie zur Gesundheitspflege nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft gemeinverständlich dargestellt von

Dr. Felix Kienitz-Gerloff

Professor a. d. Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. L.

Mit 65 Abbildungen. — Preis Mk. 1.50.

Normalverzeichnis

für die

physikalischen Sammlungen

der

höheren Lehranstalten.

Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.

Preis 30 Pfg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Soeben erschien:

Methodisches Lehrbuch

der

Chemie und Mineralogie

für

Realgymnasien und Oberrealschulen.

Von

Prof. Dr. Wilh. Levin.

Teil I: Unterstufe

(Sekunda des Realgymnasiums, Untersekunda der Ober-Realschule).

Mit 72 Abbildungen. Preis Mk. 1.40

Der Verfasser hat in dieser „Unterstufe" seines seit langem erwarteten grösseren Lehrbuches nur die allerwichtigsten Tatsachen aus der Chemie und Mineralogie durch einfache Versuche und Demonstrationen zur Veranschaulichung gebracht; er war bestrebt, den Schüler durch die Beschreibung des von ihm selbst Wahrgenommenen mit chemischen Vorgängen vertraut zu machen und ihn dann auf **induktivem Wege** ganz allmählich zur Erkenntnis der Naturgesetze hinüberzuleiten. Meist ist die Betrachtung eines Gegenstandes zugrunde gelegt, der dem Schüler bereits aus dem alltäglichen Leben bekannt ist, z. B. **Luft, Wasser, Kochsalz, Eisen.** Am Anfang ist alles Theoretische streng vermieden. Besondere Sorgfalt wurde auf die Auswahl der Aufgaben verwendet.

Gleich dem bereits an zahlreichen Lehranstalten eingeführten „**Leitfaden**" (4. Aufl.) wird auch diesem „Lehrbuch" eine sehr günstige Aufnahme gewiss sein.

(Teil II: Oberstufe erschien Anfang 1905).

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Technik des physikalischen Unterrichts

nebst Einführung in die Chemie.

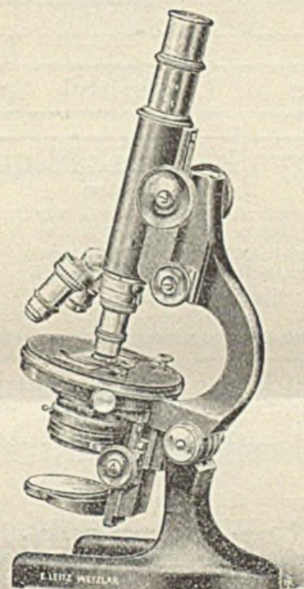
Von

Dr. Friedrich C. G. Müller

Professor am von Saldernschen Realgymnasium zu Brandenburg a. H.

Mit 251 Abbildungen im Text. — Preis geh. 6 Mk. gebd. 7 Mk.

Der als hervorragender Experimentator bekannte Verfasser hat in diesem Buche — welches die Frucht einer 35jährigen Unterrichtspraxis ist — ein Vademekum geschaffen, das den angehenden Lehrer der Physik und Chemie in die Klasse begleiten und ihn am Experimentiertische beraten soll. Dieser bedarf eines Führers, in dem das zusammengestellt und verarbeitet ist, was der Experimentalunterricht modernen Zuschnitts an Einrichtungen, Apparaten und sonstigen technischen Hilfsmitteln erfordert und welches eine Anweisung gibt, wie dieses Hilfsmittel am besten zu verwenden sind.



E. Leitz,

Optische Werkstätte

Wetzlar

Filialen: **Berlin NW.**, Luisenstrasse 45, **New-York, Chicago, Frankfurt a. M.,** Kaiserstrasse 64, und **St. Petersburg,** Woskressenski 11.

Vertreter für München:

Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.

Mikroskope

Mikrotome

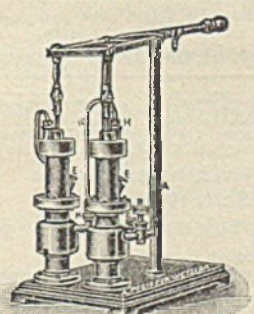
Mikrophotographische Apparate.

Photographische Objektive. Projektions-Apparate.

Deutsche, englische, russische und französische Kataloge kostenfrei.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Präzisions-Optik.



Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung

zur Fabrikation der

Geryk-Oel-Luftpumpen

D. R.-P. in Deutschland.

Typen für Hand- und Kraftbetrieb.

Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. } Vacuum
Zweistiefelige „ „ 0,0002 „ „ }

Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

Viele gesetzlich geschützte Originalkonstruktionen.

Das Buch

der

physikal. Erscheinungen.

Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Neue Ausgabe. Mit 11 Buntdruckbildern, 9 gr. Abbildungen und 448 Holzschnitten. gr. 8°.

Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

Verlag

von

Otto Salle

in

Berlin W. 30

Maassenstrasse 19.

Die

physikalischen Kräfte

im Dienste der Gewerbe, Kunst und Wissenschaft. Nach **A. Guillemin** bearbeitet von Prof. Dr. **R. Schulze.** Zweite ergänzte Auflage. Mit 416 Holzschnitten, 15 Separatbildern und Buntdruckkarten. gr. 8°

Preis 13 Mk.; geb. 15 Mk.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.