Jahrgang XIII. 1907. No. 1.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Vorläufige Tagesordnung der XVI. Hauptversammlung zu Dresden, Pfingsten 1907.

Montag, 20. Mai, abends 8 Uhr: Geselliges Beisammensein im oberen Saale des Königlichen Belvedere auf der Brühlschen Terrasse.

Dienstag, 21. Mai, vormittags 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung.

Eröffnung und Begrüßung. — Geschäftliche Mitteilungen.

Vortrag von M. Krause (Dresden): Ueber die Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Physik an den Technischen Hochschulen.

Referate über die Wünsche der Fachlehrer hinsichtlich des Hochschulunterrichts für künftige Lehramtskandidaten
a) in Mathematik und Physik (Referent: K. Reinhardt, Zittau);
b) in Chemie und in den biologischen Fächern (Referent: E. Löwenhardt, Halle a. S.).

Nachmittags 3 bis 6 Uhr: Abteilungs-Sitzungen.

Abends $^1/_2 8$ Uhr: Festmahl (mit Damen) im Hotel Bristol am Bismarckplatz.

Mittwoch, 22. Mai, vormittags 9 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Diskussion über den Hochschulunterricht für die künftigen Lehrer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer an den höheren Schulen.

12 bis 1 Uhr: Frühstück im Hause.

1 bis 3 Uhr: Abteilungs-Sitzungen.

Von 4 Uhr an: Besichtigungen von Laboratorien und technischen Anlagen in der Stadt.

Donnerstag, 23. Mai, vormittags 9 bis $10\,^1/_2$ Uhr: Abteilungs-Sitzungen.

10 Uhr: Geschäftliche Sitzung. Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Lenk, Pietzker und Bastian Schmid. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Antrag des Vorstandes auf Niedersetzung eines Ausschusses, der dem Vorstand zur Seite stehen soll. — Antrag des Vorstandes auf Annahme eines etwas kürzer gefaßten Namens für den Verein. — Sonstige geschäftliche Anträge.

Nachmittags: Ausflüge (mit Damen) in die nähere Umgebung von Dresden zur Besichtigung industrieller und technischer Anlagen.

Freitag, 24. Mai: Ausflug (mit Damen) in die sächsische Schweiz (bei günstigem Wetter wird von der Bastei aus heliographiert werden).

Angemeldete Abteilungs-Vorträge:

E. Grimsehl (Hamburg): Thema vorbehalten.
B. Hoffmann (Dresden): Ueber Vogelgesänge als Leitmotive in der Musik.
H. Lohmann (Dresden): Elektrostatische Versuche.
R. Nessig (Dresden): Ueber die Geologie von Dresden und Umgebung (ev. mit Exkursion in den Plauenschen Grund).
H. Rebenstorff (Dresden): Versuche über flüssige und gasförmige Körper, sowie aus der Wärmelehre und Chemie.
A. Witting (Dresden): Thema vorbehalten.
N. N.: Referat über die am 21. März 1907 stattfindende Sitzung der naturwissenschaftlichen Gesellschaft „Isis" zu Dresden: Die Reform des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen.

Alle Sitzungen finden im Gebäude der Königlichen Technischen Hochschule am Bismarckplatz statt.

Angesichts des Umstandes, daß Pfingsten in diesem Jahre besonders früh fällt, haben der Vereins-Vorstand und der Ortsausschuß es für zweckmäßig erachtet, die Grundzüge des Versammlungsprogramms schon jetzt zu veröffentlichen, indem sie sich die Bekanntgabe der erforderlich werdenden Ergänzungen für die Anfang April erscheinende Nummer des Vereinsorgans vorbehalten.

Die frühzeitige Veröffentlichung erschien auch darum als sehr wünschenswert, weil bei dem gerade zu Pfingsten zu erwartenden Fremdenzufluß eine möglichst frühe Anmeldung unbedingt notwendig ist. Die Herren, die (sei es mit, sei es ohne Damen) zur Versammlung kommen wollen, werden auf das dringendste ersucht, sich möglichst früh bei dem Ortsausschuß anzumelden, weil anderenfalls für ein anständiges Unterkommen keine Bürgschaft übernommen werden kann. Anmeldungen mit Angabe der Art der gewünschten Unterkunft sind an Prof. Dr. Witting (Dresden-Strehlen, Waterloostraße 13) zu richten.

Eine möglichst zahlreiche Beteiligung von Damen ist höchst willkommen, bei größerer Beteiligung wird für Unterhaltung der erscheinenden Damen noch besonders Sorge getragen werden.

Wie alljährlich, wird der Vereinsvorstand sich auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der deutschen Staaten mit der Bitte wenden, die Leitungen der einzelnen Schulen zu wohlwollender Berücksichtigung der behufs Teilnahme an unserer Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche anzuweisen. Es ist zu hoffen, daß diese Bitte, wie es bisher regelmäßig geschehen ist, auch in diesem Jahre Gewährung finden wird.

Der Hauptvorstand
Pietzker.

Der Ortsausschuss
i. A.: A. Witting.

Die tätige Vertretung der Interessen des exaktwissenschaftlichen Unterrichts durch die Fachlehrer selbst.

Ein Appell an die Fachgenossen von Seiten des Vereinsvorstandes.

Unter den Fragen, die das gegenwärtige Geschlecht besonders lebhaft erregen, stehen — wie man wohl sagen darf — die Schulfragen in vorderster Linie, gehen sie ja doch auch jedermann mehr oder weniger nahe an. Berufene und Unberufene erörtern sie in den Sitzungen der öffentlichen Körperschaften wie in der Presse und in den Versammlungen zahlreicher Vereine. Zwischen den Freunden des Bestehenden und den Vertretern der Ansicht, daß dieses Bestehende einer nachhaltigen Reform bedürftig sei, wogt ein lebhafter, oft erbitterter Kampf.

Es ist nur natürlich, daß in diesem Streit auch die Männer nicht untätig zur Seite stehen können, in deren Hand die praktische Lösung der der Schule gestellten Aufgaben ruht, die Lehrer an den verschiedenen Schulgattungen selbst. So finden wir in der Tagespresse, wie in den Fachzeitschriften vielfach Erörterungen der brennenden Fragen aus der Feder von Lehrern, ganz besonders aber offenbart sich dieses Interesse durch die Schöpfung von Vereinigungen aller Art, die den Lehrern der Schulen die Gelegenheit geben, ihre Interessen zu vertreten, in öffentlichen, vor aller Welt sich abspielenden Verhandlungen die aktuellen Streitfragen aus ihrer Berufstätigkeit zu erörtern und eventuell auch mit greifbaren Beschlüssen und Forderungen an die staatlichen Instanzen heranzutreten.

Die Lehrerschaft an Volksschulen findet ihre Vertretung im deutschen Lehrertag, die der höheren Schulen hat sich teils in einer größeren Zahl provinzieller Verbände, teils in dem allgemeinen Oberlehrertag zusammengefunden. Daneben existiert eine große Zahl von Vereinigungen, die die Förderung des Unterrichts in einzelnen Fächern oder einzelnen Fachgebieten bezwecken, vielfach auch in der Form pädagogischer Sektionen von Körperschaften, die die wissenschaftliche Forschung innerhalb solcher Gebiete als den eigentlichen Gegenstand ihrer Tätigkeit ansehen.

Solche Vereinigungen bestehen schon lange für die einzelnen Seiten des Sprachunterrichts, für alte und neuere Philologie, ebenso für Geschichte und Geographie, überall findet sich eine feste, ihre Ziele mit Energie und Zähigkeit verfolgende Organisation der Fachvertreter selbst. Verhältnismäßig spät sind in diesen Kreis die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer eingetreten. Allerdings wies ja die alljährliche Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte schon lange eine Abteilung auf, die sich mit dem naturwissenschaftlich-mathematischen Unterricht beschäftigte. Aber die Wirkung dieser Abteilung war gering, das war auch sehr erklärlich aus einem doppelten Grunde. Erstens trat der Inhalt ihrer Verhandlungen ganz naturgemäß leicht in den Hintergrund gegenüber den bedeutsamen Vorträgen und Verhandlungen, die sich mit prinzipiellen wissenschaftlichen Fragen befaßten, ein zweites Hindernis war der schwache Besuch und die zufällige Zusammensetzung dieser Abteilung, deren Beschlüsse darum niemals den Anspruch erheben konnten, als der Meinungsausdruck der im praktischen Lehramt stehenden Vertreter des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zu gelten.

Diese Sachlage änderte sich merklich, als die Fachlehrer selbst die Gründung eines eigenen Verbandes in die Hand nahmen. Der nach der vorbereitenden Versammlung in Jena 1890 im folgenden Jahre in Braunschweig definitiv gegründete Verein, dessen Organ die Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. sind, hat von seiner Gründung an einen erfreulichen Aufschwung genommen, mit seiner gegenwärtig die Zahl 1100 übersteigenden Mitgliederzahl schließt er fast die Hälfte aller an den höheren Schulen in Deutschland wirkenden Lehrer in sich, seine Entwicklung zeigt durch sich selbst, daß er einem wirklichen Bedürfnis genügt, sein Vereinsorgan gehört zu den meistgelesenen Fachblättern innerhalb des Reiches.

Wir dürfen auch mit Genugtuung sagen, daß die Tätigkeit unseres Vereins nicht ohne sichtbare Erfolge geblieben ist. Von den Verhandlungen auf unseren Versammlungen wie von dem Gedankenaustausch durch Vermittlung unseres Vereinsorgans ist eine nicht geringe Zahl befruchtender Anregungen ausgegangen, die namentlich auch für die jüngeren, unmittelbar aus ihrem Hochschulstudium heraus in das Lehramt eintretenden Lehrer sich als nutzbringend erwiesen haben. Hier zwischen der wissenschaftlichen Forschung und den Bedürfnissen des die Resultate dieser Forschung verwertenden praktischen Unterrichts eine Brücke zu schlagen, so manchen unberechtigten Vorurteilen entgegenzutreten, die dem in die Lehrtätigkeit eintretenden jungen Lehrer bald nach der einen, bald nach der anderen Seite hin Schwierigkeiten bereiten, das hat der Verein von jeher als eine besonders wichtige Aufgabe betrachtet.

Die vom Verein gegebenen Anregungen haben sich auch keineswegs auf den Fachunterricht der höheren Schulen beschränkt, auch der an den Elementarschulen zu erteilende mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht fällt in das Gebiet der dem Vereine durch seinen Namen und seine Satzungen zugewiesenen Aufgaben, es kann nur willkommen geheißen werden, wenn durch den Zutritt von Mitgliedern aus den Kreisen der Fachvertreter an den Volksschulen und Mittelschulen die Pflege der Berührungspunkte zwischen dem an den einzelnen Schulgattungen zu erteilenden Unterricht an Umfang und Stärke gewinnt.

Einen besonders erfreulichen Erfolg unserer Vereinstätigkeit dürfen wir aber vor allem darin erblicken, daß der Verein durch seine Beschlüsse zu einer Reihe wesentlicher Verbesserungen auf dem Gebiete unserer Unterrichtsfächer teils überhaupt den Anstoß gegeben, teils auch durch sein Eintreten den von anderer Seite gekommenen Vorschlägen eine wirksame Unterstützung geliehen hat. So hat er durch Aufstellung des Normalverzeichnisses für die physikalischen Sammlungen vielen Fachlehrern einen erwünschten Anhalt für die im Interesse ihres Unterrichts zu erhebenden materiellen Ansprüche geliefert, die Anrechnung der auf technischen Hochschulen zugebrachten Studiensemester ist seinerzeit auch von seiner Seite lebhaft befürwortet worden, die Forderung der Wiedereinführung des biologischen Unterrichts auf den oberen Klassen, die auf der Hamburger Naturforscherversammlung von den Vertretern der biologischen Wissenschaften einstimmig erhoben worden war, hat auf unserer Düsseldorfer Versammlung eine lebhafte, durch einen entsprechenden Beschluß zum Ausdruck gebrachte Unterstützung gefunden.

Eine Reihe von erfreulichen Einzelbestimmungen der in den letzten Jahren zur Einführung gelangten Lehrpläne dürfen wir als die Verwirklichung von Ideen und Anregungen ansehen, die auf unseren Versammlungen zuerst, oder wenigstens in besonders nachdrücklicher Weise zur

Geltung gekommen sind. So konnten wir denn auch mit Recht beanspruchen, daß die auf den Naturforschertagen in Kassel und Breslau beschlossene Neuaufstellung von Vorschlägen für die möglichst zweckmäßige Gestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts nicht ohne die tätige Mitwirkung des Vereins erfolgte. Wir stellten diese Forderung auf unserer Halleschen Versammlung und dürfen es mit Freude begrüßen, daß in der Tat auch mehr als die Hälfte der Mitglieder der zu diesem Zwecke eingesetzten Kommission dem Verein angehört, darunter drei unserem Vereinsvorstand.

So berechtigt die Genugtuung ist, die wir über diese Erfolge empfinden dürfen, so können wir uns doch nicht verhehlen, daß unsere Wirksamkeit und unser Einfluß noch erheblich gewinnen würden, wenn an den auf unseren Versammlungen gefaßten Vereinsbeschlüssen eine noch größere Zahl von Fachgenossen beteiligt wäre.

Der Besuch unserer Versammlungen entspricht nicht der Mitgliederzahl, verschiedene Vereinigungen, die nach ihrem Umfange hinter unserem Verein merklich zurückstehen, weisen auf ihren Versammlungen eine wesentlich größere Besuchsziffer auf. Das findet ja vielleicht zum Teil seine Erklärung in dem Umstande, daß wir uns von der Betonung aller Standesfragen grundsätzlich ferngehalten haben; unsere Stärke haben wir darin gesucht und suchen sie auch noch heute darin, daß wir lediglich die rein sachlichen Interessen unserer Lehrfächer nach besten Kräften zu vertreten bemüht sind.

Aber auch diese Aufgabe können wir doch in gedeihlicher Weise nur dann lösen, wenn die von uns erhobenen Forderungen als der Ausdruck dessen erscheinen, was die Mehrheit der Fachlehrer selbst im Interesse ihres Unterrichts wünscht und erhofft. Und darum ergeht an alle unsere Fachgenossen hiermit die eindringliche Aufforderung, durch den Eintritt in unsern Verein und durch die persönliche Teilnahme an unsern Versammlungen ihrerseits dazu mitzuhelfen, daß die Neugestaltung unseres Unterrichts nicht ohne die tätige Mitwirkung der Fachlehrer selbst ins Leben tritt.

Wenn die im Flusse befindliche Neuordnung dieses Unterrichts einen der Mehrzahl der Fachlehrer selbst unerwünschten Gang einschlagen sollte, so wird sich niemand beklagen dürfen, der es versäumt hat, seine Stimme rechtzeitig zu erheben.

Die Organisation, die es einem jeden Lehrer ermöglicht, auch seinerseits sich an der Förderung der Unterrichtszwecke zu beteiligen, ist vorhanden, es ist unser Verein, es gilt von dieser Möglichkeit nach Kräften Gebrauch zu machen.

Und diesen Appell an die Fachgenossen möchten wir nun auch mit besonderem Nachdruck gerade jetzt erheben angesichts der Beratungsgegenstände, die auf unserer diesjährigen Dresdener Versammlung im Vordergrunde stehen werden. Wie die gleichzeitig veröffentlichte Tagesordnung dieser Versammlung zeigt, soll da den Fachlehrern selbst Gelegenheit gegeben werden, sich über die Ansprüche zu äußern, die aus der Praxis des Unterrichts heraus an die Ausbildung der künftigen Lehramtskandidaten an den Hochschulen gestellt werden.

Diese selbe Frage beschäftigt ja zur Zeit die von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte niedergesetzte bereits erwähnte Unterrichtskommission, die darüber der diesjährigen Naturforscher-Versammlung einen Bericht erstatten wird. Wir können es nur mit lebhaftem Danke begrüßen, daß diese Frage zurzeit gerade auch in den Hochschulkreisen auf das ernsteste erwogen wird, eine Reihe von literarischen Veröffentlichungen hervorragender Gelehrter gibt davon Zeugnis. Und wir müssen es weiter als eine glückliche Fügung anerkennen, daß in der eben gedachten Unterrichtskommission ein Boden gewonnen worden ist, auf dem sich Vertreter des Hochschulunterrichts und Vertreter des Unterrichts an den für die Hochschule vorbereitenden Schulen zur gemeinsamen Beratung über diese Fragen zusammengefunden haben. Das enthebt aber die große Zahl der Fachlehrer selbst nicht des Rechts und vor allen Dingen auch nicht der Pflicht, an der gedeihlichen Lösung der Frage auch zu ihrem Teile mitzuarbeiten, darauf hinzuwirken, daß die Wünsche, die gerade die Fachlehrer selbst auf Grund ihrer praktischen Unterrichtserfahrung hegen, zur gebührenden Geltung kommen.

Diese Wünsche können den Hochschulkreisen naturgemäß nicht in der Weise bekannt sein, wie den Fachlehrern selbst, es genügt auch nicht, daß die Fachlehrerkreise durch einige Persönlichkeiten aus ihrer Mitte in der Naturforscher-Unterrichtskommission vertreten sind. Hier steht viel zu viel auf dem Spiel, als daß nicht die Frage der zweckmäßigsten Ordnung für die Vorbildung der künftigen Lehrer in der ausgiebigsten und erschöpfendsten Weise von allen Seiten her erörtert und beleuchtet werden müßte. Es ist sehr wünschenswert, daß zu dem Bericht der Kommission, zu den aus den Hochschulkreisen heraus dieser Frage gewidmeten Abhandlungen sich nun auch eine klare und authentische Kundgebung der Wünsche gesellt, die die Fachlehrerkreise selber hegen. Wenn, wie ja zu wünschen und vielleicht auch zu erwarten ist, alle diese Kundgebungen in wichtigen und grundsätzlichen Punkten übereinstimmen, so wird ihnen ein verstärktes Gewicht beiwohnen und eine Verwirklichung der erhobenen Forderungen mit um so größerem Recht zu erhoffen sein.

Und darum ergeht nochmals an alle Fachgenossen der Aufruf: Rafft Euch auf zur lebendigen Mitarbeit an der Lösung der Fragen, die für unsere Lehrfächer von entscheidender Bedeutung sind, macht Gebrauch von der Möglichkeit, die Euch durch die in unserem Verein vorhandene Organisation geboten ist, kommt in möglichst großer Zahl zu unseren Versammlungen!

Probleme der Gletscherforschung.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Erlangen.*)

Von Hans Heß in Ansbach.

Der Begriff Gletscherkunde wird gegenwärtig von Vielen ziemlich weit gefaßt, so daß nicht nur die wissenschaftliche Erforschung der gegenwärtig auf der Erde vorhandenen Gletscher darunter fällt, sondern auch alles,

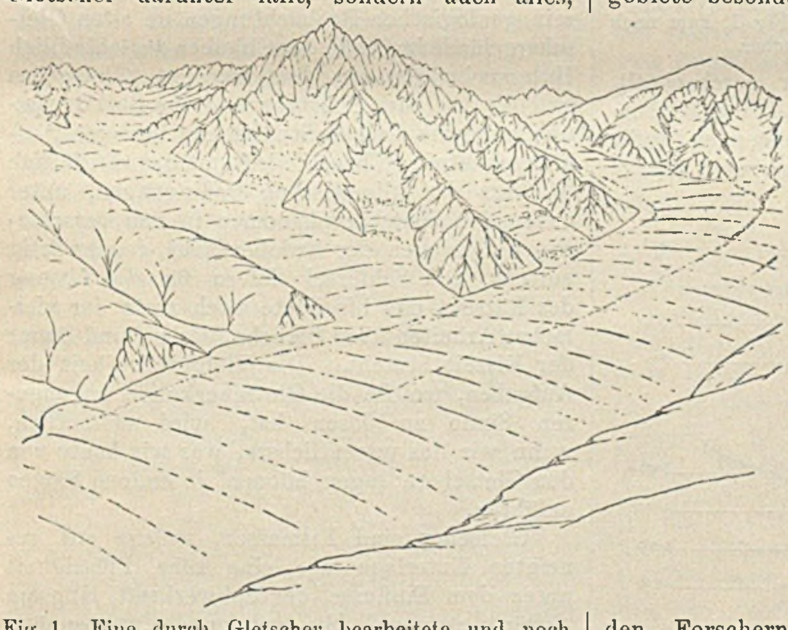


Fig. 1. Eine durch Gletscher bearbeitete und noch okkupierte Gebirgsmasse.

was zur Erkenntnis über Entstehung, Wirkung und Verschwinden der ehemaligen Gletscher gehört, in ihren Bereich gezogen wird. Vieles über Ausdehnung und Wirkungen dieser alten Gletscher ist uns heute sicher bekannt, besonders soweit es sich um die Forschungsergebnisse in Europa und in einem großen Teil von Nordamerika sowie in Neuseeland handelt. Weniger sicher sind wir bezüglich der Ausdehnung der alten Vergletscherungen in den bis jetzt schwach durchforschten Gebieten des zentralen Asien, der Anden Südamerikas und anderer seltener betretener Hochgebirge. Die geologische Durchmusterung der Moränen- und der ihnen vorgelagerten Schottergebiete haben für die Vergletscherung Nordamerikas und Nordeuropas, besonders aber für die der Alpen zu einer Kenntnis über den Verlauf der Eiszeit geführt, wonach wir annehmen dürfen, daß diese Gebiete mehrmals lange Zeiträume hindurch von großen Eismassen überflutet waren und daß zwischen diese Perioden starker Vergletscherung sehr lange Zeiträume fallen, in denen das Eis ganz oder fast ganz von der früheren Lagerstätte verschwunden war. Für die Alpen dürfen wir nach den Ergebnissen, welche A. Penck und E. Brückner soeben in ihrem monumentalen Werke „Die Alpen im Eiszeitalter" zusammenstellen, 4 Vergletscherungsperioden mit 3 dazwischen liegenden Interglazialzeiten annehmen, welche alle in die geologische Periode des Quartär fallen.

Einen weiteren zweifellosen Erfolg hat die geologische Durchforschung der alten Gletschergebiete besonders durch die Vergleichung dieser mit solchen Gebirgsgegenden errungen, welche niemals vergletschert waren. Was dabei erzielt wurde, veranschaulichen am einfachsten die schematischen Bilder, welche kürzlich W. M. Davis*) gegeben hat. 2 derselben sind hier in Figur 1 und 2 abgedruckt. Sie zeigen deutlich den Unterschied der Erosionsformen, welche das rinnende Wasser erzeugt, gegenüber den durch das strömende Eis hervorgebrachten; sie lassen vor allem die Trogform deutlich erkennen, welche die alten Gletscherbetten charakterisiert; sie zeigen aber auch den Unterschied in den verschiedenen Auffassungen über den Taltrog, welche gegenwärtig noch unter den Forschern bestehen, die der erodierenden Tätigkeit der Gletscher einen kräftigen Anteil an der Talbildung zuschreiben, sobald man sie mit entsprechenden Darstellungen dieser anderen Auffassungen vergleicht. Nach Davis würde ein Gletscher einen Trog erzeugen, der bis zur oberen Grenze der Vergletscherung reicht. Penck und Brückner dagegen be-

*) S. Unt.-Bl. XII., S. 64.

*) Vergl. V. M. Davis: The sculpture of mountains by glaciers. The Scottish Geogr. Magazine. Vol. XXII, 1906, p. 76. Aehnliche Bilder wurden früher u. a. auch von Hans Reusch und von mir veröffentlicht.

trachten, dem Augenschein in den Alpen entsprechend, nur den untersten Teil der Täler als trogförmig, während ich vor einiger Zeit darauf hinwies, daß aus den Profilen der Alpentäler der Schluß gezogen werden könne, es

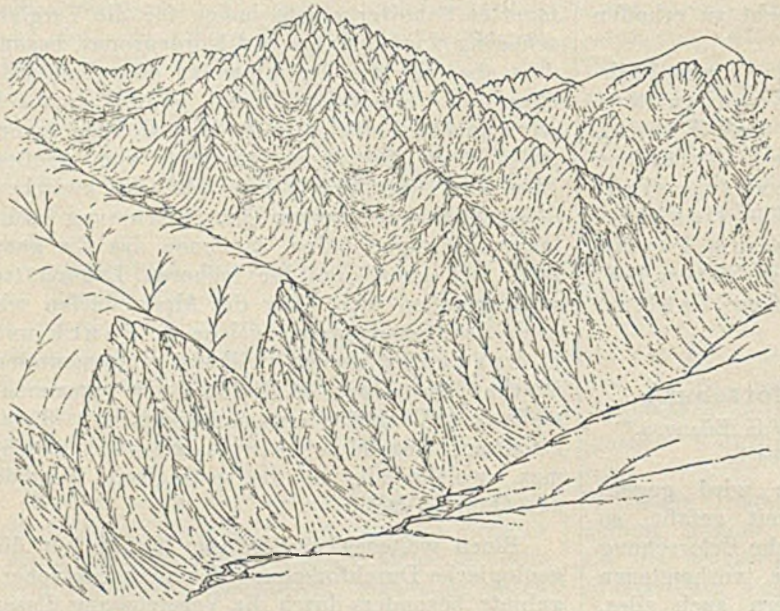


Fig. 2. Dieselbe Gebirgsmasse, wie Fig. 1, kurz nach dem Schmelzen der Gletscher.

seien 4 solcher Tröge ineinander geschachtelt, deren jeder während einer der 4 Vergletscherungen entstanden sei. Die entsprechenden Profile der ehemals vergletscherten Täler zeigt Fig. 3.

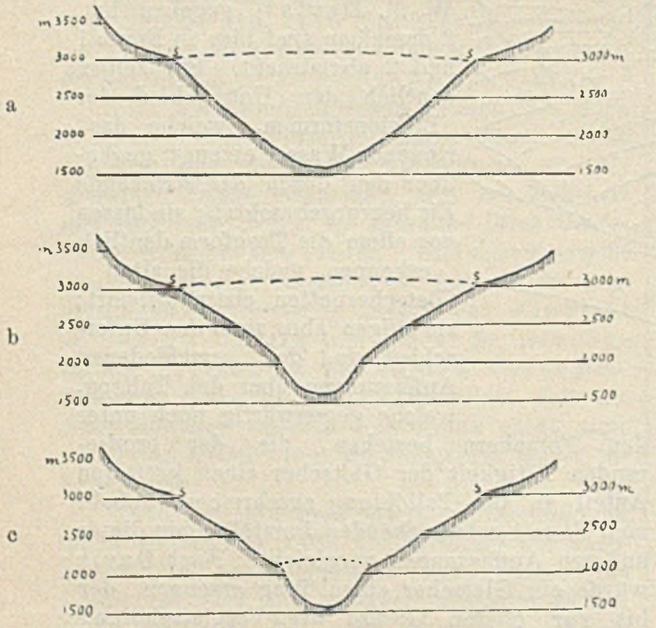


Fig. 3.
Profil eines vergletschert gewesenen Tales.
a nach Davis: Einmalige Vergletscherung. Gletscheroberfläche beim Trogrand (obere Schliffgrenze).
b nach Penck und Brückner: Viermalige Vergletscherung. Nur der unterste Teil des Tales hat Trogform. Gletscheroberfläche bis obere Schliffgrenze.
c nach Heß: Viermalige Vergletscherung. Vier ineinander geschachtelte Tröge. Gletscheroberfläche beim unteren Trogrand; obere Schliffgrenze im Boden des ältesten Troges.

Zwischen Davis' und meiner Auffassung besteht insofern ein inniger Zusammenhang, als beide von der Anschauung ausgehen, daß jeder Gletscher sein Bett allmählich bis an seine oberen Ränder trogförmig ausgestalten müsse. Welche dieser verschiedenen Auffassungen sich später auch als richtig herausstellen mag, das eine ist sicher, daß der Nachweis des Taltroges zu gunsten der stark erodierenden Tätigkeit der Gletscher entschied und daß damit die Uebertiefung der Haupttäler gegenüber den in sie mit Steilstufen einmündenden Nebentälern einwandfrei erklärt werden kann.

Sobald wir aber versuchen, über die Dauer der Eiseinlagerung in den Hochgebirgen, über das Maß der Abtragung durch Eis in einem bestimmten Zeitraum, über die intimeren Vorgänge bei der Bearbeitung der Gesteine durch das Eis Aufschluß zu erhalten, lassen uns die rein geologischen Beobachtungen im alten Gletschergelände im Stich; dann bleiben ausschließlich Untersuchungen an den heutigen Gletschern und die auf ihre Substanz und ihr Bett bezüglichen physikalischen Studien zur besseren Aufklärung übrig. Ebenso wird erst das sorgfältige Studium der klimatischen Bedingungen, unter denen das Gletscherphänomen in den verschiedenen Regionen der Erdoberfläche gegenwärtig auftritt, den Schlüssel liefern für die Lösung des Rätsels, das bis heute noch trotz der vielfachen Arbeiten über Ursache, Verlauf und Dauer der Eiszeit besteht. Die Vielgestaltigkeit der Aufgaben, welche die Gletscherkunde im engeren Sinne zu lösen hat, wird ersichtlich, wenn wir das wesentlichste, was wir heute von den Gletschern sagen hönnen, in einigen Sätzen anführen.

Gletscher sind Eismassen, welche auf geneigter Unterlage wie eine zähe Flüssigkeit unter dem Einflusse der Schwerkraft langsam abwärts strömen. Sie bringen die atmosphärischen Niederschläge, welche in ihrem Ausgangsgebiete meist in Form von Schnee fallen, in tiefere Regionen, in denen die Wärme der Umgebung und die Strahlung der Sonne ausreichen, sie zu verflüssigen, oder bewegtes Wasser den weiteren Transport in wärmere Gebiete übernimmt.

Ihre Existenz ist davon abhängig, daß ein größeres Landgebiet in die „Region des ewigen Schnees“ aufragt. Sie sind also ebenso ein Produkt der klimatischen Verhältnisse, als sie andererseits an die Erhebungen der Festländer gebunden erscheinen. Bestimmen neben der Menge der Niederschläge die Geländeformen Größe, Gestalt und Geschwindigkeit der Eisströme, so bewirken doch diese wieder langsame, aber stetige Veränderungen ihres Bettes. Der feste Fels verwittert unter der bewegten Eisdecke; die Verwitterungsprodukte werden mit dieser fortgeführt, bearbeiten das anstehende Gestein und treten entweder an den Rändern, oder mitten auf der Eismasse zu Tage, wo sie dann lange Schuttrücken, Moränen, bilden, die in der Bewegungsrichtung verlaufen.

Da das Klima an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche Schwankungen durchmacht, so müssen die Gletscher in ihrer Ausdehnung Veränderungen erfahren, welche entweder ganz oder doch annähernd den Klimaschwankungen parallel gehen.

Die Höhe der Schneegrenze, oberhalb deren die Region des ewigen Schnees liegt, ist zwar gegenwärtig für die meisten Gebiete der Erde annähernd bekannt. Für Alpen, Kaukasus, das skandinavische Gebirge, die Kordilleren und den Himalaya ist außerdem nachgewiesen, daß diese Grenze von den Randgebieten gegen die zentralen Erhebungen ansteigt. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Lage der Schneegrenze zeitlichen Schwankungen unterworfen ist. Im Alpengebiet (Schweiz und Savoyen) hat man mit dem Studium dieser Verschiebungen begonnen; es ist zu wünschen, daß auch in den übrigen Gebirgen der Erde diesen Vorgängen entsprechende Aufmerksamkeit zugewendet wird.

Soweit es sich um das Studium der Existenzbedingungen handelt, unter denen die Gletscher gegenwärtig bestehen, bedürfen wir ausgedehnter und, wegen der Klimaschwankungen, langjähriger Beobachtungsreihen über die Klimaverhältnisse der Hochregionen. Daher müßte vor allem der Messung der Niederschlagsmengen, den Aenderungen der Luftwärme und der Sonnenstrahlung besondere Aufmerksamkeit zugewendet werden. Was wir bisher über diese Verhältnisse wissen, ist sehr wenig und entstammt außer einigen Messungen in Skandinavien zumeist den wenigen Hochstationen der Alpen, welche noch dazu weit ab von den genauer untersuchten Gletschern liegen. Neben einer ausgedehnten Untersuchung der Niederschlagsverhältnisse im Sammelgebiet der Gletscher wäre dann eine auf möglichst viele Eisströme erstreckte Untersuchung über die Abschmelzung auf der Gletscherzunge, die Ablation, von nöten. Diese sollte unterstützt werden durch möglichst zuverlässige Messungen der den Gletschern entströmenden Wassermengen, und der Schwankungen, welchen diese im Laufe der Zeit unterworfen sind. Solche Wassermessungen wurden in den letzten Jahren in der Schweiz besonders für die Winterwasser der Gletscherbäche durch das eidgenössische hydrometrische Bureau ausgeführt. Es wäre sehr zu begrüßen, wenn auch in den übrigen Alpenländern ähnliche Messungen zur Durchführung gebracht würden. Dann hätten wir allerdings erst einige Kenntnisse über besondere Verhältnisse der Alpen. Daß für die Kenntnis der übrigen Gletschergebiete gleiche Bedürfnise bestehen, ist selbstverständlich.

Ueber die Bewegung des Eises in den Gletschern haben wir viele vereinzelte Beobachtungen, die zum größten Teil aus den Alpen, zum kleineren aus Norwegen und Grönland, Alaska und Neuseeland stammen. Haben sie übereinstimmend zu dem Resultate geführt, daß die Eismasse an den Rändern viel langsamer fortschreitet, als in der Mitte, so konnte doch aus den bisherigen Beobachtungen kein genaueres Ergebnis erzielt werden, als daß die großen Eisströme auch die größeren Geschwindigkeiten besitzen. Der Einfluß der Neigung, der Gestalt des Gletscherbettes etc. ist in seinem Betrag nicht sicher festgestellt. Besonders nötig wäre m. E. das Studium der Bewegung so großer Gletscherzungen wie die des Malaspina (Alaska), dann auch der kleinen Gletscher, wie sie in den Randgebieten der Alpen vorhanden sind. Hier werden wohl die Arbeiten von Dr. Schulz an den Marmolatagletschern, dann die von Professor Hans Crammer an der Uebergossenen Alm, die von der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien unternommenen Beobachtungen des Karlseisfeldes am Dachstein noch manch wichtigen Beitrag zu unserer Erkenntnis liefern. Andererseits wäre es sehr zu wünschen, daß die langjährigen Beobachtungsreihen, welche jetzt über den Rhonegletscher, den Hintereis-, den Vernagtgletscher u. a. in den Alpen vorliegen, noch lange fortgesetzt und durch gleichwertige Beobachtungen vor allem aus Norwegen, Amerika, Neuseeland und dem Himalaya ergänzt werden.

Von besonderer Wichtigkeit erscheint es, das Maß des Abtrages zu ermitteln, den das Gletscherbett unter der Einwirkung des bewegten Eises erfährt. In dieser Hinsicht wäre auch inbezug auf Beobachtungsmethoden noch manches zu liefern. Bisher sind meines Wissens nur zwei Versuche zur Messung vorhanden. Der eine von Baltzer, welcher im jetzt eisfreien Gelände vor dem Untergrindelwaldgletscher Bohrlöcher anlegen ließ, deren Tiefe genau bekannt ist und nach einem erfolgten Vorstoß und darauffolgenden Rückgang des

Gletschers wieder ermittelt werden müßte.*) Der andere rührt von mir her und bezieht sich auf die Schuttmengen, welche an den verschiedenen Punkten der Innenmoränen jährlich ausschmelzen.

Die bisherigen Ergebnisse sollen hier nicht weiter erörtert werden; doch sei darauf hingewiesen, daß die Bestimmung des jährlichen Erosionsbetrages bisher noch nicht nach einwandfreier Methode erfolgen kann. Immerhin zeigt sich, daß dieser Betrag wesentlich größer ist, als er bisher allgemein angenommen wurde und mehr als 1 cm pro Jahr ausmacht. Neben einer Ausdehnung dieser Messungen auf möglichst viele Gletscher wäre auch eine Untersuchung im physikalisch-mechanischen Laboratorium sehr erwünscht, welche die Bearbeitung der Gesteine durch bewegtes Eis bei verschiedenen Drucken, Geschwindigkeiten und Temperaturen zum Gegenstand haben könnte.

Dem Studium der Gletscherschwankungen widmet die internationale Gletscherkommission seit Jahren ihre besondere Aufmerksamkeit; um die gewünschten Resultate zu erzielen, müssen die direkten Beobachtungen der Längenänderungen, welche die Gletscher im Laufe der

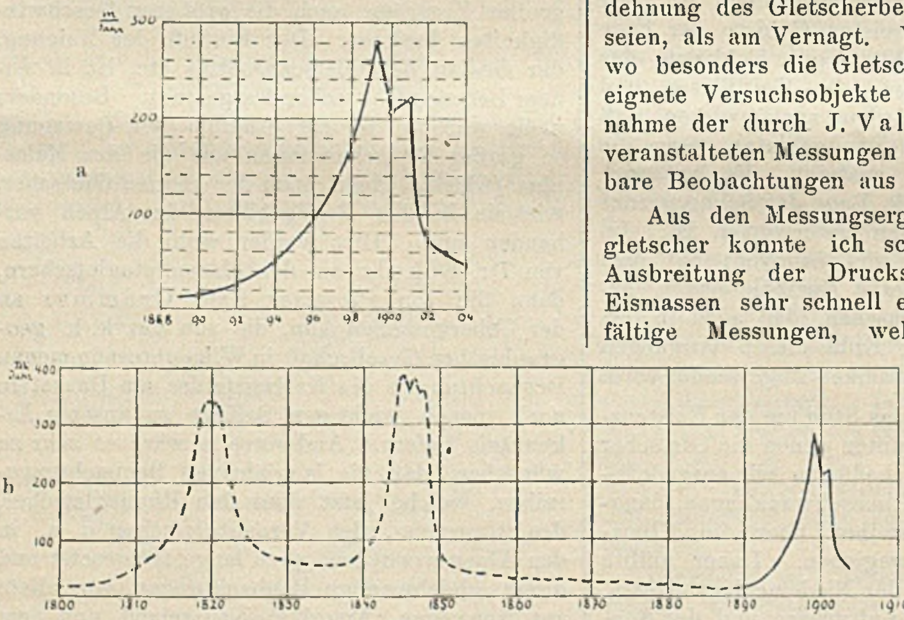


Fig. 4.
a Gemessene Geschwindigkeiten des Vernagtferners 1889—1904.
b Mutmaßliche Geschwindigkeiten des Vernagtferners 1800—1904. Ob zwischen 1870 und 1880 eine Vergrößerung der Geschwindigkdit bestand, ist nicht bekannt.

Zeit erfahren, noch lange Jahre fortgesetzt werden. Ich möchte aber auch an dieser Stelle darauf hinweisen, daß durch entsprechende Ausnützung der alten Akten, die in den Stadt- und Landarchiven der Gebirgsgegenden aufbewahrt liegen, vielleicht noch mancher Aufschluß über auffallende Vorgänge in den Gletschergebieten gewonnen werden kann, welcher zur Kenntnis der Gletscherschwankungen beiträgt.

*) Auch am Hüfigletscher wurde durch Voskule gleiches ausgeführt.

Die Untersuchungen über die Bewegung des Vernagtgletschers haben, da sie gerade in günstige Zeiten fielen, gelehrt, welchen beträchtlichen Schwankungen die Geschwindigkeit dieses Eisstromes im Laufe der Zeit unterworfen ist. Mit Benutzung der Nachrichten aus früherer Zeit läßt sich für das letzte Jahrhundert die Aenderung der Geschwindigkeit dieses Gletschers durch folgendes Bild veranschaulichen (Fig. 4a und b). In Fig. 4a ist die auffallend große Geschwindigkeitsänderung beim letzten Vorstoß und nach dessen Ablauf deutlich zu erkennen. Fig. 4b legt die Vermutung nahe, daß in dem Zeitraum zwischen 1870 und 1880 ebenfalls ein Abweichen der Geschwindigkeit eintrat; doch fehlen bis jetzt Nachrichten, welche diese Vermutung bestätigen könnten. Es wäre im höchsten Grade zu wünschen, daß auch für andere Gletscher ähnliche Geschwindigkeits-Messungen angestellt würden, wobei besonders darauf zu achten wäre, daß Gestalt und Ausdehnung des Gletscherbettes wesentlich andere seien, als am Vernagt. Vom Montblanc-Gebiet, wo besonders die Gletscher bei Chamonix geeignete Versuchsobjekte böten, fehlen mit Ausnahme der durch J. Vallot am Mer de glace veranstalteten Messungen bis jetzt leider brauchbare Beobachtungen aus neuerer Zeit.*)

Aus den Messungsergebnissen vom Rhonegletscher konnte ich schon folgern, daß die Ausbreitung der Druckschwankungen in den Eismassen sehr schnell erfolgen müsse. Sorgfältige Messungen, welche Blümcke und Finsterwalder am Hintereisgletscher zur Bestimmung der Sommer- und Wintergeschwindigkeiten angestellt und durch mehrere Jahre fortgesetzt haben, lehren uns, daß Bewegungswellen von relativ kurzer Dauer die Eismasse durchzucken und sich gegenseitig überlagern; wir wissen, daß wir es mit Bewegungsschwankungen von längerer Dauer (Klimaperiode) zu tun haben, welche Veränderungen in der Länge des Eisstromes bewirken; daneben bestehen Schwankungen von der Dauer weniger Jahre und noch jahreszeitliche Schwankungen, welche keine Aenderung der Gletschergröße bewirken. Es wäre zu wünschen, daß auch

*) Im Sommer 1905 wurden erfreulicherweise durch Herrn P. Mougin größere Vermessungen an Gletschern der Montblanc-Gruppe vorgenommen, die späterhin fortgesetzt werden sollen.

für andere Gletscher, die unter anderen Bedingungen stehen, ähnliche Studien ausgeführt würden, damit wir die nötige Aufklärung darüber gewinnen, welchen Einfluß auf den Verlauf dieser Bewegungsänderungen der besondere Bau des Gletscherbettes besitzt. Eine Trennung der durch die klimatischen Bedingungen hervorgerufenen Periode im Gletscherstand und der durch die Konfiguration des Gletschers selbst bedingten Periodizität seiner Ausdehnung erscheint als eine wichtige Aufgabe beim Studium der Gletscherschwankungen. Jeder Versuch zu ihrer Lösung hängt aber ab einerseits von der Summe der Erfahrungen, die wir über die Gletscher durch direkte Beobachtung gewinnen, andererseits von dem Stande der Theorie der Bewegung des Eises. Sind die direkten Beobachtungen in dieser Hinsicht schon unzureichend, so steht in theoretischer Hinsicht noch so gut wie alles aus. Ein Versuch, den ich selbst seiner Zeit machte, um das langsame Vorschreiten der letzten Gletschervorstöße in den Alpen von Westen nach Osten z. T. auf die orographischen Verschiedenheiten zurückzuführen, hatte zwar ein Ergebnis, das mit den bis jetzt auf statistischem Wege gewonnenen Erfahrungen in Einklang steht: allein die theoretische Begründung meiner Formel für die „Empfindlichkeit" des Gletscherendes auf Schwankungen des Niederschlags im Firn und der Abschmelzung auf der Zunge ist doch recht unzureichend. Es fehlt uns zur Zeit völlig an theoretischen Grundlagen, welche hier zur Richtschnur dienen können. Wir besitzen zwar Finsterwalder's Strömungstheorie, die auf geometrischer Grundlage aufbaut und eine ganze Reihe von tatsächlich beobachteten Erscheinungen verstehen lehrt und erklärt, auf Grund deren auch eine Anzahl neuer Errungenschaften gewonnen wurden. Aber — sie leistet doch nicht alles, und wenn sie auch das Fundament für jede spätere Theorie bilden dürfte, so sind doch die physikalischen Bedingungen für die Eisbewegung bisher nicht so gut bekannt, daß an eine weitere Ausgestaltung dieser Theorie jetzt schon herangetreten werden kann. (Schluß folgt).

Vereinfachungen der Volumetrie der Gase.

Von H. Rebenstorff (Dresden).

Nur bei ganz rohen Messungen von Gasmengen übergeht man die Berücksichtigung des jeweiligen Druckes und des Wärmegrades. Trotz der Minderwertigkeit der so erhaltenen Resultate mußte sich der elementare, physikalische und chemische Unterricht meistens zu einem Verzicht auf die Reduktionsrechnungen entschließen, da diese in der bisher gebräuchlichen Ausführungsart so viel Zeit in Anspruch nehmen, daß der Unterrichtsgang dadurch schleppend und die Uebersicht auf dem behandelten Gebiete erschwert wird. Es wird in solchen Fällen, weil unnötig, die Versuchsanordnung auch gar nicht derart eingerichtet, daß die Temperatur des gemessenen Gasvolumens genauer bekannt wird. Vor kurzem habe ich angegeben, wie sich Reduktionsrechnungen für Gasvolumina auf eine Addition oder Subtraktion fast sofort ersichtlicher kleiner Volumwerte beschränken lassen, so daß man ohne Hemmung des Unterrichtes zu den so wertvollen genauen Zahlen gelangen kann. (Zeitschr. f. d. physikal. u. chem. Unt. XVIII 277, XIX 200.)

Voraussetzung für das Verständnis der Rechnungen ist freilich eine gute Kenntnis der Gesetze, nach denen Druck, Wärme und Feuchtigkeit das Volumen der Gase beeinflussen. Aber auch die in letzter Zeit von so hervorragender Seite betonte Notwendigkeit der Kenntnis des physikalisch-chemischen Gebietes läßt es zweckmäßig erscheinen, durch ein Zusammenwirken des physikalischen und des chemischen Unterrichtes jene Gasgesetze frühzeitig und gründlichst bekannt zu machen. In der Physik können die verkürzten Rechnungen im Anschlusse an die betreffenden Gasgesetze behandelt und bei manchen Versuchen, z. B. über Gewicht von Gasen, Auftrieb in der Luft, mit dem Knallgasvoltameter wiederholend benutzt werden. Ebenso muß der chemische Unterricht bestrebt sein, die sichere Kenntnis der Gasgesetze ihrer großen Bedeutung wegen zu vermitteln, bezw. zu erneuern. Schließt man als Folgerungen die Reduktionsrechnungen an, so wird die geringe hierauf verwendete Zeit, die vielleicht durch Fortlassen einiger Metallreaktionen oder technischer Einzelheiten zu erkaufen wäre, für die folgenden Stunden gut verwendet. Ist doch die Zahl chemischer Reaktionen, die eine genaue quantitative Vorführung unter Benutzung der Wage im Unterrichte zulassen, gering, während eine Veranschaulichung stöchiometrischer Verhältnisse mittels Volummessung von Gasen vielfach in bequemer Weise ausführbar ist. (Vergl. Fried. C. G. Müller, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unt. XIV 330.) a. a. O. habe ich für bekannte und neue Reaktionen Versuchsanordnungen angegeben, bei denen auch die Temperatur der abgemessenen Gasmengen hinreichend genau bekannt wird, um eine scharfe Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu ermöglichen. Diese Versuche sollen am Schlusse dieses Aufsatzes nochmals gestreift werden, nachdem zunächst die einfachen Umrechnungen mitgeteilt wurden.

Bei manchen Versuchen erhält man nach einander zwei oder mehr Gasmengen, deren Größen man vergleichen will. Sind die zugehörigen Werte von Druck und Temperatur die gewöhnlichen, d. h. Atmosphärendruck und Zimmerwärme, jedoch um kleine Beträge von einander verschieden, so ist zur Vornahme des Vergleiches eine Umrechnung der Gasvolumina für Druck und Wärme des einen von ihnen nötig. Sind die Gasmengen über Wasser gesammelt und gemessen, so können zu Verschiedenheiten des atmosphärischen Druckes kleine Druckunterschiede hinzukommen, die von der Höhe der Wasserniveaus abhängen. Für solche kleineren Druckunterschiede gilt es, dass man ein Gasvolumen auf einen anderen Druck umrechnet, indem man so viele Promille des Volumwertes zu ihm selbst addiert oder davon subtrahiert, als der neue Druck an Zentimetern Wassersäule kleiner oder größer ist; für je 1 cm Wasserdruck kann man $^3/_4$ mm Quecksilberdruck setzen. Nach dieser natürlich nur annähernd zutreffenden Regel reduziert man auch z. B. sehr einfach ein im langen Eudiometerrohr über Wasser abgemessenes Luftvolumen auf Atmosphärendruck oder ein bei bekanntem Barometerstand gemessenes Luftvolumen auf Normaldruck. Auch im letzteren Falle ist die Anzahl der Promille, um die das Luftvolumen zu vermehren oder zu vermindern ist, durch die Abweichung des Barometerstandes von 760 mm gegeben, indem die Differenz durch $^3/_4$ mm geteilt wird.

Es sei gestattet, hier einzuschalten, daß man wohl im allgemeinen eine bestimmte Rechnung beim Schulunterricht mit Vorteil nur in einer einzigen Weise einübt. Hier darf man aber wohl trotz der Gefahr der Verwechslungen wegen der großen Vereinfachung für die Rechnung mit kleinen Differenzen das Näherungsverfahren ebenfalls benutzen. Bemerkt sei noch, daß die Fehler dieser und der weiter unten angegebenen Rechnungen das Resultat nur ausnahmsweise um etwa 1 Promille seines Wertes falsch machen (z. B. bei selten geringem Luftdrucke an Orten von 400 m Meereshöhe). Für die kleinen Schwankungen des Luftdruckes gilt die verkürzte Rechnung etwa in der Annäherung, wie das Mariottesche Gesetz selbst für große Aenderungen des Druckes.

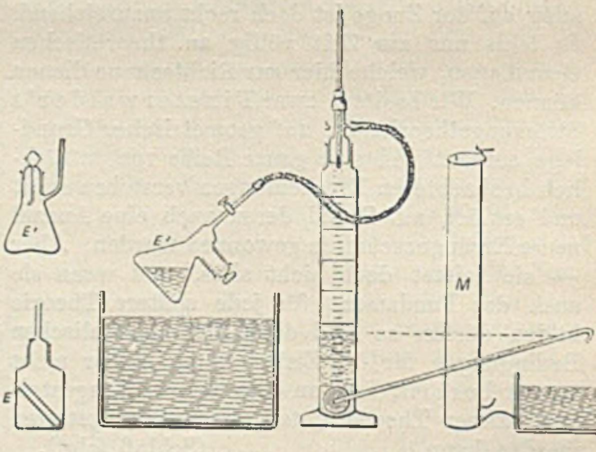
Sind die Temperaturen zweier zu vergleichender Gasmengen Zimmerwärmen, die um wenige Grade von einander abweichen, so ist das eine Gasvolumen auf die Temperatur des anderen umzurechnen. Für trockene Gase gilt hierfür annähernd, daß auf je 0,3 Grad der Temperaturdifferenz vom Volumen des wärmeren Gases ein Promille seines Wertes abzuziehen ist. Sind die Gase durch Auffangen über Wasser oder sonstwie beständig in der Lage, sich mit Wasserdampf zu sättigen, so kommt hinzu, daß vom Volumen des wärmeren Gases auf je 0,7 Grad des Temperaturunterschiedes 1 Promille seines Wertes abzuziehen ist. In solchen Fällen wird man natürlich die Promille der Reduktionsbeträge vereinigen, z. B. bei 2,7 Grad Temperaturdifferenz $9 + 4 = 13$ Promille, die abzuziehen wären, bei 766 mm Luftdruck mit $6 \times \frac{4}{3} = 8$ Promille zusammenrechnen, die für die Reduktion auf Normaldruck zu addieren wären; man erhält 5 Promille des Volumwertes, die von diesem zu subtrahieren sind.

Keineswegs sollen diese Rechnungen die Kenntnis des „Gaskoëffizienten" $^1/_{273}$ der Gase unnötig machen, die vielmehr als ein Hauptergebnis des naturwissenschaftlichen Unterrichtes besondere Hervorhebung erfordert. Gerade hierzu ist es aber lohnend, klarzustellen, daß diese Zahl den Bruchteil der Volumänderung bei der Temperaturänderung um 1 Grad von 0^0 an ergibt, und daß dieser Bruchteil immer kleiner wird, wenn man die Volumzunahme eines wärmeren Gases bei weiterem Erwärmen um 1 Grad angeben will, daß er bei 27^0 genau $^1/_{300}$, also bei Zimmerwärme nicht viel mehr beträgt. Bezüglich der Fehler der verkürzten Reduktionsrechnungen gilt das a. a. O. Gesagte; sie kommen auch für sehr genaue Unterrichtsversuche nicht in betracht.

Die Reduktion eines bei Zimmerwärme abgemessenen trockenen Luftvolumens auf 0^0 wird durch den Umstand verkürzt, daß hierfür $^1/_{15}$ seines Wertes von ihm abzuziehen ist. Völlig genau ist diese Rechnung, wenn die Temperatur des Luftvolumens 19.5^0 beträgt. Ist das Gas feucht gesättigt, so reduziert man auf Trockenheit, wenn man $^1/_{50}$ des Volumwertes von diesem abzieht, eine Rechnung, die für 17.7^0 für sich allein genau ist. Vereinigt man die Reduktion auf 0^0 und Trockenheit für eine feucht gesättigte Gasmenge von Zimmerwärme auf die einfache Folge beider Subtraktionen ($^1/_{15}$ und $^1/_{50}$), so ist sie genau richtig für 19^0, ein Umstand, der ihre Anwendung sehr bequem macht.

Nach der Reduktion der abgemessenen Gasmengen auf normal findet man mittels der Molekulargewichte, bezw. Gasdichten die absoluten Gewichte der Gasmengen zur Bestätigung der stöchiometrischen Gesetze. Besonders bequem sind Versuche mit Wasserstoff ausführbar, der durchgewogene Mengen leicht löslicher Metalle in Säuren entwickelt und in den a. a. O. beschriebenen Gasmeßzilindern aufgefangen wird. Am einfachsten werden die Metallmengen (*Mg, Al, Zn, Sn, Cd*) zu $^1/_{50}$ Grammatomgewicht Schwere abgewogen. Sie liefern dann (ausgenommen *Al*, das wegen seiner Dreiwertigkeit den $1\,^1/_2$ fachen Betrag entwickelt) $^1/_{25}$ Grammatomgewicht oder $^1/_{50}$ Grammmolekulargewicht Wasserstoff, d. h. normal 445 ccm für didakt. Atgew., bezw. 448 ccm für intern. Atgew., was bei den Versuchen zum Verständnisse von Atomgewicht und Wertigkeit sehr annähernd gefunden wird. Die Firmen Dr. Göckel in Berlin NW., Luisenstraße, Max Kohl in Chemnitz und Rohrbecks Nachf. in Wien, von denen die Gasmeßzilinder und Entwickler (mit Haltestift zum Festhalten des Blechröllchens vor dem Fallenlassen in die Säure durch Erschüttern) zu beziehen sind, liefern auch im obigen Gewichte abgewogene Blechröllchen aus den genannten Metallen.*)

Während bei diesen Versuchen die Wasserstoffmenge bekannt wird, die vom Atomgewichte der löslichen Metalle in überschüssiger Säure entwickelt wird, kann man auch umgekehrt mit einem Ueberschusse des neuerdings sehr rein und billig erhältlichen Magnesiums**)



(in Spänen) wegen dessen großer Lösungstension aus einer mit der Pipette abgemessenen Säuremenge den gesamten Säurewasserstoff entwickeln und mittels der Gasmeßzilinder bequem abmessen. Näheres darüber enthält die zweite der zitierten Mitteilungen über „Acidimetrie durch Wasserstoffmessung."

Die gleichen Gasmeßzilinder (auch kleinere) sind ebenfalls bequem anwendbar für genaue Messungen

*) Natürlich kann man auch gleiche Gewichte der verschiedenen Metalle lösen; die umgekehrte Proportionalität der gemessenen Gasmengen und der Atomgewichte ist dann erst durch Rechnung zu bestätigen. Die „Röllchen" (zu $^1/_{50}$ g-Atgew.) veranschaulichen zugleich Atomgewichte. Zum Nachwägen durch einen Schüler (nach Art der Ausführungen von Kaiser auf dem Ferienkursus in Frankfurt, ref. P. XIX 388) ist die „Senkwage mit Zentigrammspindel" geeignet (P. XIX 10).

**) M. Kohl in Chemnitz. Die Glasapparate sowie Magnesiumspäne liefert auch G. Müller in Ilmenau.

beim physikalischen Unterricht, z. B. der Zilinder für 100 ccm in der Verbindung mit dem Knallgasvoltameter. Ist die Versuchstemperatur annähernd 19°, so gestaltet sich die Gewinnung der reduzierten Volumzahlen aus der abgemessenen Menge des feucht gesättigten Knallgases sehr bequem und genau.

Zur Abmessung von Kohlensäure mit ganz geringen Verlusten durch Lösung, besonders auch für praktisch analytische Zwecke, füllt man den Meßzilinder statt mit Wasser mit einer fast gesättigten Lösung von Natriumnitrat. Näheres hierüber s. Chemiker-Zeitung S. 1114, 1906. Es sei hier nur erwähnt, daß in dieser Weise auch die Entwicklung aus Karbonaten genau quantitativ demonstriert werden kann. Die in der Säure zunächst gelöst bleibenden Anteile des Gases werden mittels einer hierauf eingebrachten abgewogenen Magnesiummenge ausgetrieben und vom gemessenen Volumen die ccm des Wasserstoffes abgezogen (p Milligramm Magnesium entwickeln bei 18° genau p ccm Wasserstoff).

Einen bemerkenswerten Versuch über die Gleichheit der Volumina verschiedener Gase, die gleichviel Moleküle enthalten, macht man mit abgemessenen Säuremengen in folgender Weise. Mittels eines Ueberschusses an Magnesiumspänen wird der ersetzbare Säurewasserstoff (bis zur Neutralitätsanzeige durch einen Farbenindikator) ausgetrieben und abgemessen. Das fast genau gleiche Gasvolumen erhält man dann bei einem zweiten Versuche mit der gleichen Säuremenge, wenn man zunächst ein Karbonat einbringt und hinterher, bis zur Neutralisation mittels Magnesiums Wasserstoff entwickelt.

Die Neugestaltung des geometrischen Unterrichts.

Von F. Walther (Halensee).

Die große Reformbewegung auf dem Gebiete des höheren Unterrichts, die vor etwa 20 Jahren eingesetzt hat, hat erst verhältnismäßig spät die mathematischen Kreise erfaßt. Diese haben aber in den letzten Jahren den Verlust an Zeit durch gesteigerte Rührigkeit wettzumachen gesucht. So ziemlich alle Fragen des mathematischen Schulunterrichts sind kritisch beleuchtet worden: der Bildungswert der Mathematik und die ihr im Gesamtunterrichte gebührende Stellung, die Verteilung und Abgrenzung des Stoffes, die Methode der Uebermittlung und andere wichtige Punkte haben von den verschiedensten Standpunkten aus eine eingehende Prüfung erfahren. Das wissen die Leser dieser Blätter, denen fast jede Nummer einschlägige Aufsätze oder Referate brachte.

Eine Art Generalinventur ist im Gange. Manches ist als schadhaft erkannt worden und wandert in die Rumpelkammer; bei manchem wieder ist die Frage nach dem Werte noch nicht ausreichend geklärt; vieles aber hat sich als wertvoll erwiesen, und es läßt sich heute, wenn auch die Prüfung noch lange nicht beendet ist, schon so viel übersehen, daß der Abschluß eine Reihe von bleibenden Gewinnen verzeichnen wird.

Zu einem solchen Gewinne rechne ich die Untersuchung des Bildungswertes der Mathematik. Die Parteien haben sich freilich noch nicht darüber geeinigt, ob der mathematische Unterricht mehr formale Schulung oder eine dem Wesen des Gegenstandes entsprechende Fachbildung zu vermitteln habe (s. den Vortrag von Nath, Unterrichtsbl. 1904): aber die Erörterung der Frage hat doch den wesentlichen Erfolg gehabt, daß man sich des hohen Wertes der mathematischen Bildung klar bewußt geworden ist und alles daran setzt, sie der überwiegenden Mehrheit der Schüler mitzuteilen, nicht, wie früher vielfach, nur einigen „mathematischen Köpfen". Ein klarer, ernster Wille aber schafft sich auch die Mittel zur Durchführung, und so kann man denn als zweiten Gewinn gewisse Urteile über den Lehrstoff bezeichnen, die sich jetzt nach und nach abklären, und als dritten solche über das Lehrverfahren.

Zwar, der zweite ist scheinbar noch recht unsicher, denn es wogt heute ein heißer Kampf darüber, ob gewisse Gebiete in die Schule gehören oder nicht; aber m. E. treffen derartige Einzelfragen nicht den Kern der Sache, sie werden auch am besten nicht allgemein, sondern von Fall zu Fall, nach Persönlichkeit des Lehrers, Wissensstand des Schülermaterials, verfügbarer Stundenzahl usw. gelöst. Entscheidend ist, daß zwei Tendenzen allgemeiner Natur immer deutlicher hervortreten, das sind Einschränkung des Stoffes und Bevorzugung derjenigen Gebiete, auf denen die Mathematik in enge Fühlung mit dem übrigen Geistesleben und mit der Praxis kommt.

Viel weiter ist die Klärung bei den Anschauungen über das Lehrverfahren gediehen. Vor allem gilt dies für den geometrischen Unterricht, dessen Methodik, entsprechend seiner wichtigen Stellung am Beginne des mathematischen Gesamtunterrichts, die eingehendste Behandlung gefunden hat. Man hat sich von der Herrschaft Euklids endgiltig losgemacht; man will aber auch nicht mehr den einzelnen Lehrern die unbeschränkte Bewegungsfreiheit lassen, die zu einer wahren Anarchie der Methoden geführt hat, sondern sucht Normen für das Unterrichtsverfahren aufzustellen und schießt wohl, einem Zuge der Zeit folgend, in diesem berechtigten Bestreben gelegentlich über das Ziel hinaus, indem man die lebendige Persönlichkeit des lehrenden Künstlers durch ein automatisch wirkendes Werkzeug, die Methode, ersetzen möchte.

Die vielen Verbesserungsvorschläge, die in betreff des geometrischen Unterrichtsverfahrens gemacht worden sind, haben sich in der jüngsten Zeit unter dem Einflusse hervorragender Gelehrter (man lese die „Neuen Beiträge zur Frage des mathematischen Unterrichts" von F. Klein und E. Riecke) und unter der Mitwirkung der Unterrichtskommission der Meraner Naturforscherversammlung zu bestimmten Forderungen verdichtet, die man etwa unter den Stichwörtern Anschauung, Induktion, Beweglichkeit der Raumgebilde, Funktionsbegriff zusammenfassen kann.

Die wichtige Rolle, die der Anschauung im geometrischen Unterrichte zufällt, wird wohl jetzt allgemein anerkannt; ein Streit kann sich höchstens über den Umfang erheben, in dem sie gepflegt werden soll. Daß ein propädeutischer Kurs, der sich ganz auf sie stützt, dem Hauptlehrgange voranzugehen hat, darf ebenfalls als gesichert gelten. In überzeugender Weise hat J. Ducrue in der letzten Nummer dieser Blätter diese Forderung begründet, und ich kann hier füglich auf diesen Aufsatz verweisen. Ich habe zu seiner Darstellung der Aufgabe des Anfangsunterrichts nur einige Bemerkungen zu machen. Zunächst möchte ich stärker betont wissen, daß die Geometrie dem Anfänger keinen neuen Stoff, sondern nur eine neue Art bringt, diesen Stoff anzusehen. Die wohlvertraute nächste Umgebung, das Zimmer, die Straße, der eigene Körper, bilden das Gebiet, auf dem der

Schüler geometrische Entdeckungsfahrten zu machen und von dem er die geometrischen Grundbegriffe heimzubringen hat. Fertige geometrische Gebilde, wie Würfel u. a., ihm gleich vorzuzeigen, halte ich nicht für angemessen; das unterbindet die wichtigste Tätigkeit, die der Abstraktion, und führt wegen der Fremdartigkeit des Materials leicht zu jener stillen Abneigung gegen das neue Fach, die sich später so oft zu dem bekannten „Mangel an mathematischer Begabung“ vertieft. Die häufigsten und zugleich einfachsten geometrischen Verhältnisse, wie senkrecht, wagerecht, parallel, gleich, symmetrisch usw. sind naturgemäß Gegenstand der eifrigsten Untersuchung. Sie sind der Anschauung unverlierbar einzuprägen und dienen dann als Wegweiser bei der Beobachtung der schwierigeren Verhältnisse. Nachschaffen des Angeschauten ist vom ersten Augenblick an unerläßlich — nur beim Schaffen gibt sich der Schüler ganz — aber die Darstellungsmittel sind zunächst Finger, Hand, Arm und Bein, nicht die Zeichnung; denn diese ist schon eine höhere Stufe der Abstraktion und bietet dem Anfänger erhebliche technische Schwierigkeiten. Die Zeichenwerkzeuge sollten erst allmählich eingeführt werden und anfangs immer nur zur Verbesserung der nach dem Augenmaße ausgeführten Zeichnung dienen. Auch das Messen darf nicht übertrieben werden; es bindet die Anschauung, statt sie zu entwickeln; Abschätzung hat der genauen Messung in jedem Falle voranzugehen. Je sicherer Auge und Hand werden, um so größere Bedeutung gewinnt die Zeichnung; ästhetische Forderungen treten jetzt auf: man bevorzugt regelmäßige Figuren, verlangt angemessene Verteilung über den Raum usw. Allmählich hat sich der Schüler an seine Zeichenwerkzeuge gewöhnt und erkennt, daß er in ihnen ein vortreffliches Rüstzeug besitzt, vorausgesetzt, daß er sie mit peinlichster Gewissenhaftigkeit und Ehrlichkeit gegen sich selbst benutzt. Ich würde nicht wie J. Ducrue ihre Mangelhaftigkeit betonen, auf spätere bessere Mittel vertrösten und so die Schüler bedenklich machen, sondern immer das Höchste von seinen Zeichnungen verlangen. Am besten stellt man ihm dazu Aufgaben, die eine Selbstkritik ermöglichen (z. B. Zeichnung eines Dreiecks mit zwei gleichen Winkeln; Probe: Gleichheit zweier Seiten); nun mag er zeichnen — und entweder den Lohn für seine Sorgfalt oder die Strafe für seine Lässigkeit sich selbst zusprechen. Darin erblicke ich das ethische Moment dieses Unterrichts.

Zum Schlusse noch eins. J. Ducrue verteidigt die bayrische Unterrichtsbehörde, die ein Lehrbuch der Propädeutik nicht für zweckmäßig hält. Ich komme aus meiner Erfahrung zu dem entgegengesetzten Schlusse, daß ein solches nicht nur wünschenswert, sondern geradezu notwendig ist. Notwendig sowohl für den Lehrer — denn dieser Anfangsunterricht verlangt eine reich arbeitende und zugleich streng geregelte Phantasie, die nicht jedem und keinem immer zur Verfügung steht — notwendig aber auch für den Schüler, der eine ganze Menge Vokabeln und Sätze sich einzuverleiben hat und nicht mit dem mühseligen Nachschreiben viel kostbare Zeit verlieren darf. Ich bin gerade durch diese Uebelstände zu der Abfassung eines Lehrbuchs gedrängt worden, das den Anfangsunterricht behandeln sollte, sich aber dann in organischer Entwicklung auf den weitern Lehrgang ausgedehnt hat.

Ist die Anschauung die alleinige Quelle des ersten Unterrichts, so muß sie auch den weiter folgenden noch in reichstem Maße versorgen. Angeschaute Wahrheiten haben eine ihnen eigentümliche Ueberzeugungskraft, wie sie keine irgendwie abgeleitete je erreicht. Was der Schüler mit Augen schaut und mit Händen greift, bedarf keines weitern, „strengen“ Beweises. Sieht er z. B., daß Scheitelwinkel gleich sind, so wird er eine langatmige Ableitung überflüssig finden und sich gegen sie als eine nutzlose Spielerei sträuben. Der jugendliche Geist hat eben wesentlich andere Bedürfnisse und andere Urteile über Wahrheiten als der wissenschaftlich geschulte; Unterricht aber ist Befriedigung des Sehnens der Jugend und muß sich ihrem Geschmacke anpassen. Man zwänge nur nicht zu früh den Schüler in die spanischen Stiefel des logischen Schlußverfahrens und komme ihm nicht, wie dies vielfach noch geschieht, gleich am Anfange des Hauptlehrgangs mit allgemeinen Sätzen wie „Gleiches kann man für Gleiches“ setzen“ usw. Abgesehen davon, daß diese farblosen Grundsätze philosophisch höchst bedenklich sind — sie gelten doch nur unter allerlei Voraussetzungen — so können sie nur das Endziel, nicht der Beginn eines Lehrverfahrens sein, denn ihre Giltigkeit soll sich erst aus dem Lehrgange ergeben, nicht umgekehrt.

Ich finde für solche Versuche, aus allgemeinen Obersätzen die geometrischen Wahrheiten „streng und folgerichtig“ abzuleiten, die Wurzel in der Ueberschätzung des deduktiven Verfahrens, die dem wissenschaftlichen Denken von Jahrtausenden den Stempel aufgedrückt hat und erst seit dem Aufschwunge der Naturwissenschaften einer angemessenen Würdigung gewichen ist. Ich verkenne nicht, daß einer auf deduktivem Wege gewonnenen Wahrheit eine große psychologische Sicherheit innewohnt; aber ich finde sie nicht objektiv begründet. Einen kurzen Syllogismus will ich noch als sicher gelten lassen — dafür fördert er meistens die Erkenntnis auch so wenig, daß man ihn entbehren kann — längere Schlußketten aber bringt ein einziges schadhaftes Glied sofort ins Schwanken. Und die ganze Kette gerät ins Gleiten, wenn nicht der Obersatz fest verankert ist. In mühseliger, peinlicher Kleinarbeit muß erst auf dem Boden der Erfahrung Stein an Stein, Schicht auf Schicht gefügt werden, bis die schwindelnde Höhe des Obersatzes erreicht wird, von der aus man so leicht geneigt ist, auf die bisherige Leistung mit Geringschätzung herabzublicken. Der Weg zur Wahrheit geht empor durch Induktion, nicht abwärts mittels deduktiver Schlüsse. Die Deduktion ist im Wesentlichen ein Kontrollverfahren und als solches auch unbedingt notwendig: aber jede Schlußkette ist nur brauchbar, wenn sie bis zu dem Boden der Erfahrung herabreicht und dadurch eine Prüfung der Fundamente des Schlußgebäudes ermöglicht; andernfalls schwebt sie in der Luft und bleibt ein geistreiches Spiel.

Mit der Geometrie ist es nicht anders als mit allen Wissenschaften: sie ist ihrem Ursprunge nach eine Erfahrungswissenschaft mit induktiver Methode, eine Naturwissenschaft der räumlichen Gebilde, und sie trägt noch heute deutlich genug die Merkmale ihrer Abstammung. Ich brauche nur an den Parallelensatz zu erinnern, den Grundstein des ganzen geometrischen Lehrgebäudes; es gibt keinen Beweis für ihn, der nicht eine petitio principii in sich schlösse — er ist eben eine Tatsache der Erfahrung. Ist aber der historische Werdegang der Geometrie zunächst der empirisch-induktive, so muß dies auch der methodische Lehrgang sein. Denn wie im Leben, so gilt im Unterrichte das biogenetische Grundgesetz: die Entwicklung der reifenden Menschheit spiegelt sich in der des reifenden Kindes. — Die Forderung, im Unterrichte mehr das induktive Element zu betonen, läßt sich auch aus der Stellung begründen, die man der Geometrie im Rahmen der gesamten geistigen Ausbildung anweisen muß. Sie vermittelt nach dem schönen Ausspruche Platos den Zugang zum gesamten wissenschaftlichen Denken; man darf ihr dieses Recht nicht schmälern, indem man all die wichtigen Wege sperrt, die zu den empirischen Wissenschaften hinführen.

Gelegenheiten, Erkenntnisse induktiv zu gewinnen, bietet der Lehrgang in reichem Maße. Es seien nur einige erwähnt. Der Lehrsatz „Der größeren Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber" mit dem Sonderfall „Das Lot ist der kürzeste Weg von einem Punkte nach einer Geraden" ergibt sich einfach und überzeugend aus der Drehung eines Strahles und der Betrachtung der dabei auftretenden Längen und Winkel, während er umständlich und recht künstlich auf deduktivem Wege gewonnen werden muß. Ebenso findet man den Satz vom Inhalte eines Rechtecks am besten durch Untersuchung besonderer Fälle; man geht dabei vom einfachsten Falle mit ganzen Maßzahlen aus, dann zu verwickelteren über und überzeugt endlich durch den Hinweis auf die Gleichheit des Verfahrens leicht von der allgemeinen Gültigkeit des Satzes. Vorzüglich läßt sich der Erfahrungscharakter der Geometrie an den Uebungsaufgaben zum Ausdruck bringen; sie werden zu diesem Zwecke sozusagen in ein Alltagskleid gehüllt, das sie als Kinder der uns umgebenden Welt kennzeichnet, doch dünn genug ist, um den geometrischen Körper deutlich durchschimmern zu lassen.

Man muß sich aber bei dem Streben, das induktive Element zu Ehren zu bringen, davor hüten, in den entgegengesetzten Fehler zu verfallen und der Deduktion ihr wohlbegründetes Verdienst abzusprechen. Alle Pädagogik ist schließlich Sache des Maßes, des Taktes. Es scheint mir z. B. eine Verstiegenheit, wenn man ernsthaft die induktive Ableitung des Pythagoras aus einer Reihe von Beispielen gefordert hat. Man bleibt auf diesem Wege doch nur in den Beispielen stecken und gelangt nie zur Allgemeingültigkeit des Satzes; es fehlt eben, da man auf die sprunghaft wechselnden pythagoreischen Dreiecke angewiesen ist, hier die Möglichkeit, beliebig zu interpolieren, die Induktion also auf breitester Erfahrungsgrundlage aufzubauen. Warum nicht den Satz aus dem Kathetensatze deduzieren, wozu ein einziger Schritt genügt? Ebenso wenig ist es angezeigt, die Gesetze der Aehnlichkeit induktiv aus den konkreten Dingen zu schöpfen, die dazu viel zu verwickelte Formen zeigen, statt sie als notwendige und in gewissem Sinne abschließende Ergebnisse der Strahlensätze darzustellen. — Die richtige Methode wird wohl die sein, beide Methoden in richtiger Mischung zu verwenden.

Induktion ist nur möglich, wenn eine reiche Mannigfaltigkeit von verwandten Gegenständen und eine allmähliche Abwandlung ihrer Merkmale überblickt werden kann. Die noch vielfach geübte Manier, die geometrischen Gebilde vereinzelt und fertig in ihrer starren Form vorzuführen, lähmt die Erkenntnistätigkeit des Schülers und ist die Grundquelle unausrottbarer Irrtümer. Die Figuren müssen dargestellt werden, wie sie es ihrem Wesen nach sind: beweglich, in ihren Teilen veränderlich. So nur kommt Leben in den toten Stoff, und Leben und Interesse auch in den Schüler. Der Begriff der Bewegung ist — trotz aller erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die ihm anhaften — einer der elementarsten und faßlichsten und muß schon deswegen die ausgiebigste Verwendung im Unterricht finden. Im propädeutischen Kursus zwar wird man mit ihm sparsam umgehen, denn hier soll ja erst das Material Stück für Stück gesammelt werden; immerhin kann man hier schon die Vorstellung der Beweglichkeit der Figuren vorbereiten, indem man z. B. innerhalb desselben Kreisbogens gleichschenklige Dreiecke mit wechselndem Winkel zeichnet, Figuren aus einander entwickelt usw. Später aber wird man den Bewegungsbegriff desto mehr ausnützen. Figuren werden aus Papier geschnitten, verschoben, gedreht, geklappt; mit Finger, Hand und Körper wird der Weg eines Punktes, eine Drehung usw. nachgeahmt. Die Kongruenzsätze mit ihrer eintönigen Aufzählung der drei Stücke widerstreben diesem Verfahren und müssen deswegen aus der beherrschenden Stellung verdrängt werden, die man ihnen heute in IV und U III einräumt; man soll lieber jedesmal die kongruenten Dreiecke auf geeignetem Wege zur wirklichen Deckung führen und damit die Raumvorstellungen in lebhaften Fluß bringen. Aus demselben Grunde soll man einen Punkt möglichst nicht vereinzelt, sondern als augenblickliche Lage auf einem Orte, eine Gerade als Glied eines Strahlenbüschels oder einer Parallelenschar vorstellen, an den Zeichnungen zu weiterem Ausbau (durch Wiederholung desselben Buchstabens mit neuen Marken, durch Pfeile usw.) auffordern. Auch der Wortlaut hat sich dieser Vorstellungsart anzupassen: ein Punkt „wandert", ein Strahl „dreht sich", „ein Winkel wächst" usw.

Von hier aus führt ein einziger Schritt zur letzten Forderung. Die Veränderlichkeit der geometrischen Gebilde ist keine zufällige oder willkürliche, sondern eine streng gesetzmäßige: von der Veränderung der einen Größe hängt jedes Mal die einer anderen in bestimmter Weise ab; jedem Einzelwerte der ersten entspricht ein bestimmter Wert oder eine Wertgruppe der zweiten; mit anderen Worten, die Größen sind Funktionen von einander. In der Funktion haben wir den Zentralbegriff der ganzen Mathematik, denn funktionaler Zusammenhang ist nichts anderes als der mathematische Ausdruck für das große Weltgesetz der Wechselbeziehung aller Erscheinungen, das Kernstück und Endziel aller Wissenschaften. Dieser überragenden Bedeutung des Begriffes hat der mathematische Unterricht dadurch gerecht zu werden, daß er von vorne herein die Richtung auf ihn nimmt. Nun tritt von allen Zweigen der Mathematik die Geometrie am frühesten im Lehrplan auf und ist schon darum berufen, die Vorbereitung der Schüler auf dieses Ziel zu übernehmen. Sie ist aber dazu auch durch die Anschaulichkeit, Stetigkeit und leichte Darstellbarkeit ihrer Gebilde ganz besonders befähigt. Es kann z. B. der funktionale Zusammenhang zwischen der Länge eines Strahles, der eine Gerade schneidet, und seiner Richtung oder zwischen einer Sehne und ihrem Abstande vom Mittelpunkte geometrisch schon lange erkannt werden, ehe die trigonometrischen und algebraischen Mittel zu einer Auffassung ausgebildet sind.

Die Einführung des Begriffs muß ganz allmählich erfolgen. Man unterbricht vielleicht von Zeit zu Zeit den Unterricht durch Fragen nach den Umständen, unter denen besonders ausgezeichnete Fälle auftreten und regt dadurch zur Besinnung an. Man läßt zusammengehörige Gebilde, z. B. Sehne und Mittelpunktsabstand, immer zusammen zeichnen. Durch passende Wahl des Ausdrucks hebt man ferner die Veränderlichkeit der Gebilde hervor, sagt also „die Strecke wird gleich" statt „die Strecke ist gleich" u. a. Sodann stellt man im Wortlaut der Lehrsätze die Wechselbeziehung der mit einander verbundenen Größen immer so dar, daß keine der anderen übergeordnet erscheint; dadurch vermeidet man die fatalen Umkehrungen, die den Zusammenhang zerreißen und unkenntlich machen. Ist durch solche und ähnliche Mittel der Funktionsbegriff ausreichend geklärt, und erscheinen die Schüler auch sonst reif genug, so mag der Name „Funktion" eingeführt und die Bedeutung des Begriffes für die gesamte Welterkenntnis in großen Zügen umrissen werden. Den Stoff, an den diese Erörterungen geknüpft werden, kann der Lehrer nach freiem Ermessen auswählen; recht geeignet würden mir wegen ihrer Stellung im Lehrplane und wegen ihres Inhalts die Beziehungen zwischen dem Radius eines Kreises, einer Sehne und dem zugehörigen Kreiswinkel erscheinen. Von nun ab aber darf die Vorstellung des Funktionsverhältnisses niemals mehr untertauchen. Je reger sie im weitern geometrischen Lehrgange gepflegt wird, um so leichter gestaltet sich der Betrieb der übrigen mathematischen Fächer und um so größeren Einfluß gewinnt der Mathematikunterricht auf die Naturwissenschaft, ja auf alle Gebiete wissenschaftlicher Erkenntnis.

Ich habe die neuen Forderungen, die an den geometrischen Unterricht gestellt werden, zu begründen versucht und habe auch hier und da Fingerzeige für ihre Befriedigung gegeben. Sollen aber die Fachkreise wirklich von der Zweckmäßigkeit dieser Vorschläge überzeugt und dazu bestimmt werden, sie praktisch durchzuführen, so darf es nicht bei einzelnen Andeutungen bleiben. Es muß vielmehr Schritt für Schrit der Weg klargelegt werden, auf dem sich fortan der Unterricht bewegen soll. Als den ersten Versuch, dies zu tun, kann man das kürzlich erschienene Lehrbuch von F. Pietzker begrüßen, in dem ich eine weitgehende Uebereinstimmung mit den hier entwickelten Gesichtspunkten finde. Einen zweiten Versuch soll ein Lehrbuch bilden, das in den nächsten Wochen vom Verfasser dieses Aufsatzes erscheinen wird.

Neue Darstellung des Grenzüberganges und des Grenzbegriffes durch Weitenbehaftungen mit besonderer Berücksichtigung des Schulunterrichts.

Von Kurt Geissler (Luzern).*)

Für das kleine Kind ist noch alles, was es erfährt, wunderbar und voller Rätsel. In der Zeit, wo es anfängt, Mathematikunterricht zu erhalten, hat es sich bereits an die gewöhnlichen Vorkommnisse des Lebens so gewöhnt, daß es Wunderbares in selteneren Erfahrungen oder Ueberlegungen findet. Wenn ein Kind geboren wird, wenn ein Mensch stirbt und nun plötzlich gänzlich aus dem Erfahrungskreise des Kindes und, wie es hört, auch aller Menschen verschwunden ist, dann fängt es an, über diesen Anfang und dieses Ende, diese Grenze nachzusinnen. Aber auch die eigenen Vorstellungen, die es nicht direkt aus der Umgebung nehmen kann, erfüllen es plötzlich und wiederholt mit Staunen; das ist z. B. die Vorstellung der Unendlichkeit des Raumes oder, wenn man will, die Unmöglichkeit, sich eine Grenzwand vorzustellen, ohne zu fragen, was dahinter ist. Leicht kann man schon dem Quintaner oder Quartaner Beispiele des Unendlichen fasslich genug andeuten, um dabei ebenfalls sein ungeheucheltes Erstaunen zu bemerken, z. B. die unausgesetzte Teilung in Hälften, das eleatische Problem des „Nichtausdertürkönnens". Der wissensdurstige Knabe hört im Naturgeschichtsunterrichte vieles, was ihn zum Nachsinnen anregt; heute gibt es wohl kaum ein Kind im Alter des ersten Mathematikunterrichtes, das nicht schon über Entstehung der Erde, Abstammung des Menschen etc. gehört und gelesen, das nicht schon zahlreiche unbeantwortete Fragen gestellt hätte oder hätte stellen mögen.

Wir Erwachsenen, je älter wir sind, um so mehr, gewöhnen uns ab, überall Wunderbares und Auffälliges zu sehen, wir müßten denn gerade Philosophie treiben oder immer von neuem die Grundlagen einer Wissenschaft, wie der Mathematik, mit kritischen Zweifeln durchdenken. Darum darf es uns nicht wundern, wenn das Kind viel leichter neue Grundlagen, neue Ideen auffasst, die den von uns so lange gelernten und geübten Begriffen widersprechen oder über sie hinausgehen.

Ich will mich bei den folgenden Besprechungen über den Grenzbegriff womöglich auf den Standpunkt des betreffenden Alters versetzen, in welchem der Lernende in solche Vorstellungen eingeführt werden kann oder soll, und hoffe dabei doch, wie man es auch sonst beim Unterrichte zu erreichen sucht, die wissenschaftliche Exaktheit nicht zu vernachlässigen. Freilich ist an dieser Stelle die ausführliche, strenge Begründung, wie sie für den Gelehrten notwendig erscheint. nicht beabsichtigt; sie würde auch weit über den möglichen Rahmen dieser kleinen Darstellung hinausgehen.

Was uns gewohnt geworden ist, dessen Schwierigkeiten sehen wir erst wieder, wenn wir durch eigenes Denken oder fremdes Erinnern, z. B. durch den Unterricht, darauf aufmerksam gemacht werden. Dann aber sollen die Lernenden selbst denken. Die Grundbegriffe der Mathematik sind nicht alle derart, dass man sie den Kindern sogleich in streng mathematischer Form vorführen kann. Besonders bei dem Grenzbegriffe kommen gewisse Begriffe oder Ausdrücke zum Vorschein, für welche bisher in der Mathematik selbst weitere Begründungen nicht gegeben werden, obgleich dies nach meiner Meinung nötig wäre. Allerdings bei einer solchen weiteren Untersuchung wird es leicht geschehen, daß man mit der bisherigen Darstellung sich nicht mehr beruhigen kann. Ich möchte hier nur zeigen, wie man das Kind bereits mit dem Sinne solcher Begriffe bekannt machen, bzw. es darüber nachdenken lassen kann, ohne einfach, wie es die Mathematiker meist auch in ihren wissenschaftlichen Schriften tun, sich bei den Ausdrücken selbst zu beruhigen. Ich meine die Begriffe bzw. zugrunde liegenden Vorstellungen: beliebigklein, grenzenlosklein, kleiner als jede noch so kleine Grösse, schließlich, immer mehr, hinlänglich groß etc. Ich denke auch an die Begriffe der Gleichheit, der Null und des Unendlichen.

Sage ich zu einem Kinde: denk dir ein beliebiges Pferd, so stellt es sich doch jedenfalls ein Pferd vor. Es ist nicht nötig, daß es dabei an ein bestimmt farbiges oder bestimmt großes denkt. Es kann sehr wohl die Vorstellung des Pferdes haben, ohne etwa genau zu wissen, wie groß überhaupt ein Pferd ist, z. B. mit dem Metermaß gemessen. Auch ist das Kind wohl imstande, falls es an ein bestimmtes Pferd etwa des Nachbarn denkt, die besonderen Eigenschaften desselben in der

*) Inhalt eines für die Erlanger Versammlung angemeldeten Vortrages, den der Verfasser zu halten verhindert war.

Vorstellung fortzulassen, wenigstens zu wissen, daß es darauf nicht ankommen soll! Sage ich: stelle dir mal irgend ein Tier vor, so bleibt es selbstverständlich ein Tier und irgend welche Eigenschaften eines solchen haften in der Vorstellung, wenigstens der Gedanke, daß man solche Eigenschaften für dieses „Tier“ soll heranholen dürfen. Wie steht es nun mit Beliebigklein oder Beliebiggroß? Etwas Kleines oder Großes als Beispiel wird sich das Kind vorstellen und dabei bald wissen, daß genauere Eigenschaften, Verhältnisse etc. nicht mit vorgestellt werden sollen. Wenn das Kind nun wirklich aus seiner Erfahrung heraus nur Größen kennt, die es sehen kann, so wird es sich auch unter dem Beliebiggroßen nur solche vorstellen. Soll es sich eine Größe immer kleiner vorstellen, so wird es auch zunächst an die Erfahrungsgrößen denken. Wenn es dies aber nicht tut, so nimmt es andere Beispiele aus seiner eigenen Vorstellungskraft, aus einem Gebiete, was man nicht sehen kann. Den Begriff einer Zahl kennt ein Kind schon sehr früh. Wenn es auch immer erst gezählte Gegenstände vorgeführt bekam, es ist für einen jungen menschlichen Geist sehr natürlich und nicht schwer, sofort auch etwas anderes zu zählen, die Anzahl der Tadel, die Zahl von Gefühlen, die Zahl seiner Aufgaben, die Zahl, wie oft es schon an etwas Gewisses gedacht hat, man würde sagen, die Anzahl von inneren Erlebnissen. Auch wunderbare Sachen kann es leicht zählen, Geburtsfälle, Todesfälle. Es fragt sich nun, was ein Kind sich vorstellen wird, wenn man es auffordert, sich etwas immer Kleineres zu denken oder etwas Beliebigkleines in diesem Sinne. Ist es wahr, daß ein Kind die Fähigkeit hat, leicht und sofort über die erfahrene äußere Wirklichkeit hinauszugehen, so ist es auch fähig, sich so Kleines vorzustellen, dass es durchaus nicht mehr in den Rahmen des Sinnlicherfahrenen passt. Ein Kind bildet spielendleicht die Vorstellungen von unerhört großen oder kleinen Wesen, von Riesen und Zwergen. Solche Wesen, könnte man sagen, gehören aber ihrer Größe nach doch in das Sinnlichwahrnehmbare. Es ist aber jedem Kenner der Kinder unzweifelhaft, daß das Kind sich augenblicklich auch so Kleines vorstellen kann, daß es gar nicht mehr wahrzunehmen sei. Bei solchen Vorstellungen wären wir immer noch im Sinnlichvorstellbaren, wenn auch nicht mehr Wahrnehmbaren. Kann es nicht darüber hinaus oder darunter, wenn wir sagen Beliebigklein oder Immer kleiner? Es fragt sich, ob es überhaupt der Vorstellungen unfähig sei, bei denen das Sinnlichvorgestellte anfängt, seine Sicherheit, seine Bestimmtheit des Vergleiches zu verlieren. Es ist nun nichts leichter, als ein Kind auf die Vorstellung von so Großem oder so Kleinem zu bringen, daß es „so Großes oder Kleines gar nicht mehr gibt“. Das Kind meint natürlich: in der sinnlichvorstellbaren Welt nicht mehr gibt. Denn daß es dies in Gedanken gibt, ist selbstverständlich, sonst könnte das Kind gar nicht davon sprechen! Im Alter der Quarta ist es ein Leichtes, ein ganz Natürliches, an etwas so Großes zu denken, daß dagegen die Sachen unserer Umgebung, ja, die ganze Erde gar nichts ist. Es ist ein Irrtum, wenn ein Erwachsener meint, das Kind könne sich nicht Welten oder Vorstellungsgebiete denken, die ganz wunderbar, ganz unvergleichlich verschieden seien. Es ist durchaus nicht etwa nötig für ein Kind, das wir auffordern, sich einen Stab immer verlängert zu denken, bei solchen Längen zu bleiben, die ein angebbares Vielfaches vom ersten Stabe sind. Ganz im Gegenteile, mit einem uns gewaltig erscheinenden Sprunge denkt es sofort an unermeßlich, unvergleichlich Großes, an Wunderbares, an eine Größe, die mit der endlichen in der Vorstellung unvereinbar ist. Es hat dabei die noch verschwommene Vorstellung, daß es Gebiete des Denkens geben kann, die in sich klar sind, aber bei dem Versuche, sie zusammenzubringen, große Schwierigkeiten, Rätsel bieten, deren Vereinigung zum Begreiflichen ganz besonderes Nachsinnen erfordern. Wenn man eine Strecke immer wieder in Gedanken halbiert, so sagt das Kind, das höre gar nicht auf. Diese Negation birgt die Schwierigkeit, birgt die Aufforderung, den Grenzbegriff herzustellen, für den, der durchaus beim Endlichen bleiben will, und die Einbildungskraft des Kindes gar für kindisch hält. Das Kind kann wohl begreifen, daß man sich so Kleines vorstelle, was neben unserer wahrgenommenen Welt überhaupt nichts mehr ist, und es kann verstehen, daß wir uns, wenn wir uns entsprechend klein machen, darin wie in einer Heimat herumbewegen können. Es handelt sich hier um den Begriff des Nichts oder mathematisch auch der Null. Ein absolutes, ganz abstraktes Nichts geht freilich über die Vorstellung des Kindes hinaus, ich meine, es geht auch über die Vorstellung jedes Erwachsenen hinaus. Wir können wohl etwas vorstellungsmäßig entfernen, was in der Vorstellung war, aber freilich nicht, indem wir alles auslöschen, dann müßte unser Geist tot, unbewußt sein. Immer haben wir noch die allgemeine Vorstellung eines Gebietes, eines Feldes, in dem wir jene Entfernung, jenes Auslöschen vorgenommen haben. Und dieses Feld hat irgend einen Charakter. Darum ist die Null auch etwas Mathematisches und nicht ein allgemeines Nichts. Wenn sich nun das Gebiet von Größen trennt in Untergebiete, und wenn man die Größen des einen Untergebietes nicht ohne ganz besondere Mittel in Beziehung setzen kann zu denen des anderen, so kann man auch von beliebiger Größe nur sprechen unter besonderer Berücksichtigung dieser Trennung des allgemeinen Feldes. Wer nun bloß die endliche Mathematik anerkennt, der wird natürlich bei dem Ausdrucke „Beliebigklein“ auch nur an eine endliche kleine Größe denken. Wer dann sagt „Immerkleiner“, der kann auch diese Handlung nur im endlichen Gebiete fortsetzen. Damit aber kommt er leider nicht zum eigentlichen Grenzwerte. Es erfordert einen besonderen Uebergang, um dahin zu gelangen. $1/n$ ist nicht Null, so lange n einen endlichen Wert hat. Sonst hätte man wirklich nicht nötig, von einem Uebergange, von einem besonderen Grenzwerte zu reden! Sonst hätte man nicht eine besondere Definition nötig und wollte den Grenzwert durch solche Definition schaffen, wie es manche tun, die sich offenbar der Schwierigkeit wohl bewußt sind, sie aber ohne das Unendliche fort . . . „schaffen“ wollen.

Man braucht nicht erst bis zur Null vorzugehen, um durch das Unendliche eine Lösung für genannte Schwierigkeit anzubahnen. Da man meist die Anfangsgründe der Geometrie vorangehen läßt, so will ich für diese andeuten, wie schon im Anfange Grenzbegriffe oder dafür das Unendlichkleine vorkommen. Geht man vom Körper aus, so kann nur durch Begrenzung die Vorstellung eines bestimmten oder besser die Größenvergleichung von solchen stattfinden. Wir sollten uns nicht damit begnügen, die Fläche einfach als Grenze zu bezeichnen und dann eilig weiter zu gehen zur Linie als Grenze der Fläche und zum Punkte. Lassen wir dem Erstaunen und Nachsinnen des Kindes Zeit! Diese ist nicht verloren. Woraus besteht irgend etwas Räumliches? Kann man es anders einteilen, als in Körper? Kann man durch Flächen Körper, durch Linien eine Fläche (etwa ähnlich wie beim Schraffieren), durch Punkte eine Linie zusammenstellen? Diese Fragen liegen sehr nahe. Es ist auch für jeden, der sich noch nicht an diese Bezeichnung gewöhnte, höchst sonderbar, daß man etwas Räumliches nur durch Körper zusammensetzen soll und doch die Fläche, die Linie, der Punkt etwas Räumliches sein sollen! Wie kann etwas dazu gehören, wenn es gar nicht richtig räumlich ausgedehnt ist wie der Körper? Am größten ist die Verwunderung beim Punkt, der keine(!) Ausdehnung haben soll, und aus dem womöglich manche den Raum zusammensetzen wollen! Viel leichter begreift das Kind, wenn man sagt, auch der Punkt habe räumliche Ausdehnung, ähnlich wie der Körper. Aber ist er dann nicht ein Körper, kein Punkt? Kann man ihn noch zerlegen, so wird er noch kein eigentlicher Punkt sein. Ueber diese Behauptung kann man wohl nachdenken, auch sie falsch finden. Aber wie unterscheidet sich denn der Punkt vom Körper? Läßt man letzteren beliebigklein sein, so bleibt er ein beliebigkleiner Körper; gehört das Beliebige immer noch zum Endlichen, so ist es ein kleiner endlicher Körper. Ganz anders, wenn man die Tatsache benutzt, die das Kind schon kennt und begreift, daß man sich den Raum so groß vorstellen kann, daß wir dagegen ein Nichts sind. Dann kann es auch eine kleine Ausdehnungswelt in Gedanken geben, so daß alles Sinnlichvorstellbare dagegen unendlich ist; oder besser ein solches Ausdehnungsgebiet, daß alles, was darin ist, in der Größe unter allem Sinnlichen, für bloß sehende Wesen gar nicht vorhanden ist: das Untersinnlichvorstellbare (kürzer Untersinnliche). Ein Körperchen aus dieser winzigen Raumwelt ist noch etwas Räumliches, aber es ist gegenüber dem Sinnlichen wie ein Nichts, man sieht es nicht, es vermehrt auch die sinnlichen Größen nicht. Ist es ein Punkt? Auch der Punkt, der eine Linie begrenzt, vermehrt die Linie nicht. Aber beim Punkte soll man ja von Größe überhaupt nicht reden. Man soll ihn nicht teilen. Wie teilt man denn einen solchen untersinnlichen Körper? Nur in untersinnlich kleine Teile. Kommt es hierauf an, haben sie eine Bedeutung für das Sinnliche, für die sichtbare Linie? Nein, es kommt dafür(!) gar nicht mehr auf eine Teilung des kleinen untersinnlichen Körperchens an. Es ist ganz gleich dafür(!), ob man ihn halbieren, ob man ihn in der Vorstellung durchteilen kann, kurz, ob man ihn mit anderen untersinnlichen Körperchen vergleichen kann. Seine Größe, seine Begrenzung ist dafür gleichgültig. Denken wir nicht mehr an sie! Denken wir bloß noch daran, daß es ein räumliches Gebilde untersinnlicher Größe ist, anders gesagt, daß er einer niederen Weitenbehaftung angehört; er ist ein Körperchen, nur noch behaftet oder versehen mit der Vorstellung, daß er als ausgedehntes Ding in jene untersinnliche Welt gehört. Aber lassen wir die Vorstellung fort, daß er auch Begrenzung haben kann. Beispiel: wir können uns ein Haus denken. Das hat natürlich Wände. Aber wenn wir bloß wissen wollen, wieviel Häuser eine große Stadt hat, brauchen wir dabei an alle die Wände zu denken? Wir können uns einen Schüler denken, derselbe hat Eltern. Aber wenn wir die Schüler zählen, brauchen wir dann immer an die Eltern zu denken oder an die Arme und Beine, die alle diese Schüler haben? Der Punkt für das Sinnlichvorstellbare, für alle Figuren, die wir an die Tafel zeichnen, die wir sehen können usw., ist etwas Untersinnlichkleines ohne die Vorstellung der Begrenzung, das Grenzenloskleine jenes niederen Größengebietes. Hierauf muß man etwas Zeit verwenden. Aber dann hat man auch keine Schwierigkeiten mehr für das folgende. Die Fläche ist die Grenze des Körpers, sie begrenzt ihn nach bestimmter Richtung hin, in bestimmter Dimension; welche Dicke hat sie in dieser Richtung? Sie ist wie eine Schale von untersinnlicher Dicke, und diese Dicke hat bloß in jener untersinnlichen Vorstellung einen Anfang und ein Ende, als Fläche für das Endliche ist sie grenzenlos. Die Linie ist wie ein nur nach einer Dimension endlich oder sinnlichvorstellbar ausgedehnter Faden, in den beiden anderen ist er unendlichdünn und zwar grenzenlosdünn. Er begrenzt selbst wieder die Fläche oder zwei Flächen als Schnitt derselben. Man kann auch, wie gewöhnlich, mit dem Punkte anfangen und die Bewegung hereinziehen, obgleich die Bewegung die Schwierigkeiten der Zeit in sich schließt. Wenn sich ein kleiner Körper bewegt, was beschreibt er? Man lasse eine kleine Kugel laufen und wiederhole dies, indem man sie eng einschließt in eine Papierrolle. Das Kind begreift, daß ein fadenartiger Körper entsteht. Ist das Körperchen unendlichklein und grenzenlos, so ist der Faden auch unendlich und grenzenlos dünn, eine Linie für das Endliche. Angenommen, wir wüßten nicht recht, wie das bei der Bewegung entstehen kann, so könnten wir doch vielleicht Punkte hintereinander legen, um daraus einen endlichen Faden zu machen. Wieviele gebrauchten wir wohl? Antwort: unendlichviele, aber man könnte nichts genaueres darüber sagen, denn die Punkte haben ja keine Grenzen. Fügen wir aber die Vorstellung der Grenzen hinzu, denken wir daran, daß sie ja im Untersinnlichen begrenzte Körper sein sollen, so könnten wir sie ja mit ihren Grenzflächen aneinander gelegt denken, wieviel brauchten wir dann zu einer endlichen Strecke? Unendlichviele. Wieviele aber von ganz gleichen solchen Körperchen, um eine doppelt so große endliche Strecke zu erhalten? Wieder unendlichviele, aber doppelt so viele. Dadurch entsteht sehr leicht die Vorstellung, daß das eine Unendliche doppelt so groß sein kann als das andere, daß also Verhältnisse auch im Unendlichen denkbar sind, wie bei endlichen Größen. Zugleich wird ein Grundsatz der Weitenbehaftungen klar, daß man nämlich nur durch unendlichviele Elemente einer Weitenbehaftung, ein Element einer höheren Behaftung erhalten kann. Endlich ist es leicht klar zu machen, daß man sich wieder eine noch tiefer stehende Behaftung oder Größenwelt vorstellen kann. Denn der unendlichkleine Körper, welcher Grenzen hat, wird begrenzt von Flächen; wie dick sind diese denn? Wieder gegenüber dem Unendlichkleinen unendlichklein, also wieder eine Stufe unterhalb, sagen wir untersinnlich von zweiter Ordnung usw.

Diese Vorstellungen erscheinen dem älteren, an die endliche Mathematik allein gewöhnten Manne viel sonderbarer als dem Kinde; ich habe das oft selbst beim Unterrichte erfahren. Ich kann mich jetzt wohl kürzer fassen. Die Grenzbegriffe in der Geometrie dienen zur Begrenzung, die gesamte Geometrie des Endlichen ist völlig durchsetzt von diesen Vorstellungen. Es ist nur Schein, wenn man über die Schwierigkeiten der Elemente hinweggeht mit bloßen Namen oder mit Unterlassung irgend einer Klärung und dann so tut, als kämen in der Mathematik die Schwierigkeiten nicht mehr vor. Das Krumme, insbesondere den Kreisbegriff, den Unterschied von Bogen und Tangente usw. habe ich bei anderer Gelegenheit hinreichend erörtert. Will man wie Cauchy den Kreis als Grenzbegriff für regelmäßiges Polygon mit n Seiten fassen, für $n = \infty$, so kann man dies viel einfacher nicht durch einen besonderen Grenzübergang (über was geht man denn hinüber?), sondern so auffassen, daß ein regelmäßiges Polygon mit unendlichvielen unendlichkleinen Seiten tatsächlich und ohne Uebergang ein endlicher Kreis ist, nur ist die Begrenzung der einzelnen unendlichkleinen Streckchen durch „Punkte (für das Unendlichkleine)" für diese endliche Figur bedeutungslos. In zahllosen Beispielen konnte ich die Geometrie so fortsetzen, die Auffassung der Parabel als Ellipse usw. ist durch meine früheren Aufsätze bekannt (und in meinem Kegelschnittbuche ausführlich behandelt).

Viele suchen den Grenzbegriff hauptsächlich in der Arithmetik. Wie der Punkt in der Geometrie, so kann man in der Arithmetik die Zahlenreihe durch die Null begrenzen. Es ist kein Fehler, wenn der Schüler schon früh lernt, man könne eine Zahlenreihe auch an irgend einer beliebigen Stelle enden oder anfangen lassen, sich dort eine Begrenzung vorstellen. $8 - 5$ führt zu 3, $9 - 6$ ebenso usw.; man kann zu einer Stelle 3 durch allerlei Subtraktionen ebenso gut gelangen wie zu Null durch $8 - 9$, $9 - 9$ usw. Also auch bei drei oder irgendwo kann man sich eine Nullstelle vorstellen.

$$8 - 5 = 3 + 5 - 5 = 3 + 0;$$

aber auch

$$3 + 5 + 0{,}000001 - 5 = 3 + 0{,}000001.$$

Wer bereits mit den oben angedeuteten Vorstellungen des Unendlichkleinen in der Geometrie bekannt ist, der begreift hier leicht, daß man sich statt der $5 + 0{,}000001$ auch 5 plus einer unendlichkleinen Größe vorstellen kann, daß überhaupt die Abgrenzung irgend einer endlichen Zahl, selbst der endlichen Einheit durch Untersinnlichvorstellbares gedacht werden kann. Auf das Nähere bin ich an anderen Stellen eingegangen. Es läßt sich dies selbständig, ohne Geometrie, leicht faßlich vorbereiten und ausführen. Das Kind begreift besonders leicht das Wesen der Null. Die Null ist nicht einfach nichts! Wie oft hat man nicht damit im Unterricht zu tun! Die Null ist eine Zahl, kein verschwommenes Nichts, kein Nichts eines anderen Gebietes. Leicht wird dies klar, wenn man so wie beim Punkte die Null einführt als Grenzenloskleines niederer Behaftung. Freilich, es gibt dann nur die Null für bestimmte Behaftungen, und dies halte ich auch für einzig und allein richtig, es ist 0 kein absoluter Begriff. Das einzelne Unendlichkleine ist nicht Null. Aber wenn wir von dem Verhältnisse einer untersinnlichen Zahlengröße zur anderen absehen, die Zahlenbegrenzung fortlassen, so vermehrt die Zahl δ als Summand keine endliche Zahl, ist Null, ich schreibe darum (wie beim Punkte) 0 als δ; dies ist natürlich der Punkt für das Endliche, a wäre ein Punkt für das Unendliche erster Ordnung usw. Die endliche 1 wie jede endliche Zahl ist abgegrenzt dadurch von anderem Endlichen, daß sie keinen endlichen Anhang mehr hat, aber, wenn man die niederen Behaftungen mit berücksichtigt, so wird man nicht einfach und immer schreiben 1, sondern z. B. $1 + \delta + \delta^2$. Solche Genauigkeit ist wesentlich bei Formen wie 1^{∞}. Man sagt bisher, das sei unbestimmt. Kein Schüler versteht dies direkt. Denn er hat sich immer vorgestellt, ein mal eins sei eins usw. Auch nach den Weitenbehaftungen ist $1^{\infty} = 1$ und zwar, falls man alle δ = Größen nicht mitberücksichtigt, nur gleich 1. Aber freilich, die endliche 1 ist auch eine endliche 1, wenn man sie schreibt als $1 + \delta$. Es ist sogar nach dem vorigen richtiger, die endlichen Zahlen derartig zum Unendlichen in Beziehung zu setzen, sie zu begrenzen. Das darf man fortlassen, wo das Unendliche nicht in Betracht kommt. Aber bei einer Form mit dem Zeichen ∞ geht das nicht ohne besondere Erwähnung. Hat man die 1 z. B. als 1 plus einer untersinnlichen Zahl niederer Ordnung, z. B. δ^3, so ergibt die Potenzierung mit ∞ für das Endliche keine Vermehrung der 1. Aber die 1 als $1 + \delta$ ergibt zum Exponenten ∞ nicht 1, sondern sogar für das Endliche eine größere Zahl. Hier kommen die Beziehungsgesetze zwischen den Behaftungen zur Geltung. Bereits durch die gewöhnliche Auffassung der Grenzbegriffe hat man gefunden, daß $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ die Zahl e, also über 2 ist; ich würde sagen, eine Zahl gemischter Weitenbehaftung (irrational). Dieser Grenzübergang ergibt sich durch Weitenbehaftungen ohne Hilfe des n und des sonderbaren nachträglichen (!!) $n = \infty$ Setzens. Jeder Schüler fragt mit Recht: warum darf man denn nicht sofort so setzen? Das ist geradezu wunderbar, unbegreiflich! Es ergibt sich nach den Weitenbehaftungen $(1 + \delta)^{\infty}$, für den Fall, daß gerade $\infty = 1/\delta$ oder $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ zwei für das Unendliche als gleich aufgefaßte Zeichen ∞ enthält, die Zahl e. Nicht aber entsteht diese Zahl in dem komplizierteren Falle, daß etwa das Unendliche im Nenner halb so groß ist wie das im Zähler. Die Aussicht auf andere Werte gemischter Behaftung vergrößert sich dadurch allerdings sofort bedeutend. Aber der Schüler begreift wohl, daß dieser Fall der Gleichheit des Unendlichen oder des Verhältnisses 1 für die beiden unendlichen Zahlen besonders einfach ist. Ich brauche hier kaum auf Grenzbegriffe wie $^1/_n$ für $n = \infty$ einzugehen. Wir schreiben dafür $^1/_{\infty}$ und verstehen unter $1/n$ einen endlichen Bruch; wir haben dann nicht nötig, den sonderbaren Uebergang zu machen und den neuen Wert zu schaffen, mittels so unbestimmter Wörter wie schließlich, beliebigklein, kleiner als jede noch so kleine Größe. Man versuche nur einmal, einen nicht eingeschüchterten Schüler fragen zu lassen, wenn man ihm zuerst mit diesen Grenzbegriffen kommt! Er wird das wahrlich nicht so klar und einfach finden, wie es dem Gewohnheitsmathematiker vorkommt. Wenn man sagt, etwas solle immer kleiner werden, so muß man doch wissen, wieweit sich das Immer erstrecken soll. Jedenfalls soll es sich doch nicht über das Zahlengebiet hinaus erstrecken, es soll doch etwas Mathematisches sein. Dann kann man auch verlangen, daß es mit mathematischer Klarheit verstanden wird. In einem Raume immer weiter gehen kann man nur so weit, wie der Raum reicht. Im Raume, den wir kennen, weiter gehen, kann man ins Unendliche, wenn dieser Raum ins Unendliche reicht. Soll er nun unendlich sein, d. h. soll man mit den gewöhnlichen endlichen Begriffen nicht immer auskommen können? Will man bei den Grenzbegriffen bleiben, so darf man auch nicht sagen, unser Raum sei unendlich, sondern bloß, man könne in ihm immer weiter gehen. In der Tat tun das viele. Aber dann sind sie doch genötigt, plötzlich den Sprung des Grenzüberganges zu machen. Wozu das, wenn man imstande ist, das Unendliche zu fassen und die offenbaren Schwierigkeiten, Unbestimmtheiten zu vermeiden? Wer für alle Zukunft beim bisherigen Grenzbegriffe bleiben will, der ist auch verpflichtet, die Ausdrücke: beliebigklein, immer kleiner usw. zu erklären. Ferner aber ist er auch genötigt, Widersprüche und Fehler in einer Auffassung wie die Weitenbehaftungen nachzuweisen, insbesondere wieso etwa die durch die Behaftungen erreichte Bereicherung falsch sei. Ein schlechtes Zeichen für eine Auffassung ist es immer, wenn man durch sie genötigt ist, in immer kompliziertere Annahmen hineinzugehen. Schwierigkeiten wie die, daß Kurven existierten stetiger Art und doch ohne bestimmte Differentialquotienten — hierzu führt bekanntlich der Grenzbegriff — sind nicht etwa empfehlend, im Gegenteile hat eine Lehre mehr für sich, in der solche Schwierigkeiten nicht entstehen. Jedenfalls sind derartige Sonderbarkeiten, die einzig und allein auf jenem nicht nötigen Grenzbegriffe beruhen, keineswegs wirklich bewiesen. Die unendlichen Reihen mit ihrer Konvergenz bezw. Divergenz sind für die Schule unvermeidlich. Daß die unendliche geometrische Reihe keine über das Endliche hinausgehende Schwierigkeiten böte, ist nur Schein. Der Begriff der Konvergenz und der Nachweis derselben ist bei Anwendung des Grenzbegriffes schwieriger als bei Weitenbehaftungen. Ich muß mich hier mit Andeutungen begnügen. Könnte man den Taylorschen Lehrsatz beweisen und darauf dann die Reihenlehre (oder den betreffenden Teil derselben) begründen, so wäre manche weitere Umständlichkeit vermeidbar. Ein solcher Beweis läßt sich durch Weitenbehaftungen geben; für die Schule ist er so lange nicht wichtig, als man nicht die Grundlagen der Differentialrechnung eingeführt hat. Nach der Lehre von den Behaftungen würden allerdings die Grundbegriffe ganz von selbst schon sehr früh und leicht verständlich auftreten. Ich möchte aber hier im Anschlusse an den üblichen Gang mit der geometrischen und binomischen Reihe beginnen. K o n v e r g e n t heißt eine Reihe für eine bestimmte Behaftung (z. B. für das Endliche), wenn ihre Summe dieser Behaftung angehört oder auch einen Wert niederer Behaftung besitzt, d i v e r g e n t, wenn die Summe einer höheren Behaftung angehört. Sprechen wir von beliebigkleinen Gliedern, so sind damit immer Glieder gemeint, welche der betreffenden, nicht einer niederen Behaftung angehören, z. B. beliebigkleine endliche Glieder. Die Summe einer unendlichen Anzahl verschiedener, wenn auch beliebigkleiner Glieder gehört einer höheren Behaftung an (folgt ganz leicht aus den einfachsten Grundsätzen der gemischten Weitenbehaftung). Die Summe einer endlichen Anzahl, wenn auch beliebigen, gehört der endlichen Behaftung an. Statt daß man bei gewissen Reihen wie bisher sagt: sie nehmen ins Unendliche ab, heißt es: es sind Reihen gemischter Weitenbehaftung, wenn z. B. außer endlichen Gliedern unendlichkleine vorkommen. Es ergibt sich leicht, daß die konvergente unendliche g e o m e t r i s c h e R e i h e eine Zahlenart vorstellt, welche besteht aus einer bestimmten endlichen Zahl, vermindert um eine einzige Zahl irgend einer niederen Behaftung. Die Form der Entwicklung für die unendlichste Potenz des Binoms $1+\delta$, mag sie nun konvergent oder nicht sein, wäre:

$$(1+\delta)^{\infty} = 1 + \delta\cdot\infty + \frac{\infty(\infty-1)}{1\cdot 2}\delta^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\infty(\infty-1)}{1\cdot 2}\delta^{\infty-2} + \infty\,\delta^{\infty-1} + \delta^{\infty}.$$

Die Zahl aller Glieder ist unendlich, auch die Hälfte derselben, also bis zur Mitte. Solange der Exponent nicht unendlich ist, tragen die Nenner nichts zur Aenderung der Weitenbehaftung des Gliedes bei, wohl aber, sobald der Exponent unendlich ist. Solche Behaftung des Nenners tritt nicht etwa erst in der Mitte ein, sondern schon bei irgend einem Bruchteil $\frac{\infty}{p}$ der Anzahl der Glieder. Sobald die Behaftung eintritt, z. B. bei $1, 2, 3 \cdots\cdots \infty$, wird auch sofort die Behaftung des Zählers um eine Ordnung erniedrigt, also treten auch alle Glieder, welche bei der Ausführung des betreffenden Zählers mittels Multiplikation entstehen, um die um 1 niedrigere Ordnung als ohne Berücksichtigung der Nennerbehaftung. Man kann nun leicht die endlichen Glieder angeben, z. B. $\infty\cdot\delta = 1$, das Glied $\frac{\infty^2}{1\cdot 2}\cdot\delta^2 = \frac{1}{1\cdot 2}$ aus $\frac{\infty(\infty-1)}{1\cdot 2}\delta^2$. Die entstehende Reihe der e n d l i c h e n G l i e d e r

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{k!}$$

geht nur bis zu irgend einem endlichen Gliede. Es ist dies also nicht der ganze Wert der Potenz $(1+\delta)^{\infty}$ also nicht, was man unter e verstehen möchte, sondern nur eine endliche Zahl, die auch nicht einmal für das Endliche e richtig wiedergibt, sondern nur bis zu irgend einer gewissen Dezimalstelle, welche abhängt von der Wahl der Anzahl der endlichen, mit in Rechnung gezogenen Glieder. Die $\delta =$ Summanden, deren es nicht (wie leicht entsprechend nachweisbar) unendlichviele gibt, tragen zu den endlichen Näherungswerten nichts bei usw. Es wird daraus klar, daß eine (irrationale) Zahl gemischter Weitenbehaftung eine andere Art von Zahl ist als die unendliche geometrische Reihe. Nach der Lehre von den Weitenbehaftungen haben divergente Reihen ebenfalls eine Summe, z. B. $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$, falls n unendlich ist, für $x = 3/2$ die Summe $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}$, und für $x = 2$ die Summe $2^{\infty} - 1$. Ueber das Verhältnis der Werte solcher Reihen ergibt die Lehre von den Weitenbehaftungen Weiteres, was in der bisherigen Mathematik des Endlichen und der Grenzwerte nicht vorkommt. Die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ enthält zwar nur endlichviele endliche Glieder, ist aber darum doch divergent für das Endliche, weil die Anzahl von Gliedern der nächstniedrigen Behaftung unendlich ist, also etwas Endliches ergibt usw. Die Reihe $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{\infty^2} + \cdots$ ist konvergent für das Endliche. Warum? Es sind nur endlichviele endliche Glieder vorhanden, weil ∞ im Nenner sofort die Behaftung δ^2 ergibt. Die Glieder der Behaftung δ^1 geben keine endliche Summe; sie wären $\frac{1}{(\sqrt{\infty})^2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{\infty}+\infty)^2}$. Letzteres aber hat einen Nenner, in dem das Glied ∞^2 vorkommt, ist also bereits von der Behaftung δ^2. Leicht ergibt sich auch statt der umständlichen Untersuchungen C a u c h y s, daß $\frac{1}{1^{\mu}} + \frac{1}{2^{\mu}} + \frac{1}{3^{\mu}} + \cdots + \frac{1}{\infty^{\mu}}$ konvergent ist, falls $\mu > 1$. Dies möge hier genügen.*)

*) Im Zusammenhange wird ein Buch die für eine Analysis durch Weitenbehaftungen nötigen Abhandlungen wiedergeben.

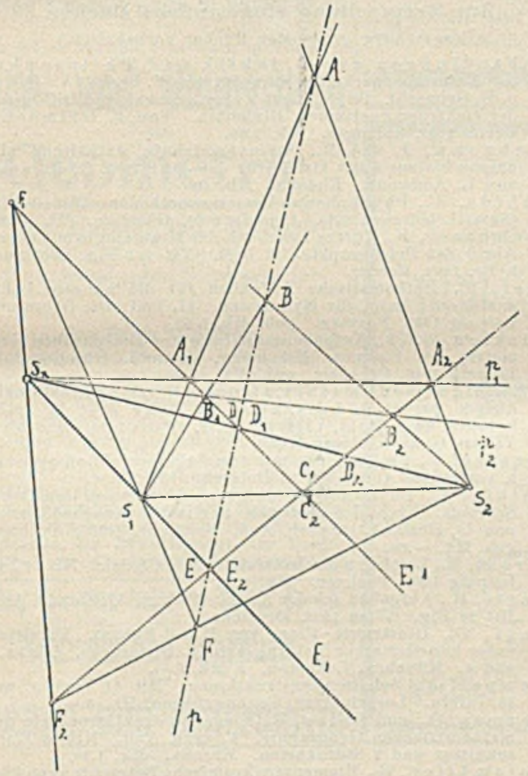
Ueber die Bestimmung des Schnittpunktes zweier sich unter sehr kleinem Winkel schneidenden Geraden.

Von Milan Zdelar (Agram).

Wie bekannt, erfordert die genaue Bestimmung eines Punktes von oben angegebener Art eine Hilfskonstruktion, die uns natürlich um so wünschenswerter erscheint, je einfacher und präziser sie die Lösung zu Ende führt.

Nikolaus Fialkowski gibt in seinem bekannten Buche „Zeichnende Geometrie“ drei solcher Hilfskonstruktionen an, von welchen aber keine — was die oben angeführten Erfordernisse anbelangt — eine strenge Kritik auszuhalten imstande sein wird.

Hier an dieser Stelle erlaube ich mir für die oben angeführte Aufgabe eine weit genauere Lösung anzugeben.



Schneidet man die Geraden p_1, p_2 (Fig. 1) mit zwei perspektiven Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \cdots$, $A_2 B_2 C_2 \cdots$ mit dem Zentrum S_x als dem undeutlichen Schnittpunkte beider Geraden p_1 und p_2, so ist klar, dass, was das Angeben eines vierten Paares homologer Punkte anbetrifft, das Zentrum S_x aus der Betrachtung ganz auszuschliessen ist; umgekehrt aber, würde uns ein viertes homologes Paar bekannt sein, so müsste die Verbindungslinie dieser homologen Punkte durch S_x hindurchgehen. Würde ausserdem die Lage dieser homologen Punkte einen solchen Perspektivitätsstrahl ergeben, dem zu p_1 und p_2 eine grössere Neigung zukommen würde, so müsste er auch zu dem Punkte S_x mit hinlänglicher Genauigkeit führen.

Zu diesem vierten homologen Paare gelangt man aber mittelst zweier neuen Zentra S_1 und S_2, die ganz beliebig angenommen über die homologen Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zu der Perspektivitätsachse p führen.

Man kann leicht in jedem Falle die zur Hilfe herangezogenen Punkte und Verbindungsgeraden so bestimmen, dass, was ihre Genauigkeit anbelangt, nichts zu wünschen übrig lässt.

Mit der gezogenen elften Geraden erreicht man das Ziel, auch früher und zwar mit der achten, wenn den Punkten $D D_1$ oder $E_2 E$ durch die Art der Lösung die passendste Lage zugewiesen wird; erwägt man aber noch die nicht zu verleugnende Tatsache, dass sich Hilfskonstruktionen erst gegen Ende der Lösung den Weg zur Geltung bahnen, wenn schon eine grössere Menge gezogener Geraden vorliegt, so wird es einleuchten, dass uns dieses nicht zu verwerfende Moment in den meisten Fällen zu einer noch kleineren Zahl der sonst nötigen Hilfsgeraden verhelfen wird.

Vereine und Versammlungen.

Deutscher Verein für Schulgesundheitspflege. Die VIII. Jahresversammlung des Vereins soll vom 21. bis 23. Mai in Karlsruhe abgehalten werden. Das bereits herausgegebene wissenschaftliche Programm dieser Versammlung sieht Diskussionen über drei bedeutsame Fragen vor:

1. Inwieweit ist von pädagogischen, kulturellen, hygienischen und sozialen Gesichtspunkten aus eine einheitliche Gestaltung des höheren Schulwesens möglich? (Medizin. Referent: Prof. Dr. Hüppe, Prag; Pädagog. Referenten: Direktor Dörr, Frankfurt a. Main und Dr. Grube, Berlin.)
2. Das Abiturientenexamen in schulhygienischer und pädagogischer Beleuchtung. (Medizin. Referent: Dr. med. O. Dornblüth, Frankfurt a. Main; Pädagog. Referent: Direktor Dr. Korn, Frankfurt a. Main.)
3. Rechte und Pflichten der städtischen Schulverwaltung bezüglich des gesamten Schulwesens im Hinblick auf schul-hygienische, besonders auch unterrichts-hygienische Fragen. (Referenten: Prof. Dr. med. F. A. Schmidt, Bonn a. Rhein und Assessor E. Sieberger, Bonn a. Rhein.)

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Wünsche betreffend Organisation und mathemathisch-naturwissenschaftlichen Lehrplan der künftigen Ober-Realschule in Bayern. Die bevorstehende Gründung von Ober-Realschulen in Bayern hat der sehr rührigen Sektion Bayern des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts Anlaß gegeben, ihre Wünsche für die den neuen Schulen zu gebende Gestalt in einer 16 Oktavseiten umfassenden knappen Darlegung zum Ausdruck zu bringen. Die Vorschläge decken sich vielfach mit denen, die die Unterrichtskommission deutscher Naturforscher und Aerzte erhebt, zeigen indessen im Einzelnen teilweise eine eigenartige Durchführung. Die Gesichtspunkte, von denen die Sektion sich leiten läßt, treten besonders deutlich zu Tage in den nachfolgenden Einleitungsworten des Speziallehrplans für Biologie und Geologie auf der Oberstufe:

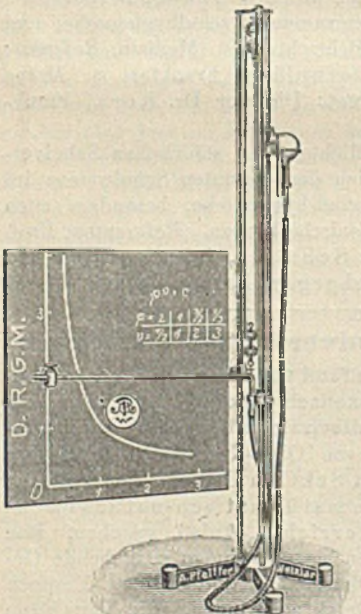
„Ziel der naturwissenschaftlichen Geistesbildung in der Oberrealschule wäre Gewinnung einer freien, edlen und möglichst wahren Weltanschauung, eines freien weitblickenden Geistes“.

Lehrmittel-Besprechungen.

Apparat zur Demonstration des Boyle-Mariotteschen Gesetzes von Hermann J. Reiff (Wetzlar)*). Vor einiger Zeit habe ich in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht eine Vorrichtung beschrieben, mit der sich in einfacher Weise an der — vertikal verschiebbaren — Wandtafel des physikalischen Lehrzimmers die Beziehung zwischen Volum und Druck eines Gases bei konstanter Temperatur, also das Boyle-Mariotte'sche Gesetz, in kontinuierlichem Gange demonstrieren lässt.

Wenn auch die Vorbereitung dieser Versuchsanordnung ziemlich geringe Mühe und Zeit erfordert, so schien es mir doch wünschenswert, den Apparat so auszugestalten, daß er ohne weiteres gebrauchsfertig aus der Sammlung genommen und zum Unterricht verwendet werden kann. Dies ist dadurch erreicht worden, daß die Einzelteile an einem genügend hohen — je nach dem gewünschten Demonstrationsbereich — Stativ vereinigt werden.

An einer Stativstange AB ist in einer Hülse H eine leichte Tafel T auf und abwärts verschiebbar, ebenso ein Quecksilbergefäß Q in H' an CD. Quecksilbergefäß Q und Tafel T sind durch einen Flaschenzug derart verbunden, daß Q aufsteigt, wenn T sinkt und umgekehrt, das Wegeverhältnis beider ist 1 : 4, so daß also die Tafel um ein Viertel des Barometerstandes herabsinkt, wenn Q um den ganzen Barometerstand gehoben wird.



Mit Q kommuniziert ein Kapillarrohr RR, das an einer dritten Stange vor T fest angebracht ist.

Sperrt man nun in RR, bei gleichstehendem Niveau in Q und RR, eine Luftmenge von der Länge $^1/_4$ Barometerstand ab, und zeichnet — wie in der Figur — auf T ein Koordinatensystem mit derselben Einheit so auf, daß bei der Tafelbewegung das Ende von RR an der Ordinate entlang geht und RR selbst Parallele zur Abszisse im Abstand 1 ist, so folgt bei Bewegung von Q und T der Quecksilbermeniskus im Rohr RR der Hyperbel $p \cdot v \cdot = c \cdot$ und demonstriert damit in kontinuierlichem Gange das Boyle-Mariotte'sche Gesetz (Demonstration).

Ein besonderer Vorzug dieser Art der Demonstration scheint mir darin zu liegen, daß den Schülern — und dies ist besonders wichtig bei Anstalten, die im mathematischen Unterricht sehr beschränkt sind, — auf diese Weise ganz unmittelbar vor Augen geführt werden kann, wie durch eine Kurve die Beziehung zweier Größen dargestellt wird. Wenn es wünschenswert erscheint, kann hier anknüpfend in wenigen Worten die Methode der graphischen Darstellung erläutert werden.

Eine ähnliche Methode, die von U. Behn s. Zeit vorgeschlagen wurde, ist leider auf einen sehr zerbrechlichen Apparat angewiesen, welcher bei Annäherung an die Grenzen seines Demonstrationsbereiches wegen Dichtungsschwierigkeiten entweder sehr schwer zu bedienen oder ungenau ist.

Der Apparat wurde mir von Artur Pfeiffer in Wetzlar hergestellt, ist dieser Firma geschützt und von ihr zu beziehen.

Man vergleiche hierzu: H. J. Reiff, Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, XIX. p. 230 ff. 1906. U. Behn, ibidem XVI, p. 131. 1903. F. Kiebitz, ibidem XIX. p. 24. 1906.

*) Die obigen Ausführungen bildeten den Gegenstand eines Vortrages in Abteilung XII der Naturforscher-Versammlung zu Stuttgart am 18. September 1906.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. Herausg. von F. Poske, A. Höfler u. E. Grimsehl. Bd. II, Heft 2. Experimentelle Einführung der elektromagnetischen Einheiten. Von E. Grimsehl, Berlin 1907, Springer. Mk. 1,60.

Ambronn, J. und R., Sternverzeichnis, enthaltend alle Sterne bis zur 6.5ten Größe für das Jahr 1900. O. Herausg. von L. Ambronn. Ebenda. Mk. 10.—.

Bahrdt, W., Physikalische Messungsmethoden. Mit 49 Fig. (Samml. Göschen 301). Leipzig 1906, Göschen. Mk. —.80.

Baumhauer, H., Kurzes Lehrbuch der Mineralogie mit einem Abriß der Petrographie. 3. Aufl. Mit 191 Fig. Freiburg i. Br. 1906, Herder.

Biel, B., Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten. Ausg. für Gymnasien. II. Teil: Die Oberstufe. Leipzig 1907, Freytag. geb. Mk. 3.50.

Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Mit 8 Fig. (Samml. Göschen 309). Leipzig 1906, Göschen. geb. Mk. —.80.

L'Enseignement mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl, VIII, 6; IX, 1. Paris 1906, Gauthier-Villars. Genève, Georg & Cie.

Ernecke, F., Projektionen mit dem Schulprojektionsapparat. 3. vermehrte Aufl. Mit 86 Holzschn. Mk. 1.50.

Geikie, A., Physikalische Geographie. Deutsch von Oskar Schmidt. Nach der neuesten englischen Ausgabe bearb. von G. Gerland. 6. verb. Aufl. Straßburg 1907, Trübner. geb. Mk. —.80.

Girndt, M., Leitfaden der bautechnischen Chemie. Mit 34 Fig. Leipzig 1906, Teubner. Mk. 1.20.

Hartl, H., Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. Mit 20 Fig. Wien 1906, Deuticke.

Hegi, G., Illustrierte Flora von Mittel-Europa. Illustriert unter künstlerischer Leitung von G. Dunzinger. Lfg. 2, 3 und 4. München, Lehmann. à Mk. 1.—.

Hempel, J., Schattenkonstruktionen. Mit 51 Textfig. und 20 Tafeln. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 5.—.

Hermes, O., und Spies, P., Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. 5. verb. Aufl. Mit 48 Holzschnitten und 2 Sternkarten. Ebenda. Mk. 1.20.

Holzmüller, G., Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem. Mit 8 Fig. Leipzig 1906, Teubner. geh. Mk. 1.80.

Jochmann, E., Grundriß der Experimentalphysik. Herausg. von O. Hermes und P. Spies. Mit 488 Fig. 16. verb. Aufl. Berlin 1906, Winckelmann & Söhne. geb. Mk. 5.50.

Junker, Fr., Höhere Analysis. Teil I: Differentialrechnung. Mit 67 Fig. 3. verb. Aufl. (Samml. Göschen 87). Leipzig 1906, Göschen. geb. Mk. —.80.

Kimmich, K., Zeichenschule. Mit 18 Tafeln. 5. verb. Aufl. (Samml. Göschen 39). Ebenda. geb. Mk. —.80.

Köppen, W., Klimakunde. Teil I: Allgemeine Klimalehre. 2. verb. Aufl. Mit 7 Tafeln u. 2 Fig. (Samml. Göschen 114). Leipzig 1906, Göschen. geb. Mk. —.80.

Kuhn, Fr., Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. Mit 34 Abb. München 1906, Oldenbourg. Mk. —.80.

Lassar-Cohn, Arbeitsmethoden für organisch-chemische Laboratorien. 4. vermehrte Aufl. Allgemeiner Teil. Mit 160 Abb. Hamburg 1906, Voß. Mk. 11.—.

Lorscheid, J., Kurzer Grundriß der Mineralogie. Neu bearb. von H. Brockhausen. Freiburg i. Br. 1906, Herder.

Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. Mit 65 Fig. 3. verb. Aufl. (Samml. Göschen 136). Leipzig 1906, Göschen. geb. Mk. —.80.

Meyer, A., Erstes mikroskopisches Praktikum. 2. umgearb. Aufl. Mit 82 Abb. Jena 1907, Fischer. Mk. 5.—.

Napravnik, Fr., Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Wien 1907, Deuticke.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.