Jahrgang XII. 1906. No. 3.

# Unterrichtsblätter
für
# Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**
herausgegeben von
**F. Pietzker,**
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

**Redaktion:** Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
**Verein:** Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

**Verlag:** Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.





## Vereins-Angelegenheiten.

Die vorliegende Nummer bringt den Bericht über den allgemeinen Verlauf der während der Pfingstwoche zu Erlangen abgehaltenen fünfzehnten Hauptversammlung des Vereins. Ueber die Vorträge und die wissenschaftlichen Diskussionen auf dieser Versammlung werden in der bisher üblich gewesenen Art Einzelberichte erscheinen, mit denen in der nächsten Nummer der Anfang gemacht werden wird.

Wie aus dem Versammlungsbericht ersichtlich, sind die satzungsgemäss aus dem Vorstand ausscheidenden Herren wiedergewählt worden. Demgemäss besteht der Vorstand bis zur nächsten Versammlung aus den Herren Lenk (Erlangen), Pietzker (Nordhausen), Presler (Hannover), Bastian Schmid (Zwickau i. S.), Schotten (Halle a. S.), Thaer (Hamburg). Das Amt des Schatzmeisters wird auch weiterhin Herr Presler verwalten (siehe die Notiz am Kopfe des Blattes unter der Rubrik „Verein").

Die nächste Hauptversammlung wird in der Pfingstwoche 1907 in Dresden abgehalten werden. Weitere Mitteilungen über diese Versammlung, insbesondere über die Bildung des Ortsausschusses behalten wir uns vor.

**Der Vereins-Vorstand.**

## Beschlüsse der Hauptversammlung zu Erlangen.

I. Der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften begrüsst mit Dank und Freude die Bemühungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte für die Hebung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und erklärt — ohne im einzelnen zu den Arbeiten der von der Gesellschaft eingesetzten Unterrichtskommission Stellung zu nehmen — prinzipiell sich mit ihren Bestrebungen einverstanden.

II. Der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften begrüsst es mit lebhafter Befriedigung, dass für den — seinerzeit auch von ihm auf seiner neunten Hauptversammlung warm befürworteten — Schutz der Naturdenkmäler unseres deutschen Vaterlandes in dem diesjährigen preussischen Staatshaushalt Mittel bereit gestellt worden sind.

## Maximum, Minimum und Symmetrie.

Von Dr. A. Wendler (München).

Bei der Besprechung des Strahlenganges durch ein Prisma fragte mich einmal ein Schüler, ob der Umstand, dass das Minimum der Ablenkung beim symmetrischen Durchgang eintritt, zufällig sei oder einen tieferen Grund habe. Auch bei mehreren geometrischen Aufgaben sei ihm dieser Zusammenhang zwischen Symmetrie und Maximum-Minimumeigenschaft aufgefallen. Die Beantwortung dieser Frage musste naturgemäss dem nur mit elementaren Kenntnissen ausgerüsteten Schüler gegenüber unvollkommen ausfallen. Ich glaube nun, dass die vorliegende Studie zur Beantwortung der an sich interessanten Frage einen kleinen Beitrag liefern kann.

Es ist wohl schon des öfteren darauf hingewiesen worden*), dass es nicht die häufig auftretenden Maximum - Minimumeigenschaften sind, welche im Naturgeschehen den Kern der Erscheinungen bilden, sondern dass das Wesentliche an der Sache die Eindeutigkeit ist.

„Für jeden Vorgang lassen sich Bestimmungsmittel auffinden, durch die er eindeutig bestimmt ist, derart, dass man zu jeder Variation dieses Vorganges, welche man durch dieselben Mittel bestimmt denken wollte, mindestens noch eine finden könnte, die dann in gleicher Weise bestimmt, ihr somit gleichwertig wäre und also gleichsam dasselbe Recht auf Verwirklichung hätte wie jene.“ „Die Naturvorgänge sind immer besondere singuläre Fälle unter unendlich vielen denkbaren, können daher ihre analytische Beschreibung in dem Nullwerden eines Differential- bezw. Variationsausdruckes finden und müssen sich folglich im allgemeinen**) unter dem Gesichtspunkte einer Maximum- oder Minimumeigenschaft auffassen lassen.“

So hat der tatsächliche Lichtweg hinsichtlich der Zeit den denkbaren Nachbarwegen gegenüber eine einzigartige Lage, was sich hier durch das Auftreten gewöhnlich eines Minimums***) anzeigt. Insbesondere lassen sich bei allen Bewegungen die tatsächlichen Bahnen als singuläre Fälle unter unendlich vielen, an sich gleichberechtigten denken, weshalb sie durch Differentialgleichungen beschrieben werden, die durch Nullsetzen der Variation gewisser Ausdrücke gewonnen werden.

Zugleich wird es verständlich, warum das Auftreten der Maximum-Minimumeigenschaften in Geometrie und Physik so häufig mit Symmetrie verbunden ist. (Symmetrische Gestaltung bei Gleichgewichtsanordnungen usw.) Die symmetrische Lage ist eben den Nachbarlagen gegenüber einzigartig und daher diesen gegenüber von eindeutiger Bestimmtheit.

### I.

Besonders einfach lässt sich der Zusammenhang zwischen Maximum, Minimum und Symmetrie an dem Beispiele

$$y = ax^2 + bx + c$$

verfolgen, welches ja für viele in der Elementarmathematik auftretenden Fälle typisch ist. Indem in

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{y-c}{a}}$$

der Wurzelradikand nicht negativ werden darf, erhält man in bekannter Weise durch Nullsetzen dieses Radikanden den Extremalwert

$$x = -\frac{b}{2a},\ y = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Für die Gewinnung dieses extremalen Wertes ist die Eindeutigkeit, d. h. die Beseitigung der durch das doppelte Wurzelzeichen entstehenden Zweideutigkeit das Wesentliche. Die Frage nach einem Maximum oder Minimum ist von sekundärer Bedeutung und lässt sich bei der Reellität der betreffenden Probleme in bekannter Weise durch die Diskussion des Imaginärwerdens der Wurzel entscheiden. Zugleich bemerkt man, dass jener Extremalwert als Schnittpunkt der Kurve

$$y = ax^2 + bx + c$$

mit der zur $y$-Achse parallelen Geraden

$$x = -\frac{b}{2a}$$

erhalten wird, welch letztere für jene Parabel Achse, somit auch Symmetrielinie ist.

*) Z. B. Petzoldt, Maximum, Minimum und Oekonomie. (Diss. Göttingen 1891). Petzoldt, Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. (Bd. I. 1. Abschn., 3. Kap.)

**) Vollständig einwandfreie Kriterien liefert bekanntlich nur die neuere, präzisionsmathematische Behandlung der Differential- und Variationsrechnung (vergl. z. B. Kneser, Lehrb. der Variationsrechnung, Braunschweig 1900).

***) Dass unter Umständen auch ein Maximum auftreten kann, ist ebenso bekannt wie die Tatsache, dass die durch das Verschwinden der Variation der Bogenlänge gewonnene geodätische Linie zwischen zwei Flächenpunkten nicht notwendig die kürzeste Entfernung zu liefern braucht.

Die Parallelität der Kurventangente an solchen Extremalstellen ist die geometrische Begleiterscheinung für das Verschwinden des Differentialquotienten und dieses ist ein singulärer und wenn man will, symmetrischer Fall, indem in übertragener Bedeutung überhaupt Ausdrücke nur mit Vorzeichenunterschieden als „symmetrisch" (besser konjugiert) betrachtet werden können.

So werden in der Kurvenschar $K(x, y) =$ Const. die Kurven $K = +k$ und $K = -k$ durch die Symmetrale $K = 0$ in dieser Weise „symmetrisch" getrennt. Aehnliches gilt für die Kurven $M \pm \lambda_0 N = 0$ des durch die Grundkurven $M = 0$, $N = 0$ bestimmten Kurvenbüschels*). Hierher gehören z. B. auch die Funktionen $f^{(z)}_{(+i)}$ mit der komplexen Variablen $z$, wenn das Imaginäre nur in der Variablen selbst vorkommt. Die konjugierte Funktion ist dann bekanntlich $f^{(z)}_{(-i)}$ und es entsprechen konjugierten Werten des Argumentes auch konjugierte Werte der Funktion, d. h. bei der Abbildung entsprechen Gebilde der $Z$-Ebene, die gegen die reelle Achse symmetrisch sind, Gebilde der $Z$-Ebene, von denen dasselbe gilt.**)

Es sei noch die Kurvengleichung von der Form $P^2 - Q = 0$ erwähnt. Hier schneidet die „Symmetrale" $P = 0$ singuläre Werte aus, indem für $P = 0$, $Q = 0$, in $P = \pm \sqrt{Q}$ die Zweideutigkeit verschwindet. Dass diese singuläre Werte nicht immer die Bedeutung eines Maximums oder Minimums haben müssen, ersieht man aus der Gleichung $XY - kL^2 = 0$ eines die Geraden $X = o$, $Y = 0$ berührenden Kegelschnittes, wobei $L = 0$ die durch die Berührpunkte gehende Sehne ist Anders verhält sich die Sache, wenn $Q$ eine Funktion von $y$ allein ist. Setzt man z. B. $P = x - ay$, $Q = my^2 - n$, so erhält man schiefe Symmetrie (Fall der konjugierten Durchmesser), indem die Gerade $P = o$ aus der Kurve zweiter Ordnung

$$x^2 - 2axy + (a^2 - m)y^2 + n = 0 = P^2 - Q$$

zwei extreme Werte ausschneidet, die ein Maximum und Minimum bedeuten. Weiteres Beispiel:

Wie hat man den äusseren Widerstand $x$ eines geschlossenen galvanischen Elementes (mit der elektromotorischen Kraft $e$ und dem inneren Widerstand $w$) zu wählen, damit die elektrische Arbeit $y$ möglichst gross werde?

$$i = \frac{e}{w+x};\ y = i \cdot e_a = \frac{e}{w+x} \cdot \frac{ex}{w+x} = \frac{e^2 x}{(w+x)^2} = f(x).$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{e^2 - 2yw}{2y} \pm \sqrt{\left(\frac{e^2 - 2yw}{2y}\right)^2 - w^2}$$

und es ist

$$P = x + \frac{2yw - e^2}{2y}$$

die „Symmetrale", welche aus $y = f(x)$ die extremen Werte

$$x = w,\ y = \frac{e^2}{4w}$$

ausscheidet.

II.

In allen Fällen, in denen es, wie z. B. bei der gewöhnlichen räumlichen Symmetrie, gelingt, die „Symmetrale" unmittelbar anzugeben, ist es ohne weitläufige Rechnungen leicht, einen bezw. den Extremalwert anzugeben, der möglicherweise ein Maximum oder Minimum bedeutet.

Sollen z. B. die Extremalwerte von $(A)$ $z = f(x, y)$ mit der Nebenbedingung $(B)$ $F(x, y) = 0$ gefunden werden und deutet man diese Gleichungen in bekannter Weise im rechtwinkeligen räumlichen Koordinatensystem, so handelt es sich darum, von der Raumkurve, in der sich die Fläche $(A)$ und Zylinder $(B)$ schneiden, die Extremalwerte hinsichtlich der $xy$-Ebene zu finden. Ist also z. B. diese Raumkurve hinsichtlich der Ebene $y = x$ symmetrisch, so ist geometrisch evident, dass $y = x$, also $F(x, x) = 0$ ein Extremum liefert.

Die fragliche Raumkurve wird sicherlich in der angegebenen Weise symmetrisch, wenn die Funktionen $f$ und $F$ selbst hinsichtlich ihrer Argumente symmetrisch werden, was durch die Buchstaben $s$ und $S$ angedeutet werde. Z. B.

1.

Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat das Quadrat den grössten Inhalt.

Sind $x$ und $y$ die Rechtecksseiten, so ist hier

$$z = s(x, y) = x \cdot y \quad \text{und} \quad S(x, y) = x + y - c = 0.$$

Somit gibt $y = x$ einen, bezw. den Extremalwert.

Die elementare Behandlung ergibt hier aus $z = x \cdot y$ und $y = c - x$ die Gleichung $x^2 - cx = -z$, also

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - z},$$

also den eingangs besprochenen Fall der Parabel mit der Symmetrieachse $x = {}^c/_2$. Auch die bekannte elementargeometrische Konstruktion mit dem Halbkreis über der Strecke $x + y = c$ usw. lässt deutlich erkennen, wie die Zweideutigkeit für $x = y$ in Eindeutigkeit übergeht und welche Rolle dabei die Symmetrie spielt.

2.

Von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Inhalt hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang (Fig. 1). Hier ist

$$z = s(x, y) = x + y + (g);$$
$$S(x, y) = 0 =$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{(x+y+g)(y+g-x)(x+g-y)(x+y-g)} - J.$$

Also muss $y = x$ wieder ein (das) Extremum

*) Der Wert $\lambda = \infty$ kann analog interpretiert werden wie $\lambda = 0$.

**) Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, pag. 85.

geben. Auch aus der Figur ist hier der Zusammenhang zwischen Eindeutigkeit und Symmetrie sofort klar.

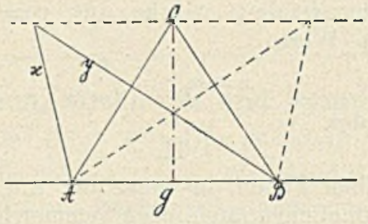


Fig. 1.

3.

Das Minimum der Ablenkung beim Strahlengang durch ein Prisma erfolgt bei symmetrischer Durchsetzung des Prismas.

Bei der in Fig. 2 gewählten Bezeichnung

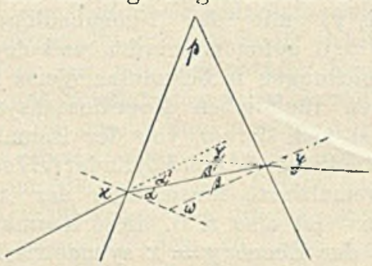


Fig. 2.

hat man:

$$\frac{\sin x}{\sin \alpha} = n = \frac{\sin y}{\sin \beta'},\ z = \alpha' + \beta' = (x - \alpha) + (y - \beta) = x + y - p,\ \omega = p = \alpha + \beta.$$

Somit ist hier $z = s(x, y) = x + y - p$ und

$$S(x, y) = 0 = arc \sin\left(\frac{\sin x}{n}\right) + arc \sin\left(\frac{\sin y}{n}\right) - p.$$

Also auch hier ist $x = y$ ein Extremum.

4.

Bezeichnet man beim gewöhnlichen Wurf die Anfangsgeschwindigkeit mit $c$, den Elevationswinkel mit $\alpha$, so besteht für die Wurfweite bekanntlich die Gleichung

$$z = \frac{2c^2}{g} \sin \alpha \cdot \cos \alpha.^{*)}$$

Setzt man $\sin \alpha = x$, $\cos \alpha = y$, so hat man

$$z = s(x, y) = \frac{2c^2}{g} \cdot x \cdot y;\ S(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

$x = y$ ist aber hier mit $\sin \alpha = \cos \alpha$, d. h. $\alpha = 45^0$ äquivalent.

III.

Die analytische Behandlung ergibt bekanntlich $d\zeta = 0 = d(f + \lambda F) = 0$, somit durch Elimination von $\lambda$ aus $f_x + \lambda F_x = 0$ und $f_y + \lambda F_y = 0$ die Gleichung:

$$(C)\ \frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta F}{\delta x} = 0.$$

Die Gleichungen $(B)$ und $(C)$ zusammen liefern dann die Werte von $x$ und $y$, für welche $z$ in Gleichung $(A)$ ein Extremum wird. Sind nun, wie oben angenommen wurde, $f = s$ und $F = S$ symmetrische Funktionen ihrer Argumente, so wird $(C)$ von der Form

$$\varphi(x, y) - \varphi(y, x) = 0,$$

kann also durch $y = x$ befriedigt werden.*)

Aber auch, ohne dass die in $(A)$ und $(B)$ auftretenden Funktionen $f$ und $F$ hinsichtlich $x$ und $y$ selbst symmetrisch sind, kann doch die gemeinsame Schnittkurve von $z = f(x, y)$ und $F(x, y) = 0$ die Symmetrieebene $x = y$, also für $y = x$ einen Extremalwert besitzen. Z. B. (Fig. 3).

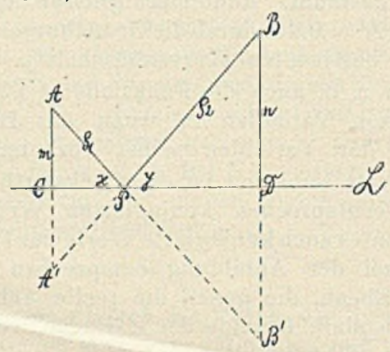


Fig. 3.

Sind auf der gleichen Seite einer Geraden $L$ zwei Punkte $A$ und $B$ gegeben und soll zwischen $C$ und $D$ ein Punkt $P$ so bestimmt werden, dass Winkel $x = y$ ist, so braucht man bekanntlich nur den Spiegelpunkt $A'$ von $A$ mit $B$ oder den Spiegelpunkt $B'$ von $B$ mit $A$ zu verbinden. Zugleich kann elementar leicht nachgewiesen werden, dass dabei $\varrho_1 + \varrho_2 = AP + PB$ ein Minimum ist. Optisch drückt dies die Tatsache aus, dass bei der Reflexion des Lichtes von $A$ nach $B$ der Lichtweg ein Minimum ist. Der Zusammenhang mit der Symmetrie ergibt sich hier aus den Gleichungen

$$z = f(x, y) = \frac{m}{\sin x} + \frac{n}{\sin y} = \varrho_1 + \varrho_2.$$

$$F(x, y) = 0 = \frac{m}{tang\, x} + \frac{n}{tang\, y} - d;$$

denn es wird:

$$\frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta F}{\delta y} = \frac{m\, n \cos x}{(\sin x \cdot \sin y)^2} = \varrho(x, y) \text{ und}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta F}{\delta x} = \frac{m\, n \cos y}{(\sin y \cdot \sin x)^2} = \varrho(y, x)^{**)},$$

so dass $y = x$ tatsächlich ein (das) Extremum geben muss.

*) Allgemeiner lässt sich zeigen, dass jede Funktion von der Form $\varsigma(\sin \alpha, \cos \alpha)$, wobei $\varsigma$ eine symmetrische Funktion der Argumente ist, ein Extremum $\alpha = \frac{\pi}{4}$ besitzt, indem die Gleichungen $z = \varsigma(x, y)$ und $S(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ zusammenbestehen.

*) Analoge Betrachtungen gelten auch für mehr als zwei Variable.

**) Will man übrigens zu einer vorgegebenen Funktion $\varrho(x, y)$ die beiden in $(A)$ und $(B)$ vorkommenden Funktionen $f$ und $F$ bestimmen, so kann man z. B. $f_x F_y = \varrho(x, y)$ und $f_y F_x = \varrho(y, x)$ setzen, um $y = x$ als mögliches Extremum festzulegen. Wegen $F_{xy} = F_{yx}$ besteht dann für $f$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\varrho(x, y)}{f_x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\varrho(y, x)}{f_y}\right).$$

$F$ kann auf Grund dieser Differentialgleichung in bekannter Weise durch Quadraturen bestimmt werden.

## Ueber eine kreisförmige und drehbare Wandtafel und ihre Verwendung im mathematischen Unterricht.

Von O. Ohmann (Berlin).

Beim geometrischen Unterricht drängte sich mir, wie gewiss schon manchem anderen, wiederholt der Gedanke auf, wie nützlich es wäre, bestimmte Figuren von einem anderen Gesichtspunkt aus oder, was auf dasselbe hinauskommt, in veränderter Lage betrachten zu können. Es führte mich dies auf die Konstruktion einer Wandtafel, die von den üblichen Schulwandtafeln in zwei Momenten abweicht; erstens in der Form — sie zeigt Kreisform —, zweitens in der Drehbarkeit — die Fläche der Tafel ist in sich, um den Mittelpunkt des Kreises, also um eine horizontale, von vorn nach hinten verlaufende Achse drehbar. Im folgenden sollen beide Momente etwas näher begründet und einige bestimmte Beispiele zur Verwendung der Tafel angeschlossen werden.

### 1. Die Kreisform.

Zu dieser Form führte das Bestreben, die gezeichnete Figur derart entstehen zu lassen, dass ihr Eindruck ein möglichst klarer und ungestörter sei. Man wird wohl ohne weiteres zugeben, dass der Eindruck, der bei Fig. 2 von jeder beliebigen geradlinigen Figur gewonnen wird, ein einfacherer, ursprünglicherer ist, als bei Fig. 1, wo die vielfachen Linien und Winkel

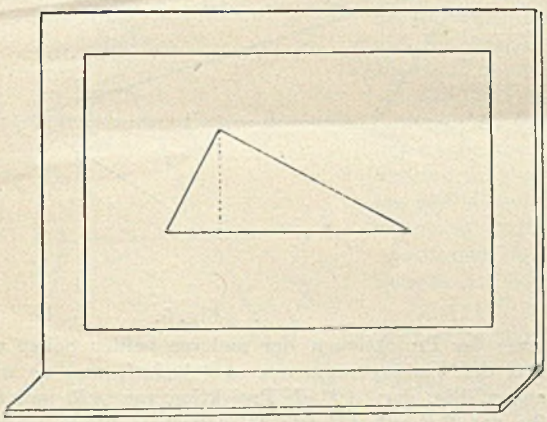


Fig. 1.

des Tafelrandes in die Vorstellung der Figur stets mit eingehen und so fortgesetzt ein störendes Moment darstellen. In Fig. 2 hat man es gleichsam nur mit der Figur an sich zu tun, da man eine blosse schwarze Fläche vor sich hat.

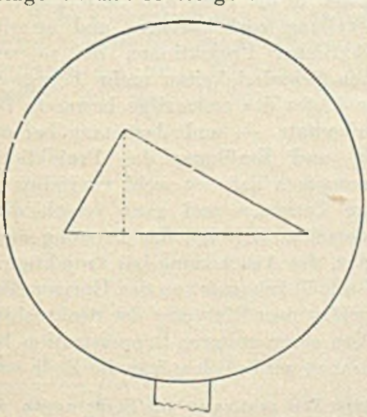


Fig. 2.

Ein weiterer Grund, die Kreisform zu wählen, lag darin, dass die Drehung einer solchen Tafel um ihren Mittelpunkt sich ohne Veränderung des Tafelbildes, also ganz unauffällig vollzieht, während in Fig. 1 diese Drehung wegen der fortgesetzten Verschiebung aller Randlinien und vorstehenden Ecken als etwas Ungewöhnliches, Unschönes erscheinen würde. Dass auch der ästhetische Eindruck einer Tafel von Kreisform auf die Dauer ein angenehmerer ist, als bei der Rechteckform, sei noch beiläufig erwähnt.

### 2. Die Drehbarkeit (Das Rotieren).

Ist irgend ein geometrischer Lehrsatz an einer bestimmten Figur eingeprägt, so ist es wohl nach allseitigem Urteil eine ungemein wichtige Aufgabe, die gewonnenen räumlichen Vorstellungen nicht einseitig werden zu lassen. Hier vermag die Drehbarkeit nützlich einzugreifen. Wird nämlich bei der Wiederholung des Lehrsatzes die Figur durch Drehung der Tafel in eine andere Stellung gebracht — das Mass der Drehung wird man zuerst nicht zu gross nehmen —, so stellt das jetzt nötige Umdenken der Lage aller Teile eine ausgezeichnete geistige Uebung dar. Bei häufiger Verwendung dieser Eigenschaft der Tafel wird allmählich die geometrische Anschauung des Schülers in einer Weise geübt und erweitert, wie es durch andere Mittel sich nicht leicht erreichen lassen dürfte.

Man wird vielleicht entgegenhalten, dass eine in anderer Lage gezeichnete Figur denselben Zweck erfüllen würde. Es ist jedoch für die ganze Auffassung etwas anderes, eine in bestimmter Lage fixierte Figur, zumal wenn sie komplizierter ist, in veränderter Lage, sonst im wesentlichen übereinstimmend mit der ursprünglichen Figur zu zeichnen, oder aber: eine Figur einfach zu drehen und in anderer Lage zu fixieren. Im ersten Falle hat der Schüler nicht die unmittelbare Gewissheit, dass die Figuren identisch sind; im zweiten Falle ist es evident, dass es sich um ein und dieselbe Figur handelt. Dort muss er sich die Bedingungen, unter denen die zweite Figur gezeichnet ist, wieder von neuem, mit mehr oder weniger Erfolg, ins Gedächtnis zurückrufen; hier bleiben die Bedingungen dieselben — werden also nötigenfalls ganz leicht reproduziert —, und es handelt sich um die reine Anschauungsübung, eine bereits erkannte Sache auch von einem neuen Gesichtspunkt aus aufzufassen und zu verstehen.

Selbstverständlich kann und soll die Drehbarkeit der Tafel nicht das sonstige Variieren der Figur ersetzen. Dieses Variieren der Figuren — besonders auch der Lehrbuchfiguren — bleibt ein unumgängliches Mittel, die gewonnenen Vorstellungen vor Einseitigkeit zu schützen. Aber auch an der variierten Figur vermag die Drehung noch zu einer weiteren Förderung zu führen.

Eine andere Verwendung des Rotierens ist mehr spezieller Natur. Jeder, der den geometrischen Unterricht besonders auf der Unter- und Mittelstufe erteilt hat, wird wissen, welche Schwierigkeit es den Schülern bereitet, einen bereits durchgenommenen Lehrsatz aus einer komplizierteren Figur herauszulesen, falls diese die betreffenden Grössen in einer wesentlich anderen Lage zeigt, als diejenige einfache Figur, an der der Lehrsatz zuerst eingeprägt wurde. Es ist ja nicht zu vermeiden, dass im Gedächtnis des Schülers sich mancher Beweis mit einer ganz bestimmten oder bestimmt gestellten Figur verknüpfen wird, meist mit der Figur, an der man die Sache zuerst erläuterte. Der Unterricht wird freilich dahin zielen müssen, den Schüler möglichst bald von solcher einzelnen, meist mit einer Linie wagerecht gestellten Figur loszulösen. Nichtsdestoweniger hat bei manchen Figuren eine solche bestimmte Orientierung eine gewisse, wenn auch vielleicht nur ästhetische Berechtigung, nämlich bei denen, die eine (einfache oder mehrfache) Symmetrie aufweisen, also namentlich beim gleichschenkligen Dreieck. Dies Dreieck wird jeder Schüler gern aufrecht gestellt sehen, und die Beziehung des Aussenwinkels an der Spitze zum Basiswinkel wird ihm bei dieser Stellung am besten einleuchten bezw. wieder ins Gedächtnis kommen. Tritt nun bei einem Beweise der Fall ein, dass in einer komplizierteren Figur eine solche Beziehung an einer symmetrischen Figur, etwa die erwähnte Beziehung am gleichschenkligen Dreieck, als Teilfigur mit enthalten ist — weiter unten ist ein Beispiel hier zu ausgeführt —, so vermag man durch eine Drehung der Gesamtfigur leicht zu bewirken, dass die Teilfigur in der zuerst eingeprägten Lage erscheint. Die Erfahrung hat gezeigt, dass hierdurch das Verständnis, das Eindringen in den Beweis ausserordentlich erleichtert wird.

Das Gesagte gilt insbesondere für den grundlegenden geometrischen Unterricht der ersten Jahre; doch soll betont werden, dass auch auf jeder höheren Stufe, beispielsweise in der Trigonometrie und analytischen Geometrie, die Verwendung der Tafel gleichfalls Vorteile bietet.

3. Beispiele zur Verwendung der Tafel.

a) Schon bei den ersten Erörterungen über die Gerade, den Strahl und die Strecke kann man durch Benutzung der Drehbarkeit auf eine Emanzipation von der Wagerechten — deren Lage dem Schüler von Haus aus am geläufigsten ist — hinarbeiten.

b) Handelt es sich weiterhin um die Repetition der Lehrsätze über Gegenwinkel usw., so ist der zuerst etwa an der Figur 3 geführte Beweis nach erfolgter beliebiger Drehung, etwa an der Figur 4, von einem anderem Schüler zu wiederholen; ebenso weiterhin bei den Lehrsätzen über Wechselwinkel, wenn die Figur sich allmählich zu dem bekannten

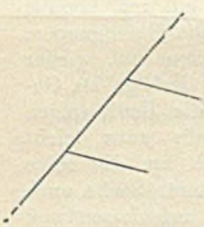


Fig. 3.

Fig. 4.

Doppelkreuz (das leider in den meisten Lehrbüchern die Ausgangs- und alleinige Figur darstellt) vervollständigt.

Ein Umstand bedarf noch beiläufiger Erwähnung. Hatte man in der Figur eine Buchstabenbezeichnung angebracht, so dreht sich diese mit. Man kann nun dem Schüler meist nicht zumuten, die Buchstaben aus der veränderten Stellung noch herauszulesen, sondern wird diese einzeln durch normalgestellte Buchstaben ersetzen, was in wenigen Sekunden zu erledigen ist. Es sei jedoch an dieser Stelle einer gelegentlichen Beweisführung ohne Buchstaben das Wort geredet — obgleich es hier den Anschein hat, als wollten wir aus der Not eine Tugend machen. Die Buchstaben an den Figuren sind gewiss ein wichtiges Hilfsmittel zur Verständigung, und in den Lehrbüchern sind sie an sämtlichen Figuren unumgänglich, weil sonst die Beweisführung unmöglich würde; aber in der Natur gibt es keine Buchstabenbezeichnung, weder bei den Gestirnen noch an den Fluchtstäben bei der Feldmessung oder anderwärts, da muss man ständig demonstrieren „dieser Punkt“, „jene markierte Gerade“ usw. In gleicher Weise gelegentlich von der Buchstabenbezeichnung im geometrischen Unterricht zu abstrahieren, sich ohne dieselbe zu behelfen suchen, ist in verschiedener Hinsicht eine nützliche Uebung; doch wollen wir darauf an dieser Stelle nicht näher eingehen.

c) Besonders nützlich erweist sich die Drehbarkeit bei allem, was mit dem Begriff der Projektion zusammenhängt. Die Beziehung auf die Horizontale — von der man andererseits entwöhnen soll — wird hier, wenigstens anfangs, gerade zur Forderung, und man hat es ganz in der Hand, die Gerade, auf welche bestimmte Strecken projiziert werden sollen, in die wagerechte Lage zu bringen. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der Projektionen im rechtwinkligen Dreieck, so wird man zuerst die Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse zeichnen lassen, in der Stellung wie es oben Figur 2 zeigt. Dreht man nun erst die eine, dann die andere Kathete in die wagerechte Lage, so wird sofort erkannt, dass die Projektion der Hypotenuse auf eine Kathete diese selbst, und dass die Projektion einer Kathete auf die andere gleich Null wird. — Handelt es sich ferner um die Erkennung aller Projektionen im stumpfwinkligen Dreieck, so wird man ebenso zunächst die grösste Seite in die horizontale Lage bringen und die Projektionen der beiden kürzeren Seiten zeichnen lassen; wird alsdann $AC$ in die wagerechte Stellung gebracht (Fig. 5), so wird bald gefunden, dass man zur Zeich-

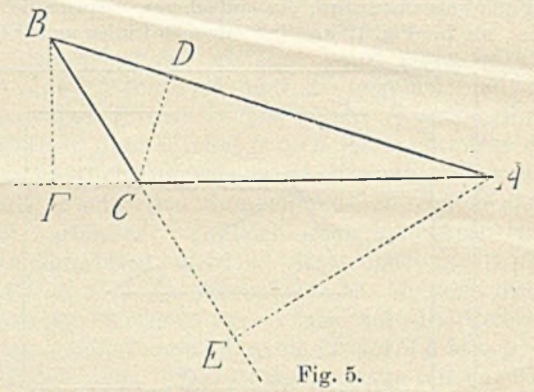



Fig. 5.

nung der Projektionen der anderen beiden Seiten auf $AC$ der Verlängerung von $AC$ bedarf, und es wird augenfällig, dass $AF$ die Projektion von $AB$, und $CF$ die von $CB$ auf $AC$ ist; in derselben Weise werden die noch übrigen Projektionen aufgefunden, wenn man $BC$ horizontal stellt. Ist dies alles erkannt und geübt, so kann man die Figur in die erste und weiterhin eine beliebige andere Stellung zurückdrehen, und es wird die Auffindung sämtlicher Projektionen bei so veränderter Lage keinen Schwierigkeiten mehr begegnen. — In dieser Weise bietet das erstmalige bewusste Beziehen auf die Horizontale — und dass man bei der ersten Feststellung und Einübung des Projektionsbegriffes davon auszugehen hat, ist wohl zweifellos — und das nachmalige Verlassen und ganz verschiedenartige Einstellen derselben zufolge der Drehung eines der besten Mittel dar, die Anschauung bei Projektionen irgend welcher Art allmählich ganz von den Horizontalen bezw. von der geometrischen Richtung der Senkrechten zu befreien.*) — Von einer weiteren Demonstration bezüglich der Projektionen wird noch später die Rede sein.

*) Es fällt dies zum Teil zusammen mit Forderungen, die Mach in seinem neuen Buche „Erkenntnis und Irrtum“, besonders in den für den mathematischen Unterricht überaus wertvollen Kapiteln „Der physiologische Raum im Gegensatz zum metrischen“ und „Zur Psychologie und natürlichen Entwickelung der Geometrie“, erhebt.

d) In der Kreislehre bietet der Lehrsatz, dass der Peripheriewinkel die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels ist, ein Beispiel dafür, wie die Tafel bei der Beweisführung selbst zu verwenden ist. Wenn man in der üblichen Figur (6) erst $BC$ und dann $AC$ in die horizontale Lage bringt, so taucht die früher durchgenommene Figur (7)

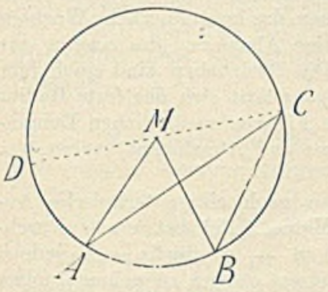



Fig. 6.

Fig. 7.

von der Beziehung des Basiswinkels zum Aussenwinkel an der Spitze mit viel grösserer Sicherheit im Gedächtnis des Schülers auf. Nachher wird ihm der Beweis in jeder beliebigen Stellung geläufig. — Eine hübsche praktische Aufgabe ist es, den Mittelpunkt der Tafelfläche durch Lote auf zwei Sehnen festzustellen; es ist dabei von Wert, dass das Zentrum der Tafel nicht von vornherein markiert ist.

e) Beim sogen. Strahlensatz — im 2. Teile, der die Abschnitte auf den Parallelen miteinbezieht — wird die Proportionalität der bezüglichen Grössen momentan einleuchtend, wenn man — nach geführtem Beweise des 1. Teiles — $S_1$ (Fig. 8) in die Lage des früheren Scheitels $S$ dreht. Es stellt sich dann dem Schüler wieder die erste Figur vor Augen.

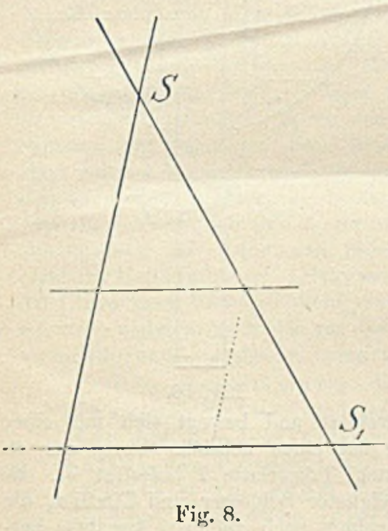



Fig. 8.

f) In gewissem Sinne für den Schüler überraschend erweist sich das Resultat der Drehung bei Konstruktionsaufgaben. Handelt es sich z. B. um die Konstruktion eines Dreiecks aus $a - b$, $\beta$, $h_c$ (Fig. 9

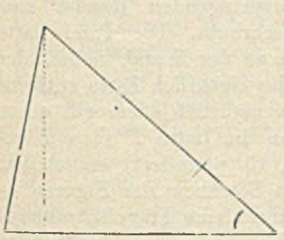


Fig. 9.

Fig. 10.

zeigt die Analysisfigur), so führt die Drehung nach links herum zu der neuen Aufgabe $\triangle$: $b - c$, $\gamma$, $h_a$ (Fig. 10) und weiterhin zur Aufgabe $\triangle$: $c - a$, $\alpha$, $h_b$, oder vielmehr die Drehung zeigt, dass diese beiden Aufgaben mit der ersten gleichbedeutend sind. Mit anderen Worten: man kann mit Hilfe der Drehbarkeit gut die zyklische Vertauschung überhaupt üben. — Wie auch sonst gerade bei Konstruktionsaufgaben die Tafel Vorteile bieten kann, braucht wohl nicht näher ausgeführt zu werden. Jedenfalls ist es ganz interessant zu beobachten, wie hierbei die Schüler selbst gelegentlich ihr Diarium als drehbare Tafel handhaben und durch die Betrachtung der Analysisfigur von verschiedenen Gesichtspunkten aus sichtlich schneller in die eigentliche Konstruktion eindringen.

g) Für manche Aufgaben aus der Feldmesskunde eignet sich die Tafel insofern, als die Drehbarkeit gewissermassen das Handhaben der Skizze versinnlicht, z. B. wenn es sich um die Ausmessung einer polygonalen Fläche handelt (Fig. 11). Die übliche eigenartige Schreibweise der Zahlen für die abgemessenen Längen wird gleichfalls auf diese Weise gerechtfertigt.

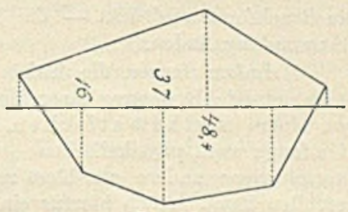


Fig. 11.

h) Auch für verschiedene Aufgaben, bei denen rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten anzuwenden sind, leistet die Drehbarkeit gute Dienste, wenn es sich um die Vertauschung der Koordinaten handelt.

---

Soviel von besonderen Anwendungen zu verschiedenen Teilen des geometrischen Pensums; die angeführten Beispiele könnten noch leicht vermehrt werden. Aber auch noch nach ganz anderen Richtungen hin gewährt die Tafel gewisse Vorteile.

i) Die Vorteile sind beiläufig auch rein zeichentechnischer Natur. Wie man bei einer Bleistiftzeichnung das Skizzenbuch gelegentlich etwas dreht, um gewisse Linienführungen zu erleichtern, so wird auch hier durch die Möglichkeit der Drehung das Zeichnen selbst zuweilen etwas bequemer. Es gehört z. B. schon ein ziemlicher Grad von Aufmerksamkeit dazu, um in einem etwas langgestreckten Parallelogramm ohne Lineal die lange Diagonale wirklich korrekt zu ziehen. Leicht wird sie etwas bogig oder endigt falsch, so dass die beiden entstehenden Dreiecke keineswegs kongruent aussehen, während man vom Schüler verlangt, er solle die Kongruenz intuitiv erkennen. Bringt man sich jedoch die beiden entstehenden Eckpunkte nach Augenmass in die horizontale — oder, was individuell ist, auch vertikale — Stellung, so wird der Linienzug viel sicherer. Ueberhaupt, das Zeichnen einer Parallelen, jeder Senkrechten und manches andere wird sicherer, führt also zu genaueren Figuren, wenn man vorher die passende Drehung ausführt. Und über den Wert einer exakten Tafelfigur sind wohl die Meinungen nicht mehr geteilt. — Eine Kreislinie hat man jederzeit ohne Zirkel, wenn man gegen die unten befindliche Flügelschraube ($F$ in Fig. 15) ein Lineal festdrückt, die Kreide am anderen Ende oder sonstwo am Rande desselben festhält, so dass sie die Tafelfläche berührt, und nun eine Rotation der Scheibe ausführt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass sowohl beim Zeichnen der verschiedensten Figuren im physikalischen und im übrigen naturwissenschaftlichen Unterricht als auch bei Demonstrationen an solchen Figuren die Drehbarkeit noch ganz eigenartige Dienste leisten kann — doch liegt die nähere Betrachtung ausserhalb des heutigen Themas. Beispielshalber sei nur auf ihre zweckdienliche Verwendung bei den Figuren zum Kapitel der „optischen Täuschungen“ sowie zur Aufsuchung des blinden Fleckes im Auge hingewiesen.

k) Auch auf anderen Gebieten des mathematischen Unterrichts kann die Drehbarkeit gelegentlich verwendet werden. Handelt es sich z. B. in den Elementen der Arithmetik um den Nachweis, dass $ab = ba$, so führt bei dem in der Figur (12) dargestellten Fall eine Drehung um 90 Grad zu der gewünschten Einsicht. — Auch bei der Lehre der Proportionen kann — sofern man die einzelnen Verhältnisse in Bruchform ausdrückt — die Tafel eine instruktive Anwendung finden.


Fig. 12.

l) Indem ferner die Tafel bei einfachster Form eine achsiale Bewegung ihrer Masse gestattet, wird sie zu einem mathematischen — und in gewissem Umfange auch physikalischen — Apparat, der noch verschiedene andere als bloss rein graphische Zwecke erfüllen kann. Auch hierfür ein paar Beispiele.

Ausmessung der Zahl $\pi$. Der Anfang eines abrollbaren Messbandes wird mit einem Reisstift an dem äusseren Tafelrande befestigt und es wird die Drehung bis zum Wiederzusammentreffen vollzogen, woselbst die Länge der Peripherie abgelesen wird. Die praktische Ermittelung des Durchmessers als grösster Sehne hat keine Schwierigkeiten und genügt dem Zwecke, so dass es kaum nötig ist, erst noch den Mittelpunkt von neuem bestimmen zu lassen. Das Verhältnis beider Zahlen gibt ein soweit befriedigendes Resultat, dass es als Anhalt für die Angabe der genauen Zahl dienen kann. Dass das Verhältnis des Durchmessers und noch besser des Radius zur Peripherie schon frühzeitig wenigstens angenähert (auf etwa zwei Stellen) mitgeteilt werde, ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswert.

Veranschaulichung von goniometrischen Funktionen. Lässt man sich noch einen festen Radius $r$ (Fig. 12) — in Gestalt einer abnehmbaren Gabel (Fig. 13), die hinter der Tafel bei $s$ mit dem stationären Teil derselben verbunden ist —, anbringen und steckt man ausserdem in die Randkanten bei $A_3$ eine Stecknadel, um die man den Faden eines Pendels schlingt, so lässt sich das Ganze mit Vorteil bei der Veranschaulichung goniometrischer Funktionen verwenden. Ist in Fig. 14 $MA$ der feste Radius (Aluminium- oder bekreideter Eisen-Stab) und wird ein beliebiger anderer Radius $MA_3$ gezeichnet und dieser mit $MA$ zunächst zur Deckung gebracht, so kann man bei der Drehung des gezeichneten Radius in die verschiedenen Lagen $MA_1$ usw. das kontinuierliche Wachsen des sinus und gleichzeitige Abnehmen des cosinus zur Anschauung bringen. Die Buchstaben sind auch hier zu entbehren. — Uebrigens lässt sich der feste Radius auch noch bei anderen Figuren zu ähnlichen Demonstrationen (des Wachsens und Abnehmens) verwerten.

Fig. 13.

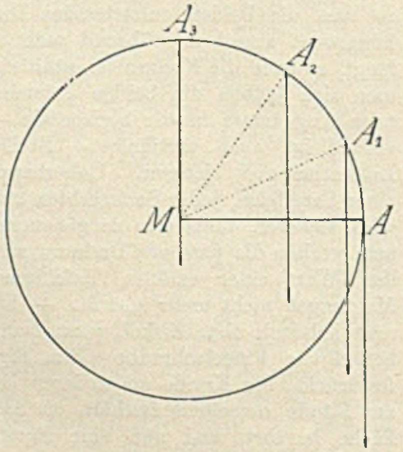


Fig. 14.

---

Zum Schluss mögen noch einige technische Angaben Platz finden. Meine Tafel hat einen Durchmesser von nahezu 1,20 m — es dürfte sich jedoch empfehlen, diese noch etwas grösser zu nehmen, etwa 1,30 m. Ihre Scheibe $S$ (Fig. 15, 16) wird hinten durch Holzleisten ($L$) gestützt und bewegt sich mit einer eisernen Lagerung um einen achsialen Dorn, der an einer (15 cm breiten) Trägerlatte $T$ befestigt ist. Es fand sich ein geeigneter Schlosser und Tischler, die alles zur Zufriedenheit nach meinen Angaben herstellten; besonders die Drehung funktioniert glatt und geräuschlos, doch wird jetzt gewiss manche technische Einzelheit noch besser hergestellt werden.*) Für den Gebrauch in der Klasse wurde die Latte $T$ mit sechs kräftigen Schrauben (in Fig. 16 angedeutet) an das Holzpaneel — nachdem ein der Lattenbreite entsprechendes Stück des vorspringenden Randes ausgesägt worden war — geschraubt. Die Tafel hatte also ihren Platz unmittelbar an der Wand, neben der alten rechteckigen Tafel (die eigentlich hätte entfernt werden können); sie könnte natürlich ebensogut einen freien Standort haben, wenn die Latte $T$ in ein gekreuztes Holzstativ (in Fig. 15 punktiert) eingelassen würde. Festgestellt — zum Zeichnen der Figuren — wurde die Scheibe durch eine kleine Flügelschraube $F$ (Fig. 15). — Ich benutzte die Tafel im mathematischen Unterricht der Quarta und Untertertia — im Anfang,

Fig. 15.

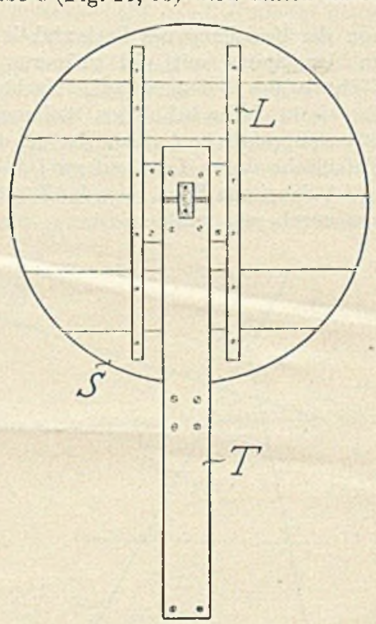


Fig. 16.

*) Die Tafel wird von der Firma F. Ernecke, Berlin-Tempelhof, geliefert.

che sie ihren festen Stand erhielt, auch in der Obertertia — und kann nur günstiges von ihrer Wirkung berichten; dass ich über sie nichts früher publizierte, lag an äusseren Umständen. Der Hauptwert der Tafel liegt meines Erachtens darin, dass bei ihrer Verwendung jene Beweglichkeit der Anschauung vorbereitet und z. T. schon entwickelt wird, die auszubilden eines der wichtigsten Ziele des ganzen mathematischen Unterrichts ist.

## Nochmals die negativen Flächen.

Drei weitere Meinungsäusserungen zu dieser Frage*).

### I.

Von Oskar Lesser in Frankfurt a. M.

Mein in XII, 1 (S. 10—14) zum Abdruck gebrachter Artikel über negative Flächen hat zu zwei weiteren, in Nr. 2 d. Unt.-Bl. enthaltenen Artikeln geführt, deren Verfasser, Herr Dr. Wieleitner und Herr Prof. Pietzker, sich mit mir zu der Ansicht bekennen, dass die Berücksichtigung negativer Flächen im Unterricht nicht zu umgehen sei. Das aber ist die Hauptsache. Denn bei der Abfassung meines Artikels kam es mir im wesentlichen nur darauf an, die Notwendigkeit der Berücksichtigung negativer Flächen durch ein Beispiel aus der Praxis zu illustrieren.

Während nun Herr Wieleitner auch mit der Behandlung der gestellten Aufgabe, wie insbesondere mit der Deutung der negativen Fläche nach Möbius einverstanden ist, lehnt es Herr Pietzker ab, das Vorzeichen einer Fläche durch den Umlaufssinn zu bestimmen und begründet seinen Standpunkt damit, dass einer solchen Veranschaulichung negativer Flächen nur eine symbolische Bedeutung beizumessen sei, und das, weil sie sich lediglich an eine gewisse äusserliche Uebereinstimmung halte und den inneren Zusammenhang nicht zur Geltung bringe. Mit einer solchen Auffassung der Dinge kann ich mich nicht einverstanden erklären; ich muss vielmehr nach wie vor bei meiner Darstellung, als richtig und — zulässig, beharren.

Die Bestimmung des Vorzeichens einer Fläche aus dem Umlaufssinn gründet sich auf die Definition des Flächeninhaltes als Produkt aus zwei Strecken und stellt in jedem Falle fest, ob die beiden Faktoren gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Der Umlaufssinn gibt, bei vorheriger Festlegung des positiven Drehsinnes einer Strecke, das Vorzeichen der Fläche direkt an.

Um sich Klarheit über die Sachlage zu verschaffen, genügt es, die Verhältnisse am Dreieck zu untersuchen. Denn wir können stets ein vorliegendes Polygon (dessen Umlaufssinn etwa durch einen der Seite $s$ beigesetzten Pfeil markiert sein mag) unter Beobachtung der hier in Frage kommenden Momente durch Ausstrecken von Ecken in ein Dreieck verwandeln so, dass der Träger der Polygonseite $s$ mit dem einer Dreiecksseite zusammenfällt. Dann ist aber der Sinn des Dreiecks genau derselbe wie der des gegebenen Polygons, wie auch die Vorzeichen beider Flächen gleich sind.

Es kommt danach unsere Untersuchung auf die Bestimmung des Vorzeichens an, das das Produkt aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks besitzt. Da wird es notwendig, den Begriff des positiven Drehsinns einzuführen. Es sei $MN_i$ eine um $M$ (in der Ebene) drehbare Strecke, die in der Grundlage $MN$, von $M$ nach $N$ durchlaufen, positiv bewertet werden möge. Erfolgt nun die Drehung stets nach links, also der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt (positiver Drehsinn), so erreicht nach einer Drehung von $1 . \frac{\pi}{2}$ die Strecke die senkrechte Lage $MN_1$, nach einer Drehung von $2 . \frac{\pi}{2}$ die $MN$ entgegengesetzte Lage $MN_2$, nach einer Drehung von $3 . \frac{\pi}{2}$ die zu $MN$ senkrechte Lage $MN_3$; die letztere hätte auch durch Rechtsdrehung (negativer Drehsinn) um $1 . \frac{\pi}{2}$ aus der Grundlage erhalten werden können. Nun kann man sofort die $\left(\text{um } \frac{\pi}{2}\right)$ linksgedrehte Strecke als positiv, die ihr entgegengesetzte, rechtsgedrehte als negativ annehmen. Die Willkür dieser Annahme verschwindet, wenn wir uns des Drehfaktors $i = \sqrt{-1}$ für $\frac{\pi}{2}$ *) bedienen, um die Vorzeichen der gedachten Strecken zu bestimmen. Es ist dann nämlich

$$MN_1 = i \cdot MN \quad \text{positiv}$$
$$MN_2 = i\,(i \cdot MN) = - MN \quad \text{negativ}$$
$$MN_3 = i\,(- MN) = - i \cdot MN \quad \text{negativ.}$$

Nach diesen Voraussetzungen, die, zwar unausgesprochen, auch meiner früheren Darstellung zugrunde liegen, sind wir ohne weiteres im Stand, aus einem Dreieck für die positive Richtung einer als Grundlinie gewählten Seite das Vorzeichen der zugehörigen Höhe zu bestimmen. Wir bezeichnen die Richtung der Grundlinie durch einen Pfeil und setzen einen nach der Spitze gerichteten Pfeil an die Höhe. Ist dann die Höhe durch Linksdrehung aus der Grundlinie entstanden, so ist sie, und damit der Inhalt der Figur, positiv; das ist aber immer der Fall, wenn die Fläche für den das Dreieck Umlaufenden zur Linken liegt. Ist aber die Höhe durch Rechtsdrehung entstanden, liegt also die Dreiecksfläche zur Rechten, so ist die Fläche negativ, weil (bei positiver Grundlinie) die Höhe negativ ist. Bei dieser Untersuchung dürfen wir jede beliebige Dreiecksseite als Grundlinie ansehen; die entsprechende Höhe zu zeichnen, ist überflüssig, da ihr Wert bereits aus der Lage der Fläche zur Seite bestimmt ist. Damit ist aber meine, durch den Druck hervorgehobene Behauptung über den Umlaufssinn bewiesen; es ist bewiesen, dass wir es im Umlaufssinn keineswegs mit einem Symbol, sondern mit einem wohlbegründeten, durchaus einwandfreien und untrüglichen Kriterium zu tun haben.

Ist nun der Einwand des Herrn Pietzker gefallen, dass die Bestimmung des Flächensinns aus dem Umlaufssinn unzulässig und unmathematisch sei, so fallen damit auch alle, gegen die Deutung der Resultate und die Auffassung der Flächen erhobenen Bedenken. Verschiebt oder dreht man eine Fläche in der Ebene, so bleibt ihr Vorzeichen ungeändert; dagegen „schlägt es um", sobald man die Fläche „umklappt". Umzuklappen, ist gestattet — man denke nur an die Beweise der Dreieckskongruenzsätze —; sollte es unzulässig sein, von „umgeschlagenen" Flächen zu reden und wegen

*) S. Unt.-Bl. XII, S. 10—14, 33—37.

*) Man denke an die Gauss'sche Darstellung der komplexen Zahlen, an Grassmanns „Ergänzung" in der Ebene.

des wechselnden Zeichens Vorder- und Rückseite zu unterscheiden? Freilich setzt das voraus, dass die Schüler über die Verhältnisse orientiert sind und wissen, welche Bewandtnis es mit dem Umlaufssinn hat.

Auf die Einzelheiten in den Ausführungen des Herrn Pietzker einzugehen, wird überflüssig, da sich die Ausstellungen nunmehr von selbst erledigen. Gerne erkenne ich an, dass man in der Deutung negativer Flächen in dem einzelnen Falle gut den Vorschlägen des Herrn Pietzker folgen kann, muss aber sogleich hinzufügen, dass diese Vorschläge, genau betrachtet, gar nichts neues enthalten: ihre Flächendeutung stützt sich auf die Bestimmung des Vorzeichens eines Streckenprodukts gerade so, wie diejenige aus dem Flächensinn es tut.

Ausserordentlich wertvoll erscheint es mir, Aufgaben rein geometrischer Natur in möglichst allgemeiner Behandlung lösen zu lassen und zur Untersuchung der nicht erwarteten Resultate anzuhalten. Ein ängstliches Anklammern an den Text der Aufgabe während der Lösung macht den Schüler zaghaft und jeden Ausblick unmöglich; freie Behandlung erzieht zur Selbständigkeit. Hier setzt die erste eigene, wissenschaftliche Betätigung des Schülers ein; da heisst es denken, produzieren, Spuren nachgehen, die einem zwar noch unbekannten, aber gerade deswegen lockenden Ziele zuführen.

Die Schlussbemerkungen des Artikels des Herrn Pietzker könnten den Anschein erwecken, als habe ich eine unzutreffende Interpretation des zitierten Satzes aus den Meraner Vorschlägen gegeben. Ich habe den betreffenden Satz verbotenus wiedergegeben und hinzugefügt, dass mit der Pflege des funktionalen Denkens auf möglichst früher Stufe begonnen werden solle, wie der ausgearbeitete Meraner Lehrplan, der ja heute jedermann zur Verfügung steht, und seine Erläuterungen das wünschen. Wenn ich nun bezüglich der Trapezaufgabe (gerade bei ihrer Heranziehung habe ich jenen Satz zitiert) sagte, dass „sie bereits in Tertia behandelt werden kann", „aber doch erst auf späterer Stufe behandelt werden möchte", so habe ich mich, nach dem Aufschluss, den uns Herr Pietzker in dankenswerter Weise über Sinn und Tendenz jenes Satzes gibt, mit den Absichten der Unterrichtskommission durchaus nicht in Widerspruch gesetzt; meine Worte beweisen vielmehr, dass ich jenen Satz genau in dem Sinn ausgelegt habe, in dem ihn sein Urheber verstanden wissen will. Das hervorzuheben, bin ich genötigt, um allen Missverständnissen, nicht allein bezüglich meines Artikels über negative Flächen, sondern auch meiner Infinitesimalrechnung, vorzubeugen. Die Schlussworte des Herrn Prof. Pietzker bestätigen nur, dass ich mich mit den Absichten der Reform in voller Uebereinstimmung befinde.

II.

Von P. Kirchberger in Fulda.

Wenngleich ich den Ausführungen des Herrn Lesser in Nr. 1 dieser Zeitschrift in der Hauptsache durchaus beistimme, so hat er doch meiner Meinung nach nur nachgewiesen, dass die Einführung negativer Flächenwerte möglich und durchaus wünschenswert ist, aber er scheint mir entschieden zu weit zu gehen, wenn er meint, bei Ablehnung negativer Flächenwerte würde die Theorie der Maxima und Minima unzuverlässig und lieferte bald falsche, bald richtige Resultate. Wenn der Schüler des Herrn Lesser in dem zuerst angeführten Beispiel erwartet hat, das zu variierende Rechteck werde zweimal an den Endpunkten des Intervalles für $h = 0$ und $h = r$ ein Minimum annehmen, so war dies meiner Meinung nach geradezu ein Fehler; denn unter einem Minimum wird doch definitionsmässig nicht schlechthin der kleinste Wert verstanden, sondern ein Wert, der auf beiden Seiten von grösseren Nachbarwerten umgeben ist. Es ist klar, dass nach dieser Definition ein Minimum an den Endpunkten des Intervalls nicht statthat.

Nun wurde freilich ein Minimum geliefert, das nicht erwartet wurde, und dem eine anschauliche Bedeutung zunächst nicht zukommt. Aber auch dies ist nach meiner Meinung kein Widerspruch gegen die Theorie, denn der Vorgang bei der Behandlung dieser Aufgabe ist doch der folgende: das Problem war zunächst nur anschaulich geometrisch definiert. Die in der analytischen Behandlung auftretenden Grössen umfassen nun nicht nur die ursprünglich gemeinten Anschauungsgrössen, sondern auch noch andere, ursprünglich weder gemeinte, noch überhaupt definierte (wegen der negativen Werte von $x$). Es ist nun in keiner Weise ein Widerspruch, wenn ich darauf verzichte, nun auch diese durch die analytische Behandlung gegen die Absicht des ursprünglichen anschaulichen Problems hineingekommenen negativen Werte von $x$ zu veranschaulichen. So wird man auch bei der Behandlung der Kegelschnitte auf eine anschauliche Deutung der komplexen Grössen verzichten. Der Widerspruch entstand hier offenbar dadurch, dass der Schüler negative Werte für die Grundlinie $x$ zuliess, die Produktformel für den Inhalt des Rechtecks weiter anwandte, negative Werte für diesen Inhalt aber trotzdem ausschliessen wollte. Das ist natürlich ein unhaltbarer Standpunkt. Will man negative Flächenwerte ausschliessen, so muss man sich bei der geometrischen Interpretation der analytischen Resultate auf Betrachtung des Intervalls $0 < x < r$ beschränken, wie es auch mit dem nächsten anschaulichen Sinn des Problems im Einklang steht.

Man kann nun den Wunsch haben, die Analogie zwischen der analytischen Behandlung des Problems und der geometrischen Interpretation auch auf den Fall negativer Werte von $x$ auszudehnen. Dieser Wunsch, so völlig gerechtfertigt er vom philosophischen, didaktischen oder sonst welchem Standpunkt aus sein mag, ist, mathematisch betrachtet, durchaus willkürlich; lässt man ihn jedoch einmal zu, so wird die Einführung negativer Flächen allerdings notwendig. Jeder Diskussion über das Vorzeichen eines Flächenwertes muss nun, meine ich, eine allgemeine Definition des Flächenwertes selbst vorangehen. Man wird dann zunächst einen Standpunkt wählen müssen, von dem aus die neue Definition gegeben werden kann. Es lässt sich nun zeigen, dass alle nachträglichen Erweiterungen mathematischer Begriffe so geschehen, dass ein bestimmtes, früher gültiges Gesetz nach Einführung der erweiterten Begriffe seine Gültigkeit behält. Bei der Ausdehnung der Multiplikation auf negative Grössen und der Definition $(-1) \cdot (-1) = +1$ ist es das distributive Gesetz, bei der Einführung negativer und gebrochener Exponenten sind es gewisse Potenzregeln, bei der Indentifikation des Vorzeichens mit der Richtung in der Geometrie ist es die Gleichung $AC + BC = AB$, die in jedem Falle aufrecht erhalten werden sollen. Welches ist nun das Postulat, das bei Erweiterung des Flächenbegriffes aufgestellt wird? Der Herr Herausgeber scheint auf dem Standpunkte zu stehen, dass die

Produktformel für den Inhalt des Dreieckes, die zunächst nur für absolute Streckengrössen abgeleitet ist, auch auf relative Streckengrössen Anwendung finden soll; das Vorzeichen der Streckengrössen selbst aber soll durch die Richtung definiert werden.

Ich meinesteils möchte nun aber ein anderes Postulat in den Vordergrund schieben, nämlich dasjenige der Erhaltung der additiven Eigenschaft: Es soll stets Inhalt $ABCD =$ Inhalt $ABC +$ Inhalt $ACD$ sein. Stellt man nun diese Forderung auch für den Fall, dass $AC$ nicht im Inneren von $ABCD$ verläuft, so ist ihre Erfüllung nur dann möglich, wenn das Vorzeichen des Flächeninhaltes sich mit dem Umlaufssinn umkehrt. Rückt nämlich der Punkt $D$ mehr und mehr auf den Punkt $B$ zu, so nähert sich der Flächeninhalt von $ABCD$ der Null und wird zu Null, wenn $B$ mit $D$ identisch ist. Verlangt man das erwähnte additive Gesetz, so heisst dies: $ABC = -ACB$. Ebenso setzt für beliebige Polygone die Erhaltung des additiven Gesetzes die Umkehrung des Vorzeichens mit dem Umlaufssinn voraus. Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass sich auch wirklich eine einwandfreie und allgemeine Definition des Flächeninhaltes beliebiger Polygone geben lässt, bei der das additive Gesetz erhalten bleibt und demgemäss das Vorzeichen sich mit dem Umlaufssinn ändert.

$$\text{Es sei } 2D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Ist nun $P_1 P_2 \cdots P_n$ ein beliebiges Polygon, so lässt sich die Unabhängigkeit der Summe

$$P_1 P_2 P + P_2 P_3 P + \cdots P_{n-1} P_n P + P_n P_1 P$$

von der Lage des Punktes $P$ leicht nachweisen. Definiert man diese Summe als den Inhalt des Polygons, so hat man, wie man sofort sieht, eine Definition, die die Allgemeingültigkeit des additiven Gesetzes gewährleistet und Umkehrung des Vorzeichens mit dem Umlaufssinn zur Folge hat.

Soll man nun das Postulat der Erhaltung der Produktformel oder das des additiven Gesetzes in den Vordergrund stellen? Das ist Geschmackssache; doch ist zu bedenken:

Erstens: das additive Gesetz ist nicht wie die Produktformel auf eine spezielle Art von Polygonen beschränkt. Es ist selbst bei sehr einfachen Aufgaben, deren Behandlung eine Produktformel nicht voraussetzt, unumgänglich, z. B. bei der Verwandlung eines Vierecks in ein Dreieck (bei Ziehung einer ausserhalb fallenden Diagonale muss das eine Dreieck negativ genommen werden).

Zweitens: Die Aufrechterhaltung der Produktformel und die Berufung auf das anderweitig definierte Vorzeichen der Faktoren hat den Nachteil, dass sich eine allgemeine Definition des Vorzeichens der Richtung in der Ebene nicht geben lässt. Man kann zwei Achsenrichtungen als positiv definieren, aber welche der sonst möglichen Richtungen ist positiv, und wo fangen die negativen an? Man kann höchstens noch festsetzen, dass auf derselben Linie der eine Fortschreitungssinn das entgegengesetzte Vorzeichen haben soll wie der andere; welches aber das positive sein soll, muss bei jedem Problem aufs Neue festgesetzt werden. Man kann daher nur solche Dreiecke miteinander vergleichen, deren Grundlinien und Höhen parallel sind, während die Definition versagt, wenn festgestellt werden soll, ob zwei Dreiecke mit nichtparallelen Grundlinien und Höhen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Beide Definitionen sind übrigens in diesem engeren Geltungsbereich selbst vollständig identisch, so dass eigentlich jeder Streit von diesem Gesichtspunkt aus als unnötig erscheint. Man überzeugt sich leicht, dass sich bei einem Dreieck mit festliegender Grundlinie der Umlaufssinn nur ändern kann, wenn entweder die Durchschreitungsrichtung der Grundlinie oder die Richtung, in der die Höhe auf die Grundlinie gefällt ist, sich umkehrt, und dass andererseits die Umkehrung einer dieser Strecken die Umkehrung des Umlaufssinns zur Folge hat.

Die von dem Herrn Herausgeber gegen die Bedeutung des Umlaufssinns erhobenen Einwände erscheinen mir daher alle nicht als stichhaltig. So vermisst er (Seite 34), wohl mit Unrecht, den stetigen Uebergang vom Positiven zum Negativen durch die Null. Degeneriert das Dreieck zu einer geraden Linie, so liegt der umlaufene Inhalt weder rechts noch links, wodurch angezeigt wird, dass von einem Vorzeichen in diesem Fall nicht gesprochen werden kann, die Fläche also gleich Null ist. Bei einem Durchdringen der Zeichenebene darf man ebenso wenig Stetigkeit verlangen, als wenn man etwa plötzlich die positive Achsenrichtung negativ, die negative positiv nennen wollte. Wenn der Umlaufssinn des Kreises (S. 36, 2. Spalte) ohne Einfluss auf das Vorzeichen bleibt, nun, so bleibt es ja auch ohne Einfluss auf das Vorzeichen, wenn ich mich auf der Abscissenachse von links nach rechts oder von rechts nach links bewege. Jedem Punkt der Kreisperipherie entspricht ein Rechteck, das in einem bestimmten Sinn umlaufen wird; in welchem Sinn die Peripherie umkreist wird, ist freilich gleichgültig.

Uebrigens ist auch für die unbefangene Anschauung die Betonung des Umlaufssinnes nichts so Befremdendes, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte. Das Symbol $A\ B\ C$ bedeutet zunächst nur, dass durch einen geschlossenen Linienzug die ganze Ebene in zwei Teile, einen endlichen und einen unendlichen geteilt werden soll. Ich habe an sich kein Recht, den endlichen Teil, bloss weil er endlich ist, zu bevorzugen und ihn für den durch den Kurvenzug $A\ B\ C$ gemeinten zu erklären. Es kann ebenso gut die ganze übrige Ebene gemeint sein, so dass das Dreieck jetzt nicht als Flächeninhalt, sondern als Loch in der Ebene erscheint. Es bedarf also einer Verabredung, ob das links oder rechts liegende Stück gemeint ist. Erscheint der Flächeninhalt als Loch, so ist er eben negativ zu nehmen.

Was ist denn das Wesentliche des Vorzeichenbegriffes überhaupt? Mir scheint, Vorzeichen können da und nur da angewandt werden, wo durch Aufeinanderfolge zweier Grössen der Grössenbegriff aufgehoben werden kann. So ist es beim Fortschreiten auf einer Linie in entgegengesetzter Richtung, so auch bei allen physikalischen Anwendungen. Kräfte von entgegengesetztem Vorzeichen heben sich auf, positive und negative Elektrizitätsmengen erzeugen unelektrischen Zustand (absolut gleiche Mengen natürlich vorausgesetzt). Wie kann nun die Grösse des Flächeninhaltes durch eine entgegengesetzte Operation wieder aufgehoben werden? Wird der Flächeninhalt durch Ausschneiden eines Stückes Papier aus einem Blatt durch Ziehen eines zum Anfangspunkt wieder zurückkehrenden Schnittes erzeugt, so wird man, um nach begonnener Operation diese nach Möglichkeit wieder aufzuheben, möglichst dicht an dem bereits gezogenen Schnitt zum Anfangspunkt wieder zurückkehren. Geht man zur

Grenze über, so würde dies besagen, dass durch zweimaliges Durchziehen desselben Schnittes in entgegengesetztem Sinne kein Flächeninhalt ausgeschnitten wird, beide Operationen sich also aufheben.

### III.

Von F. Pietzker.

Es war nicht meine Absicht, nach der erneuten Erörterung der Frage durch Herrn Lesser nochmals zu der Frage der negativen Flächen das Wort zu ergreifen, da m. E. die bisherigen Ausführungen jedem Leser genügenden Anhalt boten, um sich nach der einen oder anderen Seite hin zu entscheiden.

Der inzwischen eingegangene (vorstehend unter Nr. II abgedruckte) Artikel des Herrn Kirchberger nötigt mich indessen, meinen bisherigen Darlegungen eine kurze Ergänzung folgen zu lassen, in der ich auch noch auf die neuen Ausführungen des Herrn Lesser etwas eingehen werde.

Beide Herren nehmen irrtümlicher Weise an, dass ich die Zulässigkeit der Einführung negativer Flächen aus der Bestimmung des Flächeninhalts als Produkt aus Grundlinie und Höhe herleite. Ich hebe aber in meinen Ausführungen deutlich hervor, dass ich dies Verfahren nur für gewisse Einzelaufgaben und zwar auf tieferen Unterrichtsstufen benutze, wo mir diese an solchen Aufgaben betätigte Behandlung als die dem Klassenstandpunkt angemessene erscheint, dass aber meine prinzipielle Auffassung einen wesentlich allgemeineren Charakter trägt (s. S. 37, Sp. 1, Z. 18 v. u. flgg.).

Im übrigen scheinen mir die Ausführungen beider Herren nur das eine zu beweisen, dass bei zwei im Zeichengegensatz stehenden Flächen auch der Umlaufssinn gegensätzlich ist. Das habe ich nirgends bestritten; was ich bestreite, ist der Umstand, dass der Gegensatz des Umlaufssinns die Quelle oder der wesentliche Kern des Zeichengegensatzes bei den Flächen darstellt.

Herr Kirchberger sagt (s. vorstehend S. 59, Sp. 1, Z. 12 bis 14 v. o.), dass die Erfüllung einer gewissen von ihm aufgestellten Forderung „nur dann möglich" sei, „wenn das Vorzeichen des Flächeninhalts sich mit dem Umlaufssinn umkehrt", aber in dieser Schlussfolgerung sind gerade die gesperrt gedruckten Worte entbehrlich, die Erfüllung der Forderung verlangt nur, dass bei der angegebenen Lageveränderung eines bestimmten Punktes das Zeichen der in Rede stehenden Fläche sich umkehrt; wie diese Umkehrung zu bewirken ist, das bleibt zunächst völlig dahingestellt. Durch die Einfügung der gesperrt gedruckten Worte in die von ihnen an sich ganz unabhängige Schlussfolgerung wird einem Moment, das ich eben nur für ein accidentielles ansehe, der Schein des Wesentlichen verliehen.

Dieses stillschweigende Hineintragen eines an sich nicht zur Sache gehörenden Moments finde ich auch in den Schlussausführungen des Herrn Kirchberger. Wenn er sagt, es sei willkürlich, ob man durch den Kurvenzug *ABC* das von ihm eingeschlossene endliche oder das ausserhalb liegende unendliche Flächengebiet bezeichnen wolle, so hat er m. E. Recht, aber er beweist damit eben nur, dass es eigentlich ganz unzulässig ist, mit demselben Symbol *ABC* sowohl den Linienzug, als das von diesem umrandete Flächenstück zu bezeichnen. In Wahrheit stellt *ABC* eben nur den Linienzug vor und durch die Verwendung dieses selben Symbols für das Flächenstück wird die Verführung begünstigt, gewisse für das Symbol als Linienbezeichnung berechtigte Folgerungen auf die mit demselben Symbol bezeichnete Fläche zu übertragen, wo sie m. E. nicht mehr zulässig sind.

Dass durch Ziehen des geschlossenen Linienzugs *ABC* von der ganzen unendlichen Ebene ein Teil ausgeschnitten und durch Ziehen desselben Linienzugs in entgegengesetztem Sinne wieder eingefügt werde, kann ich auch nicht zugeben. Diese Schlussfolgerung legt in die vorgenommenen Operationen erst stillschweigend hinein, was nachher daraus erschlossen werden soll.

Meine Argumentation, an deren Kern beide Herren, wie mir scheint, vorbeigehen, ist, wie ich hier wiederholen möchte, folgende (vergl. S. 36, Sp. 1, Z. 24 bis 31 v. o.): Soll eine zweifach ausgedehnte Grösse des Zeichengegensatzes fähig sein, so muss sie (unter Festhaltung der Unveränderlichkeit in der zweiten Ausdehnung) als Ergebnis der Veränderung nach einer einzigen von ihren beiden Ausdehnungen aufgefasst werden. In welcher Weise das geschieht, hängt von dem der Betrachtung zugrunde liegenden Zusammenhang ab, der in dieser Auffassung zutage tretende „lineare Prozess" kann in einer Verschiebung oder in einer Drehung bestehen (s. S. 35, Sp. 1, Z. 3 bis 1 v. u.), die Verschiebung längs einer Dreieckshöhe ist nur ein Sonderbeispiel.*) Wenn Herr Lesser (s. vorstehend S. 58, Sp. 2, Z. 20/19 v. u.) es als einen Vorzug der von mir bekämpften Voranstellung des Umlaufssinns erklärt, dass es dabei gleichgültig sei, welche Seite des etwa betrachteten Dreiecks als Grundlinie anzusehen sei, so ist dies in meinen Augen geradezu ein Mangel, insofern dadurch die Quelle, aus der die ganze Auffassung ihre Berechtigung schöpft, verdunkelt wird zugunsten eines mir lediglich als Folgeerscheinung geltenden Momentes.

---

## Eine vereinfachte Lichtstufen-Bestimmung.

Von Victor Dörr (Metz-Montigny).

Die gewöhnliche Lichtstufen-Bestimmung mittels des Grundrisses der Normalkugel ist bekanntlich sehr umständlich, die Vereinfachung mittels der Rodenbergschen Skala, welche in diesen Blättern (1901, Nr. 5) von Herrn Prof. August Schmidt (Wiesbaden) auseinandergesetzt worden ist, fordert die Einführung in die nicht ganz leichte Theorie und die Benutzung einer Vorlage. Ich möchte deshalb eine Vereinfachung der gewöhnlichen Methode bekannt geben, zu der einer meiner Schüler, Herr Gustav Fischer von Metz, vor einigen Jahren während des Unterrichtes die Anregung gab. Ich lege bei dem Unterricht in der darstellenden Geometrie viel Gewicht auf die Methode der Hilfs-Profil-Ebene, einer vertikalen Seitenebene, die zu derjenigen Richtung parallel gewählt wird, welche der betreffenden Aufgabe entspricht, in unserem Falle also

*) Hier möchte ich einen Irrtum berichtigen, der mir gegenüber einer Bemerkung des Herrn Wieleitner untergelaufen ist. Dieser hatte (S. 33, Spalte 1, Anmerkung) gesagt, der entgegengesetzte Sinn bei Dreiecksflächen rühre von der Aenderung des Sinnes der Grundlinie her, während die Höhe unverändert bliebe. Diese — freilich in ihrer allgemeinen Fassung wohl verschiedener Deutung fähige — Angabe hatte ich auf das nachher von Herrn W. erwähnte Dreieck *PBC* bezogen, sie hatte aber — wie er mir brieflich mitteilt — einen anderen Sinn. Gemeint war die gegenseitige Beziehung zwischen zwei Dreiecken, die die Spitze gemeinsam haben, während ihre Grundlinien von demselben Punkte aus nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Mit der Begründung des entgegengesetzten Zeichens für die Flächenwerte solcher Dreiecke aus der gegensätzlichen Richtung ihrer Grundlinien kann ich mich gerade von meiner Auffassung aus nur einverstanden erklären.

parallel zu den Sonnenstrahlen. Auf einer solchen Ebene bilden sich die Isophotenkreise als gerade Linien ab, man spart also die mühsame Zeichnung der ellipsenförmigen Bilder im Grundriss.

Ich werde die Methode zunächst am Kegel vorführen und dann zur Lösung der Aufgabe benutzen: Die Lichtstufe einer beliebigen Ebene, die durch ihre Spuren gegeben ist, zu bestimmen. Um die Figur nicht zu überladen, nehme ich statt der üblichen zehn Lichtstufen auf jeder Halbkugel nur fünf, eine Anzahl, die meines Erachtens auch den Bedürfnissen der Schule entspricht.

Im Anschluss hieran hat Herr Prof. A. Schmidt, dem ich die Methode brieflich mitgeteilt habe, bemerkt, dass die Aufgabe, die Lichtstufe einer beliebigen Kegelstelle zu finden, ganz ohne Aufriss, lediglich mittels der Hilfs-Profil-Ebene, leicht ausführbar ist. Ist $A$ der betreffende Kegelpunkt (in der Grundriss-Ebene), so projiziert man ihn auf die Profil-Ebene, verbindet das Bild mit $O_3$ und lotet endlich den Schnittpunkt mit dem Berührungskreis auf den Lichtstufendurchmesser. Die Seitenlinie $AO$ hat hiernach die Lichtstufe 4,6. — Um zu zeigen, dass das neue Verfahren allgemein anwendbar ist, will ich jetzt

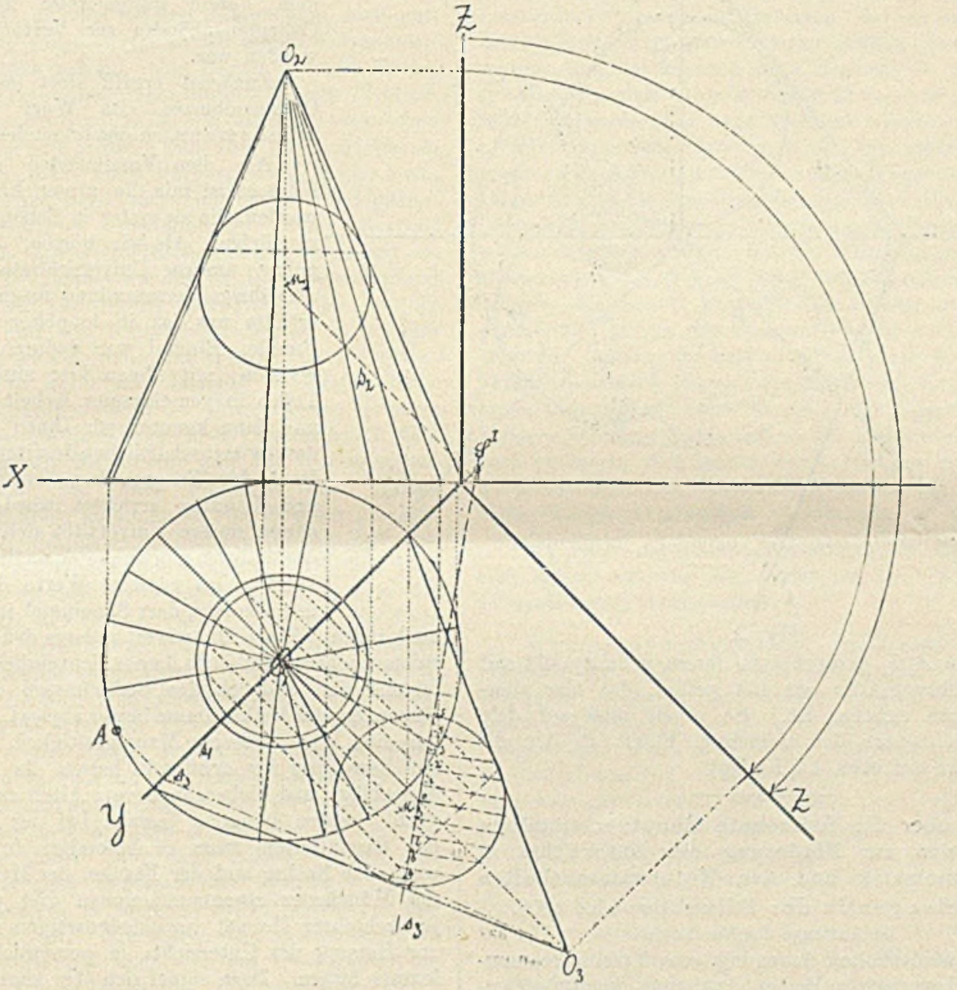



Fig. 1.

Die Hilfs-Profil-Ebene schneidet die Grundebene in der (Hilfs-) $Y$-Achse, die Aufrissebene in der $Z$-Achse; die Spitze des Kegels ist auch im Seitenriss sichtbar, $O_3$, ebenso der Mittelpunkt der an beliebiger Stelle eingeschriebenen Berührungskugel, $M_3$. Durch diesen Punkt $M_3$ geht der Seitenriss $s_3$ eines Lichtstrahls, der im Punkt $S'$ die Grundebene durchdringt. Der dazu gehörige Kugeldurchmesser ist in zehn gleiche Teile geteilt; die in den Teilpunkten errichteten Sehnen sind die Seitenrisse der Lichtstufenkreise, und ihre Schnittpunkte mit dem Berührungskreis zwischen Kugel und Kegel liefern durch Herabloten auf die $Y$-Achse die Grundrisspunkte, deren Verbindungslinien mit $O_1$ die gesuchten Lichtstufen des Kegelmantels im Grundriss darstellen.

für eine beliebige Ebene, die durch ihre Spuren gegeben sein mag, die Lichtstufe bestimmen.

In der Figur 2 sind $e'$ und $e''$ die Spuren der gegebenen Ebene, $v'$ und $v''$ diejenigen einer vertikalen Ebene, die zur Grundspur $e'$ senkrecht steht. Die Schnittlinie $k$ der beiden Ebenen betrachte man als Seitenlinie eines Kegels und bestimme deren Lichtstufe nach dem soeben beschriebenen Verfahren. Dabei ist der Aufriss des Kegels und seiner Berührungskugel bei der praktischen Ausführung überflüssig, ebenso wie ein Teil der im Seitenriss gezogenen Linien, die hier nur zur Erhöhung der Anschaulichkeit gegeben sind. Notwendig ist der Seitenriss des Kegels mit seiner Spitze $O_3$, seinem Berührungskreise $b_3$ und dem Hauptstrahl $s_3$ durch den Mittelpunkt, auf dessen

Durchmesserstrecke die fünf gleichen Teile (auf einer Hälfte) gebraucht und auf den Berührungskreis projiziert werden. Nun geht die Sache genau wie vorhin: Der Punkt $A$, wo $v'$ die gegebene Spur $e'$ schneidet, wird auf die $Y$-Achse projiziert ($A_3$), von da wird die

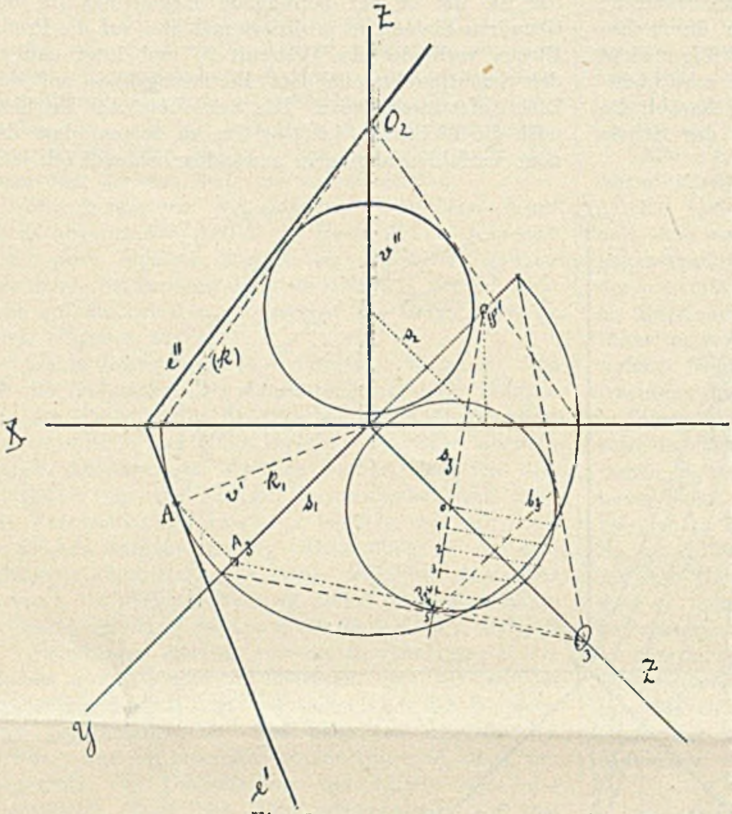


Fig. 2.

Seitenlinie $A_3 O_3$ gezogen, von ihrem Schnittpunkt mit dem Berührungskreis das Lot gefällt, das hier allerdings kaum sichtbar ist. So erhält man auf dem Hauptdurchmesser den gesuchten Punkt $P$, der die Lichtstärke auf etwa 4,7 festlegt.

---

## Bericht über die fünfzehnte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Erlangen in der Pfingstwoche 1906.

Im Auftrage des Vorstandes.

Der wiederholten Anregung, eine Vereinsversammlung auf bayerischem Boden abzuhalten, konnte erfreulicherweise endlich in diesem Jahre Folge gegeben werden, dank den Bemühungen der Sektion „Bayern" des Vereins und namentlich ihres Vorsitzenden, Herrn Prof. Dr. Hess in Ansbach, sowie der lebhaften Förderung, die der Gedanke bei den Professoren und Dozenten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer an der Universität Erlangen fand. Hier trat unter dem Vorsitz des Herrn Prof. Dr. E. Wiedemann ein Ortsausschuss zusammen, dem zahlreiche Vertreter der genannten Fächer an der Universität wie an den Gelehrtenschulen der Stadt angehörten; leider entsprach der Besuch der Versammlung nicht ganz den gehegten Erwartungen, wozu wohl auch der Umstand mitwirkte, dass als Ort des diesjährigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Ferienkursus für die Lehrer an den höheren Mittelschulen des Königreichs Bayern Erlangen bestimmt war, der Versammlung erwuchs dadurch eine gewisse Konkurrenz.

Immerhin fand sich eine stattliche Zahl von Versammlungsteilnehmern aus Nord und Süd zusammen, deren erste gegenseitige Begrüssung am Abend des Pfingstmontags im Hotel „Walfisch" stattfand. Wie in Halle und Jena, erschienen einige der Versammlungsteilnehmer in Begleitung ihrer Damen.

Der offizielle Beginn der Versammlung erfolgte am Dienstag Morgen 9 Uhr in der ersten allgemeinen Sitzung, für die dem Verein gütigerweise die Aula des Collegiengebäudes zur Verfügung gestellt worden war.

Zunächst ergriff dort im Namen des Ortsausschusses das Wort Herr Prof. Wiedemann zu der folgenden Ansprache:

Als dem Vorsitzenden des Ortsausschusses ist mir die grosse Ehre zuteil geworden, Sie als erster in Erlangen begrüssen zu dürfen. Als wir hörten, dass Sie endgültig unsere Universitätsstadt für Ihre diesjährige Versammlung ausgewählt hatten, erfüllte uns das in doppelter Hinsicht mit Freude. Einmal war dadurch Gelegenheit geboten, mit Ihnen hier eine Reihe von Tagen in gemeinsamer Arbeit zu verleben und dann konnten wir Ihnen unsere neuen naturwissenschaftlichen Institute zeigen, die Dank dem Entgegenkommen von Regierung und Landtag errichtet wurden und mit denen unsere Universität sich vollkommen den anderen Universitäten an die Seite stellen kann. Von grossem Werte dürfte es für uns alle sein, dass Sie einmal in Süddeutschland tagen. Einen Hauptwert unseres deutschen Unterrichtswesens sehe ich darin, dass es nicht einheitlich gestaltet ist und sich dadurch den Bedürfnissen der einzelnen Gegenden und Volksstämme besser anpasst. Fast möchte ich eine noch grössere Mannigfaltigkeit und Freiheit der Bewegung für erwünscht halten, da dann leichter Vorschläge und Uebergänge vom Alten zum Neuen erprobt werden können. Gerade bei der Vielseitigkeit der Organisation muss es besonders fruchtbar sein, wenn der Sachse und der Franke, der Hamburger und der Münchener zusammenkommen und dadurch ihre je nach ihrer Heimat verschiedenartigen Bestrebungen zur Hebung des Unterrichts in persönlichem Verkehr kennen lernen. Dazu eignet sich aber kaum eine andere Stadt so sehr wie unser Erlangen, das nach Lage und Geschichte dem Süden wie dem Norden angehört.

Wir Erlanger wünschen von Herzen, dass Sie hier Alle das finden, was Sie suchen und dass Sie, wenn Sie wieder an Ihre Berufsarbeit gehen, gern der hier verlebten Tage gedenken.

Es folgte als Vertreter des Königlich Bayerischen Staatsministeriums des Inneren für Kirchen- und Schul-Angelegenheiten, wie zugleich der Königlichen Kreisregierung von Mittelfranken Herr Regierungsrat Kittel aus Ansbach, der dem lebhaften Interesse der Königlich bayerischen Staatsbehörden für die Vereinsbestrebungen einen warmen Ausdruck gab. Er erinnerte an die Gründung der Universität zu der Zeit, als die Stadt Erlangen unter dem roten Adler stand, wie damals gut markgräflich, so sei sie nun seit hundert Jahren gut bayerisch, und zu allen Zeiten gut deutsch; wie sie sich unter dem segensreichen Szepter des Hauses Wittelsbach zu immer grösserer Blüte entfaltet habe, so empfinde sie zugleich die Früchte der Zugehörigkeit zu dem mächtigen Deutschen Reiche, es sei ein sehr glücklicher Gedanke, dass die Fachgenossen aus Süd und Nord an dieser Stelle zusammenkommen wollten, die durch ihre Geschichte, wie als Sitz einer altehrwürdigen Pflanzstätte der Wissenschaft gerade hierfür der geeignete Ort sei. Wie hoch die königliche Staatsregierung die Bedeutung der Wissenschaften schätze, deren Pflege der Verein sich zur Aufgabe gemacht habe, werde den Versammlungsteilnehmern die stattliche Zahl der in den letzten Jahrzehnten hier entstandenen oder vergrösserten einschlägigen Universitäts-Institute deutlich zeigen. Von Herzen wünsche er der Versammlung einen glücklichen und erfolgreichen Verlauf.

Im Namen der Stadt Erlangen, aus deren städtischen Körperschaften eine grössere Zahl von Herren erschienen waren, sprach dann Herr Bürgermeister Fränger, dessen Ausführungen den nachstehenden Wortlaut hatten:

Hochansehnliche Versammlung! Meine Herren! Im Namen der beiden städtischen Kollegien heisse ich Sie, geehrte Teilnehmer an der 15. Jahresversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften in unserer Stadt herzlich willkommen. Ich spreche Ihnen zugleich wärmsten Dank dafür aus, dass Sie in diesem Jahre unsere Musenstadt zum Sitze Ihrer Tagung erkoren haben und dass die Einladung Ihrer Vorstandschaft zum Erlanger Kongress freundliche und für uns so ehrenvolle Aufnahme bei Ihnen gefunden hat. Meine Herren! Die Stadt Erlangen ist den Studien und den Wissenschaften gewidmet, so heisst es in dem von dem kaiserlichen Präfekten Villain unterm 28. Oktober 1806 ausgefertigten Dekret, in welchem Erlangen dem besondern Schutz der Offiziere und Offizianten der französischen und verbündeten Armee empfohlen worden ist. Diese ehrende Qualifikation, welche unsere Stadt infolge der hochherzigen Gründung der Universität durch Markgraf Friedrich von Brandenburg-Bayreuth noch in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts zuteil und welche auch während der französischen Zwischenherrschaft in höchst anerkennenswerter Weise respektiert worden ist, sie besteht nach Ablauf der seitdem verflossenen 100 Jahre dank dem milden, weisen und bildungsfreundlichen Regiment der erlauchten Träger der Krone Bayerns in unverminderter Weise bis zum heutigen Tage fort. Wie kaum eine andere Stadt im Reiche trägt Erlangen nach Art und Wesen den Charakter einer Universitätsstadt. Hellleuchtende Sterne der Wissenschaft haben am hiesigen Universitätshimmel geglänzt und zahlreiche bedeutende Männer, die an der hiesigen Hochschule eine frucht- und segensbringende Wirksamkeit entfalteten, haben den Ruhm der Hochschule als hervorragende Pflanzstätte der Wissenschaft weithin verbreitet. Was speziell das Gebiet der Mathematik und Naturwissenschaften betrifft, so darf daran erinnert werden, dass an hiesiger Universität Männer wie Schreber, Schubert, Karl v. Raumer, Koch, Siebold, Kohlrausch, Hans und Immanuel Friedrich Pfaff, v. Gorup-Besanez, Staudt und andere gewirkt haben, dass Justus Liebig, der nachmals bahnbrechende Forscher und Reformator auf dem Gebiete der Chemie, Physiologie und Landwirtschaft, mehrere Semester an ihr studiert hat und dass heute mehr als je Mathematik und Naturwissenschaft an unserer Hochschule durch ausgezeichnete Lehrkräfte und wissenschaftliche Zelebritäten verständnisvolle Pflege und Förderung finden. Wenn ich darauf hinweise, dass unsere Stadt sich rühmen darf, den Physiker Georg Schweigger, den Erfinder des elektromagnetischen Multiplikators, einen Georg Simon Ohm, den Entdecker der Gesetze des elektrischen Stroms, dessen geistesverwandten Bruder den Mathematiker Martin Ohm, den bekannten Botaniker und Brasilienforscher Karl Friedrich Philipp v. Martius, den Agrikulturchemiker Fleischmann zu ihren Söhnen zu rechnen, wenn ich ferner darauf hinweise, dass unsere Stadt in gewiss berechtigtem Stolze auf diese Geistesgrössen eifrigst darauf bedacht ist, durch zeitgemässes Fortschreiten auf allen Gebieten des gemeindlichen Lebens, vor allem durch Ausgestaltung ihres Schulwesens, sich des Glanzes ihrer Hochschule würdig zu erweisen, so glaube ich keinen Widerspruch zu finden, wenn ich unsere Stadt zur gastlichen Aufnahme einer so stattlichen Schar illustrer Gäste für legitimiert erachte. Meine Herren! Die städtische Verwaltung, mit Ihren verdienstlichen Bestrebungen wärmstens sympathisierend, bringt Ihren Verhandlungen das regste Interesse entgegen. Mögen dieselben einen erspriesslichen, allerseits befriedigenden Verlauf nehmen und Ergebnisse zeitigen, die unserer studierenden Jugend zum Segen gereichen! Mögen Sie aber auch neben und nach der ernsteren Arbeit in unserer zurzeit im herrlichsten Frühlingsschmuck prangenden Stadt und ihrer freundlichen Umgebung auch Stunden der Erholung und heiteren Genusses finden und zu den heimischen Penaten zurückgekehrt, sich gerne Ihres hiesigen Aufenthalts zurückerinnern. In diesem Sinne heisse ich Sie nochmals willkommen, herzlich willkommen.

An Stelle des abwesenden Prorektors der Universität sprach nunmehr Herr Professor Dr. Geiger die folgenden Begrüssungsworte:

Hochgeehrte Versammlung! In Stellvertretung des gegenwärtigen Prorektors habe ich als Exprorektor die ehrenvolle Aufgabe, Sie, meine Herren, im Namen unserer Universität zu bewillkommnen. Wenn ich Ihnen diesen Willkommgruss in unseren eigenen Festräumen bieten darf, so mag das ein Symbol der äussern und innern Anteilnahme sein, die wir Ihren Bestrebungen entgegenbringen. Ich kann wohl sagen, dass wir auch in unserem Kreise Fragen, wie sie von Ihnen erörtert werden, vielfach diskutiert haben und noch diskutieren. Die engeren Verhältnisse der kleineren Universität bringen es mit sich, dass hier auch die Vertreter verschiedener Fächer mit einander in Berührung kommen und Gedanken und Erfahrungen austauschen können. Ich habe darin immer einen Vorzug der Universität an einem kleineren Orte erkannt und bekenne gerne, wie viel Belehrung und Anregung ich gerade aus solchen persönlichen Beziehungen geschöpft habe. Wie Sie wissen, stehen wir in Bayern zurzeit vor einer, hoffentlich tiefergehenden Reorganisation unseres Mittelschulwesens. Unter diesen Verhältnissen geht es über den Rahmen des Konventionellen hinaus, wenn ich Ihren Verhandlungen erfolgreichen Verlauf wünsche. Sie finden ein vorbereitetes Feld und die Anregungen und Gedanken, die Sie geben werden, fallen auf einen empfänglichen Boden. Mit dem Wunsche, dass Ihre Verhandlungen der Sache, welcher Sie dienen, förderlich und dem einzelnen, der ihr dient, erspriesslich und anregend sein möge, heisse ich Sie im Namen unserer Friderico Alexandrina herzlichst willkommen.

Den Beschluss der Begrüssungen bildete eine Ansprache des Herrn Prof. Dr. Spuler, der als Vertreter der physiko-medizinischen Gesellschaft auf die hohe Bedeutung der naturwissenschaftlichen Fächer für die Kultur der Gegenwart hinwies und dem Gefühl der Gemeinschaft zwischen den Bestrebungen der von ihm vertretenen Sozietät und des jetzt zu seiner Tagung in Erlangen erschienenen Vereins einen freudigen Ausdruck verlieh.

Auf diese verschiedenen, sämtlich mit lebhaftem Beifall aufgenommenen Begrüssungsreden antwortete der zeitige Vorsitzende des Vereins, Prof. Pietzker (Nordhausen) mit Worten des verbindlichsten und herzlichsten Dankes. Insbesondere dankte er der Königlichen Staatsregierung und der Universität für das dem Verein bewiesene freundliche Wohlwollen, der Stadt auch für die praktische Betätigung ihres Interesses, die durch die schöne, allen Versammlungsteilnehmern gewidmete Festgabe besonders greifbaren Ausdruck gefunden habe, dem Ortsausschuss für seine aufopfernde Tätigkeit. Wie immer, trage auch diese Versammlung ihre besondere Signatur, die hier eine doppelte sei; einmal empfange die Versammlung ihr Gepräge von der innigen Annäherung der Fachgenossen aus Süd und Nord, wofür ja — wie mehrfach betont — Erlangen ein so besonders geeigneter Boden sei, zum anderen von der Pflege der Fühlung zwischen Universität und den für diese vorbildenden Lehranstalten, die hier eine ersichtbare Verstärkung erfahre. Das sei schon in der ganz besonders lebhaften Mitarbeit zutage getreten, die die Vorbereitung für die Versammlung auf seiten der Universität gefunden habe; ein sichtbares Zeichen dafür, wie die Universität die weitgehende Gemeinschaft ihrer Interessen mit denen der höheren Mittelschulen empfinde, dürfe er auch in dem Umstande erblicken, dass die Eröffnung der Versammlung — zum ersten Male — in den Räumen einer Universitäts-Aula stattfinde, auch hierfür spreche er den beteiligten Instanzen, dem Königlich Bayerischen Staatsministerium und der Universität selbst den verbindlichsten Dank des Vereins aus. Alles vereinige sich, um die Hoffnung auf einen erspriesslichen Verlauf der Versammlung als sehr berechtigt erscheinen zu lassen.

Der Vorsitzende gedachte darauf der im vergangenen Jahre dem Verein durch den Tod entrissenen Mitglieder, nämlich der Herren Gilles (Essen), Kiessling (Marburg), Husmann (Brilon), Bopp (Frankfurt a. M.), Krause (Greifswald), Capelle (Oberhausen), Kosbadt (Marggrabowa), Kapp (Bartenstein), Mellen (Warmbrunn), Schmidt (Brieg), deren Andenken die Versammlung durch Erheben von ihren Plätzen ehrte. Nach Erledigung einiger Geschäftsangelegenheiten, die insbesondere in der Mitteilung verschiedener notwendig gewordenen Programmabänderungen und in der Wahl von zwei Kassenrevisoren bestanden, erteilte dann der Vorsitzende zunächst das Wort dem Herrn Konrektor Prof. J. Ducrue (München) zu seinem Vortrage „Ueber geometrische Propädeutik“. Den zweiten Vortrag der Sitzung hatte infolge Tausches Herr Dr. Wieleitner (Speyer) übernommen, der über den „Zahl- und Mengebegriff im Unterricht“ sprach. Beiden Vorträgen spendete die Versammlung ihren Beifall, eine weitere Diskussion fand nicht statt.

Alle weiteren Sitzungen fanden im Hörsaal des Physikalischen Universitäts-Instituts statt, zunächst am Nachmittag von 2 bis 4 Uhr die erste der beiden Abteilungssitzungen, die von Herrn Prof. Ducrue (München) geleitet wurde. Hier waren infolge des Umstandes, dass die Herren Geissler (Luzern) und Schorer (Weissenburg i. B.) teils aus Gesundheitsrücksichten, teils infolge plötzlicher Versetzung der Versammlung fernzubleiben genötigt waren, Aenderungen nötig geworden. Nach zwei im Programm der Versammlung angekündigten Vorträgen, einem glänzenden Experimentalvortrag von Grimsehl (Hamburg): „Vorlesungsversuche zur Wellenlehre“ und einer ganz kurzen Vorzeigung der Esselingschen Zeichnung des regelmässigen Sechzigecks durch Pietzker (Nordhausen), der sich dabei auf eine frühere Besprechung dieser Zeichnung im Vereinsorgan*) beziehen konnte, folgte ein neu eingesetzter, das lebhafte Interesse der Hörer erweckender Vortrag von Wiedemann (Erlangen) über die Ausbildung der Lehrer für Physik an den Hochschulen.

An die Sitzung schloss sich eine eingehende Besichtigung des Physikalischen Instituts unter Führung der Herren Prof. Wiedemann, Prof. Wehnelt und Dr. Reiger und weiterhin ein Rundgang durch das Chemische Universitäts-Institut an, das Herr Dr. Gutbier den Versammlungsteilnehmern zeigte.

Den Beschluss des Tages machte das sich der Teilnahme der Damen erfreuende Festmahl im Hotel Schwan, das — wie immer — durch eine Reihe teils ernster, teils launiger Trinksprüche gewürzt wurde. Die Reihe dieser Trinksprüche eröffnete Herr Regierungsrat Kittel mit einem lebhaften Wiederhall findenden Hoch auf Se. Majestät den deutschen Kaiser, den mächtigen Herrscher, auf den ganz Deutschland stolz sei, und auf Se. Königliche Hoheit den Prinzregenten von Bayern, den allverehrten und geliebten Lenker der Geschicke des Staates, in dessen gesegneten Gauen der Verein sich zu seiner Tagung versammelt habe. Von ausserhalb waren Grüsse gekommen seitens zweier hochgeschätzter, dem Verein von seiner Entstehung an zugehörender Mitglieder, ein längeres, in wärmstem Tone gehaltenes Schreiben unseres alten treuen Freundes in Serbien, des Gymnasialdirektors a. D. Prof. Kosta Iwkowits in Belgrad und ein Telegramm des verehrten zu den Gründern des Vereins zählenden Prof. Bail in Danzig. Die Verlesung dieser Begrüssungen, die die Anhänglichkeit der beiden Herren so sichtlich zum Ausdruck brachten, wurde mit lautem Beifall aufgenommen; der Vorstand erhielt den Auftrag, sie im Namen der Versammlung herzlichst zu erwidern.

Der zweite Versammlungstag (Mittwoch, 6. Juni) begann mit einer Geschäftssitzung der Sektion Bayern, bei der auch der Vorstand des Gesamtvereins vertreten war, es folgte um 10 Uhr die zweite allgemeine Sitzung, ausgefüllt durch zwei hochinteressante Vorträge von Herrn Prof. Wiedemann (Erlangen) „Das Experiment im Altertum und Mittelalter“ und Herrn Prof. Hess (Ansbach) über „Probleme der Gletscherforschung“. Dem lebhaften Beifall der Versammlung gab noch einen besonderen Ausdruck der Rektor des humanistischen Gymnasiums in Erlangen, Herr Prof. Dr. Dietsch, der auf den Wunsch des Vorstandes in dieser Sitzung den Vorsitz freundlichst übernommen hatte.

Am Nachmittag fand unter dem Vorsitz von Herrn Prof. Hess (Ansbach) die zweite Abteilungssitzung statt, die neben dem schon im Programm verheissenen

*) S. Unt.-Bl. XI, Nr. 6, S. 132.

Vortrag von Herrn Prof. Wehnelt (Erlangen): „Demonstrationen von Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen" noch einen neu eingesetzten Vortrag von Dr. Wimmer (München): „Ueber die Verwendung von mikroskopischen Projektionen im Mittelschulunterricht" brachte. An diese beiden von der Versammlung mit gespannter Aufmerksamkeit verfolgten und sehr beifällig aufgenommenen Vorträge schloss sich noch eine kurze Ansprache von Dr. Rühlmann (Halle a. S.) an, der darauf hinwies, wie auch im Rahmen der gegenwärtig verfügbaren Unterrichtszeit es doch wohl möglich sei, die Schüler zu einer praktischen Selbsttätigkeit im Physikunterricht heranzuziehen.

Wieder folgten zwei Besichtigungen von Universitäts-Instituten, zunächst die des glänzend ausgestatteten pathologischen Instituts unter persönlicher Führung seines Direktors, Herrn Prof. Dr. Hauser, und dann die des mineralogisch-geologischen Instituts, dessen Einrichtungen Herr Prof. Dr. Lenk selbst eingehend vorführte, endlich ein Rundgang durch den Botanischen Garten, wobei unter Führung des Herrn Garteninspektors Sajfert besonders die biologischen Anlagen eingehender besichtigt wurden.

Der Abend sah einen grossen Teil der Versammlungsteilnehmer in Erichs Keller, wo sie das ganz eigenartige, fesselnde Bild genossen, das das nach altem Herkommen in Erlangen während der Pfingstwoche gefeierte Bergkirchweihfest bietet.

Am Donnerstag begann schon um $8\frac{1}{2}$ Uhr unter dem Vorsitz von Herrn Direktor Prof. Dr. Thaer (Hamburg) die dritte allgemeine Sitzung, ausgefüllt durch den im Programm angekündigten Vortrag von Pietzker (Nordhausen) über „die Stellung der Fachkreise zu den Vorschlägen der von der Naturforschergesellschaft eingesetzten Unterrichtskommission" und eine lebhafte an diesen Vortrag anknüpfende etwa einstündige Diskussion. Diese Diskussion wird Gegenstand eines besonderen Berichts sein, die von der Versammlung im Anschluss daran angenommene Resolution findet sich an anderer Stelle*).

Unmittelbar daran schloss sich die von dem Vereinsvorsitzenden Pietzker geleitete allgemeine Geschäfts-Sitzung des Vereins, in der zunächst der Vereins-Schatzmeister, Herr Presler, den folgenden Kassenbericht erstattete.

Die Einnahme setzt sich wie folgt zusammen:

| | |
|---|---|
| Bestand am 1. Januar 1905 . . . . . . . | 469,36 M. |
| Zinsen vom Bestand 1904 . . . . . . . . | 15,93 „ |
| Beiträge von 1140 Mitgliedern . . . . . | 3420,00 „ |
| Summa | 3905,29 M. |

Die Ausgabe weist folgende Posten auf:

| | |
|---|---|
| 1. Vertragsmässige Zahlung an den Verlag des Vereinsorgans . . . . . 2 · 1140 = | 2280,00 M. |
| 2. Kosten der Versammlung in Jena . . . | 662,86 M. |
| 3. Druckkosten . . . . . . . . . . . . | 32,40 „ |
| 4. Werbekosten . . . . . . . . . . | 60,00 „ |
| 5. Schreibhilfe . . . . . . . . . . . . | 29,70 „ |
| 6. Porto . . . . . . . . . . . . . . . | 118,59 „ |
| 7. Vergütung für die Vertretung des Vereins auf der Naturforscherversammlung . . . | 100,00 „ |
| 8. Vergütung an den Kassenführer . . . . | 150,00 „ |
| Summa | 3433,55 M. |

*) S. diese Nummer, S. 59.

Demnach verbleibt ein Bestand von
3905,29 — 3433,55 = 471,74 M.,
dem der Bestand des Sparkassenbuches für
6 Dauermitgliedskarten mit . . . . . . 233,18 „
hinzutritt, so dass das Vereinsvermögen im
ganzen sich auf . . . . . . . . . . . 704,92 M.
stellt.

Die Mitgliederzahl, die am 1. Januar 1905 sich auf 1095 belief, beträgt augenblicklich 1140.

Die Kasse war, wie die bereits am Dienstag gewählten Revisoren, Realschul-Rektor a. D. Prof. Pumplün (Erlangen) und Prof. Dr. Danckwortt (Magdeburg) berichteten, in guter Ordnung befunden worden, so dass die Versammlung dem Schatzmeister, Prof. Presler, mit bestem Dank für seine Mühewaltung Entlastung erteilen konnte. — Es folgte die Vorstandswahl an Stelle der drei satzungsgemäss ausscheidenden Herren Presler, Schotten und Thaer, die auf Vorschlag von Herrn Grimsehl (Hamburg) durch Zuruf wiedergewählt wurden und sich zur Annahme der Wahl bereit erklärten. — Für die nächstjährige Versammlung war im Vorjahre bereits Dresden in Aussicht genommen worden; da die Einladung dorthin, wie der Vorsitzende auf Grund einer Zuschrift von Prof. Witting (Dresden) mitteilen konnte, aufrecht erhalten wurde, wählte die Versammlung endgültig Dresden als Ort ihrer sechzehnten Hauptversammlung, während sie zugleich mit Dank davon Kenntnis nahm, dass der am Erscheinen leider verhinderte Geheimrat F. Klein (Göttingen) seine Einladung nach Göttingen für 1908 erneuerte. — Die etwaige Vertretung des Vereins auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung, die durch den dort zu erstattenden abschliessenden Bericht der von der Naturforscher-Gesellschaft eingesetzten Unterrichts-Kommission voraussichtlich noch besondere Bedeutung erhalten wird, wurde dem Vereinsvorstand anheimgestellt, der Antrag auf Erhebung eines besonderen Beitrags von den Versammlungsteilnehmern gelangte nicht zur Beschlussfassung, da er bereits vorher bis auf weiteres zurückgezogen war.

Ausserhalb der Tagesordnung nahm die Versammlung noch Kenntnis von der erfreulichen Tatsache, dass in den diesjährigen preussischen Staatshaushalt die Summe von 15 000 M behufs wirksamen Schutzes der Naturdenkmäler eingestellt ist. In Erinnerung an ihren seinerzeit auf der Hamburger Versammlung des Vereins gefassten Beschluss*) sprach die Versammlung ihre Freude über diesen Erfolg der auch von ihr selbst seinerzeit befürworteten Bestrebungen durch eine Resolution aus, deren Wortlaut sich an anderer Stelle dieser Nummer**) findet und beauftragte ihren Vorstand, auch diese Resolution zur Kenntnis der beteiligten Instanzen zu bringen.

Dann schloss der Vorsitzende die Versammlung, deren offizieller Teil damit seinen Abschluss erreicht hatte, indem er unter lebhafter Zustimmung der Anwesenden feststellte, dass die Versammlung die auf sie gesetzten Hoffnungen voll erfüllt habe, dass die von ihr erwartete Annäherung der Fachgenossen in Nord und Süd, wie die Pflege der Wechselbeziehungen zwischen Hochschule und höherer Mittelschule eine ersichtliche Förderung erfahren habe, den Dank, den er dafür allen beteiligten Instanzen, den Königlich bayerischen Staatsbehörden, der Stadt Erlangen, den tätig in den Vereins-

*) S. Unt.-Bl. VI, Nr. 3, S. 52/53.
**) S. diese Nummer, S. 60.

sitzungen aufgetretenen Rednern, der Universität und den Leitern ihrer einzelnen Institute, ganz besonders aber dem Ortsausschuss und in diesem noch der rastlosen Tätigkeit des Herrn Prof. Lenk zollte, fügte Herr Grimsehl (Hamburg) noch ein freundliches Wort für den Vorstand selbst hinzu.

Dann folgten die Vergnügungsausflüge, die indessen gerade diesmal insofern noch ein besonderes Gepräge trugen, als sie zugleich in hohem Grade instruktiv waren. Am Nachmittag des Donnerstags fand ein sehr zahlreich besuchter Besuch der in Nürnberg stattfindenden grossartigen bayerischen Jubiläumsausstellung statt, wobei Herr Konrektor Prof. Rudel von der Industrieschule in Nürnberg die Führung freundlichst übernommen hatte.

Am Freitag galt ein erneuter Besuch der Stadt Nürnberg, diesmal aber den Sehenswürdigkeiten der Stadt selbst, hier war Herr Privatdozent Dr. Haak so gütig, die Teilnehmer zu führen. Ein anderer Teil der Versammlungsteilnehmer suchte unter Leitung des Herrn Prof. Lenk die Fränkische Schweiz auf, dabei wurde insbesondere die im Vorjahre aufgeschlossene Bing-Höhle bei Streitberg eingehend besichtigt. Diese Ausflüge, die von dem inzwischen wärmer gewordenen Wetter erfreulich begünstigt wurden, bildeten einen schönen Abschluss der Versammlung, die dank der ausserordentlich umsichtigen Vorbereitung durch den Ortsausschuss ihren Teilnehmern eine ganz besonders reiche Fülle schöner und wertvoller Eindrücke bot, die Erinnerung daran wird noch lange nachwirken.

---

## Vereine und Versammlungen.

**78. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte** zu Stuttgart vom 16. bis 22. September 1906. Geschäftsführer der Versammlung sind die Herren Obermedizinalrat Dr. v. Burckhardt und Professor Dr. v. Hell in Stuttgart. Die Gruppierung der Abteilungen weist eine Neuerung auf durch Einfügung einer Abteilung für Tropenhygiene (Medizinische Hauptgruppe, Abt. 30).

Wie gewöhnlich finden am Montag und am Freitag der Versammlungswoche allgemeine Sitzungen statt, in deren einer voraussichtlich der Bericht der auf der Breslauer Versammlung eingesetzten Unterrichtskommission über ihre weitere Tätigkeit erstattet werden wird.

Am Donnerstag ist eine Gesamtsitzung der beiden wissenschaftlichen Hauptgruppen geplant, in der die Frage der Regeneration und Transplantation behandelt werden soll.

Die Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Naturwissenschaftliche Hauptgruppe, Abt. 12), hat als Einführende die Herren Prof. Dr. W. Bretschneider, Prof. Dr. A. Haas, als Schriftführer die Herren Dr. Köstlin und Dr. Bräuhäuser.

Für die Fachlehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften, sowie der Geographie, die an der Versammlung teilnehmen wollen, ist seitens der Geschäftsführer bei den verschiedenen vorgesetzten Behörden eine wohlwollende Berücksichtigung der dazu einzureichenden Urlaubsgesuche beantragt worden. Durch eine bereits im Mai d. Js. an die Provinzial-Schulkollegien ergangene Verfügung ist diesem Antrage seitens des preussischen Kultusministeriums entsprochen worden.

* * *

**Deutscher Verein für Schulgesundheitspflege.** Die diesjährige (VII.) Jahresversammlung ist zu Dresden am 6. und 7. Juni abgehalten worden. Im Laufe des Jahres (5. bis 10. August) wird der II. internationale Schulhygiene-Kongress (in London) stattfinden.

* * *

**Sechzehnte Jahresversammlung des Sächsischen Gymnasiallehrer-Vereins.** Die jährlich zu Ostern stattfindende Versammlung hielt diesmal ihre Sitzungen in der alten Bergstadt Freiberg i. S. ab. In der Abteilung für Mathematik und Physik sprach Prof. Finsterbusch (Zwickau) über „die Quadratur höherer Parabeln und Hyperbeln und die Kubaten solcher Körper, die diese binomischen Kurven und verwandte trinomische zu Meridiankurven haben“. Es wurden die Meridiankurven

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda$$

und

$$\frac{x}{a} + \left(\frac{z}{c}\right)^n = \lambda$$

behandelt und dabei auch auf den Fall $n = -1$ eingegangen. Darauf besprach Prof. Dr. Witting die „graphische Behandlung von Gleichungen“, eine Reihe wesentlich von einander verschiedener Methoden charakterisierend. Endlich gab Prof. Baldauf (Freiberg) an mehreren Beispielen eine von ihm im Schulunterrichte erprobte „logarithmische Auflösung von Gleichungen“.

Einer Einladung des Rektors der Bergakademie Herrn Oberbergrat Prof. Dr. Papperitz folgend besichtigten die Anwesenden noch die geometrischen Modelle des genannten Herrn sowie die wertvolle Sammlung von Maschinenmodellen und bergbaulichen Werkzeugen aller Kulturstufen.

A. Witting (Dresden).

* * *

**XIII. Hauptversammlung der Deutschen Bunsen-Gesellschaft für angewandte physikalische Chemie in Dresden.** Vom 20. bis 23. Mai tagte in Dresden unter sehr zahlreicher Beteiligung die Deutsche Bunsen-Gesellschaft unter dem Vorsitze des Geh. Reg.-Rats Prof. Dr. Walter Nernst. Von den angemeldeten 35 Vorträgen wurden 21 gehalten, über die hier kurz zusammenfassend berichtet werden soll. Eine erste Vortragsreihe betraf die Aktivierung des Stickstoffs; Geheimrat Nernst berichtete über umfassende experimentelle Untersuchungen, aus denen theoretische Formeln folgen, sodass nunmehr die Stickstoffsauerstoffverbrennung für beliebige Temperaturen und Drucke quantitativ gegeben ist. Es folgten dann Prof. Förster (Dresden) mit einem Experimentalvortrage „über die bisherigen technischen Versuche der Stickstoffverbrennung“, Prof. Le Blanc (Karlsruhe) über „die analytische Bestimmung von Stickoxyd in Luft“ und Prof. Klaudy (Wien), der „die Frage der technischen Ueberführung nitroser Gase in Salpetersäure oder salpetersaure Salze“ genauer untersuchte. Den vielfachen Bemühungen den Luftstickstoff technisch nutzbar zu machen gegenüber betont Geheimrat Hempel (Dresden), dass man die Wichtigkeit der Fäkalstoffe nicht ausser acht lassen möge.

Eine zweite Vortragsreihe bezog sich auf die Kolloide. Prof. Lottermoser (Dresden) besprach „das Verhalten der irreversibeln Hydrosole Elektrolyten gegenüber und damit zusammenhängende Fragen“, Dr. Szigmondy (Jena) führte experimentell eine neue Methode der Darstellung von kolloiden Metalllösungen verschiedenster Teilchengrösse vor und Dr. Siedentopf (Jena) zeigte ultramikroskopische Zerteilungen von *Na* und *K* in wasserfreien Chlornatrium-Kristallen, deren Farben von der Temperatur abhängig sind.

Einen längeren Demonstrationsvortrag über den Mechanismus des Leuchtens und die Gesetze der Strahlung in allgemein orientierender sehr geschickter Form gab sodann Prof Lummer (Breslau).

Von den vielen interessanten Einzelvorträgen sei noch der des Prof. Coehn (Göttingen) erwähnt; analog dem Zerfall des Radium stellt sich der Zerfall des Ammoniums unter Abspaltung eines Wasserstoffatomes dar, der elektroskopisch vorgeführt wurde.

Aus dem geschäftlichen Teile der Sitzung ist von besonderem Interesse die Annahme der vom ständigen Ausschuss vorgeschlagenen Resolution:

„Die Hauptversammlung der Deutschen Bunsen-Gesellschaft betrachtet als nächstes äusseres Ziel des chemischen Schulunterrichtes die Einführung in die physikalischen Grundlagen der Lehre von den Stoffen, sowie den Hinweis auf die praktische Bedeutung der Stoffunterschiede und der Stoffwandlung, dies gegeben nicht in einer grösseren Zahl von Einzelkenntnissen, sondern in typischen Beispielen. Sie wünscht die Ausdehnung eines solchen Unterrichtes auch auf die Gymnasien, damit nicht weite und besonders führende Kreise des Volkes dieser Grundlage des Lebens und des nationalen Wohlstandes fremd gegenüberstehen. Als Voraussetzung dieser Ausdehnung des Unterrichtes gilt aber, dass sie ohne Mehrbelastung der Schüler erreicht wird. Sie fordert endlich für die Befähigung zum chemischen Unterricht den Nachweis einer solchen auch in der Physik, also mindestens für die zweite Stufe oder für mittlere Klassen."

A. Witting (Dresden).

## Lehrmittel-Besprechungen.

**Neuer Erdglobus.** Einen bemerkenswerten neuen Erdglobus hat der Oberförster Treffurth (Sondershausen) in Verbindung mit dem Kartographen Opitz (Leipzig) konstruiert. Der Globus besteht aus einem Gummiballon auf Fuss mit umgebender Stoffhülle, welcher letzteren das Kartenbild aufgedruckt ist. Durch eine einfache Vorrichtung kann der Ballon aufgeblasen und nach Entleerung wieder zusammengefaltet werden. Diese Neuerung bietet gegenüber den üblichen starren Hohlformen mehrere Vorzüge. Das Kartenbild kann leicht entfernt und bei etwa notwendig werdenden Aenderungen mit verhältnismässig geringem Kostenaufwand durch ein neues ersetzt werden. Der Globus beansprucht trotz seines Durchmessers von ca. 32 cm im zusammengefalteten Zustande wenig Raum, könnte also eventuell bequem mit zur Schule genommen werden. Er ist billiger als ein gleichgrosser Globus gewöhnlicher Konstruktion, da der Preis sich auf 8 bis 9 M stellen wird. Das Kartenbild ist deutlich und reichhaltig; es zeigt u. a. die sämtlichen Kabelverbindungen, die auf den gewöhnlichen Globen zumeist fehlen. Das interessante neue Lehrmittel wird durch die Firma Fr. Aug. Eupel in Sondershausen vertrieben, welche illustrierte Prospekte versendet.

Dr. E. König (Sondershausen).

## Bücher-Besprechungen.

Schmid, Bastian, Philosophisches Lesebuch zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbststudium. VII 8°, VIII und 166 S. Leipzig 1906, Teubner. Preis geb. M 2,60.

Das Buch zerfällt in drei Hauptabschnitte, von denen nur der dritte eine Sonderbezeichnung trägt, nämlich: „Aus philosophischen Disziplinen", seine zwei Unterabteilungen führen die Titel „Zur Psychologie und Logik" (6 Lesestücke) und „Zur Ethik und Aesthetik" (5 Lesestücke). Der erste und der zweite Hauptabschnitt enthalten je 12 Lesestücke, anscheinend mit der Verteilungsabsicht, dass im ersten Abschnitt allgemeine philosophische Fragen und Probleme, im zweiten Fragen der Naturphilosophie behandelt werden, natürlich werden naturphilosophische Fragen und Probleme auch im ersten Hauptabschnitt wenigstens mehrfach gestreift.

Bei der Auswahl der einzelnen Lesestücke ist die Absicht erkennbar, dem Leser zugleich mit den einzelnen philosophischen Fragen mit bedeutsamen Vertretern der philosophischen Forschung bekannt zu machen, so sind von älteren Philosophen Descartes, Locke, Hume durch je ein, Kant durch drei Lesestücke vertreten; die Mehrzahl der Stücke stammt allerdings aus der Feder neuerer Forscher, unter denen Wundt, Liebmann, Siegwart und Poincaré je zweimal auftreten. Der Verfasser selbst hat 6 Beiträge geliefert, die sich sämtlich im ersten und zweiten Hauptabschnitt finden, er sucht damit an verschiedenen Stellen den Uebergang zwischen dem Inhalt der einzelnen Lesestücke zu vermitteln. So lässt er dem einleitenden Aufsatz von A. Riehl: „Wesen und Entwickelung der Philosophie" seinerseits zwei Aufsätze folgen: („Zur Entwickelung der Philosophie", „der Materialismus"), dann kommt De la Mettrie: „der Mensch eine Maschine", weiter folgt wieder der Verfasser mit einem Aufsatz über „die Quellen des modernen Materialismus", dann Haeckel: „die Seele", Dubois-Reymond: „Ueber die Grenzen des Naturerkennens", hierauf Descartes: „Betrachtungen über die Grundlagen der Philosophie" usw.

Wie aus dieser Skizzierung vom Anfange des Inhalts hervorgeht, weist das Buch eine sehr planvolle und wohlüberlegte Auswahl auf, die allerdings unvermeidlicherweise auch sehr fragmentarisch ist. Aber das darf man nicht als Mangel ansehen, der Absicht des Verfassers entspricht es eben, bei dem Leser einen gewissen Hunger nach philosophischer Bildung, das Bedürfnis nach einer vertieften Einsicht in das Wesen der mannigfachen den Menschengeist bewegenden Fragen zu erregen, von denen — um das noch besonders zu erwähnen — im zweiten Hauptabschnitt u. a. die „Kausalität des Willens" (Wundt), „der Zweckbegriff" (B. Schmid) zur Erörterung kommen — immer aber nur in dem Sinne, dass das Interesse des Lesers an diesen Fragen wachgerufen und gesteigert wird. Für diesen Zweck, mit dem ich im höchsten Grade einverstanden bin, darf das handliche, gut ausgestattete Buch als ein sehr glückliches Hilfsmittel bezeichnet werden, dessen Erscheinen mit Freude zu begrüssen ist.

P.

* * *

**H. Poincaré.** La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. La télégraphie sans fil. Paris 1904. C. Naud. Scientia Nr. 23. 8°. 110 S.

Das Büchlein gibt zunächst eine kurze Darstellung der Maxwellschen Theorie der Verschiebungsströme, um dann die Hertzschen und die an diese sich anschliessenden Versuche ziemlich eingehend zu behandeln. Die Mittel zur Erzeugung der Schwingungen, sowie die verschiedenen Beobachtungsmethoden werden angegeben. Der Verfasser geht dann weiter auf die Fortpflanzung der Wellen in Drähten, in der Luft und in dielektrischen Körpern ein, um zuletzt die Analogien zwischen elektrischen und Lichtstrahlen zu besprechen. Dabei hebt er ausdrücklich hervor, dass der Hertzsche Gitterversuch kein optisches Analogon besitze; beim Erscheinen des Büchleins waren eben die Braunschen Versuche noch nicht bekannt. Die Telegraphie ohne Draht wird nur anhangsweise, auf 20 Seiten, behandelt. Dabei kommen die deutschen Forscher etwas zu kurz; so konnte ich den Namen „Braun" überhaupt nicht finden.

Die Lektüre des Büchleins bietet keine sprachlichen Schwierigkeiten. Die Darstellung ist nicht ganz elementar, mathematische Formulierungen sind allerdings vermieden. Zur Einführung in das behandelte Gebiet ist das Büchlein sehr zu empfehlen. Bemerken möchte ich noch, dass Poincaré Hertz zum „Oberlehrer à Carlsruhe" stempelt.

Gg. Heinrich (Neustadt a. d. H.)

---

## Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Boas, J. E. V., Lehrbuch d. Zoologie f. Studierende. 4. Aufl. Mit 577 Abb. Jena 1906, Fischer. Mk. 10.–

Brass, A., Untersuchungen über das Licht und die Farbe. I. Teil. Mit 70 Abb. Osterwieck 1906, Zickfeldt.

Chun, C., Probleme des biologischen Hochschulunterrichts. Sonderabdr. aus „Natur u. Schule". Leipzig 1906, Teubner. Mk. —.30.

Circolo Matematico di Palermo, Supplemento al Rendiconti. Nr. 1. Gennajo-Febbrajo 1906.

Conwentz, Prof. Dr., Die Heimatkunde in der Schule. Zweite vermehrte Auflage. Berlin 1906, Gebr. Bornträger.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Bd. Mit 115 Figur. 2. Aufl. Leipzig 1906, Teubner. geb. 12.–.

Elementarbücher, Naturwissenschaftliche. 2. Stewart-Warburg, Physik. 6. Aufl. — 3. Lockyer-Winnecke, Astronomie. 7. Aufl. Strassburg 1906, Trübner. à Mk. —.80.

L'Enseignement mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl, VII. Année, No. 3. Paris 1906. Gauthier-Villars, Genève, Georg & Cie.

Féaux, B., — Busch, Fr., Ebene Trigonometrie u. elementare Stereometrie. Mit 58 Fig. 8. Aufl. Paderborn 1906, Schöningh. Mk. 1.50.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie für d. Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit Vorwort von W. Krumme. I. Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Berlin 1906, Salle. Mk. 2.20.

Fleming, J. A., — Aschkinass, E., Elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 5.—.

Fortschritte der Physik, Halbmonatl. Literaturverzeich., red. von R. Assmann und K. Scheel. Jahrg. V, Heft 6—11. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Franz, J., Der Mond. Mit 31 Abb. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Frischauf, J., Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Mit 5 Fig. Ebenda 1905. Mk. 1.—.

Graetz, L., Das Licht und die Farbe. 6 Vorlesungen. Mit 116 Abbildgn. 2. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt Nr. 17). Ebenda 1905. Mk. 1.25.

Grimsehl, E., Ausgewählte physikalische Schülerübungen. Beilage zum Bericht der Oberrealschule auf der Uhlenhorst zu Hamburg für das Schuljahr 1905-06. Progr.-Nr. 914. Hamburg 1906, gedr. bei Lütcke & Wulff.

Hahn, H., Die Lehraufgaben d. physikalischen u. chemischen Unterrichts an den höheren Schulen Frankreichs. Beilage zum Jahresber. des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin 1906. Progr.-Nr. 109, 1906. Berlin 1906, Weidmann.

Hänzel, E., Reaktion der lebenden Zelle gegen das Licht. (12 S.) Fredersdorf 1906. Selbstverlag.

Henniger, K. A., Vorbereitender Lehrgang der Chemie und Mineralogie. Stuttgart und Berlin 1906. Fr. Grub.

Heussi, J., Leitfaden der Physik. Neubearb. von E. Götting. Mit 199 Fig. 16. Aufl. Mit chem. Anhang. Berlin 1906. Salle. Mk. 1,80.

Höfler, A. u. Maiss, E., Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschule. 4. Aufl. Bearbeitet unter Mitwirkung von G. Schilling. Wien 1906, Gerolds Sohn. Preis 2.40 K.

Holzmüller, G., Die neueren Wandlungen der elektrischen Theorien einschliesslich der Elektronentheorie. 2 Vorträge. Mit 22 Fig. Berlin 1906, Springer. Mk. 3.—.

Kambly-Roeder, Trigonometrie. Ausgabe A.: für Gymnasien. Ausgabe B.: für Realgymnasien und Oberrealschulen. Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima. Breslau 1906, Hirt. geb. à Mk. 2.—.

Koppe-Dickmanns Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. 23. Aufl. Ausgabe für Reallehranstalten. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie u. Trigonometrie. Mit 8 Taf., 184 Fig. Essen 1906, Baedeker. geb. Mk. 2.40.

Kraus, K., Experimentierkunde, Anleitung zu physikalischen und chemischen Versuchen in Volks- u. Bürgerschulen u. Fortbildungsschulen. Wien 1906, Pichlers Ww. & Sohn. Mk. 4.20.

Lackemann, C., Die Elemente der Geometrie. Ein Lehr- und Uebungsbuch für den geometrischen Unterricht an sechsklass. höh. Lehranstalten. I. Planimetrie. 8. Aufl. Mit 103 Fig.

—„— II. Trigonometrie und Stereometrie. Mit Anh. 5. Aufl. Mit 63 Fig. Breslau 1906, Hirt. Kart. à Mk. 1.30.

Lassar-Cohn, Die Chemie im täglichen Leben. Gemeinverständliche Vorträge. Mit 22 Abb. 5. Aufl. Hamburg 1905, Voss. geb. Mk. 4.—.

Lehrpläne d. Gymnasium Augustum zu Görlitz. Zweites Heft (Rechnen, Mathematik und Naturwissenschaften, geschichtliche Erdkunde). Beilage zum Jahresbericht 1905-1906. Nr. 234. Görlitz 1906.

Loria, G., Vergangene und künftige Lehrpläne. Uebersetzung aus dem Italienischen von Wieleitner. Leipzig 1906, Göschen. Mk. —.80.

Männer der Wissenschaft. Herg. v. Ziehen. Heft 4: v. Drygalski, Ferd. Freiherr von Richthofen. 5: Jaeger, Werner von Siemens. Leipzig 1906, Weicher. à Mk. 1.—.

Mittag, M., Chemisches Schulpraktikum. Aufgabensammlung für den ersten praktischen Unterricht zur Einführung in die experimentelle Naturwissenschaft. Hildesheim 1906, Lax.

Neumayer, G. von, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Lfg. 9-12. (Bd. I. Bogen 29-42, Bd. II. Bogen 28-41.) Hannover 1906, Jaenecke. à Mk. 3.—.

Nitz, K., Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Inaugural-Dissertation. Königsberg i. Pr. 1905.

—„— Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. Sonderabdruck aus der Zeitschr. für Mathem. und Physik. Bd. 53. Heft 1. Leipzig 1906, Teubner.

Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. 1. Band, 1. Hälfte. Ebenda 1906. Mk. 7.—.

Planck, M., Vorlesungen über d. Theorie d. Wärmestrahlung. Mit 6 Abb. Leipzig 1906, Barth. Mk. 7.—.

Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Fig. und 6 Doppeltafeln. Leipzig 1906, Teubner. geb. 16.—.

Poincaré, H., Der Wert der Wissenschaft. Deutsch von Weber. Ebenda 1906. geb. Mk. 3.60.

—„— Wissenschaft u. Hypothese. Deutsch von F. & L. Lindemann. 2. Aufl. Ebenda 1906. geb. Mk. 4.80.

Prüfungsaufgaben für die I. und II. realistische Dienstprüfung der Jahre 1901-05. (Sonderabdr. a. d. Korrespondenzbl. f. d. höh. Schulen Württembergs.) Stuttgart, Kohlhammer. Mk. 2.—.

Rüdorff, Fr., Grundriss der Mineralogie und Geologie. Für den Unterricht an höh. Lehranst. 8. Aufl. Berlin 1906, Müller. Mk. 1.50.

Sauce, E. de la, Das Wesen des Weltäthers und der Naturkräfte. Berlin 1905, Berg.

Schacht, J., Ein neuer Lehrgang für den Unterricht in der Raumlehre der höheren Lehranstalten. I. Teil: die geradlinigen Figuren und die von Ebenen begrenzten Körper. Beilage zum Programm des Königl. Marien-Gymnasiums zu Posen. Posen 1906, Merzbachsche Druckerei.

Schellhorn, O., Planimetrische Beweise mit Anhang: Algebraische Regeln. Lehrbuch. Essen 1906, Baedeker. geb. Mk. 1.60.

Schmidt, W., Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffs Platz im mathematischen Unterricht? Beilage zum Programm des Realgymnasiums zu Düren, 1906, Nr. 595.

Simon, M., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Figur. Leipzig 1906. Teubner. geb. Mk. 3.20.

Steckelberg, H., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Wissenschaftl. Beil. zum Jahresbericht des Realgymnasiums zu Witten. Prog.-Nr. 460. Druck von Teubner, Leipzig.

Steinbrinck, C., Untersuchung über die Kohäsion strömender Flüssigkeiten mit Beziehung auf das Saftsteigeproblem der Bäume. (Abdruck a. d. Jahrbüchern für wissenschaftl. Botanik. XLII, 4). Berlin 1906, Gebr. Bornträger.

Zindler, Konr., Liniengeometrie mit Anwendungen. II. Bd. Mit 24 Fig. (Samlg. Schubert 51). Leipzig 1906, Göschen. geb. Mk. 8.—.

Normalverzeichnis
für die
**physikalischen Sammlungen**
der
höheren Lehranstalten.
**Angenommen von dem Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften, Pfingsten 1896.**
**Preis 30 Pfg.**
Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

**Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.**

Physikalische
**Freihandversuche.**

Unter Benutzung des Nachlasses
von
**Prof. Dr. Bernhard Schwalbe**
weil. Geh. Reg.-Rat und Direktor des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin.
Zusammengestellt und bearbeitet
von
**Hermann Hahn,**
Oberlehrer am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin.
I. Teil:
Nützliche Winke. Mass u. Messen.
Mechanik der festen Körper.
Mit 269 Figuren im Text.
Preis geh. 3 Mk., gebd. Mk. 3.75.

**Verlag von Otto Salle in Berlin.**

Soeben erschien:

**Die Infinitesimalrechnung**
im Unterricht der Prima.

In Uebereinstimmung mit den Meraner Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte bearbeitet von
**Oskar Lesser,**
Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.
Mk. 1.60 geh., Mk. 2.— geb.

Bei der hohen Bedeutsamkeit der augenblicklich zur Diskussion stehenden Frage, ob es möglich oder wünschenswert sei, dem ohnehin sehr umfangreichen mathematischen Lehrpensum unserer höheren Schulen noch die Elemente der Differenzial- und Integralrechnung einzugliedern, wird manchem das Büchlein, das aus dem Unterricht heraus entstanden und bereits von anderer Seite auf seine Brauchbarkeit geprüft ist, als ein Ratgeber und Wegweiser gewiss willkommen sein. Das $7^1/_2$ Bogen starke Werkchen zerfällt in drei Teile, deren erster im Kleinschen Sinn den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung behandelt und Anleitung zur Auswertung numerischer Gleichungen auf graphischem Wege und nach der Regula falsi gibt. Der zweite Teil bietet in einfachster, doch ausreichender, und vor allem die Anschauung betonender Darstellung die Elemente der Differenzialrechnung, während der dritte der Behandlung der Integralrechnung gewidmet ist. Indem der Algorithmus zugunsten der Anwendung überall zurücktritt, erfährt der Unterricht durch die stete Betrachtung der Funktionsbilder eine nicht unwesentliche Belebung; zugleich gewährt die neue Behandlung erhebliche Erleichterungen in der Durcharbeitung einzelner Pensen und bereichert den Unterricht an allgemeinbildenden Momenten.— Die Heranziehung und Lösung physikalischer Aufgaben soll die Brauchbarkeit des Büchleins erhöhen.

**Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.**

# Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

## Geometrie.

**Fenkner:** **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. W. Krumme, Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.

**Lesser:** **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von Oskar Lesser, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

## Arithmetik.

**Fenkner:** **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10.

**Servus:** **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. H. Servus in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima) Preis 2 M. 40 Pf.

## Physik.

**Heussi:** **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. Heussi. 16. völl. umgearb. Aufl. Mit 199 Holzschnitten. Bearb. von Dr. E. Götting. Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Elemente der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

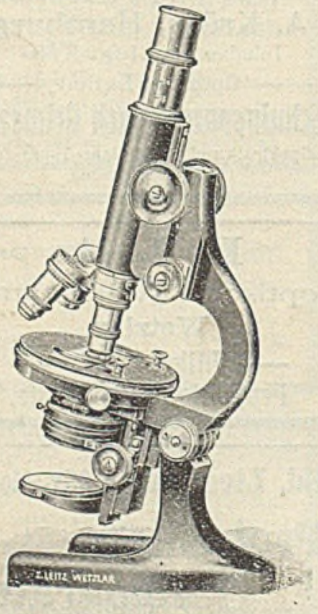
**Heussi:** **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. Heussi. 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. Leiber. Preis 5 M.

## Chemie.

**Levin:** **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. Wilh. Levin. 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

**Levin:** **Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Ober-Realschulen.** Von Prof. Dr. Wilh. Levin. Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Unter-Sekunda der Ober-Realschule). Mit 72 Abbild. Preis Mk. 1.40. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 M. 40 Pf.

**Weinert:** **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von H. Weinert. 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 60 Pf.



**E. Leitz,**
Optische Werkstätte
Wetzlar
Filialen: **Berlin NW.**, Luisenstrasse 45, **New-York, Chicago, Frankfurt a. M.**, Kaiserstrasse 64, und **St. Petersburg**, Woskressenski 11.
Vertreter für München:
**Dr. A. Schwalm, Sonnenstr. 10.**

**Mikroskope**
**Mikrotome**
**Mikrophotographische Apparate.**
Photographische Objektive. Projektions-Apparate.

Deutsche, englische, russische und französische Kataloge kostenfrei.

Hierzu als Beilage je ein Prospekt der Firmen: **Dürr'sche Buchhandlung in Leipzig, E. Nägele in Leipzig** und des Camera-Grossvertriebs **„Union"**, Hugo Stöckig & Co. in **Dresden-A.**, die der gefl. Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.