Jahrgang XII. 1906. No. 5.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung
des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Lindenerstrasse 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Ueber das Experiment im Altertum und Mittelalter.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Erlangen von E. Wiedemann (Erlangen).

(Fortsetzung.)

Wir wenden uns nun zu den Versuchen, die zur Auffindung beziehungsweise zur Bestätigung von einfachen Gesetzen gedient haben.

Als erstes Beispiel wollen wir den Hebel behandeln. Seine Theorie ist schon in den *μηχανικά*, die wahrscheinlich nicht von Aristoteles selbst, sondern aus seiner Schule stammen, und vor allem bei Archimedes niedergelegt. Weitere Ausbauten finden sich in Schriften, die zum Teil mit Euklids Namen belegt sind und die uns nur arabisch erhalten sind.

Die tägliche Erfahrung musste auf das Hebelgesetz in seiner einfachsten Form führen, nämlich dass man durch Kraftaufwand an einem langen Hebelarm eine entsprechend grössere Wirkung an einem kurzen ausüben kann. Die Verwendung des Hebels beim Schöpfbrunnen, bei dem Transport von Massen, bei zahlreichen Werkzeugen beruht ja auf dieser Erfahrung. Der Satz, dass beim gleicharmigen Hebel nur dann Gleichgewicht vorhanden ist, wenn Kraft gleich Last ist, hatte bei den gleicharmigen Wagen Verwendung gefunden. Schon bei den Hebräern scheint auch eine ungleicharmige Wage verwandt worden zu sein, die dann später immer mehr in Gebrauch kam und den Namen römische Wage trägt. Zahlreiche solcher Wagen sind in Pompeji erhalten; sie sind aber wohl sicher schon von den Griechen benutzt worden. Bei diesen Vorrichtungen ist aber wahrscheinlich, dass schon eine vollkommene Kenntnis des allgemeinen Hebelgesetzes vorlag. Bei der Prüfung des Hebelgesetzes waren sicher experimentelle Versuche und theoretische Entwickelungen Hand in Hand gegangen. Dies findet schon darin seinen Ausdruck, dass für bestimmte Zwecke die vorhandenen Wagenformen in passender Weise abgeändert wurden, wie dies bei Wagen zur spec. Gewichtsbestimmung der Fall ist, die, nach arabischen Quellen, von Archimedes und al Râzî hergestellt wurden.

Auf eine vollkommene Beherrschung des Hebelgesetzes und der Lehre vom Schwerpunkt weist überhaupt die Konstruktion und Prüfung der Wagen hin, wie dies zum Beispiel aus dem Werk von al Chazînî über die Wage der Weisheit und dem Werke des Bischofs Elîja von Nisibis über die Gewichte und Masse hervorgeht.

Dass man bei dem Schwerpunkt auch an experimentelle Bestimmungen heranging, zeigt ein Abschnitt aus der Encyklopädie von al Ansârî, wo es heisst: Die Wissenschaft von den Schwerpunkten, (den Mittelpunkten der Lasten, d. h. der Gewichte) behandelt, wie man den Schwerpunkt eines unterstützten Körpers findet. Unter dem Schwerpunkt versteht man einen Grenzpunkt innerhalb des Körpers, bei dem er im Gleichgewicht ist, und zwar durch Beziehung zum tragenden Körper. Der Nutzen dieser Wissenschaft beruht auf der Kenntnis, wie man das Gleichgewicht grosser Körper mit kleineren herstellt dadurch, dass man den Abstand berücksichtigt, wie bei dem Qarastûn (einer Art Schnellwage).

Zahlreiche Versuche und Konstruktionen von Instrumenten sind sicher bei der tieferen Begründung der Theorie der einfachen Maschinen und deren Anwendung angestellt worden. Die Angaben von Heron, der hier wohl auch zum grossen Teil älteres zusammenfasst, lassen uns das deutlich erkennen. Er beschreibt auch direkt Apparate, die auf Grund seiner Anschauungen konstruiert sind, und legt sich beobachtete Erscheinungen, wie die Wirkung des Hebels beim Ziehen der Zähne, nach ihnen zurecht.

Dasselbe Problem, wie das des Flaschenzuges und der Kombination von Flaschenzug und Hebel werden an den verschiedensten Anordnungen erläutert. Vollkommen können wir das erst seit kurzem übersehen, seit wir nicht allein mehr auf die Auszüge bei Pappos usw. angewiesen sind, sondern das ganze Werk des Heron, der Barhulkos, im arabischen Text mit deutscher Uebersetzung vorliegt. Die vielfache Zitierung des Werkes von den Arabern und auch von dem König Alfons von Kastilien zeigt, welche grosse Rolle es gespielt hat. Die Theorie der sieben einfachen Maschinen (Hebel, Rolle, Wellrad, Flaschenzug, schiefe Ebene, Schraube, Keil) hat Pappos (Collectiones ed. Hultsch Bd. 3) in so systematischer und ausgiebiger Weise behandelt, dass die späteren Lehrbücher nicht mehr viel hinzuzufügen hatten.

Dass das für die Physik so hoch bedeutsame Werk von Archimedes über die schwimmenden Körper von Experimenten ausgeht, ergibt sich aus einem dem ganzen Werk vorangestellten Theorem [1]), das aber nur arabisch erhalten ist, hervor. Es legt den Begriff des spezifischen Gewichtes fest, der durchaus auf experimenteller Basis aufgebaut ist. Es sei, da es nur wenig bekannt ist, hier mitgeteilt.

„Es gibt feste und flüssige Körper, von denen die einen schwerer als die anderen sind. Man sagt, dass ein Körper schwerer als ein anderer ist, oder dass eine Flüssigkeit schwerer als eine andere ist, oder dass ein Körper schwerer als eine Flüssigkeit ist, falls, wenn man von jeder der beiden ein gleiches Volumen nimmt und man sie wiegt, man findet, dass der eine schwerer als der andere ist. Sind ihre Gewichte gleich, so sagt man nicht, dass der eine schwerer als der andere ist."

Deutlich tritt ferner der Unterschied zwischen spezifischem Gewicht und Gesamtgewicht hervor. Halten wir diese Definition vom spezifischen Gewicht zusammen mit den Ausführungen über schwimmende Körper, so scheint mir, dass auch bei letzteren Archimedes von Experimenten ausgegangen ist, beziehungsweise seine Resultate experimentell bestätigt hat.

Es gilt das vor allem von den Propositionen III usw. im ersten Buch, die über das Schwimmen beziehungsweise die Tiefe des Eintauchens und den Gewichtsverlust handeln. Gerade den letzteren Satz hat Archimedes gewiss, ehe er ihn zu spezifischen Gewichtsbestimmungen verwandte, geprüft. Bei der Darstellung kehrt er freilich die Sache um. Aus dem oben angeführten Theorem und einem Postulat werden zunächst zwei allgemeine Propositionen abgeleitet und dann die Spezialfälle des Schwimmens und Untertauchens erörtert.

Mich erinnert die Archimedische Behandlungsweise vielfach an die meines verehrten Lehrers Kirchhoff. Er erörterte diese Probleme in folgender Weise: Er nahm an, dass in der im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ein Teil ohne Aenderung des Volumens fest wurde; dann wurde das Gleichgewicht nicht gestört.

Ein anderer, wohl auch von Archimedes herrührender, nur noch lateinisch überlieferter Satz, dass ein Körper in einer Flüssigkeit von gleichem spezifischen Gewicht nichts wiegt, ist auch wohl experimentell begründet worden.

Wenigstens mit einem Worte sei der Akustik [2]) gedacht. — Der gesetzmässige Zusammenhang zwischen Tonhöhe und Saitenlänge, wie ihn die Pythagoräer aufstellten, konnte nur durch Beobachtungen und Versuche gewonnen werden. Dazu diente der Monochord, dessen Entdeckung Pythagoras selbst zugeschrieben wird und der während des ganzen Mittelalters

[1]) H. Zotenberg, J. asiat. (7 ser.) Bd. 13, S. 509. 1879.

[2]) Vergl. hierzu G. Kanzow, Programm des Gymnasiums zu Gumbinnen 1894.

beim musikalischen Unterricht Verwendung fand. Mit ihm ermittelte Pythagoras die Beziehungen zwischen Länge, Spannung und Dicke der Saite einerseits und der Tonhöhe derselben anderseits. Weit sorgfältigere Versuche mussten aber angestellt werden, um zu dem allgemeinen Ergebnis zu gelangen, dass den höheren Tönen Vermehrung der Bewegungen entspricht und zu dem speziellen, dass Konsonanz entsteht (a. a. O. S 6), wenn die Schwingungszahlen der beiden Töne in rationalem Verhältnisse stehen. Daraus ergibt sich dann, dass dem ausgehenden griechischen Altertum die Tatsache bekannt war, dass die Schwingungszahlen im umgekehrten Verhältnis der Länge der Saiten stehen.

Die Lehre vom Sehen wie vom Hören wurde bei Aristoteles bestimmt durch Anschauungen, die er im ersteren Fall dahin präzisiert: „Das Sehen ist ein „Quale“, welches dadurch zum Auge gelangt, dass die Luft in einen bestimmten Zustand versetzt wird.“

In der Optik, einem Gebiet, über das uns eine ganze Reihe von Abhandlungen erhalten ist, haben zahlreiche systematische Versuche stattgefunden. In ihm sind die Messungen auch relativ leicht anzustellen; der Strahl kann ohne weiteres verfolgt werden und Reibungswiderstände trüben nicht wie in der Mechanik die Einzelresultate.

Auf wirkliche Beobachtungen weisen schon einzelne Stellen in Euklids Optik hin: ein Werk, das ja eigentlich nur die Frage behandelt, unter welchem Gesichtswinkel Gegenstände, Linien unter den verschiedensten Umständen erscheinen, das heisst, für wie gross wir sie halten. Daher heisst bei den Arabern das Werk auch Kitâb al Manâzir, das Buch der „Ansichten“, der Perspektive. — Eine Reihe von Versuchen enthält die Einleitung des Theon von Alexandria (ca. 350 n. Chr.) zur Optik des Euklid, die sich auf die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, die Entstehung von Schatten beziehen. Durch Versuche ist auch das Gesetz der Gleichheit des Einfallswinkels und Reflexionswinkels aufgefunden worden. Ptolemaeus prüft direkt an einem Apparate die Richtigkeit des Satzes. Ibn al Haitam und Roger Baco haben gleichfalls Messungen angestellt.

Dass auch der Verfasser der Katoptrik, die früher Euklid zugeschrieben wurde und die vor allem die Spiegel behandelt, experimentierte, zeigt die Mitteilung eines gar nicht in den Zusammenhang passenden Versuches, vielleicht ein Rest der Katoptrik des Archimedes. „Ist ein Gegenstand in ein Gefäss gelegt und ist letzteres dann soweit entfernt, dass man ihn nicht mehr sieht, so sieht man ihn wieder, wenn man bei derselben Entfernung Wasser in das Gefäss giesst.“

Die Katoptrik stellt zunächst eine Reihe von experimentellen Ergebnissen als Voraussetzungen an die Spitze und leitet aus ihnen dann mathematisch das ab, was an den verschiedenen Spiegelarten beobachtet wird, in ähnlicher Weise wie auch wir verfahren.

Besonders zahlreich sind Mitteilungen über Hohlspiegel erhalten.

Auf die Kenntnis der Brennspiegel ist man wohl zunächst durch die tägliche Beobachtung über die Reflexion der Strahlen an Kreisbögen, wie sie zum Beispiel bei Gläsern, Bechern usw. auftreten, gekommen, oder bei Hohlgefässen, wie es zum Beispiel bei einem arabischen Dichter heisst: „Es wird gesammelt in dem Schwarzen wie Licht“, unter dem Schwarzen ist ein ausgepichtes Gefäss verstanden.

Die Theorie setzt zunächst in eigentümlich komplizierter, aber sich an die Natur anschliessender Weise ein. Sie behandelt nicht parallele Strahlen, sondern solche, die von einem Punkt ausgehen, auch bei Betrachtung der Sonne. Da ausserdem vom leuchtenden Punkt stillschweigend angenommen wird, dass die Punkte entfernter als der Kugelmittelpunkt liegen, so ist dieser die Grenze für die Schnittpunkte der reflektierenden Strahlen mit dem durch den leuchtenden Punkt gezogenen. So erklärt es sich, dass der Brennpunkt in der Euklid zugeschriebenen Katoptrik in den Mittelpunkt der Kugel gelegt wird.[1])

Nach einem Fragment des Anthemius hat nun Apollonius in seinem Werk über die Brennspiegel (oder „gegen die Katoptriker“) diesen Satz widerlegt und deutlich gemacht, wo der Brennpunkt liegt.

Ist ein Teil des Hohlspiegels ABC 90 Grad und $DE = \frac{1}{2} DB$, so liegen bei einfallenden parallelen Strahlen die Schnittpunkte aller an ABC reflektierenden Strahlen zwischen E und F.

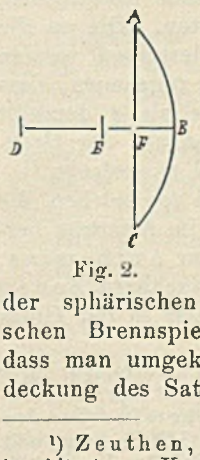


Fig. 2.

Je näher E an F liegt, um so vollkommener ist der Brennspiegel. Im Anschluss an solche Gedankengänge meint nun Zeuthen, hätte Apollonius den paraboloidischen Brennspiegel finden können.

Zeuthen glaubt, dass man nicht vom Studium der sphärischen und eventuell der elliptischen Brennspiegel ausgegangen sei, sondern dass man umgekehrt, nachdem man durch Entdeckung des Satzes über Brennpunkte die An-

[1]) Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886. S. 376.

wendbarkeit paraboloidischer Hohlspiegel nachgewiesen, untersuchte, inwieweit die leichter konstruierbaren sphärischen Hohlspiegel an ihre Stelle treten könnten.

Zeuthen vermutet ferner, dass Archimedes in einer in minimalen Fragmenten erhaltenen Schrift über Katoptrik zuerst die Konstruktion paraboloidischer Spiegel mitgeteilt habe und meint, ob nicht die hervorragende Schönheit dieser Erfindung die Quelle für die Sage gewesen ist, dass Archimedes die römische Flotte durch Brennspiegel in Brand gesteckt habe.[1]) Dies ist eine „Sage". Wie aber ein selbst auf die sagenhaften Taten seiner Männer stolzes Volk historische Unwahrheiten verewigt, zeigt die Statue des Archimedes in Syrakus, der einen Brennspiegel in der Hand hält. Die Statue trägt die Unterschrift: Invento speculo naves Romanas incendit.

Die Herstellung paraboloidischer Spiegel hat Ibn al Haitam auf das genaueste beschrieben, nachdem er vorher ihre Theorie mitgeteilt hat.

Von demselben arabischen Gelehrten ist auch die Lehre von den sphärischen Hohlspiegeln eingehend entwickelt, wobei er die longitudinale Abweichung in allgemeiner Form aufwies. Um diese zu vermeiden, setzt er seine Spiegel aus einer Reihe von sphärischen Ringen zusammen; die Radien der Kugeln, aus denen sie ausgeschnitten werden, sind um so grösser, je weiter die Ringe von der Achse entfernt sind, und um so weiter liegen die Krümmungsmittelpunkte von dem Schnittpunkte der Achse mit dem Spiegel entfernt. Ibn al Haitam bewirkte dadurch, dass die Punkte E und F für Spiegel mit beliebig grosser Oeffnung auf einer kleinen Strecke zusammenliegen.

Ibn al Haitam gibt auch an, wie man solche Spiegel anfertigt; dabei beschreibt er Zirkel, um die grossen Kreise zu zeichnen. Auf einer Reihe von Stahlblechen a, b, c werden dann aus Kreisbögen zusammengesetzte Bögen, wie sie der obigen Konstruktion entsprechen, aufgezeichnet und ausgeschnitten. Die an die Bögen anstossenden Ränder derselben werden der Reihe nach so zu Feilen zugehauen, dass das Blech b eine feinere Feile als a darstellt usw. und mit den Feilen dann auf der Drehbank ein anderes Stück Metall ausgedreht.

Dass sphärische Hohlspiegel von solchen, die sich mit ihrer Theorie befasst, im Altertum hergestellt wurden, wissen wir von Anthemius, der sie benutzt, um seinen Nachbarn Zenon in Schrecken zu versetzen. Dass in der Optik selbst da, wo sich alles aus den einfachen Gesetzen über Sehwinkel und Reflexion ergibt, noch mehr als in der Mechanik der Versuch hervortritt, liegt in der grösseren Anschaulichkeit der Erscheinung und in der grösseren Mannigfaltigkeit der Probleme.

Auf diesen ganzen Gebieten finden wir also, wenn ich nicht irre, eine rege experimentelle Betätigung, sobald wir uns nicht durch die dogmatische Behandlung täuschen lassen.

Im einzelnen bleiben uns Versuchsresultate erhalten, sobald sich keine allgemeinen Gesetze aus den Beobachtungen ergeben.

In den 70er Jahren musste man sich noch mit allen den einzelnen Abweichungen von den Gasgesetzen beschäftigen und auch in elementaren Lehrbüchern die Tabellen mitteilen. Seit aber Van der Waals sein allgemeines Gesetz aufgestellt, dem sich etwas abgeänderte anschlossen, die mit grosser Annäherung die Versuchsresultate wiedergeben, ist das nicht mehr nötig. Auch muss im allgemeinen da, wo es sich nicht um Prüfung von Gesetzen handelt, die man a priori für richtig hält, die Messung eine weit genauere sein. Ist keine alle Zahlenwerte umfassende Formel gefunden, so werden in Tabellen die zusammengehörigen Werte überliefert.

Aus dem Altertum und Mittelalter kommen hier zwei Gebiete in Betracht; bei dem einen handelt es sich um Beobachtungen, bei dem anderen um Messungen.

Beobachtungen in umfassendstem Masse haben die Alten wie die Araber in der Astronomie angestellt und zahlreiche Tabellen legen Zeugnis von ihrer emsigen Tätigkeit ab. Wenn Ptolemaeus nur von ca. 1000 Fixsternen die Positionen angibt, so sind dies eben die der von ihm genau festgelegten Fundamentalsterne. Wohl stützen sich die Araber auf diesen grossen Astronomen, aber an den Sternwarten in den verschiedensten Teilen des Landes werden neue Messungen ausgeführt. Um die Abweichungen, die Sonne, Mond und Planeten von der erwarteten Lage aufweisen, mit möglichster Genauigkeit festzulegen, wird dem Instrumentenbau eine stets wachsende Aufmerksamkeit zugewandt[1]), die Teilungen vervollkommnet und verbesserte Modifikationen des Astrolab, des Quadranten, der Armillarsphäre usw. konstruiert. Ueberaus zahlreich sind die Namen, welche den einzelnen Instrumenten beigelegt wurden, und eine Fülle von Schriften ist uns aus dem Orient über diesen Gegenstand erhalten.

Durch messende Experimente sind dann die Beziehungen zwischen Einfallswinkel und

---

[1]) Auf die Konzentration der Lichtstrahlen durch Kombinationen von ebenen Spiegeln soll hier nicht eingegangen werden. Solche hat Anthemius (Paradoxogr. Graeci ed. Westermann, S. 149 ff.) hergestellt, der auch Hohlspiegel anfertigte (Beiträge V, S. 403).

[1]) Vergl. dazu z. B. Ptolemaeus Synt. III. 1. ed. Heiberg S. 197.

Brechungswinkel festgestellt und zwar von Ptolemaeus und Ibn al Haitam, die zu diesem Zweck besondere Apparate herstellten. Die zusammengehörigen Einfalls-, Ablenkungs- und Brechungswinkel sind in Tabellen niedergelegt und uns noch erhalten. Ein einheitliches, alle Werte umfassendes Gesetz, an dem sich noch ein Keppler vergeblich abgemüht hat, konnten weder Ptolemaeus noch seine Nachfolger finden, obgleich ihnen ja der Sinus als solcher bekannt war. Sie vermochten nur einen qualitativ-quantitiven Satz über die Art der Zunahme der Winkel im zweiten Medium bei Aenderung des Einfallswinkels aufzustellen. Der Grund liegt zum Teil darin, dass der Ablenkungswinkel zunächst als das wesentlichste bei der Brechung erscheinen musste, wenn auch die Tabellen neben ihm den Brechungswinkel enthalten.

An der Hand der experimentell bestimmten Messungsreihen wurden nun von Ibn al Haitam bezw. Kamâl al Dîn gerade ebenso, wie wir das tun würden, die in verschiedenen Fällen auftretenden Erscheinungen abgeleitet und mit der Erfahrung verglichen. So wurde die Brechung durch eine Glaskugel verfolgt (Fig. 3) und der Brennpunkt richtig konstruiert. Ferner wird eine einmalige und eine mehrfache Reflexion im Innern von Kugeln untersucht und dadurch eine Theorie des Regenbogens entwickelt (Fig. 4). Auch die

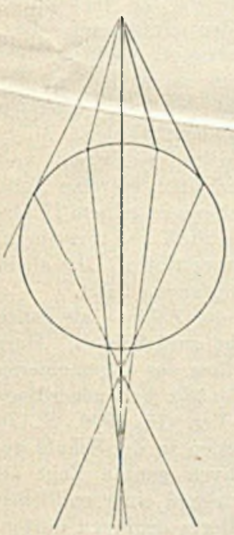


Fig. 3.

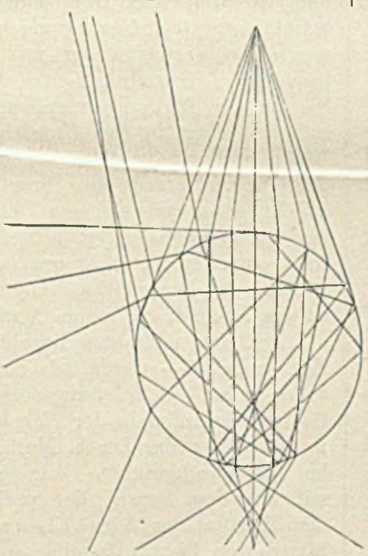


Fig. 4.

Umkehrung der Strahlen beim Durchgang durch eine Kugel wird behandelt. Alle die gewonnenen Resultate werden experimentell geprüft; wir können die Richtigkeit der mitgeteilten Beobachtungen kontrollieren und sehen, dass sich unser Forscher nicht mit einer einfachen Ableitung der Formeln begnügt hat.

Eine grosse Anzahl experimenteller Arbeiten der Neuzeit stellt sich die Aufgabe, die Abweichungen von den gefundenen einfachen Gesetzen genauer zu verfolgen und Erscheinungen, die zunächst als nebensächlich erscheinen, die sogenannten Restphänomene, eingehend zu untersuchen; sind sie es doch, die uns in vielen Fällen die allerwichtigsten Aufschlüsse geben. Ich erinnere nur an die Abweichungen von den Gasgesetzen von Boyle-Charles oder Mariotte-Gay Lussac, die uns bei Zugrundelegung der kinetischen Gastheorie die Dimensionen und Kräfte der Moleküle kennen gelehrt haben; ferner an die Erscheinungen der Dispersion und zwar vor allem der anomalen, durch die erst bei der Undulationstheorie die Verknüpfungen zwischen Materie und Aether gewonnen wurden. Solche Aufgaben traten im allgemeinen den älteren Generationen gar nicht entgegen, da die Hilfsmittel zur Untersuchung noch zu unvollkommen waren.

Freilich in einem Fall, bei dem es sich aber nicht um Experimente, sondern um Beobachtungen handelt, haben sich die Forscher der ältesten Zeit mit solchen Problemen befasst; ich meine die Planetenbewegungen, die um so komplizierter erschienen, je länger man sich mit ihnen befasste. Immer zahlreicher mussten die Sphären, immer komplizierter ihre Bewegungen angenommen werden, wobei es ziemlich gleichgültig war, ob diese Sphäre, die Träger der Planeten, als materielle oder als abstrakte Gebilde angesehen wurden. Erst Kopernikus und Keppler brachten Ordnung in das Chaos und zwar mit Vorstellungen, die dem Altertum durchaus nicht fremd waren. Heisst doch bei Kopernikus Zeitgenossen die ganze heliozentrische Weltanschauung die samische. Kopernikus gibt ja selbst an, dass er seine Resultate Anregungen verdankt, die er aus Cicero empfing und zwar aus denjenigen Stellen, wo der Römer von den kosmischen Theorien der Pythagoräer berichtet. Bei den Arabern tauchen auch von Zeit zu Zeit ähnliche Ansichten auf, die aber stets zurückgewiesen wurden.

Eingehende Experimental-Untersuchungen haben wir da zu erwarten, wo es sich um die Prüfung theoretischer Anschauungen und einer Entscheidung zwischen zwei Auffassungen handelt. In dieser Richtung sind weit mehr Versuche angestellt als man gewöhnlich annimmt. Indess ist mir bei den Arabern keine Aeusserung bekannt, die das Experiment in der Weise bewusst in den Vordergrund stellt, wie das mehrfach die Griechen tun, so z. B. die Hippokratiker in Zusammenhang mit einer Ablehnung der Spekulation und dem Hinweis auf die Natur.

Zunächst sei ein Versuch von dem Araber Geber erwähnt; er geht davon aus, dass der

Magnetstein das Eisen durch eine geistige Kraft anzieht, die man nicht sieht und nicht fühlt. Als Beweis führt er an, „sie dringt durch das Dichte des Messings[1]), während das Messing zwischen dem Magnetstein und dem Eisen sich befindet, soweit sie will." Dann wägt er Moschus u. s. f. und findet im Laufe der Tage keine Abnahme, wie ja bei der geringen entweichenden Quantität zu erwarten war; hier sind es geistige Kräfte, die wirken sollen. Endlich findet er, dass die Kraft eines Magnetsteines mit der Zeit sich ändert, statt 300 gr trägt er nach einiger Zeit nur 240 gr, sein Gewicht war aber ungeändert geblieben; auch ein Beweis dafür, dass hier Imponderabilien tätig sind.

Ein viel erörtertes Problem war, ob die Luft schwer sei oder nicht. Um dies zu prüfen, wurde ein Schlauch leer und mit Luft gefüllt gewogen. So lange man, wie Aristoteles, der 322 starb, also vor Archimedes lebte (der 287 geboren wurde), nicht wusste, dass ein Körper in einem Medium von demselben spezifischen Gewicht scheinbar kein Gewicht besitzt, war die Frage prinzipiell unlösbar. Es ergaben sich verschiedene Resultate, die von unvermeidlichen Fehlerquellen, Erwärmen beim Einblasen, Einführen von Wasserdampf usw. herrühren konnten. Die Frage wurde von den verschiedensten Seiten experimentell in Angriff genommen. So glaubt Aristoteles[2]), dass ein aufgeblasener Schlauch ein grösseres Gewicht hat, da alle Dinge ausser dem Feuer an ihrem Ort ein Gewicht besitzen, d. h. wenn sie in demselben Medium sich befinden.

Dagegen erörtert Ptolemaeus[3]) das Problem nach der richtigen Annahme nach Angaben in seiner Schrift *περὶ ῥοπῶν*, dass das Wasser in Wasser und die Luft in Luft kein Gewicht besitzen. Dann wägt er einen leeren und einen aufgeblasenen Schlauch und findet, dass dieser nicht nur nicht schwerer wird, sondern er glaubt sogar eine Gewichtsabnahme zu finden, was eigentlich dem von ihm aufgestellten Satz widerspricht. Simplicius, der dies überliefert, stellt nun selbst einen Versuch an und findet das gleiche Gewicht für den aufgeblasenen und unaufgeblasenen Schlauch. Er will aber ganz sicher gehen und lässt einen anderen dasselbe Experiment machen; dieser schreibt ihm, dass er in beiden Fällen das gleiche Gewicht gefunden, dass aber eher noch vor dem Aufblasen das Gewicht um sehr wenig grösser gewesen sei.

Auf die weiteren Diskussionen über diesen Gegenstand ist hier nicht einzugehen.

(Schluß folgt.)

---

1) Das Wort Safo kann auch Gold heissen.

2) Aristoteles de caelo lib. IV, cap. 4. Pariser Ausgabe. S. 429.

3) Simplicius in Librum de caelo. ed. Heiberg. S. 710/711. Berlin 1894.

Der Zahl- und Mengebegriff im Unterricht.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Erlangen*).

Von Dr. H. Wieleitner (Speyer).

Meine Herren! Dem Vortrage, den ich heute vor Ihnen halten darf, möchte ich zwei Bemerkungen vorausschicken. Die eine ist, daß kurz nach der Anmeldung meines Vortragthemas das Buch von M. Simon *„Methodik der elementaren Arithmetik usw."* (Teubner 1906) erschien, das alles, was ich über die Behandlung des Begriffes der »endlichen« Zahl hätte sagen können, in meisterhafter Weise ausführlich darstellt. Indem ich also hiermit auf dieses Buch ausdrücklich aufmerksam mache, werde ich in betreff der endlichen Zahl mich auf die Hervorhebung der Hauptgesichtspunkte beschränken. Um so mehr kann ich dann auf die eigentlichen (»unendlichen«) Mengen eingehen, besonders da Herr Simon die hierher gehörigen, hauptsächlich für die Geometrie wichtigen Begriffe und Sätze nur teilweise und nebenher erwähnt.

Die zweite Bemerkung bezieht sich eben auf die unendlichen Mengen. Ich werde — wie ich hoffe — Gelegenheit haben, manchem aus Ihrer Mitte neue, zum Teil überraschende und auch überraschend einfache Wahrheiten vor Augen zu führen. Die Begriffe der Mengenlehre sind erst seit etwa 30 Jahren in der Klärung begriffen — das Hauptverdienst in dieser Richtung fällt Herrn G. Cantor zu — und es existiert noch kein deutsches Buch, das alles Einschlägige im Zusammenhang darstellte**). Für den elementaren Unterricht nutzbar sind sie wohl überhaupt noch nicht gemacht worden. Sie haben nicht einmal in der *Enzyklopädie* von Weber-Wellstein eine Behandlung erfahren. Wenn ich nun auch der Meinung bin, daß viele von diesen Dingen in engster Beziehung zum Schulunterricht stehen, so möchte ich Sie doch durch meine Ausführungen nur mit den einfachsten, diesbezüglichen Grundwahrheiten bekannt machen, ohne Sie zu der Meinung verpflichten zu wollen, all das solle unbedingt in den Unterricht der entsprechenden Klasse und jedes Jahres aufgenommen werden. Möge der eine und andere aus Ihrer Mitte, wo es paßt und angeht, ganz nach eigenem Dafürhalten, einzelne Teile des von mir behandelten Wissenszweiges seinem Unterricht einverleiben, nicht um den Stoff zu vermehren, sondern um dessen Behandlung zu vertiefen. Das allein ist die Absicht, die meine Ausführungen leitet.

Auf den abstrakten Begriff der Zahl — als ganze Zahl gedacht — werde ich nicht zurückgehen. Herr Weber hat die Ableitung desselben aus allgemeineren Gattungsbegriffen in der *Enzyklopädie* und neuerdings im Jahresber. der Dtsch. Math.-Ver. (15, 1906, S. 174 bis 184) durchgeführt. Wir werden in der Schule gewiß mit dem Begriff der positiven ganzen Zahl als dem Resultat des Abzählens irgend einer endlichen Menge von Elementen ohne weiteres beginnen dürfen. Nur kann man vielleicht darauf aufmerksam machen, daß das Ursprünglichere sei, ganz gleichartige Dinge,

---

*) S. Unt.-Bl. XII, Nr. 3, S. 64.

**) Von dem Bericht über *„Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten"*, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von A. Schönflies, ist bis jetzt nur der erste Teil, der übrigens alles, was wir brauchen, in nuce enthält, erschienen (Teubner 1900). Vorzüglich, wenn auch knapp, ist die Darstellung im 1. Teil der durch Herrn Gutzmer bearbeiteten *„Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen"* von G. Vivanti (Teubner 1906). Sonst ist noch auf den 1. Band des *Cours d'Analyse* von C. Jordan (2e éd. Paris, Gauthier-Villars 1893) zu verweisen. Die Originalabhandlungen sind bei Schönflies nachzusehen.

wie 3 Schafe, 20 Pferde u. dergl. zu zählen, während es schon eine gewisse Abstraktion verlange, etwa ein Schaf, einen Kirchturm und einen Federhalter auch als drei Dinge zu zählen. Und man kann hinzufügen, daß auch von hier bis zum reinen Begriff der Zahl Drei immer noch ein großer Schritt sei.

Diesen Zahlbegriff erweitern wir nun, indem wir den ganzen positiven Zahlen gewisse Bedingungen auferlegen, die durch die gewöhnlichen direkten Operationen des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens gegeben werden. Es seien b und a zwei beliebige ganze Zahlen, so fordern wir zunächst von einer zu bestimmenden Zahl x, daß sie zu b addiert a ergebe. Dies schreiben wir
$$b + x = a.$$
Forderung wie Gleichung haben nur einen Sinn bezw. eine Lösung, wenn $b < a$. Wir schreiben dann
$$x = (a - b).$$
Ist $b > a$, so ist $(a - b)$ ein bloßes Symbol, das andeutet, daß wir etwas Unerfüllbares verlangt hatten. Es ist Ihnen allen bekannt, wie man an dieser Stelle, indem man dem Symbol $(a - b)$ eine Bedeutung auch in den Fällen $b > a$ beilegt, die Null und die negativen Grössen als Zahlen einführt.

Wir kommen nun sofort auf eine zweite, jedem Schüler durchaus geläufige Art der Verwendung der Zahlen, nämlich zur Messung. Indem wir eine beliebig gewählte Strecke auf einer geraden Geraden 1, 2, 3 $\cdots$ mal von einem willkürlichen Anfangspunkte 0 aus nach beiden Seiten auftragen, erhalten wir die gebräuchliche sinnenfällige Darstellung der Reihe der ganzen positiven und negativen Zahlen mit der Null (s. Figur 1).

Daß diese Zahlenreihe nach beiden Seiten unbegrenzt fortgesetzt werden kann, wird der Schüler ohne weiteres einsehen und man kann unbedenklich durch Pfeile andeuten, daß in der einen Richtung sozusagen eine positiv unendlich große Zahl, in der anderen eine negativ unendlich große Zahl liegen wird, was man durch die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ andeuten kann. Aber diese beiden Grenzzahlen scheinen durch die mysteriöse Unendlichkeit wie durch eine gähnende Kluft getrennt. Das ist ein großer Nachteil dieser Versinnlichung. Man hat zwar dem Schüler bei der Parallelenlehre vielleicht etwas gesagt von dem einen unendlich fernen Punkt der Geraden, aber das ist, wie Sie alle wissen, eine bloße Redeweise ohne Sinnenfälligkeit. Hier kann nun gleich etwas zur Geltung kommen, was ich heute noch oft verwenden werde, das Prinzip der Abbildung, der gegenseitig eindeutigen Zuordnung, das erst neuerdings Herr Loria in der von mir übersetzten Rede*), die Ihnen vielleicht schon bekannt geworden ist, als nach dem Funktionsbegriff zweitwichtigsten Grundbegriff für den Unterricht hervorgehoben hat. Es ist ja gewiß willkürlich, daß wir die Zahlenreihe auf einer Geraden auftrugen. Dazu könnte man ebenso gut einen Kreis benutzen. Dann wäre es aber höchst unpraktisch, die Bogen 0—1, 1—2, 2—3 usw. im gewöhnlichen Sinne gleich zu machen, da der Kreis in sich zurückläuft und man erst recht kein Ende fände.

Denken wir uns aber irgend einen Punkt P des Kreises mit allen Punkten der geraden Zahlreihe verbunden, so entspricht jedem Punkte des Kreises ein bestimmter Punkt der Geraden und umgekehrt, wenn wir nur dem Punkte Q auf dem Kreise, der durch die Parallele zu der Geraden bestimmt wird, den unendlichfernen Punkt der Geraden zuweisen. Der Punkt P zeigt sich ebenfalls als keineswegs ausgezeichnet.

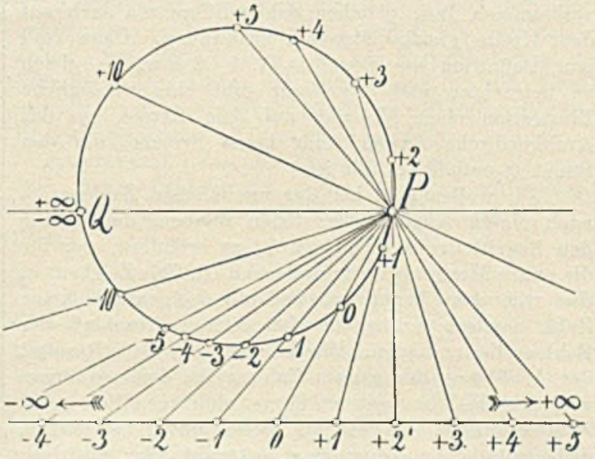


Fig. 1.

Die ganze Zahlreihe ist mithin auf den Umfang des Kreises, also auf einen endlichen Bereich, abgebildet. Hier sehen wir nun aufs deutlichste, daß der Punkt Q sowohl dem Symbol $+\infty$, wie $-\infty$ entspricht, je nachdem man sich ihm von einer Seite her nähert. Hier findet also ebenso wie im Nullpunkt, wo man auch $+0$ oder -0 schreiben kann, ein stetiger Uebergang statt. Wie wichtig die Vorstellung dieser Tatsache z. B. für den Zeichenwechsel der Tangente bei 90° und 270° ist, brauche ich wohl nicht zu erwähnen.

Auffallen wird bei dieser Darstellung der Zahlenreihe auf dem Kreise nur, daß die Strecken 0—1, 1—2 usw. wirklich nicht mehr im gewöhnlichen Sinne gleich sind. Aber gerade das ist ein weiterer Vorteil. Die Uebertragung der Zahlenreihe auf die Messung der Geraden war eine Willkür, die durch die Abbildung auf den Kreis wieder beseitigt wurde. Die Zahl 5 enthält ursprünglich nicht die Tatsache in sich, daß irgend eine Strecke 0—5 fünfmal so groß sei als die Strecke 0—1; die 5 hat ihre Stelle im Zahlensysteme einzig und allein dadurch, daß sie nach 4 und vor 6 kommt.

Ein elementarer Satz der Mengenlehre lautet: Jede unendliche Punktmenge hat mindestens eine Häufungsstelle; d. h. es gibt einen Punkt, in dessen Nähe unendlich viele Punkte der Menge liegen. Bei der natürlichen Zahlreihe ist das der unendlichferne Punkt. Diese Tatsache, die bei der Darstellung auf der Geraden sehr verdunkelt erscheint, da sich der unendlichferne Punkt der Beobachtung, ja sogar der Vorstellung entzieht, könnte wohl nicht deutlicher gemacht werden, wie durch den Punkt Q auf dem Kreise.

Zugleich kann uns dieselbe Figur noch etwas anderes versinnlichen. Herr Wellstein hat in der *Enzyklopädie* erklärt, dem naiven Mann aus dem praktischen Leben sei mit einer Strecke immer auch der Begriff der Länge mitgegeben. Meine Herren, ich glaube nicht fehlzugehen, wenn ich annehme, daß dieser Typus des »naiven Mannes aus dem praktischen Leben« auch unter uns noch ziemlich weit verbreitet ist. Ich erinnere mich wenigstens noch deutlich an die Zeit,

*) *Vergangene und künftige Lehrpläne.* Leipzig 1906, G. J. Göschen.

wo ich selbst noch bis zu einem solchen Grade naiv war. Aber nichts kann in der Tat deutlicher zeigen, wie es anders sein könnte, wenn wir die Auftragung der Zahlenreihe auf dem Kreise wirklich als eine »Messung« betrachten. Denn es steht uns begrifflich vollkommen frei, gleichen Zahlendifferenzen auch auf dem Kreise gleiche Strecken zuzuweisen. Dann sind laut Definition die Bogen 0—1, 1—2 usw. als gleich zu betrachten und die Figur gibt eine vorzügliche Illustration einer Messung auf dem Kreise, wo das Archimedische Axiom*) für keine Strecke, die den Punkt Q enthält, erfüllt ist.

Wir wollen aber bei der unendlichen Zahlenreihe noch einige Augenblicke stehen bleiben, um an ihr den Begriff der **Mächtigkeit** zu erläutern, der für die ganze Mengenlehre grundlegend ist. Das Zeichen ∞, das wir oben benutzten, bedeutete eigentlich keine Zahl, sondern sollte nur den oberen Abschluß der Zahlenreihe andeuten. Wir können aber dem Resultat der Abzählung der ganzen Zahlenreihe doch so etwas wie eine Zahl im weiteren Sinne, eine unendlich große Zahl zuordnen, die wir als solche mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen. $\mathfrak{a}$ bedeutet dann sozusagen die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen, oder wie man besser sagt, die »Mächtigkeit« der Reihe der natürlichen Zahlen. Wir müssen dann sofort definieren, wann denn zwei Mächtigkeiten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ als gleich groß zu betrachten seien. Hierzu verwendet man wieder das Prinzip der Abbildung. Zwei endliche Anzahlen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ heißen gleich, wenn jedem Elemente von $\mathfrak{e}_1$ ein Element von $\mathfrak{e}_2$ zugeordnet werden kann. Genau ebenso heißen wir zwei unendliche Mengen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gleichmächtig, wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eindeutig aufeinander bezogen werden können. Im besonderen heißt jede Menge, die der natürlichen Zahlreihe eindeutig zugeordnet, oder also in eine wohlgeordnete Reihe (mit bestimmtem Anfangsgliede und bestimmter Aufeinanderfolge) geschrieben werden kann, »**abzählbar**«. Ihre Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ ist mit der ersten unendlichen Kardinalzahl $\aleph_0$, nach der G. **Cantor**schen Bezeichnung, identisch.

Wir sehen nun gleich folgendes. Nehmen wir von der natürlichen Zahlreihe $0, 1, 2 \cdots$ eine Anzahl $\mathfrak{e}$ vorne weg und fangen erst bei $(\mathfrak{e}+1)$ mit 1 zu zählen an, so werden wir trotzdem die ganze unendliche Zahlreihe abzählen können. Z. B.

$$\begin{matrix} 1000 & 1001 & 1002 & 1003 & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

Diese Tatsache können wir durch die Gleichung ausdrücken

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{e}=\mathfrak{a} \qquad [\mathfrak{a}-\mathfrak{a}=\mathfrak{e}],$$

welche die unendliche Kardinalzahl sofort wesentlich von allen endlichen Zahlen unterscheidet, indem hier **der Teil gleich dem Ganzen sein kann.****) Auch diese Beziehung ist dem Schüler nicht fremd. Ich erinnere nur an die harmonische Teilung einer Strecke AB durch die Punkte O und O', so daß

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AO'}{BO'}=\lambda=\text{dem Teilungsverhältnis.}$$

Lassen wir dieses Teilungsverhältnis allmählich gleich 1 werden, so rückt O' ins Unendliche und es ist

$$AO'=BO' \text{ bezw. } AO'-BO'=AB.$$

*) S. etwa **Hilbert**, *Grundlagen der Geometrie* (2. Aufl., Teubner 1903), S. 16.

**) Ich merke hier an, daß Kardinalzahl deswegen gesagt werden muß, weil die unendlichen Ordinalzahlen, die sogen. »transfiniten Zahlen« Cantors, auf die ich nicht eingehen werde, etwas wesentlich anderes sind.

Die Kardinalzahl aller Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ ist nun offenbar $2\mathfrak{a}$. Es ist aber sofort klar, daß wir all diese Zahlen in eine Reihe ordnen können

$$\begin{matrix} 0, & -1, & +1, & -2, & +2, & -3, & +3, & \cdots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots, \end{matrix}$$

so daß, wenn wir die natürliche Zahlenreihe darunter schreiben, an die Stelle der ungeraden Zahlen die negativen und an die Stelle der geraden Zahlen die positiven treten. Es ist also auch

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Daraus folgt aber sofort, daß auch

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

und überhaupt

$$\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a} \quad \left[\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}}=\mathfrak{a}\right]$$

ist. Beispiel: Die Reihen

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ 0, & 1001, & 2001, & 3001, & 4001, & \cdots \end{matrix}$$

sind gleichmächtig, obwohl die erste sozusagen 1000mal so viel Glieder enthält wie die zweite. Auf die Mächtigkeit von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$ kommen wir nachher gleich von selbst.

Zunächst wollen wir wieder zu den endlichen Zahlen zurückkehren und setzen die Bedingung, die ganze Zahl b soll mit einer neuen Zahl x multipliziert, das Produkt a ergeben. D. h. wir wollen die lineare Gleichung lösen

$$b\cdot x=a.$$

Die formelle Lösung $x=\frac{a}{b}$ hat nur einen Sinn, wenn $a=n\cdot b$, a also ein Vielfaches von b ist. Indem wir dem Symbol $\frac{a}{b}$ auch eine Bedeutung beilegen, wenn $a<b$ oder wenn $a=nb+r$, erhalten wir die neue Zahlform der **rationalen Brüche**. Durch einige Festsetzungen kann man rein analytisch die Rechnungsregeln für solche Brüche ableiten, wie dies z. B. Herr **Weber** in der Enzyklopädie durchgeführt hat. Aber in der Schule müssen wir unbedingt konkreter verfahren. Wir knüpfen dann wieder entweder an das Abzählen an, indem wir immer n Schritte in der Zahlenreihe als neue Einheit, einen Schritt als $\frac{1}{n}$ auffassen, oder an das Messen, das hier auf ein Teilen hinausläuft. Das mögen Sie alles bei **Simon** nachlesen.

Ich will gleich wieder auf die **Mächtigkeit der Menge dieser Brüche** eingehen. Denke ich mir all die positiven und negativen rationalen Brüche zwischen die ganzen Zahlen meiner Zahlreihe eingeschaltet, so wird die Gerade, wie man sagt, »überall dicht« mit Punkten belegt. D. h. jeder so erhaltene Punkt ist selbst eine Häufungsstelle der Punktmenge. Z. B. ist

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{10\,000}=\frac{9997}{30\,000};\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{10\,000}=\frac{10\,003}{30\,000}.$$

Alle unendlich vielen Brüche also, die zwischen den beiden Werten $\frac{9997}{30\,000}$ und $\frac{10\,003}{30\,000}$ liegen, sind um weniger als $\frac{1}{10\,000}$ von dem Wert $\frac{1}{3}$ entfernt. Dieses Intervall kann man noch beliebig einengen. Daher ist $\frac{1}{3}$ ein Häufungspunkt. Und so jeder andere.

Betrachten wir das Intervall 0—1, das alle echten Brüche enthält und in der ganzen Geraden $\mathfrak{a}$-mal enthalten ist. Für jeden Nenner ν gibt es höchstens $(\nu-1)$

Brüche, die von allen vorhergehenden dem Wert nach verschieden sind. Im ganzen sind also in dem Intervall höchstens $1+2+3+4+\cdots=\mathfrak{a}$ Brüche, wobei man leicht erkennt, daß es nichts ausmacht, auch wenn man jeden Bruch in seinen unendlich vielen verschiedenen ungekürzten Formen mitzählt. Auf der ganzen Zahlreihe gibt es also $\mathfrak{a}^2$ oder mit Einschluß der negativen $2\,\mathfrak{a}^2=2\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$ Brüche. Zählt man dazu noch die ganzen Zahlen, so haben wir überhaupt

$$\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}+1)=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$$

rationale Zahlen. Dieselbe Mächtigkeit ergibt sich leichter, aber weniger anschaulich durch die Bemerkung, daß in der erzeugenden Gleichung aller Rationalzahlen $b\cdot x=a$ sowohl a, wie b je $\mathfrak{a}$ Werte annehmen können. Nachdem so die Mächtigkeit $\mathfrak{a}^2$ festgestellt ist, können wir folgendermaßen schließen: Jede Zahl kommt dabei $\mathfrak{a}$ mal — in ungekürzter Form — zur Zählung, so daß sich für die Mächtigkeit schließlich auch $\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}$ ergäbe. Diese formelle Ueberlegung ist tatsächlich richtig. Denn wir können alle rationalen Zahlen (allerdings nicht nach ihrer Größe) in eine wohlgeordnete Reihe bringen

$$0,+1,-1,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{2}{1},-\frac{2}{1},+\frac{1}{3},-\frac{1}{3},+\frac{3}{1},-\frac{3}{1},$$
$$+\frac{1}{4},-\frac{1}{4},+\frac{2}{3},-\frac{2}{3},+\frac{3}{2},-\frac{3}{2},+\frac{4}{1},-\frac{4}{1}\ldots,$$

wo die Brüche von konstanter Summe des Zählers und Nenners nach dem Zähler geordnet sind.

Die Gesamtheit aller rationalen Zahlen ist also abzählbar, d. h. von der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$.

Wir finden demnach

$$\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$$

und natürlich auch $\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$. Daraus folgt aber sofort durch Induktion

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{e}}=\mathfrak{a}.$$

Man kann sich die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen auch geometrisch versinnlichen, indem man die Zahlenpaare (a, b) als Punkte in ein rechtwinkliges Achsensystem einträgt (Fig. 2). Dann kann man, vom Anfangspunkte beginnend, die Punktmenge, die gewiß die Mächtigkeit $\mathfrak{a}^2$ hat, in einer Linie durchlaufen, wenn man der in der Figur ausgezogenen eckigen

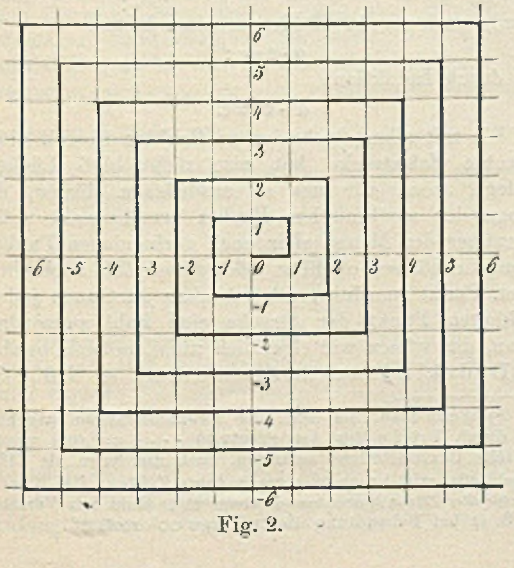


Fig. 2.

Spirale folgt. Dies läßt sich auch im Raum für die Zahlentripel (a, b, c) von der Mächtigkeit $\mathfrak{a}^3$ machen, wird aber da schon weniger übersichtlich, weil man nach zwei Umläufen schon $5^3=125$ Punkte abzuzählen hat. Nach dem Obigen wird sich aber die Mächtigkeit der Punktmenge auch nicht verändern, wenn wir alle Zahlenpaare (a, b), wo a und b selbst alle rationalen Zahlen bedeuten können, in das Koordinatensystem eintragen. Die Ebene ist dann sogar überall dicht bedeckt und die Mächtigkeit ist $\mathfrak{a}^2\cdot\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}^4=\mathfrak{a}$. Ebenso für einen Raum von beliebiger (endlicher) Dimensionszahl. Ja, wir werden gleich sehen, daß sich auch diese Punktmenge noch bedeutend verdichten läßt, ohne die Eigenschaft der Abzählbarkeit zu verlieren.

Mit den rationalen Zahlen sind die Lösungen aller Gleichungen ersten Grades erschöpft. Es ist hinzuzufügen, daß die rationalen Zahlen einen »Zahlkörper« bilden, so daß durch endliche Anwendung der vier Grundrechnungsarten aus einer rationalen Zahl immer wieder eine rationale Zahl hervorgeht. Ich unterwerfe nun x der Bedingung, daß es einer quadratischen, zunächst rein quadratischen Gleichung genügen soll und setze

$$x^2=a,$$

wo a eine rationale Zahl bedeuten soll. Diese Gleichung ist dann nur lösbar, wenn a das Quadrat einer anderen Rationalzahl ist. Wir setzen in diesem Falle

$$x=\sqrt{a}$$

und definieren durch dieses Symbol wieder eine neue Zahlgattung, wenn a keine Quadratzahl ist. Ist a positiv, so kann man durch das Verfahren des Quadratwurzelziehens die neue Zahl $\sqrt{a}$ bis zu einer beliebigen Genauigkeit berechnen. Sie charakterisiert sich auch bei dieser Berechnung sofort als Reihenzahl, weshalb auch ich mit Herrn Simon der G. Cantorschen Auffassung der Irrationalzahl den Vorzug gebe. Hierauf will ich jedoch nicht eingehen. Sie finden bei Simon alles in bester Ausführlichkeit. Wenn wir versuchen, die Punkte, welche den irrationalen Quadratwurzeln entsprechen, auch noch auf unserer linearen Zahlenreihe unterzubringen, so ist von vornherein klar, daß sie sich zwischen die zwar überall dicht liegenden, aber doch nirgends die Gerade stetig erfüllenden Zahlen eindrängen müssen. Da es aber zu jeder reellen positiven Zahl höchstens zwei Quadratwurzeln gibt, die im Körper der rationalen Zahlen nicht vorkommen, so wird die Mächtigkeit der Menge der Rationalzahlen durch Adjunktion der Quadratwurzeln nicht vergrößert. Ich stelle eben in der abzählbaren Menge der rationalen Zahlen hinter jede positive Zahl ihre beiden Quadratwurzeln.

Nehmen wir nun auch den Fall eines negativen a hinzu, soll also

$$x^2=-a$$

sein, so führen wir die neue Zahlgattung der imaginären Zahlen in bekannter Weise ein und setzen

$$x=\sqrt{-a}=\pm i\sqrt{a}.$$

Da auch jedes solche Zahlenpaar hinter die betreffende negative Zahl $-a$ eingeschoben werden kann, wird die Mächtigkeit des Zahlsystems auch durch Hinzunahme der rein imaginären Zahlen nicht verändert. Wir haben jetzt folgende wohlgeordnete Reihe:

$$0,+1,-1,+i,-i,+\frac{1}{2},+\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{1}{2},+i\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$-i\sqrt{\frac{1}{2}}, +2, +\sqrt{2}$$

usw. Auf der Zahlgeraden entsprechen den imaginären Zahlen natürlich keine Punkte. Wir haben eine neue Einheit i eingeführt, die in einer anderen Richtung gemessen werden müßte.

Man kann aber gleich viel allgemeiner vorgehen. Es gibt offenbar $\mathfrak{a}^3$ ganzzahlige quadratische Gleichungen

$$a x^2 + b x + c = 0$$

mit $2\,\mathfrak{a}^3$ Lösungen, einbegriffen die $\mathfrak{a}^2$ rationalen Zahlen, die sich für $a = 0$ ergeben. Da aber $2\,\mathfrak{a}^3 = \mathfrak{a}$, ist die ganze Menge auch dieser Zahlen abzählbar. Nun heißt »algebraische Zahl« jede solche, die einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt, etwa

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Solcher Gleichungen gibt es $\mathfrak{a}^{n+1}$ mit $n \cdot \mathfrak{a}^{n+1}$ Lösungen. Solange nun n endlich, ist immer

$$n \cdot \mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}.$$

Die Menge aller algebraischen Zahlen ist also abzählbar. Da hiernach selbstverständlich auch die Menge aller reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist, ist die Punktmenge der Geraden, der Ebene und des Raumes mit nur algebraischen Koordinaten abzählbar. Das ist die oben angedeutete Verdichtung. Der von Cantor herrührende direkte Beweis für die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen steht bei Simon und in jedem modernen Lehrbuch der Algebra.

Wenn wir nun zu unserer reellen Zahlreihe auf der Geraden zurückkehren, die wir durch Eintragung der algebraischen Punkte noch mehr verdichtet haben, so muß es doch noch Lücken in derselben geben. Denn wir wissen seit Liouville, daß es »transzendente Zahlen« gibt, d. h. solche, die keiner algebraischen Gleichung genügen, seit Hermite und Lindemann*), daß die allerwichtigsten Zahlen der Analysis, e und π, zu diesen gehören. Der allgemeinste von Lindemann aufgestellte Satz sagt sogar noch mehr, nämlich:

Es ist unmöglich, daß die Zahl e einer Gleichung von der Form

$$C_0 + C_1 e^{\varkappa} + C_2 e^{\lambda} + \cdots = 0$$

genüge, wo sowohl die Exponenten $\varkappa, \lambda \cdots$ als auch die Koeffizienten $C_0, C_1, C_2 \cdots$ algebraische Zahlen sind. Daher sind alle natürlichen Logarithmen und alle trigonometrischen Funktionen algebraischer Zahlen transzendent. Denn da, wenn $y = \log x$, $x = e^y$ ist, so muß x transzendent sein, wenn y algebraisch ist. Und da, wenn $y = \sin x$, $2\,iy = e^{ix} - e^{-ix}$ ist, muß ebenfalls für ein algebraisches x y transzendent sein. Ebenso ist in beiden Fällen x transzendent für ein algebraisches y. Wenn wir uns daher die ganze Ebene wie vorhin mit den überall dicht liegenden Punkten, deren zwei Koordinaten algebraisch sind, bedeckt denken, so wird die Kurve $y = \log x$, obwohl sie völlig stetig verläuft, außer dem Punkt $x = 1$, $y = 0$ keinen der gegebenen Punkte passieren, ebenso die Linie $y = \sin x$ keinen außer dem Nullpunkt.

Um nun festzustellen, ob und in welcher Weise zunächst die reellen transzendenten Zahlen die Mächtigkeit der algebraischen Zahlenreihe verändern werden, wollen wir uns die reellen algebraischen Zahlen, deren Menge ja abzählbar ist, alle als Dezimalbrüche geschrieben und in eine Reihe geordnet denken. Dann läßt sich leicht zeigen, daß in jedem noch so kleinen Intervall immer noch unendlich viel Zahlen sind, die der abzählbaren Reihe nicht angehören, die wir also »transzendent« heißen. Ich nehme gleich als Beispiel das Intervall

$$0{,}001 - 0{,}01.$$

Diesem Intervall gehören alle Dezimalbrüche an von der Form

$$0{,}00\,a_1\,a_2\,a_3 \cdots \quad [a_1 > 0].$$

Die Reihe der dem Intervall angehörenden algebraischen Zahlen sei nun geordnet die folgende:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}00\,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \cdots \\ u_2 &= 0{,}00\,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \cdots \\ u_3 &= 0{,}00\,a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \cdots \\ &- - - - - - - - - \\ u_i &= 0{,}00\,a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}\ \cdots \\ &- - - - - - - - -. \end{aligned}$$

Bedeutet nun (a_{ii}) irgend eine von a_{ii} verschiedene Ziffer, so werden alle Zahlen der Form

$$u = 0{,}00\,(a_{11})\ (a_{22})\ (a_{33}) \cdots (a_{ii}) \cdots$$

wohl in dem Intervall liegen, aber der abzählbaren Menge nicht angehören, da sie sich von jeder der Zahlen u_i wenigstens in der Ziffer a_{ii} unterscheiden. Die Zahlen u sind die transzendenten Zahlen des Intervalls. Ihre Menge ist nicht abzählbar, denn sonst könnte man immer noch neue Zahlen nach demselben Verfahren finden. In der Tat ist ihre Menge viel größer als alle bisher betrachteten. Wenn wir bedenken, daß an jeder Stelle 9 verschiedene Ziffern stehen können, während es $\mathfrak{a}$ Stellen sind, so finden wir die Anzahl der Variationen von 9 Elementen zu je $\mathfrak{a}$ als

$$9^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Rechnen wir die ganze abzählbare Menge der algebraischen Zahlen hinzu, so erhalten wir $10^{\mathfrak{a}}$. Daß dies aber von $9^{\mathfrak{a}}$ nicht wesentlich verschieden sein kann, erhellt schon daraus, daß ja die Grundzahl 10 ganz willkürlich ist und wir alle Zahlen ebensowohl in einem dyadischen oder einem Duodezimal-System schreiben könnten.*) Wir können somit, wenn wir die neue Mächtigkeit mit $\mathfrak{c}$ bezeichnen, schreiben

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

Auch ist ohne weiteres klar, daß die Gleichungen gelten

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{e} = \mathfrak{c};\quad \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c};\quad \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Es ist aber auch, da irgend ein Intervall in der ganzen Geraden $\mathfrak{a}$-mal enthalten ist, und wir für die ganze Gerade auch nur $10^{\mathfrak{a}}$ Zahlen erhalten können

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

und durch Induktion

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Die mit allen algebraischen Punkten überall dicht bedeckte Zahlstrecke hat also nicht bloß Lücken, sondern, wenn wir uns so ausdrücken dürfen, die Menge der algebraischen Punkte verschwindet völlig gegenüber der Menge aller noch vorhandenen Punkte. Denn wir können offenbar jeder neuen Zahl auch einen neuen Punkt zuordnen. Ob wir aber jetzt auch jedem denkbaren Punkt der Strecke eine Zahl zugeordnet haben, das wissen wir eigentlich nicht, nehmen es aber an (Dedekindsches Stetigkeitsaxiom), so daß $\mathfrak{c}$ die

---

*) Liouville, C. R. Ac. Sc. Paris 1844 u. Journ. math. p. appl. 16, 1851. — Hermite, C. R. Ac. Sc. Paris 1873. — Lindemann, Math. Ann. 20, 1882.

*) Wenn man, um auch der Eventualität zu entgehen, daß durch Brüche der Art $0{,}00239999 \cdots = 0{,}0024$ wieder endliche Dezimalbrüche auftreten, auch die Neun als Ziffer ausschließt, erhält man $8^{\mathfrak{a}}$ transzendente Zahlen. Bei Klein, *Vorträge über Elementargeometrie* (Teubner 1895) steht aus Versehen auf S. 42 bei Behandlung dieser Frage ∞^8 statt 8^{∞}.

Mächtigkeit des linearen Kontinuums darstellt. Es ist bis jetzt nicht streng bewiesen, aber äußerst wahrscheinlich, daß $\mathfrak{c}$ mit der zweitgrößeren unendlichen Kardinalzahl, die Cantor auf anderem Wege einführt und mit $\aleph_1$ bezeichnet, identisch ist, d. h. daß zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ keine Mächtigkeiten existieren.

Um nun auch geometrisch evident zu machen, daß die Punktmenge zweier beliebigen endlichen oder unendlichen Strecken gleichmächtig ist und die eineindeutige Beziehung auch durch eine Formel wiederzugeben, projizieren wir wieder die beiden Strecken aufeinander, indem wir sie mit einem Endpunkt O vereinigen und das Projektionszentrum P auf der Verbindungsgeraden der beiden anderen Endpunkte A und B annehmen (s. Fig. 3). Zählen wir auf beiden Strecken

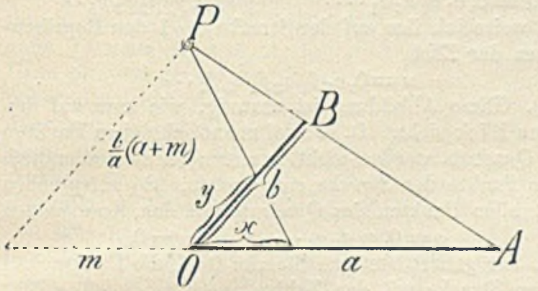


Fig. 3.

von dem gemeinsamen Endpunkt als Nullpunkt, so entsprechen den Endpunkten A bezw. B die Zahlen a bezw. b, wenn die Strecken die Längen a bezw. b haben. Das Projektionszentrum P habe in bez. auf die Strecken a und b als (schiefwinklige) Achsen die Koordinaten $-m$, $+\frac{b}{a}(a+m)$. Dann hat man sofort für zwei beliebige entsprechende Punkte

$$y:x = \frac{b}{a}(a+m):(x+m)$$

oder

$$y = \frac{b}{a}(a+m)\cdot\frac{x}{x+m}$$

und hieraus $x = \dfrac{m\,a\,y}{b\,(a+m) - a\,y}$.

Diese beiden Formeln vermitteln die ein-eindeutige Beziehung der Zahlreihen von 0 bis a und 0 bis b und zwar für alle Zahlen des Intervalls oder aber für die rationalen, algebraischen oder transzendenten allein. Sie haben zugleich den Vorteil vor der Aehnlichkeitsformation, die man bei zwei endlichen Strecken auch anwenden könnte ($m = -\infty$; $y = \frac{b}{a}x$), daß man a unendlich groß nehmen kann (s. Fig. 4). Dann geben die Gleichungen

$$y = b\cdot\frac{x}{x+m}$$

$$x = m\cdot\frac{y}{b-y}$$

die ein-eindeutige Beziehung zwischen allen Zahlen von 0 bis b und allen Zahlen von 0 bis ∞. Will man einer Strecke eine ganze Gerade zuordnen, so nehme man auf der Strecke und auf der Geraden irgend einen Punkt und ordne die bez. Teile links und rechts einander zu. Daß die Punktmenge des Kreises mit der Geraden gleichmächtig ist, haben wir schon zu Anfang gezeigt. Für Kegelschnitte ergibt sich das in

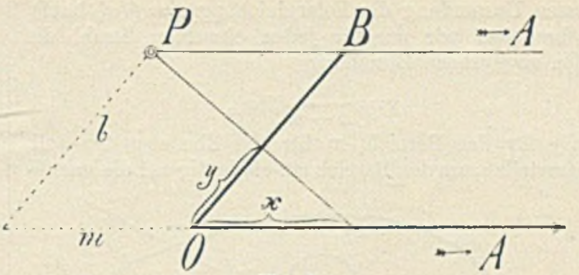


Fig. 4.

derselben Weise. Wir heißen überhaupt »Linie« oder Gebilde erster Dimension alles, was mit der stetigen Zahlreihe auf irgend eine Weise in eine ein-eindeutige und stetige Beziehung gesetzt werden kann.*)

Wenn nun die Punktreihe $\mathfrak{c}$ Punkte enthält, so hat auch das Strahlbüschel, das auch ein Parallelstrahlbüschel sein kann, $\mathfrak{c}$ Gerade. Wir erzeugen jetzt eine Ebene, indem wir von einem beliebigen 0-Punkt und einem 0-Strahl ausgehend den Strahl eine volle Drehung machen lassen, während er auf einer Geraden Γ gleitet. Durch den betreffenden Punkt der Geraden Γ ist dem Strahl eine bestimmte Zahl zugeordnet, während jeder Punkt des Strahles selbst eine bestimmte Zahl trägt, die während der Drehung auf dem Umfange eines Kreises bleibt. Jedem Punkte der Ebene ist mithin ein Zahlenpaar (a, b), wo a und b alle reellen Zahlen bedeuten, zugeordnet. Die Menge aller Punkte der Ebene bildet somit eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, ihre Mächtigkeit wird durch $\mathfrak{c}^2$ dargestellt.

Die Zahlen a und b kann man als Polarkoordinaten auffassen. Es hindert jedoch nichts, sie auch als rechtwinklige zu deuten. Wir lassen dann eben die erzeugende Gerade um einen unendlichfernen Punkt sich drehen und nehmen den Nullpunkt immer auf Γ an, wo wir ebenfalls einen willkürlichen Nullpunkt festlegen. Jedem Punkt ist dann auch hier ein Zahlenpaar (a, b) zugeordnet. Wir können dies auch als eine reelle Darstellung aller überhaupt möglichen komplexen Zahlen der Form $a + b\,i$ auffassen. Mit diesen komplexen Zahlen ist der Zahlkörper der gewöhnlichen Arithmetik abgeschlossen. Man kann dem Schüler (allerdings nur an den einfachsten Beispielen) zeigen, daß jede Operation mit einer komplexen Zahl wieder auf eine solche Zahl führt, so daß man nicht genötigt wird, neue Zahlen einzuführen. Freilich stehen schon bei Bardey Beispiele, deren Lösung wir in der Schule nicht leisten können. Ich erinnere nur an Gleichungen der Art $(-2)^x = 32$, wo die Lösung zwar komplex ist, aber nicht abgeleitet werden kann, da die Formel $e^{i\pi} = -1$ dazu nötig ist. Man muß das aber den Schülern wohl sagen, da sie nach dem Vorgetragenen gewohnt sein müssen, bei Unmöglichkeit der Lösung einer Gleichung durch Zahlen einer bestimmten Art an die Einführung einer neuen Zahlengattung zu denken.

Wir wollen nun zunächst wieder nachweisen, daß alle (endlichen und unendlichen) zweidimensionalen Bereiche die Mächtigkeit $\mathfrak{c}^2$ haben. Hat man irgend einen endlichen, einfach zusammenhängenden Bereich,

*) Eine so definierte »Linie« braucht natürlich im allgemeinen durchaus nicht die Eigenschaften zu haben, die eine geometrische Kurve, wie man sie sich gewöhnlich vorstellt, besitzt. Man bezeichnet das Gebilde, das durch die Eindimensionalität charakterisiert ist, meist als »Jordansche Kurve« (Vgl. C. Jordan a. a. O. S. 90).

dessen Umrandung die Polargleichung $\varrho = f(\omega)$ hat*), so brauchen wir nur für jeden einzelnen Strahl die oben angegebene Beziehung

$$y = \frac{x}{x+m} f(\omega),$$

wo y für den Bereich, x für die Ebene gelten soll, aufzustellen, um den Bereich ein-eindeutig auf die unendliche Ebene abzubilden (vgl. Fig. 5).

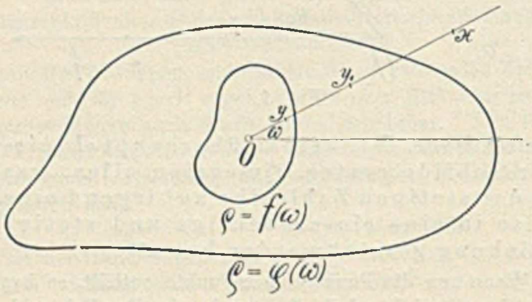


Fig. 5.

Ist für einen zweiten Bereich, dessen Rand die Gleichung $\varrho = \varphi(\omega)$ hat, ebenso

$$y_1 = \frac{x}{x+m} \varphi(\omega),$$

so erhält man für die ein-eindeutige Abbildung beider Bereiche aufeinander sofort

$$y = y_1 \cdot \frac{f(\omega)}{\varphi(\omega)},$$

d. i. die oben schon angedeutete Aehnlichkeitstransformation. Ich will als Beispiel ein Quadrat und einen konzentrischen Kreis nehmen (Quadratseite a, Kreisradius r, Fig. 6). Dann ist in dem einen Quadranten für die Quadratseite $\varrho = \frac{a}{2\cos\omega}$, für den Kreis $\varrho = r$. Durch die Gleichung

$$y = x \cdot \frac{a}{2\, r \cos\omega}$$

für jeden Radiusvektor wird der Quadratquadrant ein-eindeutig punktweise dem Kreisquadranten zugeordnet. Für die übrigen Quadranten ist es ebenso zu machen.

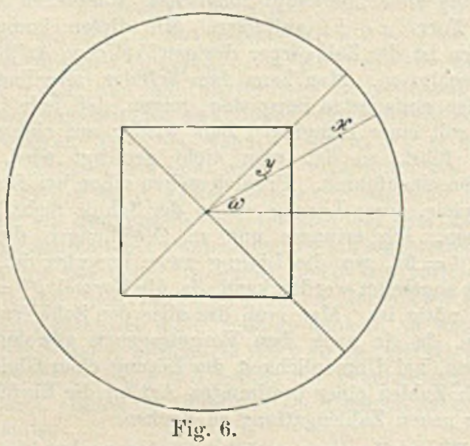


Fig. 6.

Es steht aber nun immer noch die Frage offen, ob nicht etwa, wie schon $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ war, auch $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$ sei. Das hieße mit Worten: Das zweidimensionale Kontinuum hat dieselbe Mächtigkeit wie das lineare. Dies ist nun in der Tat der Fall. Denn nach unserer Definition ist

$$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{e}^{\mathfrak{a}})^2 = \mathfrak{e}^{2\mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Um diesen höchst merkwürdigen Satz aber direkt zu beweisen, können wir uns darauf beschränken, die eineindeutige Beziehung zwischen der Zahlenreihe 0—1 und der Punktmenge des über dieser Strecke errichteten Quadrates nachzuweisen. Dann haben wir es nur mit Dezimalbrüchen zu tun, die mit $0, \cdots\cdot$ beginnen. Irgend einem Punkte der Strecke mit der Zahl

$$u = 0,\, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots$$

ordne ich nun im Quadrat den Punkt zu mit den Koordinaten

$$x = 0,\, a_1 a_3 a_5 \cdots \qquad y = 0,\, a_2 a_4 a_6 \cdots.$$

Das sind aber selbstverständlich auch Zahlen, die schon unter den u vorkommen. Umgekehrt, wenn ein Punkt die Koordinaten

$$x = 0,\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \cdots \qquad y = 0,\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \cdots$$

hat, weise ich ihm auf der Strecke 0—1 den Repräsentanten der Zahl

$$u = 0,\, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \cdots$$

zu*). Diese Abbildung ist unstetig, wie man auf den ersten Blick sieht. D. h. zwei unendlich nahen Punkten des Quadrats werden nicht immer auch zwei unendlich nahe Punkte der Strecke entsprechen. So entsprechen z. B. allen Punkten des Quadrats mit den Koordinaten

$$x = 0,\, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad y = 0,$$

d. h. der ganzen stetigen Strecke 0—1 die Punkte derselben Strecke mit den Zahlen

$$u = 0,\, a_1\, 0\, a_2\, 0\, a_3\, 0\, a_4 \cdots,$$

deren Mächtigkeit zwar immer noch $\mathfrak{c}$ ist, die aber gewiß keine stetige Folge bilden.

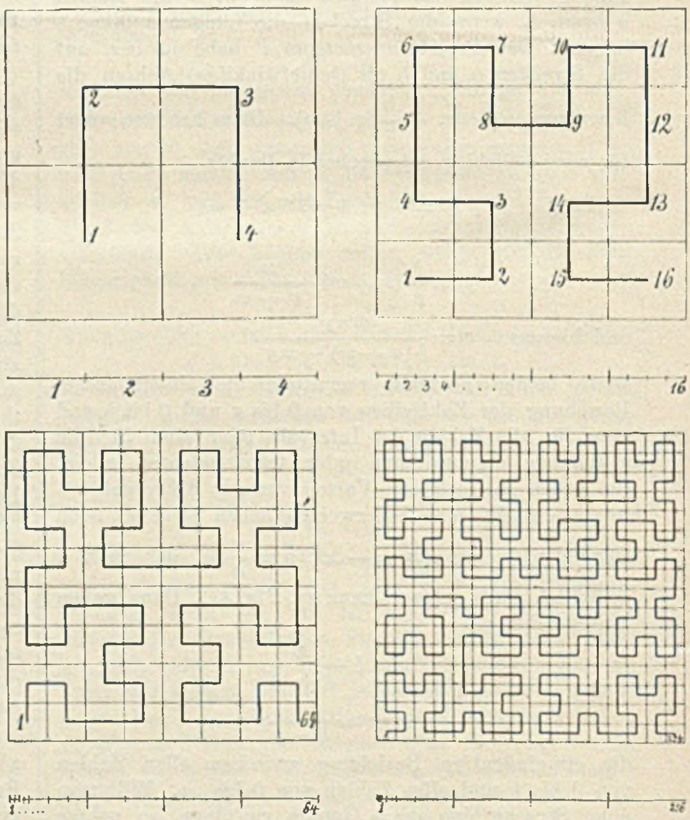


Fig. 7.

*) Ist der Bereich komplizierter, so muß man ihn in Stücke zerlegen.

*) Hier ist, da jeder endliche Dezimalbruch auch in unendlicher Form geschrieben werden kann ($0{,}4 = 0{,}39999\ldots$) eine kleine Schwierigkeit wegen der ausnahmslosen Eineindeutigkeit dadurch zu überwinden, daß man endliche Dezimalbrüche weder bei den u, noch bei den x, y zuläßt.

Man kann jedoch die Punkte der Strecke sogar eindeutig und stetig den Punkten des Quadrates zuordnen, wie zuerst Peano gezeigt hat. In der von Hilbert*) bald darauf gegebenen mehr geometrischen Form ist die Sache so anschaulich, daß es jeder einigermaßen begabte Schüler verstehen muß.

Man teile zunächst die Strecke in vier gleiche Teile (s. Fig. 7), ebenso das Quadrat, sodann nehme man in jeder Teilstrecke und jedem Teilquadrat wieder eine Vierteilung vor und bezeichne die Teilstrecken und Teilquadrate mit den Ziffern 1 bis 16, aber bei den Quadraten so, daß jedes folgende Quadrat sich an das vorhergehende mit einer Seite anlehnt, so daß alle Quadrate in einem Zuge passiert werden können. Dieses Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden und man gelangt so dazu, jedem Punkte der Geraden, indem man ihn in immer kleinere Teilstrecken einschließt, einen ganz bestimmten Punkt des Quadrates zuzuweisen. Denn die entsprechenden Teilquadrate liegen ebenfalls notwendig ineinander und bestimmen in ihrer Grenze den Punkt des Quadrats. Durchläuft man die Strecke stetig von 0—1, so überstreicht die entsprechende Zickzacklinie im Quadrat — man heißt sie Peanosche Kurve**) — der Reihe nach alle Punkte des Quadrats.

Was ist nun aber der charakteristische Unterschied von zwei Dimensionen gegenüber einer? Wie Sie sehen, meine Herren, ist das keineswegs so einfach. Es ist das ein Punkt, der nicht einmal in der Weber-Wellsteinschen *Enzyklopädie* exakt dargestellt wurde, viel weniger in unseren gebräuchlichen Elementarbüchern.***) Wir kommen aber auf das Richtige, wenn wir unsere oben gegebene Definition für die eindimensionale Punktmenge gehörig erweitern und gemäß der zuerst angegebenen Erzeugung der Ebene sagen:

Zweidimensional heißt eine Punktmenge, deren Elemente ein-eindeutig und stetig dem Systeme der aus allen reellen Zahlen gebildeten Zahlenpaare (a, b) zugeordnet werden können.

In der Tat war unsere erste Abbildung des Quadrats auf die Strecke wohl ein-eindeutig, aber nicht stetig, die Peano-Hilbertsche ist eindeutig und stetig, aber nicht ausnahmslos eindeutig umkehrbar. Wohl werden wir jedem Quadratpunkt mit zwei irrationalen Koordinaten einen bestimmten Punkt der Strecke zuweisen können, aber für jeden Punkt mit nur einer rationalen Koordinate wird sich eine Zweideutigkeit, für jeden Punkt mit zwei rationalen Koordinaten eine Vierdeutigkeit ergeben. Beispielsweise wird es schon nach der ersten Vierteilung zweifelhaft bleiben, welchem Gebiete der Strecke der Mittelpunkt des Quadrates zuzuweisen sein wird.

Es ist klar, wie diese Betrachtungen auf den Raum fortgesetzt werden können. Verbinden wir irgend einen Punkt P mit sämtlichen Punkten einer Ebene durch Gerade, so erhalten wir alle Punkte des Raumes und können jedem ein Zahltripel (a, b, c) zuordnen, resp. eine gewisse höhere komplexe Zahl $a + bi + cj$. Alles übrige läßt sich direkt übertragen, worauf ich nicht mehr eingehe. Wir definieren wieder eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit als den Inbegriff aller Elemente, die sich den Tripeln aller reellen Zahlen (a, b, c) ein-eindeutig und stetig zuordnen lassen.

Die Mächtigkeit des dreidimensionalen Kontinuums und überhaupt des Kontinuums jeder Dimension ist aber nur $\mathfrak{c}$. In Buchstaben

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c};\ \mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c};\ \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}.$$

Da aber $\mathfrak{c} = e^{\mathfrak{a}}$ war, so ist auch

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = (e^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = e^{\mathfrak{a}^2} \doteq e^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Ergänzend sei dann noch erwähnt, daß, da schon $e^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ ist, aber $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}$ auch gleich $\mathfrak{c}$, auch $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ sein muß. Andrerseits wäre

$$e^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c},$$

gäbe also eine höhere Mächtigkeit als die des Kontinuums, die einstweilen nur funktionentheoretisches Interesse hat.

Wir haben so nur zwei Mächtigkeiten von geometrischer Verwendbarkeit kennen gelernt, d. i. die Mächtigkeit $\aleph_0$ aller abzählbaren Mannigfaltigkeiten und die Mächtigkeit $\aleph_1$ des Kontinuums von beliebig vielen — bis zu abzählbar unendlich vielen — Dimensionen.

In der Ebene und im Raum gibt es noch mancherlei Dinge, die in der angedeuteten Richtung liegen und dem Schüler leicht zugänglich sind. Man leitet unschwer ab, daß die Ebene $\mathfrak{c}^2$ Gerade, der Raum $\mathfrak{c}^3$ Ebenen, aber $\mathfrak{c}^4$ Gerade enthält. Die niedrigere Dimension ist dabei gegenüber der höheren zu vernachlässigen. Der Schüler wird dies leicht verstehen, wenn man ihn fragt, ob etwa die Punktmenge einer Ebene wesentlich geändert wird, wenn man die Mengen der Punkte von einer oder mehreren Geraden sich daraus wegdenkt.

Es ist $\mathfrak{c}^2 - e \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\mathfrak{c} - e) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$. Schwieriger ist die Sache schon, wenn man sich die Ebene überall dicht von Punkten mit algebraischen Koordinaten bedeckt und diese sämtlich herausgenommen denkt. Daß es dann zwischen zwei Punkten immer noch stetige Verbindungslinien gibt, haben wir an der Exponential- und Sinuskurve gesehen. Aber gibt es denn in einer solchen Ebene noch Gerade und wie viele? Die Beantwortung dieser Frage ist sehr einfach. Die ganze Ebene enthält $\mathfrak{c}^2$ Gerade. Wir haben aus ihr $\mathfrak{a}$ Punkte entfernt, durch die $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$ Gerade gehen, wobei sogar jede unendlich oft gezählt sein kann. Daher bleiben noch immer

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$$

gerade Linien. Das ungeheuere Ueberwiegen der Menge der transzendenten Zahlen über eine noch so dichte, aber abzählbare Menge könnte kaum besser illustriert werden*). Es gibt dann allerdings nicht mehr zwischen irgend zwei Punkten der Ebene eine Gerade, aber die Mächtigkeit der Geradenmenge hat sich nicht verändert.

Der Schüler versteht ferner leicht, daß es $\mathfrak{c}^3$ verschiedene Dreiecke oder Parallelogramme, $\mathfrak{c}^4$ Trapeze, $\mathfrak{c}^5$ Vierecke gibt. Dies ist nur eine andere Formulierung

---

*) Peano, Math. Ann. 36, 1890, S. 157—160; Hilbert, Math. Ann. 38, 1891, S. 459/60.

**) Diese sog. Peanosche Kurve ist selbstverständlich keine eigentliche »Linie«, d. h. nicht einmal eine Jordansche Kurve. Vielmehr stellt ein solches Gebilde eine Uebergangsform zwischen der ersten und zweiten Dimension dar.

***) Man sehe den Aufsatz von Loria „*La definizione dello spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor*". Giorn. mat. 25, 1887, S. 97—108. — Sehr präzis ist auch die Darstellung in dem kürzlich erschienenen 1. Heft des Werkes von W. F. Osgood „*Lehrbuch der Funktionentheorie*" (Teubner 1906) S. 120 ff.

*) Andererseits zeigen uns solche Beispiele aufs deutlichste, daß, so sehr wir uns bemühen, uns eine Linie ohne Dicke zu denken, dies uns doch unmöglich ist. Vergl. die »Funktionsstreifen« F. Kleins, *Anw. der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig 1902 (Comm. Teubner), S. 260 und Poincaré-Weber, *Der Wert der Wissenschaft* (Teubner 1906), S. 12/13.

der Tatsache, daß ein Dreieck oder Parallelogramm durch 3, ein Trapez durch 4, ein Viereck durch 5 Stücke bestimmt ist. Es gibt $\mathfrak{c}^2$ Rechtecke oder Rauten, $\mathfrak{c}$ Quadrate, gleichzeitige Dreiecke, Kreise. Dabei ist die Lage der betreffenden Figur unberücksichtigt. — Fragt man, wieviel Kreise überhaupt es in der ganzen Ebene gebe, so ergibt sich, da ein Kreis erst durch drei Punkte festgelegt ist, $\mathfrak{c}^3$. Läßt man einen Punkt weg, so hat man ein Büschel mit $\mathfrak{c}$ Kreisen (die Mittelpunkte erfüllen die $\mathfrak{c}$ Punkte einer Geraden), läßt man noch einen zweiten Punkt weg, so hat man ein Kreisbündel (die Mittelpunkte erfüllen die ganze Ebene) mit $\mathfrak{c}^2$ Elementen. Ebenso gibt es im Raum $\mathfrak{c}^4$ Kugeln, durch einen Punkt $\mathfrak{c}^3$ (Gebüsch), durch zwei Punkte $\mathfrak{c}^2$ (Bündel), durch drei Punkte $\mathfrak{c}$ (Büschel), durch vier Punkte eine einzige Kugel. Die Menge aller Geraden, die eine bestimmte treffen, ist $\mathfrak{c}^3$. Die aller übrigen Geraden $\mathfrak{c}^4 - \mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}^3(\mathfrak{c} - 1) = \mathfrak{c}^4$. Ja man kann auch hier abzählbar unendlich viele Gerade geben, z. B. alle $\mathfrak{a}^4$, die algebraische Koordinaten haben, dann gibt es immer noch

$$\mathfrak{c}^4 - \mathfrak{a}^4 \cdot \mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}^3(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}^4) = \mathfrak{c}^3 \cdot (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}^3 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^4$$

Gerade, die keine von den gegebenen treffen.

Meine Herren, diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren. Ich will aber zum Schlusse kommen. Ich habe von den Begriffen und Ergebnissen der Mengelehre diejenigen darzustellen gesucht, die in einer direkten Beziehung zu Dingen stehen, deren Behandlung im Unterrichte geboten ist. Wenn ich da und dort etwas mehr sagte, so diente das zur Ergänzung und Vervollständigung. Manche von den einschlägigen Wahrheiten sind so überraschend und trotzdem leicht verständlich — ich möchte nochmals auf die gleiche Mächtigkeit aller Kontinua hinweisen —, daß sie, hier und da eingestreut, uns helfen werden, die unvermeidliche Eintönigkeit trigonometrischer, stereometrischer und anderer Uebungsaufgaben zu unterbrechen, dem Schüler Zusammenhänge aufzudecken, in deren Erinnerung die alte, tief wurzelnde Meinung von der Mathematik als einem sehr trockenen Gegenstand, mehr und mehr in der kommenden Generation verblassen soll, einstweilen im Rahmen der bestehenden Verordnungen, hoffentlich aber in nicht mehr zu ferner Zeit auf Grund einer neuen, dem Wunsche der Mathematiker aller Nationen entsprechenden, von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und von unserem Verein, speziell der bayrischen Sektion vertretenen und warm befürworteten, auf verbesserter Grundlage errichteten Lehrordnung.

Die Anwendbarkeit der Simpsonschen Regel, gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Archimedischen Satzes.

Von O. Nitsche (Charlottenburg).

Bei der Berechnung von Körperstumpfen ist die Simpsonsche Regel bekanntlich anwendbar, wenn der Körper von zwei parallelen n- bezw. m-seitigen Grundflächen und einer gewissen Anzahl von Drei- und Vierecken als Seitenflächen begrenzt wird. Da die positiven ganzen Zahlen n und m keiner weiteren Beschränkung unterworfen sind, so ist ohne weiteres klar, dass die Regel, ebenso wie die Formel für Prisma und Pyramide, auch für den Grenzfall m und $n = \infty$ Gültigkeit behält, so lange die Seitenflächen sich als aus Parallelogrammen oder Dreiecken von endlicher Höhe und unendlich kleiner Grundlinie zusammengesetzt darstellen lassen. Die Simpsonsche Regel gilt also auch für Körper, die von parallelen Grundflächen und einer beliebigen geradlinigen Fläche als Seitenfläche begrenzt werden. Dies ist allgemein bekannt, die häufigste und am nächsten liegende Anwendung wohl der Kegelstumpf. Damit allein aber würde die Regel eine immerhin ziemlich beschränkte Anwendbarkeit haben und, selbst wenn man auch das einschalige Rotationshyperboloid, auf das ich unten zurückkomme, mit in den Kreis der Betrachtung ziehen wollte, für den Unterricht an höheren Anstalten wenig an Bedeutung gewinnen, wenn sich nicht gewisse von krummen, aber durchaus nicht geradlinigen Flächen begrenzte Körper nach dem Cavalierischen Prinzip in geradlinig begrenzte verwandeln liessen. Für die Kugel stellt diesen Zusammenhang der Satz des Archimedes her, der das Volumen jener durch das des geradlinig begrenzten Restkörpers ausdrückt. Dasselbe gilt von Kugelabschnitt und Kugelschicht. Beispiel:

$$\text{Kugel} = \frac{\pi h}{6}(0 + 0 + 4r^2) = \pi \frac{2r \cdot 4r^2}{6} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Es lässt sich also jeder der genannten Kugelteile direkt durch Anwendung der Simpsonschen Regel berechnen, und ich wundere mich, dass diese Möglichkeit in keinem der mir bekannten Lehrbücher auch nur angedeutet ist. Man wird mir einwenden, dass hierfür kein Bedürfnis vorhanden ist, da ja für diese Körper die Formeln nach altbewährten Methoden abgeleitet werden. Demgegenüber möchte ich betonen, dass die Simpsonsche Regel nur eine einzige Formel ist und die Formeln für Kegel, Kegelstumpf, Kugel, Kugelsegment usw. umfasst, dass also dem Schüler die Möglichkeit geboten ist, ohne die Hilfsmittel der höheren Mathematik einen höheren Standpunkt zu gewinnen. Dazu kommt aber, — und das erscheint mir als das wichtigere — dass die Simpsonsche Regel eine noch viel allgemeinere Anwendung zulässt. Sie gestattet nämlich nicht nur die Kugel, sondern überhaupt alle durch Rotation ebener Kurven zweiter Ordnung entstehenden Körper und Körperstumpfe zu berechnen, also gelegentlich auch Rotations-Paraboloide, Ellipsoide usw., ohne zu besonderen Methoden und Kunstgriffen die Zuflucht nehmen zu müssen. Dazu allerdings bedarf es erst des Nachweises, dass der Archimedische Satz nur ein spezieller Fall des allgemeineren Satzes ist: „Körper, die von Rotationsflächen zweiten Grades und von zwei normal zur Drehungsachse stehenden Grundkreisen begrenzt werden, lassen sich durch gewisse, von geradlinigen Flächen umschlossene Körperstumpfe (Zylinder, Kegel, Keil) von gleicher Höhe ausdrücken."

Beweis:

Fall 1: Das Rotations-Ellipsoid.

Die Figur ist der des Archimedischen Satzes völlig entsprechend. Rotiert die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die grosse Achse, so zeichne man den koaxialen berührenden Zylinder (also vom Radius b und der Höhe $2a$) und die beiden Scheitelkegel, deren Grundflächen mit den Zylindergrundflächen zusammenfallen. Legt man dann im Abstand x vom Mittelpunkt normal zur Drehungsachse durch Ellipsoid und Restkörper (Zylinder minus Scheitelkegeln) Schnitte, so sind die Schnittfiguren gleich, nämlich beim Ellipsoid $\pi y^2 = \pi b^2 - \pi \frac{b^2}{a^2} x^2$

beim Restkörper $\pi b^2 - \pi \varrho^2$ oder da $\varrho : b = x : a$

$$\pi b^2 - \pi \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Rotiert die Ellipse um die kleine Achse, so ist der Beweis nach Vertauschung von a und b derselbe.

Hieraus folgt, dass jede von Normalschnitten begrenzte Schicht eines Ellipsoids raumgleich ist einem Zylinder minus einem Kegelstumpf von gleicher Höhe.*)

Fall IIa. Das einschalige Rotations-Hyperboloid.

Die Gleichung der Hyperbel sei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Man zeichne einen koaxialen berührenden Zylinder (also mit dem Radius a) von beliebiger Höhe und die koaxialen Scheitelkegel so, dass der Scheitel im Mittelpunkt des Hyperboloids liegt und der Radius sich zur Höhe wie $a : b$ verhält. Legt man dann normal zur Drehungsachse einen Schnitt durch die drei Körper, so ist der Hyperboloidschnitt gleich dem Zylinderschnitt plus dem Kegelschnitt, nämlich:

$$\pi x^2 \text{ oder } \pi a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = \pi a^2 + \pi \varrho^2 \text{ oder,}$$

$$\text{da } \varrho : a = y : b, \text{ gleich } \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{b^2} y^2.$$

Hieraus folgt analog, dass jede von Normalschnitten begrenzte Schicht des einschaligen Hyperboloids raumgleich ist einem Zylinder plus einem Kegelstumpf von gleicher Höhe.

Uebrigens ist dieser Fall nur mit Rücksicht auf die Vollständigkeit des verallgemeinerten Archimedischen Satzes hier behandelt. Für die Anwendung der Simpsonschen Regel bedurfte er dieses Nachweises nicht. Da der Körper seitlich von einer geradlinigen Fläche begrenzt wird, lässt sich für alle durch parallele Schnitte begrenzte Schichten, gleichgültig ob es Normalschnitte sind oder nicht, ohne weiteres die Simpsonsche Regel anwenden. Rotiert nämlich eine Strecke von der Länge l um eine sie kreuzende Gerade und beträgt der Abstand beider a, so ist, wenn man durch die Endpunkte der Strecke normal zur Drehungsachse die Ebenen legt und das von ihnen auf der Achse begrenzte Stück l_1 bezeichnet, leicht nachzuweisen, dass der Achsenschnitt des bei der Drehung umschriebenen Körpers der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 \frac{\left(\frac{l}{l_1}\right)^2 - 1}{a^2} = 1$$

genügt, also eine Hyperbel mit den Achsen a und $\frac{a\, l_1}{\sqrt{l^2 - l_1^2}}$ darstellt. Selbstverständlich sind die Seiten des Hyperboloids streng genommen nicht als Parallelogramme zu denken, da sie eine wenn auch verschwindend kleine Torsion aufweisen, also windschief sind. Vielmehr empfiehlt es sich, jedes der windschiefen Parallelogramme durch eine der Diagonalen in zwei ebene Dreiecke sich zerlegt zu denken, weil dann die Torsion ausscheidet und der Körper die Voraussetzungen der Simpsonschen Regel erfüllt.

*) Da es sich nur darum handelt nachzuweisen, dass sich der Körper in einen geradlinig begrenzten verwandeln lässt, ist Zylinder- und Kegelradius als nebensächlich nicht zum Ausdruck gebracht.

Fall IIb. Das zweischalige Rotations-Hyperboloid.

Gleichung der Hyperbel wie oben. Man zeichne einen koaxialen Zylinder vom Radius b und beliebiger Höhe und koaxiale Scheitelkegel so, dass der Scheitel wieder im Mittelpunkt des Hyperboloids liegt und Radius zur Höhe sich wie b zu a verhält. Legt man dann durch die drei Körper einen Normalschnitt, so gilt die Gleichung Hyperboloidschnitt gleich Kegelschnitt minus Zylinderschnitt, vorausgesetzt, dass der Schnitt reelle Punkte der Hyperbel trifft, also

$$\pi y^2 \text{ oder } \pi \left(\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2\right) = \pi \varrho^2 - \pi b^2.$$

Da nun aber $\varrho : x = b : a$, so geht die rechte Seite über in

$$\pi \frac{b^2}{a^2} x^2 - \pi b^2.$$

Daraus folgt, dass jede von Normalschnitten begrenzte Schicht eines zweischaligen Rotations-Hyperboloids raumgleich ist einem Kegelstumpf minus einem Zylinder von gleicher Höhe.

Fall III. Das Rotations-Paraboloid.

Die Parabel habe die Gleichung $y^2 = p x$. Ein Normalschnitt im Abstand x vom Scheitel ist dann gleich $\pi y^2 = \pi p x$ also gleich einem Rechteck mit der konstanten Seite πp und der proportional dem Abstand wachsenden Breite x. Hieraus folgt, dass das Rotations-Paraboloid raumgleich ist einem geraden prismatischen Keil, dessen Schneide πp und dessen senkrecht zu einer seiner schrägen Ebenen gemessene Dicke gleich dem zugehörigen Abstand von der Schneide ist.

Von den übrigen Kurven zweiter Ordnung ist der Kreis bereits durch den Archimedischen Satz erledigt, zwei sich schneidende und zwei parallele Geraden beschreiben bei der Rotation Kegel und Zylinder also von vornherein geradlinige Körper, die keiner Verwandlung bedürfen. Damit ist für alle Kurven zweiter Ordnung bewiesen, dass der Satz des Archimedes in der oben verallgemeinerten Form gilt. Mithin lässt sich auf alle jene Körper und ihre normal begrenzten Abschnitte und Schichten die Simpsonsche Regel anwenden.

Ich komme nun zur Anwendung. Hier sind allerdings für Schüler, namentlich bei der Berechnung der Mittelfläche, rechnerische Schwierigkeiten vorhanden, aber in allen Fällen führt ein einfacher Kunstgriff zum Ziel. In den folgenden Beispielen bedeutet durchweg F_1 den einen (Radius ϱ_1), F_2 den anderen Grundkreis (Radius ϱ_2), M die Mittelfläche (Radius ϱ) und h die Höhe des Körpers.

I. Die Kugel.

a) Segment. x_1 sei der Abstand des Kreises F_1 vom Mittelpunkt, also $x_1 + \frac{h}{2}$ der des Kreises M und $x_1 + h$ oder r der des Kreises F_2. $F_2 = 0$, so ist

$$1) \quad M = \pi \varrho^2 = \pi \left[r^2 - \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 \right]$$

$$2) \quad F_2 = \pi \left[r^2 - (x_1 + h)^2\right]$$

$$\text{folgl. 1a)} \quad 2 \cdot M = \pi \left[2 r^2 - 2 x_1^2 - 2 x_1 h - \frac{h^2}{2} \right]$$

$$2) \quad F_2 = \pi \left[r^2 - x_1^2 - 2 x_1 h - h^2\right],$$

$$\text{folgl. } 2M - F_2 = 2M = \pi \left[r^2 - x_1^2 + \frac{h^2}{2} \right] = \pi \left[\varrho_1^2 + \frac{h^2}{2} \right]$$

$$4M = \pi (2 \varrho_1^2 + h^2)$$

$$Vol = \frac{h}{6}(0 + \pi \varrho_1^2 + 4M) = \frac{\pi h}{6}(3 \varrho_1^2 + h^2)$$

Die Aufstellung der Gleichungen 1); 2) und 1a) ist typisch, durch Subtraktion verschwindet stets $2 x_1 h$, so dass der Körper durch h und ϱ (bei Schichten auch ϱ_2) sich ausdrückt. Will man das Segment durch die Achsen (bezw. r) und h ausdrücken, eliminiert man selbstverständlich nicht $x h$ sondern ϱ. Beispiel:

1) $M = \pi \varrho^2 = \pi \left[r^2 - \left(r - \frac{h}{2} \right)^2 \right] = \pi \left(r h - \frac{h^2}{4} \right)$

2) $F_1 = \pi \varrho_1^2 = \pi [r^2 - (r - h)^2] = \pi (2 r h - h^2)$

folglich 1b) $4 M = \pi (4 r h - 2 h^2)$

2) $F_1 = \pi (2 r h - h^2)$

$F_2 = 0$

folgl. $Vol = \frac{\pi h}{6} (6 r h - 2 h^2) = \frac{\pi h^2}{3} (3 r - h)$.

Die zweite Methode führt natürlich nur bei Segmenten zum Ziel.

b) Schicht. x_1 hat dieselbe Bedeutung wie unter a.)

1) $M = \pi \left[r^2 - \left(x_1 + \frac{h}{2} \right)^2 \right]$

2) $F_2 = \pi [r^2 - (x_1 + h)^2]$

1a) $2 M = \pi \left[2 r^2 - 2 x_1^2 - 2 x_1 h - \frac{h^2}{2} \right]$

2) $F_2 = \pi \varrho_2^2 = \pi [r^2 - x_1^2 - 2 x_1 h - h^2]$

$2 M - F_2 = \pi \left[r^2 - x_1^2 + \frac{h^2}{2} \right]$ oder da $r^2 - x_1^2 = \varrho_1^2$,

$2 M = \pi \varrho_2^2 + \pi \left(\varrho_1^2 + \frac{h^2}{2} \right)$

$4 M = \pi (2 \varrho_1^2 + 2 \varrho_2^2 + h^2)$

$Vol = \frac{\pi h}{6} (3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 + h^2)$

Das Ellipsoid.

Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiere um die grosse Achse, so ist

$\varrho_1^2 = y_1^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2, \ x_2 = x_1 + h, \ x = x_1 + \frac{h}{2}$.

a) $Vol = \frac{\pi h}{6} (0 + 0 + 4 \pi b^2)$ folglich, da $h = 2 a$

„ $= 4 \pi \frac{a b^2}{3}$

b) Segment. Methode II.

1) $M = \pi \varrho^2 = \pi y^2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} \left(a - \frac{h}{2} \right)^2 \right]$

2) $F_1 = \pi y_1^2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} (a - h)^2 \right]$

1b) $4 M = \pi \left[4 \frac{b^2 h}{a} - \frac{h^2 b^2}{a^2} \right]$

2) $F_1 = \pi \left[2 \frac{b^2 h}{a} - \frac{h^2 b^2}{a^2} \right]$

$F_2 = 0$

$Vol = \frac{\pi h}{6} \left(6 \frac{b^2 h}{a} - \frac{2 h^2 b^2}{a^2} \right) = \frac{\pi h^2}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} \left(3 a - h \right)$.

c) Schicht

1) $M = \pi y^2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} \left(x_1 + \frac{h}{2} \right)^2 \right]$

2) $F_2 = \pi y_2^2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} (x_1 + h)^2 \right]$

1a) $2 M = \pi \left[2 b^2 - 2 \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - 2 \frac{b^2}{a^2} x_1 h - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2}{2} \right]$

2) $F_2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - 2 \frac{b^2}{a^2} x_1 h - \frac{b^2}{a^2} h^2 \right]$

$2 M - F_2 = \pi \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 + \frac{b^2}{a^2} \frac{h^2}{2} \right]$

folglich, da $b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = \varrho_1^2$,

$4 M = \pi \left(2 \varrho_1^2 + 2 \varrho_2^2 + \frac{b^2}{a^2} h^2 \right)$

$Vol = \frac{\pi h}{6} \left(3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 + \frac{b^2}{a^2} h^2 \right)$.

Rotiert die Ellipse um die kleine Achse, so ist

$\varrho_1^2 = x_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2, \ y_2 = y_1 + h, \ y = y_1 + \frac{h}{2}$

und man erhält Formeln, die sich nur durch die Vertauschung von a und b von den abgeleiteten unterscheiden.

Das Hyperboloid.

I. Die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiere um die y-Achse.

$\varrho_1^2 = x_1^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2$ usw. $y_2 = y_1 + h, \ y = y_1 + \frac{h}{2}$.

a) Segment, d. h. Schicht über dem Grundkreis πa^2, also $y_1 = 0$, Methode II

1) $M = \pi \varrho^2 = \pi y^2 = \pi \left(a^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{4} \right)$

2) $F_2 = \pi \varrho_2^2 = \pi y_2^2 = \pi \left(a^2 + \frac{a^2}{b^2} h^2 \right)$

1b) $4 M = \pi \left(4 a^2 + \frac{a^2}{b^2} h^2 \right)$

2) $F_2 = \pi \left(a^2 + \frac{a^2}{b^2} h^2 \right)$

$F_1 = \pi a^2$

folgl. $Vol = \frac{\pi h}{6} \left(6 a^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} h^2 \right) = \frac{\pi h a^2}{3 b^2} (3 b^2 + h^2)$.

b) Schicht.

1) $M = \pi x_1^2 = \pi \left[a^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(y_1 + \frac{h}{2} \right)^2 \right]$

2) $F_2 = \pi x_2^2 = \pi \left[a^2 + \frac{a^2}{b^2} (y_1 + h)^2 \right]$

1a) $2 M = \pi \left[2 a^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} \cdot y_1^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} y_1 h + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{2} \right]$

2) $F_2 = \pi \left[a^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} y_1 h + \frac{a^2}{b^2} h^2 \right]$

$2 M - F_2 = \pi \left[a^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2}{2} \right]$

folglich, da $a^2 + \frac{a_2}{b^2} y_1^2 = \varrho_1^2$

$4 M = 2 \pi \varrho_2^2 + \pi \left(2 \varrho_1^2 - \frac{a^2}{b^2} h^2 \right)$

$Vol = \frac{\pi h}{6} \left(3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 - \frac{a^2}{b^2} h^2 \right)$.

II. Die Hyperbel rotiere um die x-Achse, so ist

$\varrho_1^2 = y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - b^2$ usw.

$x_2 = x_1 + h, \ x = x_1 + \frac{h}{2}$.

a) Segment.

$\pi \varrho_1^2 = 0, \ x_1 = a, \ x = a + \frac{h}{2}, \ x_2 = a + h$.

1) $M = \pi y^2 = \pi \left[\frac{b^2}{a^2} \left(a + \frac{h}{2} \right)^2 - b^2 \right]$

2) $F_2 = \pi \left[\frac{b^2}{a^2} (a + h)^2 - b^2 \right]$

1b) $4 M = \pi \left[4 \frac{b^2}{a} h + \frac{b^2}{a^2} h^2 \right]$

2) $F_2 = \pi \left[2 \frac{b^2}{a} h + \frac{b^2}{a^2} h^2 \right]$

$F_1' = 0$, folglich

$$Vol = \frac{\pi h}{6}\left(6\,\frac{b^2 h}{a} + 2\,\frac{b^2}{a^2}\cdot h\right)$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}\cdot\frac{b^2}{a^2}(3a+h). \quad \text{Methode II.}$$

b) Schicht.

1) $M = \pi y^2 = \pi\left[\frac{b^2}{a^2}\left(x_1+\frac{h}{2}\right)^2 - b^2\right]$

2) $F_2 = \pi y_2^2 = \pi\left[\frac{b^2}{a^2}(x_1+h)^2 - b^2\right]$

1a) $2M = \pi\left[2\,\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + 2\,\frac{b^2}{a^2}x_1 h + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h^2}{2} - 2b^2\right]$

2) $F_2 = \pi\left[\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + 2\,\frac{b^2}{a^2}x_1 h + \frac{b^2}{a^2}\cdot h^2 - b^2\right]$

$2M - F_2 = \pi\left[\frac{b^2}{a^2}x_1^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h^2}{2} - b^2\right]$

folglich, da $\frac{b^2}{a^2}x_1^2 - b^2 = \varrho_1^2$,

$$2M = \pi\varrho_2^2 + \pi\left[2\varrho_1^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot h^2\right]$$

$$4M = \pi\left(2\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right)$$

$$Vol = \frac{\pi h}{6}\left(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2\right).$$

Genau wie beim Ellipsoid führt also auch hier die Vertauschung der Drehungsachsen in der Formel nur eine Vertauschung von a und b herbei.

Das Paraboloid.

Die Parabel $y^2 = px$ rotiere um die x-Achse, die alleinige Symmetrieachse, so ist

$\varrho_2^2 = y_2^2 = p x_2$ usw. $x = x_1 + \frac{h}{2}$, $x_2 = x_1 + h$.

a) Segment. $x_1 = 0$, $\pi\varrho_1^2 = 0$, $x = \frac{h}{2}$, $x_2 = h$.

1) $M = \pi y^2 = \pi p\,\frac{h}{2}$

2) $F_2 = \pi y_2^2 = \pi p h$

1b) $4M = 2\pi p h$

$F_1 = 0$

$Vol = \frac{\pi h}{6}(\cdot\, 3 p h) = \frac{\pi h^2 p}{2}$. II. Methode

oder 1a) $2M = \pi p h$

2) $F_2 = \pi p h$

$2M - F_2 = 0$

$2M = \pi\varrho_2^2$

$4M = 2\pi\varrho_2^2$

$Vol = \frac{\pi h}{6}(0 + 3\varrho_2^2) = \frac{\pi h \varrho_2^2}{2}$. I. Methode.

b) Schicht.

1) $M = \pi y^2 = \pi p\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)$

2) $F_2 = \pi y_2^2 = \pi p(x_1 + h)$

1a) $2M = \pi p(2x_1 + h)$

$2M - F_2 = \pi p x_1 = \pi y_1^2$

folgl. $4M = 2\pi\varrho_2^2 + 2\pi\varrho_1^2$

$$Vol = \frac{\pi h}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2) = \pi h\,\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2}$$

oder, da $\pi\,\frac{(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)}{2} = M$,

M also nicht nur Mittelfläche, sondern auch arithmetisches Mittel der beiden Grundflächen.

$$Vol = h \cdot M.$$

Das Verständnis der Ableitungen wird selbstverständlich durch Figuren wesentlich erleichtert. Hier konnte darauf verzichtet werden. Bemerken möchte ich noch, dass der Gültigkeitsbereich der Simpsonschen Regel mit dem Gebotenen noch keineswegs erschöpft ist. Der Archimedische Satz, der oben auf Rotationskörper erweitert ist, lässt sich nämlich noch weiter verallgemeinern und ganz entsprechend zeigen, dass auch Körper, die von elliptischen Flächen zweiten Grades und zwei Normalschnitten begrenzt werden, sich durch gewisse geradlinig begrenzte Körperstumpfe von gleicher Höhe ausdrücken lassen, und zwar das allgemeine Ellipsoid als elliptischer Zylinder minus elliptischem Kegel, das einschalige Hyperboloid als elliptischer Zylinder plus Kegel, das zweischalige Hyperboloid als elliptischer Kegel minus Zylinder, das elliptische Paraboloid als Keil.

Die Formeln wiederzugeben geht über meine Aufgabe, der Simpsonschen Regel im Unterricht ein grösseres Feld der Anwendung zu verschaffen, hinaus, da elliptischer Zylinder und Kegel hier ausgeschlossen sind. Ebenso scheidet die Frage, wie weit der Archimedische Satz auch für parallel, aber nicht normal begrenzte Schichten gilt, hier aus. Daraus bitte ich aber nicht den Schluss zu ziehen, dass nach meiner Ansicht nun auch alle oben entwickelten Formeln im Unterricht Verwendung finden sollen, es lag mir vielmehr nur daran, zu zeigen, dass die Simpsonsche Regel gegebenen Falles ein bequemes Mittel liefert, derartige Körper der elementaren Rechnung zugänglich zu machen, und dass in keinem Falle an die rechnerische Fertigkeit besondere Anforderungen gestellt werden, dass vielmehr alle Entwickelungen nach derselben Norm verlaufen, wie sie in Vorstehendem durch die Gleichungen 1), 2) und 1a) für Schichten und Segmente als besondere Schichtformen, durch 1), 2) und 2b) für Segmente zum Ausdruck gebracht ist. Von dieser Norm bin ich deshalb auch in den Fällen, wo andere Methoden vielleicht bequemer zum Ziel führen, nicht abgewichen und bitte, von diesem Gesichtspunkte aus das Gebotene zu beurteilen.

Ersatz für Schülerübungen.

Ansprache auf der Hauptversammlung zu Erlangen.*)

Von H. Rühlmann (Halle a. S.).

Der lebhafte Wunsch, die durch den Fortfall der physikalischen Schülerübungen entstandene Lücke auszufüllen, liess den Plan entstehen, im Rahmen der zur Verfügung stehenden Stunden Ersatz zu schaffen. Dazu wurden geeignete Versuche aus dem System solange zurückgestellt, bis, der Schülerzahl entsprechend, eine der Unterrichtsstunden zur allgemeinen Laboratoriumsstunde bestimmt werden konnte.

Die betreffenden Apparate waren an ihrer Stelle nach eingehender Erklärung von jedem Schüler skizziert und die Ausführung des Versuches angedeutet, so dass nun für jedes Laborantenpaar nur noch kurze Unterweisung für seinen Versuch nötig war. Diese wurde aber im Beisein aller gegeben, wie auch die erzielten Beobachtungsresultate in der nächsten Stunde allen mitgeteilt wurden.

Gelegentlich liess sich daran eine häusliche Ausarbeitung anschliessen, worin jedes Paar seinen Versuch

*) S. Unt.-Bl. XII, 3, S. 65.

ausführlich beschrieb und durch Zeichnung und graphische Darstellung erläuterte. Sie wurde von den Schülern gern geliefert und bot bei der Korrektur durch vorherige Beschränkung ihrer Länge keine Schwierigkeit.

Da diese Methode erst kurze Zeit angewendet wurde, soll in ihrer Mitteilung nur eine Anregung gegeben werden zum Sammeln weiterer Erfahrungen auch unter andern Verhältnissen. Dazu ermutigte auch der Umstand, dass ähnliche Wege neuerdings von der Chemie auch in dem verbindlichen Schüler-Laboratorium eingeschlagen werden.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Naturwissenschaftlicher Ferienkursus an der Königlichen Akademie zu Posen vom 10. bis 18. Oktober 1906.

In diesem neuerdings eingerichteten Ferienkursus für Oberlehrer werden von den nachstehend genannten Dozenten die bei ihren Namen vermerkten Kurse abgehalten werden, die sämtlich mit Ausnahme der im Gebäude der Oberrealschule abzuhaltenden Kurse (2) und (4) im Gebäude der Akademie selbst stattfinden sollen:

1. Prof. Kreutzberg: Die Astronomie in der Prima der höheren Lehranstalten. (3 Stunden.)
2. Prof. Mendelsohn: Methoden der Molekulargewichtsbestimmung. (1 Stunde.)
3. Prof. Mendelsohn: Die Jenaer Glasindustrie und das Buntglas im Kunstgewerbe. (2 Stunden.)
4. Prof. Mendelsohn: Uebungen im chemischen Laboratorium der Oberrealschule. (2 Stunden.)
5. Prof. Pfuhl: Die Enzyme und ihre Bedeutung im Leben der Pflanze. (2 Stunden.)
6. Prof. Pfuhl: Die Behandlung der Pflanze im Unterricht nach biologischen Gesichtspunkten. (3 Stunden.)
7. Prof. Spies: Wechselstrom und Drehstrom. (4 Stunden.)
8. Prof. Spies: Die physikalischen Grundlagen der modernen Beleuchtung. (2 Stunden.)
9. Prof. Spies: Vorführung neuer Schulapparate. (2 Stunden.)
10. Prof. Spies: Physikalische Uebungen. (5 Stunden.)
11. Mechaniker Hintze: Praktische Uebungen in der mechanischen Werkstatt. (14 Stunden.)

Im Anschluß an diese Kurse wird unter Führung von Prof. Pfuhl am 13. Oktober eine Besichtigung der Naturwissenschaftlichen Abteilung des Kaiser-Friedrich-Museums und am 17. Oktober eine Besichtigung des Pflanzengartens am Mariengymnasium stattfinden, den Schluß des Kursus soll ein am Nachmittag des 18. Oktober stattfindender Ausflug nach den Sinnerwerken (Hefefabriken) in Luban bilden.

Vereine und Versammlungen.

Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte. Der der diesjährigen Naturforscherversammlung in Stuttgart am 17. September vorgelegte zweite Teil des von der Kommission erstatteten Berichts ist nunmehr im Buchhandel (Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin) erschienen. Er umfaßt sechs Teile: einen Allgemeinen Bericht über die Tätigkeit der Kommission im verflossenen Jahre, drei Einzelberichte über den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den Reformschulen, den sechsklassigen Realschulen und den höheren Mädchenschulen, ferner Vorschläge zur Lösung einiger allgemeiner Fragen der Schulhygiene und endlich ein Merkblatt zur Handhabung der sexuellen Aufklärung an höheren Unterrichtsanstalten.

* * *

Der deutsche Geographentag und die Unterrichtskommission der Naturforscher-Gesellschaft. Auf der Erlanger Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften wurde in der Diskussion über die Vorschläge der von der Naturforscher-Gesellschaft niedergesetzten Unterrichtskommission*) mehrfach ein Bedauern über die ablehnende Haltung geäußert, die einzelne Vertreter der Erdkunde gegenüber den genannten Vorschlägen einnehmen. Die Form, in der die einschlägigen Aeusserungen in dem Bericht über die erwähnte Diskussion wiedergegeben sind, hat anscheinend die Auffassung begünstigt, als ob der Deutsche Geographentag selbst den mehrgenannten Vorschlägen feindlich gegenüber stehe. Dies ist indessen keineswegs der Fall, wie aus den nachstehend wiedergegebenen „Verhandlungen des XV. Deutschen Geographentages"**) hervorgeht.

Ueber die Meraner Vorschläge der Unterrichtskommission berichtete auf dem Geographentage H. Fischer (Berlin), der (a. a. O. S. 78) wörtlich ausführte:

„Von allen im Kampfe um die höhere Schule stehenden Gruppen ist uns aber keine so nahe verwandt, wie die der Biologen. Sie steht uns nahe, ebensowohl hinsichtlich ihrer wissenschaftlichen Entwickelung wie hinsichtlich ihrer Stellung an den höheren Schulen, die sie zu den unsern ganz analogen Forderungen zwingt. Eine Gegensätzlichkeit würde hier daher besonders bedenklich sein, Einmütigkeit unsere beiderseitigen Aussichten wesentlich verbessern. Man sieht das auf Seiten der Biologen vollkommen ein, ja, man ist weiter gegangen, und ich habe die Freude, Ihnen folgende Mitteilung hierüber zu machen. Die von der (76.) Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte (in Breslau) ins Leben gerufene Kommission, die die Interessen des naturwissenschaftlichen Unterrichts an unseren höheren Schulen zu vertreten hat, hat auf Antrag ihrer biologisch-chemischen Subkommission am 18. April folgende den geographischen Unterricht betreffenden Leitsätze genehmigt, die in ihrem Bericht an die 77. Versammlung der Naturforscher und Aerzte in Meran (24.–30. September d. J.) veröffentlicht werden sollten.

1. Der Unterricht in der Erdkunde ist an allen höheren Schularten in angemessener Weise bis in die oberen Klassen durchzuführen.

2. Der erdkundliche Unterricht muß wie jeder andere von fachmännisch vorgebildeten Lehrern erteilt werden.

3. Es ist wünschenswert, daß das Studium der Erdkunde auf der Universität zu den naturwissenschaftlichen Studien in nähere Beziehung tritt.

*) S. Unt.-Bl. XII, Nr. 4, S. 85.

**) Berlin, Dietrich Reimer, 1905. S. besonders S. 77–79, XVIII, XXXIII.

Herr Professor Fricke (Bremen), der Vertreter der Biologie in jener Kommission, hat mich von diesen Leitsätzen offiziell in Kenntnis gesetzt, und er hat mir gleichzeitig die Bitte ausgesprochen, sie dem Geographentage zur Kenntnisnahme vorzulegen. Ich bin der Meinung, daß wir diese Leitsätze nur aufs wärmste begrüßen können; 1. und 2. stimmen ja mit unseren Forderungen unmittelbar überein, und auch gegen 3. wird sich Stichhaltiges kaum vorbringen lassen. Ich bitte sie daher, mich zu ermächtigen, Herrn Professor Fricke mitteilen zu dürfen, daß wir den Herren für ihre Leitsätze zu lebhaftestem Danke uns verpflichtet fühlen."

In der darauffolgenden Diskussion (abgedruckt a. a. O. S. XVI. ff) äußert kein Redner irgend ein Bedenken gegen diesen Vorschlag, den Dank des Geographentages in besonderer Resolution auszusprechen. Demgemäß wird die vorgeschlagene Resolution (S. XXXIV.) ohne Widerspruch in der 5. Sitzung zum Beschluß erhoben. Der Beschluß lautet (ebenda):

„Der XV. Deutsche Geographentag nimmt mit großer Genugtuung der Freude davon Kenntnis, daß die mit der Bearbeitung der Frage des naturwissenschaftlichen Unterrichts betraute Kommission der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte die alten Forderungen der Geographie zu den ihren gemacht hat, und hofft so auch in Zukunft auf ein gedeihliches Zusammenwirken beider großer Vereinigungen".

Von diesem Beschlusse ist Herr Prof. Fricke offiziell benachrichtigt worden, was anscheinend auf der Erlanger Versammlung noch nicht allgemein bekannt war.

Demnach besteht in der Unterrichtsfrage zwischen den beiden Körperschaften, dem deutschen Geographentag und der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte kein Gegensatz, sondern vielmehr eine erfreuliche Uebereinstimmung, was im Interesse der Sache nur mit Genugtuung begrüßt werden kann.

* * *

Technolexikon des Vereins Deutscher Ingenieure. An diesem 1901 begonnenen allgemeinen technischen Wörterbuche für Uebersetzungszwecke (in den drei Sprachen Deutsch, Englisch und Französisch) arbeiten jetzt rund 2000 in- und ausländische Firmen und Einzelpersonen mit. Die Zahl der gesammelten Wortzettel beträgt über 3 000 000. Die Alphabetisierungsarbeiten sind so weit vorgeschritten, daß die Drucklegung Anfang 1907 beginnen wird. Die Redaktion liegt in den Händen von Dr. Hubert Jansen in Berlin (Adresse: Technolexikon, Berlin NW 7, Dorotheenstraße 49). Druck und Verlag sind der Firma J. J. Weber in Leipzig übertragen worden.

Lehrmittel-Besprechungen.

Tabulae botanicae, unter Mitwirkung von A. F. Blakeslee (Cambridge, Mass.), A. Guilliermond (Lyon), redigiert von E. Baur (Berlin) und E. Jahn (Berlin), gezeichnet von R. Ehrlich (Berlin). Berlin, Verlag von Gebrüder Bornträger, 1906. Preis der Einzeltafel M 7.—.

Dieses Tafelwerk, das die gesamte Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Pflanzen umfassen und namentlich auch die niederen Pflanzen mehr als bisher üblich berücksichtigen soll, repräsentiert insofern eine bemerkenswerte Neuerung, als die Tafelbilder eine Grösse aufweisen, die auch in den grössten Hörsälen die Einzelheiten noch erkennbar macht, die Ausführung der Zeichnungen, insbesondere der Habitusbilder, soll stets in die Hände eines bewährten Künstlers gelegt werden, der unter der Leitung des jeweiligen Spezialredakteurs nach der Natur oder nach vorgelegten Präparaten zeichnet. Ausser den Herausgebern werden sich noch eine grosse Zahl anderer Botaniker an dem Werke beteiligen.

Die Stoffeinteilung ist so geplant, dass für jede Pflanzenfamilie zunächst auf ein bis zwei Tafeln der ganze Entwickelungsgang eines typischen Vertreters möglichst übersichtlich dargestellt wird, wogegen die übrigen der betreffenden Familie gewidmeten Tafeln Einzelheiten bringen. Zunächst liegen zwei Tafeln vor, die den Myxobakterien gewidmet sind, Nr. 1 gibt als Uebersichtstafel den Entwickelungsgang von Polyangium fuscum, Nr. 2 gibt Einzelheiten der Fruchtkörperbildung, der Sporenentwickelung usw. von anderen Myxobakterien (Myxococcus ruber, Myxococcus digitatus, Chondromyces apiculatus, Ch. crocatus). Begleitet sind die Tafeln von einem dreisprachigen, durch Klarheit und Kürze gleich ausgezeichneten Text.

Wie die vorstehenden Angaben ausser Zweifel stellen, bietet sich hier der Fachwelt ein von sehr sorgfältiger, planvoller Ueberlegung getragenes Lehrmittel, auch der Ausführung der beiden bis jetzt vorliegenden Tafeln kann man nur hohes Lob spenden, wenngleich sich nicht verkennen lässt, dass bei der so ausserordentlich starken Vergrösserung auch gewisse Nachteile in den Kauf genommen werden müssen, indem die dabei auftretenden grossen, ungegliederten und im Interesse der Deutlichkeit auch kräftig umrandeten Flächen doch gegen die soviel geringere Dimensionen aufweisende Wirklichkeit einen gewissen Erscheinungsgegensatz aufweisen, auf den nachdrücklich hinzuweisen Aufgabe des lebendigen Unterrichts sein wird. Das scheint aber unvermeidlich und kann kein Hindernis bilden, die neuen Tafeln als eine wertvolle Bereicherung der Lehrmittel für den naturwissenschaftlichen Unterricht mit aufrichtiger Freude zu begrüssen. P.

Bücher-Besprechungen.

Fr. C. G. Müller, Professor am von Saldernschen Realgymnasium zu Brandenburg a. H., Technik des physikalischen Unterrichts nebst Einführung in die Chemie. gr. 8⁰. 370 S. Mit 251 Abbildungen. Berlin 1906, Otto Salle. M 6.—.

Der Verfasser ist durch seine zahlreichen Verbesserungen und originellen Neukonstruktionen von physikalischen und chemischen Apparaten für den Schulunterricht bei allen Fachgenossen bestens bekannt. Das vorliegende Werk ist aus einer 35jährigen Unterrichtspraxis hervorgegangen. Es soll ein Handbuch sein, in dem das zusammengestellt und verarbeitet ist, was der Experimentalunterricht modernen Zuschnittes von Einrichtungen, Apparaten und sonstigen technischen Hilfsmitteln erfordert, und das eine Anweisung gibt, wie diese Hilfsmittel am besten zu verwenden sind. Das Buch ist für angehende Physik-lehrer bestimmt, doch wird auch der erfahrene Experimentator noch viel daraus lernen. Ich kann es deshalb allen Fachkollegen warm empfehlen.

Der Verfasser legt mit Recht einen besonderen Nachdruck auf messende Versuche. Dazu bedarf er nicht teurer Apparate, die nur die wenigsten Schulen anschaffen können. Er benutzt mit Vorliebe einfache und doch zweckentsprechende Konstruktionen, von denen sich viele zur Selbstanfertigung eignen. Das trifft besonders zu für die Mechanik, den Magnetismus und Galvanismus. Allerdings würde ich den vom Verfasser konstruierten und vielseitig verwendbaren Krinolinenapparat (S. 53), bei dem es sich um Drehbewegungen von Drahtkreisen handelt, nicht im Anfangsunterricht der Dynamik benutzen. Das Grundgesetz $k = a\,m$ ist zuerst für Kräfte von konstanter Größe und Richtung zu demonstrieren, also an geradlinig fortschreitenden Bewegungen. Zum Verständnis der Dynamik bei Drehbewegungen ist bereits der Begriff des Drehungsmoments und im Grunde genommen auch der des Trägheitsmoments erforderlich.

Was die Stellung anbelangt, die der Verfasser zu einigen Fragen des physikalischen Unterrichts einnimmt, so kann man mit dem, was er über die Bewertung des Satzes von der Erhaltung der Arbeit und der Energie sagt (S. 73 und 74), einverstanden sein. Ich stimme ihm auch darin bei, daß gegenwärtig noch viel zu viel die Skope statt messender Apparate benutzt werden (S. 141). Dagegen teile ich nicht seine Ansichten über die Bezeichnung und die Verwendung des Potentials (S. 244 und 245). Was er zur Erläuterung dieses Begriffs vorbringt, ist zu dürftig und auch sachlich nicht immer richtig. Er setzt z. B. die zum Laden eines kugelförmigen Konduktors nötige Arbeit gleich $m/2\,r$ (statt $m^2/_{2r}$) und folgert daraus und der Analogie des Vollpumpens eines Gefäßes mit Wasser, daß die „Endspannung" doppelt so groß, also gleich m/r sein muß. Zu beanstanden ist auch der Ausspruch: Der Stromeffekt ist „offenbar" gleich dem Produkt aus Spannung und Stromstärke. Selbstverständlich ist dieser Satz durchaus nicht. Er ergibt sich experimentell aus dem Ohmschen und Jouleschen Gesetz, theoretisch aus dem Begriff des Potentials und der Stromstärke, wenn man annimmt, daß bei dem Ladungsübergang durch strömende Elektrizität derselbe Arbeitsprozeß sich abspielt, wie bei der mechanischen Verschiebung von Ladungsmengen.

Auf Seite 31, 35, 41, 42 ist die Bezeichnung Schubspannung für Druckspannung irreführend, da man allgemein unter Schubfestigkeit den Widerstand gegen abscherende Kräfte versteht. Auf Seite 186 wird der Versuch, bei dem ein Lichtstrahl zwei Prismen mit gekreuzten brechenden Kanten durchsetzt, als Newtons experimentum crucis angeführt. Daß dies ein weit verbreiteter Irrtum ist, darauf hat Bode aufmerksam gemacht (Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht, 5. Jahrg., S. 296).

Eine Anzahl von Druckfehlern wird der aufmerksame Leser leicht selbst berichtigen.

Th. Maschke (Breslau).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Aus der Natur, Zeitschrift für alle Naturfreunde, herausgegeben von W. Schönichen. 1. Jahrg. 1905/06. Stuttgart 1906, Nägele. Preis Mk. 6.00.

Chwolson, O. D., Hegel, Haeckel, Kossuth und das 12. Gebot. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn.

Ebeling, M., Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für höh. Lehranstalten. I. Unorgan. Chemie. Berlin 1906, Weidmann geb. Mk. 3.80.

Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigsten Kurven. Leipzig 1906, Teubner.

Engleder, Frz., Zeichenskizzen zum naturk. Unterricht nach biolog. Grundsätzen. Heft III (Tierkunde). München 1906, Kellerer. Mk. 1.40.

L'Enseignement mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl, VIII. Année, Nr. 4, 5. Paris 1906, Gauthier-Villars, Genève, Georg & Cie.

Grimsehl, E., Ausgewählte physikalische Schülerübungen. Leipzig 1906, Teubner. Mk. —.80.

Gruber, J., u. Stadler, C., Erprobter Lehrgang für das moderne Zeichnen 30 Tafeln. Linz 1906, Lehrerhausverein für Oberösterreich.

Holl, W., Lehrbuch der Geometrie. Neubearb. von K. Holl. 5. Aufl. Stuttgart 1906, W. Kohlhammer. kart. Mk. 2.—.

John, G., u. Sachsse, R., Lehrbuch der Chemie. Mit 101 Fig. Kleine Ausg. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 3.—.

Kistner, A., Geschichte der Physik. I.: Physik bis Newton. Mit 13 Fig. — II.: Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. (Slg. Göschen, Heft 293/4). Leipzig 1906, Göschen. Mk. —.80.

Knauer, F., Die Ameisen. Mit 61 Fig. (Aus Natur u. Geistesw. 94). Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Koppe-Husmanns Anfangsgründe der Physik mit Einschluß der mathem. Geographie und Chemie. 31. Aufl., bearb. von K. Knops. Essen 1906, Baedeker. geb. Mk. 6.—.

Koestler, H., Leitfaden der ebenen Geometrie, neu herausgegeben von A. Holtze. Halle a. S. Neberts Verlag. Heft 1: Kongruenz. 6. Aufl. 1906. kart. Mk. 1.35. — Heft 2: Lehre vom Flächeninhalt. 4. Aufl. 1905. kart. Mk. —.90. — Heft 3: Aehnlichkeitslehre. 4. Aufl. 1906. kart. Mk. 1.50.

Küster, E., Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen. Mit 38 Abb. (Aus Nat. u. Geistesw. 112). Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Literaturverzeichnis, halbmonatliches der Fortschritte der Physik. V. Jahrg. Nr. 15. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Mathé, Frz., Karl Friedrich Gauß („Männer der Wissenschaft", Heft 6). Leipzig 1906, Weicher.

Mattenklodt, E., Ueber die Dimensionen in der Physik. Sonderabdruck a. Mathem.-Naturw. Blätter 1906, Nr. 6.

Noack, K., Elementare Messungen aus der Elektrostatik. (Abh. zur Didaktik und Philos. der Naturw. II. 1.). Berlin 1906, Springer. Mk. 2.—.

Ostwald, W., R. W. Bunsen („Männer der Wissenschaft", Heft 2). Leipzig 1905, Weicher. Mk. 1.00.

v. Oettingen, A., Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Mit 85 Abb. Leipzig 1906, Engelmann. Mk. 6.00.

Paulsen, Fr., Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. (Aus Natur und Geistesw. 100). Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Remus, K., Der dynamologische Lehrgang. Versuch einer geschlossenen Naturkunde. Mit 36 Abb. (Slg.-naturw.-pädagog. Abh. II. 4). Leipzig 1906, Teubner.

Rudolph, H., Erdmagnetismus und Luftelektrizität. Coblenz 1906, Selbstverlag. Mk. 1.50.

Sachse, J. J., Zur mechanischen Drittelung eines Winkels und die planimetrische Bestimmung eines Grades der Kreislinie. Heiligenstadt 1906, Cordier. Mk. 1.20.

Schmeil, O., Lehrbuch der Zoologie. Mit 22 Taf., 16. Aufl. Leipzig 1906, Nägele. geb. Mk. 4.50.

—„— Leitfaden der Botanik. Mit 28 Tafeln, 12. Aufl. Ebenda 1907. geb. Mk. 2.40.

—„— Grundriß der Naturgeschichte. Heft 1: Tier- und Menschenkunde. 6. Aufl. 1906. Heft 2: Pflanzenkunde. 7. Aufl. 1906. Ebenda. kart. à Mk. 1.25.

Schneider, K. C., Einführung in die Deszendenztheorie. 6 Vorträge. Mit 2 Tafeln, 1 Karte, 108 Figur. Jena 1906, Fischer. Mk. 4.00.

Schreber, K., Zum Unterricht in der Experimentalphysik auf den Universitäten. Sonderabdruck aus der Zeitschrift f. phys. u. chem. Unterricht. XIX. Heft 4, 1906.

Simon, M., Ueber die Entwickelung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrhundert. Mit 38 Fig. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 8.00.

Steckelberg, H., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1906, Teubner. Mk. —.80.

Tabulae Botanicae, von Baur, Jahn & Ehrlich. Taf. 1, 2. Berlin 1906, Gebr. Bornträger. à Mk. 7.00.

Voges, E., Der Obstbau. Mit 13 Abb. (Aus Natur u. Geistesw. 107). Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.25.

v. Wettstein, R., Leitfaden der Botanik für die oberen Klassen der Mittelschulen. Mit 3 Tafeln, 1005 Fig. in 205 Text-Abb. Wien 1907, Tempsky. geb. 3 Kr. 70 H.

Zechs Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen in 3. Aufl., herausg. von C. Cranz und Ritter von Eberhard. Mit 206 Fig. Stuttgart 1906, Metzlersche Buchh. Mk. 4.60.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. v. Franz Frisch. Jahrg. II, Heft 7. Wien 1906, Pichlers Wwe. u. Sohn.

Sammlung zerlegbarer Körper

für den Unterricht in der Geometrie in verschiedenen Dimensionen rücksichtlich Anzahl und Größe. Selbstverlag von

Otto Küster,
Hauptlehrer a. D. in Wermelskirchen

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Es erschien:

Die Infinitesimalrechnung

im Unterricht der Prima.

In Uebereinstimmung mit den Meraner Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte bearbeitet von

Oskar Lesser,
Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.

Mk. 1.60 geh., Mk. 2.— geb.

Bei der hohen Bedeutsamkeit der augenblicklich zur Diskussion stehenden Frage, ob es möglich oder wünschenswert sei, dem ohnehin sehr umfangreichen mathematischen Lehrpensum unserer höheren Schulen noch die Elemente der Differenzial- und Integralrechnung einzugliedern, wird manchem das Büchlein, das aus dem Unterricht heraus entstanden und bereits von anderer Seite auf seine Brauchbarkeit geprüft ist, als ein Ratgeber und Wegweiser gewiss willkommen sein. Das $7\frac{1}{2}$ Bogen starke Werkchen zerfällt in drei Teile, deren erster im Kleinschen Sinn den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung behandelt und Anleitung zur Auswertung numerischer Gleichungen auf graphischem Wege und nach der Regula falsi gibt. Der zweite Teil bietet in einfachster, doch ausreichender, und vor allem die Anschauung betonender Darstellung die Elemente der Differenzialrechnung, während der dritte der Behandlung der Integralrechnung gewidmet ist. Indem der Algorithmus zugunsten der Anwendung überall zurücktritt, erfährt der Unterricht durch die stete Betrachtung der Funktionsbilder eine nicht unwesentliche Belebung; zugleich gewährt die neue Behandlung erhebliche Erleichterungen in der Durcharbeitung einzelner Pensen und bereichert den Unterricht an allgemeinbildenden Momenten.— Die Heranziehung und Lösung physikalischer Aufgaben soll die Brauchbarkeit des Büchleins erhöhen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Technik des physikalischen Unterrichts

nebst Einführung in die Chemie.

Von

Dr. Friedrich C. G. Müller

Professor am von Saldernschen Realgymnasium zu Brandenburg a. H.

Mit 251 Abbildungen im Text. — Preis geh. 6 Mk. gebd. 7 Mk.

Der als hervorragender Experimentator bekannte Verfasser hat in diesem Buche — welches die Frucht einer 35jährigen Unterrichtspraxis ist — ein Vademekum geschaffen, das den angehenden Lehrer der Physik und Chemie in die Klasse begleiten und ihn am Experimentiertische beraten soll. Dieser bedarf eines Führers, in dem das zusammengestellt und verarbeitet ist, was der Experimentalunterricht modernen Zuschnitts an Einrichtungen, Apparaten und sonstigen technischen Hilfsmitteln erfordert und welches eine Anweisung gibt, wie dieses Hilfsmittel am besten zu verwenden sind.

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.

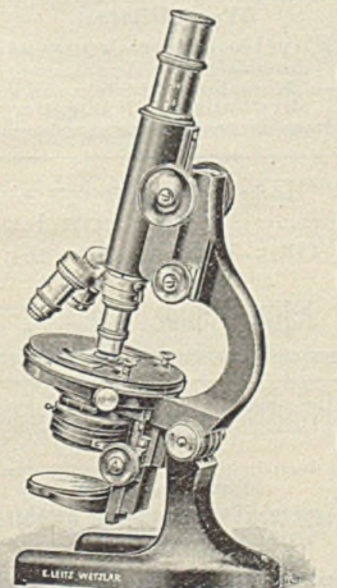
Soeben sind erschienen und können durch alle Buchhandlungen bezogen werden:

Baumhauer, Dr. Heinrich, Professor an der Universität zu Freiburg in der Schweiz, **Kurzes Lehrbuch der Mineralogie** mit einem Abriß der Petrographie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Dritte Auflage. Mit 191 in den Text gedruckten Figuren. gr. 8⁰ (VIII u. 224) *M* 2.80; geb. in Halbleder *M* 3.30.

Das Lehrbuch will den reichen Stoff der Mineralogie (und Petrographie) für den Unterricht in den oberen Klassen einer höhern Lehranstalt darbieten. Der Verfasser suchte den Stoff so zu behandeln, daß ein wirkliches Verständnis erreicht wird; dies gilt insbesondere von dem kristallographischem Teile. Auch ist auf die Beziehungen zwischen den kristallographischen, physikalischen und chemischen Tatsachen hingewiesen.

Lorscheid, Dr. J., Kurzer Grundriss der Mineralogie. Neu bearbeitet von Heinrich Brockhausen, Oberlehrer am Gymnasium zu Rheine. gr. 8⁰ (IV u. 28). Steif broschiert 60 *Pf.*

Der als Zugabe zum Lehrbuch der anorganischen Chemie von Professor Dr. J. Lorscheid bisher erschienene Grundriß ist hier erweitert. Er kann auch als Grundlage des mineralogischen Unterrichtes am Gymnasium Verwendung finden.



E. Leitz,

Optische Werke

Wetzlar.

Zweiggeschäfte:

Berlin NW., Luisenstrasse 45, **Frankfurt a. M.,** Kaiserstrasse 64, **London, St. Petersburg, New-York, Chicago.**

Mikroskope,

Mikrotome,

Mikrophotographische Apparate.

Projektions-Apparate.

Photographische Objektive.

Man verlange kostenfrei:
Katalog Nr. 42 d.

In III. Auflage ist bei J. B. Metzler-Stuttgart erschienen u. im Buchhandel z. Preise v. M 4.00 (in Lwbd. M 5.20 zu haben:

Zech's

Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik

nebst Auflösungen

Mit 206 neugezeichneten Figuren

Herausgeg. von Dr. C. Cranz
Prof.a.d.Militärtechn.Akad.Charlottenburg
u. Leutn. Ritter von Eberhard
Komm.z.Militärtechn.Akad.Charlottenburg

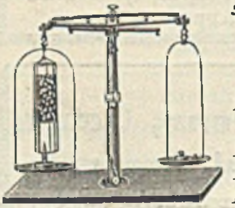
Richard Müller-Uri,

Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.

Braunschweig, Schleinitzstrasse 19

liefert auch

sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.



Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Physikalische Freihandversuche.

Unter Benutzung des Nachlasses von

Prof. Dr. Bernhard Schwalbe

weil. Geh. Reg.-Rat und Direktor des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin.

Zusammengestellt und bearbeitet von

Hermann Hahn,

Oberlehrer am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin.

I. Teil:

Nützliche Winke. Mass u. Messen. Mechanik der festen Körper.

Mit 269 Figuren im Text.

Preis geh. 3 Mk., gebd. Mk. 3.75.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. W. Krumme, Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von Oskar Lesser, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Arithmetik

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. H. Servus in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima) Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. Heussi. 16. völl. umgearb. Aufl. Mit 199 Holzschnitten. Bearb. von Prof. Dr. E. Götting. Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Elemente der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. Heussi. 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. Leiber. Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. Wilh. Levin. 4. Aufl. Mit 92 Abbildungen. Preis 2 M.

Levin: **Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Ober-Realschulen.** Von Prof. Dr. Wilh. Levin. Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Unter-Sekunda der Ober-Realschule). Mit 72 Abbild. Preis Mk. 1.40. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 M. 40 Pf.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von H. Weinert. 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 60 Pf.

Müller & Wetzig

DRESDEN-A. 16–18

Spezial-Fabrik für Projektions- u. Vergrösserungs-Apparate.

Kataloge kostenfrei

Das Buch der physikal. Erscheinungen.

Nach A. Guillemin bearbeitet von Prof. Dr. R. Schulze. Neue Ausgabe. Mit 11 Buntdruckbildern, 9 gr. Abbildungen und 448 Holzschnitten. gr. 8°.

Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

Verlag von **Otto Salle** in Berlin W. 30 Maassenstrasse 19.

Die physikalischen Kräfte

im Dienste der Gewerbe, Kunst und Wissenschaft. Nach A. Guillemin bearbeitet von Prof. Dr. R. Schulze. Zweite ergänzte Auflage. Mit 416 Holzschnitten, 15 Separatbildern und Buntdruckkarten. gr. 8°

Preis 13 Mk.; geb. 15 Mk.

☞ Hierzu Beilagen von **Otto Küster**, Hauptlehrer in **Wermelskirchen**, **Erwin Nägele**, Verlag in **Leipzig**, **B. G. Teubner**, Verlag in **Leipzig**, **Friedr. Vieweg & Sohn**, Verlag in **Braunschweig**, welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.