Jahrgang XIII. 1907. No. 2.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

Tagesordnung der XVI. Hauptversammlung zu Dresden, Pfingsten 1907.

Montag, 20. Mai, abends 8 Uhr: Geselliges Beisammensein im oberen Saale des Königlichen Belvedere auf der Brühlschen Terrasse.

Dienstag, 21. Mai, vormittags 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung.

Eröffnung und Begrüßung. — Geschäftliche Mitteilungen.

Vortrag von M. Krause (Dresden): Ueber die Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Physik an den Technischen Hochschulen.

Referate über die Wünsche der Fachlehrer hinsichtlich des Hochschulunterrichts für künftige Lehramtskandidaten

a) in Mathematik und Physik (Referent: K. Reinhardt, Zittau);

b) in Chemie und in den biologischen Fächern (Referent: E. Löwenhardt, Halle a. S.).

Nachmittags 3 bis 6 Uhr: Abteilungs-Sitzungen.

Abends $^1/_2$8 Uhr: Festmahl (mit Damen) im Hotel Bristol am Bismarckplatz. (Preis des trockenen Gedecks: 3 Mk.)

Mittwoch, 22. Mai, vormittags 9 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Diskussion über den Hochschulunterricht für die künftigen Lehrer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer an den höheren Schulen.

12 bis 1 Uhr: Frühstück im Hause.

1 bis 3 Uhr: Abteilungs-Sitzungen.

Von 4 Uhr an: Besichtigungen von Laboratorien und technischen Anlagen in der Stadt.

Donnerstag, 23. Mai, vormittags 9 bis $10^{1}/_{2}$ Uhr: Dritte allgemeine Sitzung:

Vortrag von Felix Müller (Friedenau): Zur Erinnerung an Leonhard Euler.

10 Uhr: Geschäftliche Sitzung. Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Lenk, Pietzker und Bastian Schmid. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Antrag des Vorstandes auf Niedersetzung eines Ausschusses, der dem Vorstand zur Seite stehen soll. — Antrag des Vorstandes auf Annahme eines etwas kürzer gefaßten Namens für den Verein. — Sonstige geschäftliche Anträge.

Nachmittags: Ausflüge (mit Damen) in die nähere Umgebung von Dresden zur Besichtigung industrieller und technischer Anlagen.

Freitag, 24. Mai: Ausflug (mit Damen) in die sächsische Schweiz (bei günstigem Wetter wird von der Bastei aus heliographiert werden).

Angemeldete Abteilungs-Vorträge:

M. Brückner (Bautzen): Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.
H. Dreßler (Dresden-Plauen): Bewegliche Modelle für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.
E. Grimsehl (Hamburg): Thema vorbehalten.
B. Hoffmann (Dresden): Ueber Vogelgesänge als Leitmotive in der Musik.
H. Lohmann (Dresden): Elektrostatische Versuche.
R. Nessig (Dresden): Ueber die Geologie von Dresden und Umgebung (ev. mit Exkursion in den Plauenschen Grund).
H. Rebenstorff (Dresden): Versuche über flüssige und gasförmige Körper, sowie aus der Wärmelehre und Chemie.
K. Schorer (Metz): Ueber bewegliche Modelle für den geometrischen Unterricht.
„ „ Ueber Flächengleichheit und Aehnlichkeit.
A. Witting (Dresden): Thema vorbehalten.
N. N.: Referat über die am 21. März 1907 stattfindende Sitzung der naturwissenschaftlichen Gesellschaft „Isis“ zu Dresden: Die Reform des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen.

Alle Sitzungen finden im Gebäude der Königlichen Technischen Hochschule am Bismarckplatz statt.

Das **Empfangsbüreau** wird seinen Platz am Montag Nachmittag auf dem Hauptbahnhof, am Abend desselben Tages, von 8 Uhr ab, im Belvedere auf der Brühlschen Terrasse, von Dienstag ab im Gebäude der Technischen Hochschule haben.

Bei dem zu Pfingsten zu erwartenden Fremdenzufluss ist eine möglichst frühe Anmeldung unbedingt notwendig. Alle Herren, die (sei es mit, sei es ohne Damen) zur Versammlung kommen wollen, werden auf das dringendste ersucht, unter Benutzung der dieser Nummer beiliegenden **Anmeldungskarte** bei dem Wohnungsausschuß (Prof. Dr. Witting, Dresden-Strehlen, Waterloostr. 13) möglichst früh ihre Unterkunftswünsche anzumelden.

Eine möglichst zahlreiche Beteiligung von Damen ist höchst willkommen, bei größerer Beteiligung wird für die Unterhaltung der erschienenen Damen noch besonders Sorge getragen werden.

Wie alljährlich hat sich auch in diesem Jahre der Vereinsvorstand an die Unterrichtsverwaltungen solcher Staaten, in denen die Pfingstwoche nur teilweise schulfrei ist, mit der Bitte gewandt, die Leitungen der einzelnen Schulen zu wohlwollender Berücksichtigung der behufs Teilnahme an unserer Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche anzuweisen. Von seiten des Königlich Preußischen Kultusministeriums ist dieses Gesuch bereits durch Erlass vom 15. März d. J. (U II, Nr. 717) gewährt worden, indem die Direktionen der höheren Lehranstalten Anweisung erhalten haben, den Teilnehmern an unserer Versammlung den hierzu etwa nötigen Urlaub zu bewilligen, sofern dies ohne Nachteil für die betreffende Lehranstalt irgend geschehen kann. Auf die Gewährung der anderweit eingereichten Gesuche dürfen wir nach den bisherigen Erfahrungen gleichfalls hoffen.

Der Hauptvorstand. Pietzker.

Der Ortsausschuss. I. A.: A. Witting.

Probleme der Gletscherforschung.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Erlangen.
Von Hans Heß in Ansbach.
(Schluß).

Die rasche Ausbreitung der Druckschwankungen am Rhonegletscher, die auffallenden Geschwindigkeitsänderungen am Vernagt, die bis dahin vorliegenden Beobachtungsergebnisse vom Hintereis haben mich veranlaßt, eine längst geplante Untersuchung über das Fließen des Eises in Angriff zu nehmen. Ich kam zunächst im Anschluß an die Beobachtungen von Mc. Connel zu dem Ergebnis, daß der Koeffizient der inneren Reibung des Eises mit der Dauer der Beanspruchung des Materials sich verändert. Ich fand in Uebereinstimmung mit G. Tammann, daß die Ausflußgeschwindigkeit des Eises bei wachsendem Drucke sehr rasch zunimmt und daß auch bei konstantem Drucke ein starkes Anwachsen dieser Größe zu verzeichnen ist. Um einzelne Unklarheiten, die in diesen Resultaten liegen, aufzuhellen und die Ursache für

Zunahme der Ausflußgeschwindigkeit bei konstantem Druck zu finden, nahm ich die Ausfluß-Versuche im letzten Winter wieder auf. Obgleich ich nicht zu einem abschließenden Ergebnis gelangte, möchte ich doch meine bisherigen Resultate kurz darlegen, da ich glaube, daß zur weiteren Verfolgung der Sache ein besseres Instrumentarium, vielleicht auch größere Geschicklickeit nötig ist, als die, über welche ich verfüge. Mit Verwendung einer kleinen Schraubenpresse (die mir 1895 von Sulzer in Ludwigshafen zum Studium des Strömens des Eises in Röhren gebaut wurde), deren Schraube durch Schnüre, die über eine Walze und zwei Rollen abliefen, bewegt wurde, preßte ich einen Eiskern aus einem Rohr von 12 mm Weite durch eine Ausflußöffnung von ca. 8 mm. Ich beobachtete das Einsenken des Preßkolbens in etwa 100facher Vergrößerung durch das Sinken der Triebgewichte und fand dabei, daß die Ausflußgeschwindigkeit des Eises bei konstantem Druck stetig wächst und mit der Dauer der Belastung immer mehr zunimmt, ohne sich einem stationären Werte zu nähern — also eine Bestätigung der früheren Resultate (Fig. 5). Welchen Grund hat diese Erscheinung? Ich vermute, daß ein Teil des gepreßten Eises bei der Pressung geschmolzen wird und daß die Schmelze, welche teilweise in das noch nicht deformierte Material eindringen kann, dieses immer mehr erweicht. Zur näheren Untersuchung habe ich eine Form herstellen lassen, aus welcher durch verschieden große Ausflußöffnungen das Eis mittels einer hydraulischen Presse bei verschiedenen Drucken hinausgepresst werden kann. Dadurch wollte ich den Zusammenhang zwischen Ausflußgeschwindigkeit, Druck und Größe der Querschnittsänderung erhalten, um daraus auf die Menge des beim Ausfließen verflüssigten Eises schließen zu können.*) Als Grenzfall wollte ich den benützen, daß ein möglichst genau in ein zylindrisches Loch passender Stempel auf das Eis drückt; dabei ist die Ausflußöffnung sehr klein im Verhältnis zum ursprünglichen Eisquerschnitt. Die Ergebnisse, welche ich für diesen Grenzfall innerhalb des Temperaturintervalles 0—20° erhielt, stellt die Fläche Fig. 6 dar. Einige Versuche mit Temperaturen von — 30, — 80, — 191° lassen erkennen, daß der Charakter der Fläche auch für tiefere Temperaturen der gleiche bleibt.

Ich will der Kürze halber, wenn auch der Ausdruck nicht völlig zutrifft, diese Fläche als „Schmelzfläche", die in ihr auftretenden Drucke als „Schmelzdrucke" bezeichnen. Man sieht, diese wachsen mit der Schmelzgeschwindigkeit bei konstanter Temperatur und bei konstanter Schmelzgeschwindigkeit mit abnehmender Temperatur. Nahe an 0° findet schon bei sehr niederen Drucken das für diese Art des Ausfließens nötige Schmelzen statt; bei tieferen Temperaturen wäre erst ein gewisser Druck zu erreichen, damit die Bedingungen des Ausfließens (Schmelzens) auch mit geringen Geschwindigkeiten erreicht werden. Soweit wäre die Sache

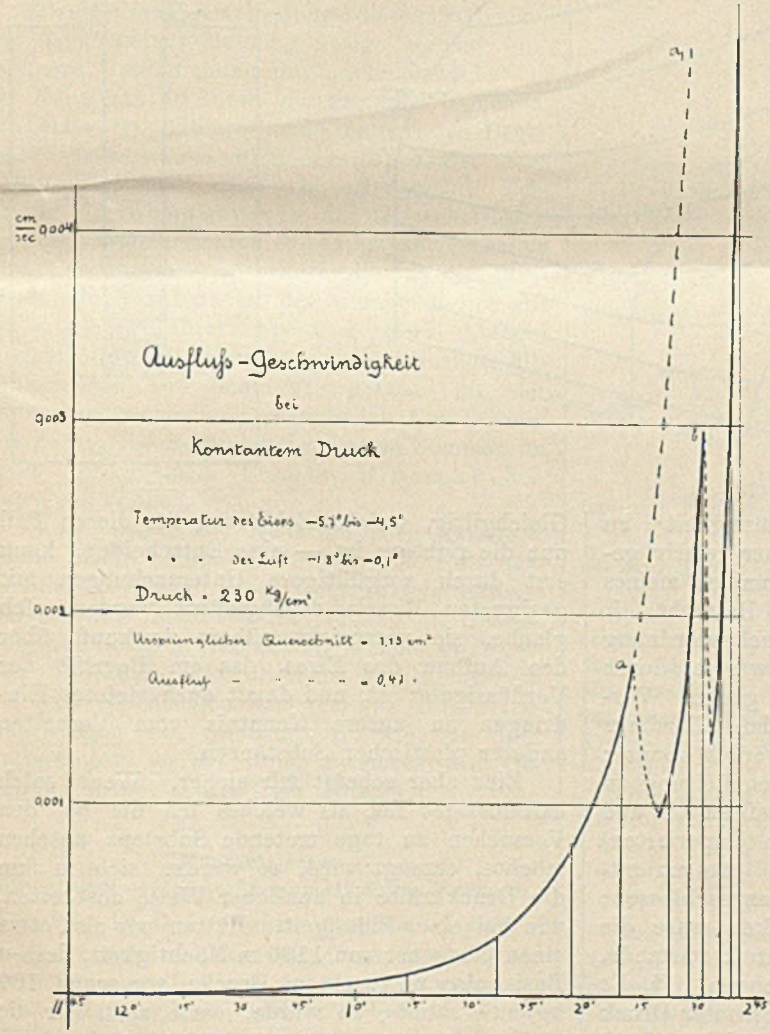


Fig. 5. Bei a und b mußte wegen der begrenzten Fallhöhe der Triebgewichte für kurze Zeit entlastet werden. aa_1 wäre die Fortsetzung der Kurve bei größerer Fallhöhe.

* Ueber die Ergebnisse dieser Versuche werde ich später an anderer Stelle berichten.

ganz gut und in schönem Zusammenhang mit meinen und Tammanns Ergebnissen über das Fließen des Eises. Verfolgt man sie aber näher, so zeigen die Resultate, daß die zum „Schmelzen“ aufgewendete Arbeit nur zwischen 1 und ca. 30 $^0/_0$ der zum Schmelzen der verdrängten Eismasse nötigen Wärmemenge liefern kann.

Was am oberen Rande der Preßöffnung austritt, erscheint als „flüssig“ und lagert sich um den Preßstempel flach an, um bei niedrigen Temperaturen in Form eines flachen Ringes zu gefrieren, der durch die nachdrängenden Flüssigkeitsmengen am eindringenden Stempel in die Höhe gehoben wird (Fig. 7).

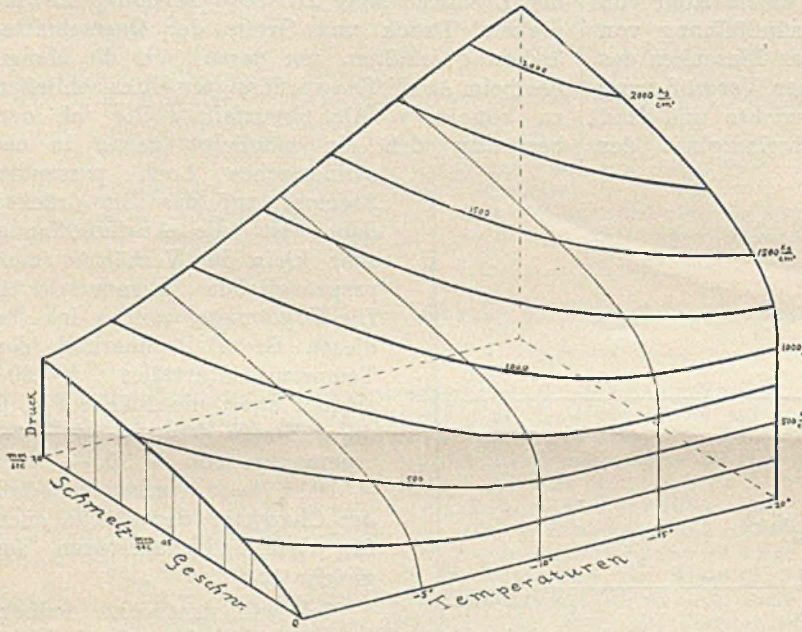


Fig. 6.

Um die Erzeugung der „Flüssigkeit“ zu erklären, welche bei Aufwand einer relativ geringen Schmelzarbeit entsteht, kommen meines Erachtens folgende Momente in Betracht. I. Es kann bei der gebrauchten Versuchsanordnung der Rest der nötigen Schmelzwärme durch Leitung zugeführt werden. Die genaue Würdigung der Bedingungen ergibt, daß allerdings etwas durch Leitung zugeführt werden konnte; um aber alle nötige Wärme durch Leitung zu liefern, hätte zwischen dem gepreßten Eis und dem umgebenden (anfänglich gleich temperierten) Bad ein Wärmegefälle von ca. 3 ^{0} pro cm entstehen müssen. Das halte ich für ausgeschlossen; denn nur bei sehr hohen Drucken wäre die Temperaturerniedrigung durch Druck imstande, ein solches Wärmegefälle zu erzeugen. II. Es wäre möglich, daß in Eis, welches unter Druck steht, auch schon nahe an 0 ^{0} solche Modifikationen entstehen, wie sie Tammann für Temperaturen unter 22 ^{0} bei Drucken von 2200 kg/cm^2 nachgewiesen hat. Das halte ich für unwahrscheinlich, da nach meinen bisherigen Erfahrungen auch zwischen —20 und —25 ^{0} die „Schmelzfläche“ keine Unregelmäßigkeiten erkennen läßt, wie sie auf Grund von Tammann's Resultaten zu erwarten wären. III. Was am oberen Rande der Preßform austritt, macht zwar den Eindruck der Flüssigkeit, ist aber nicht Wasser, sondern ein Gemisch von Eispartikelchen mit höchstens 30 $^0/_0$ Wasser. (Die stark wasserhaltige Mischung wird bei großen Ausflußgeschwindigkeiten, also bei großem „Effekt“ erzeugt.) Man hätte dabei einen Vorgang, der mit der Bewegung feuchten Schuttes in Muhren zu vergleichen wäre.

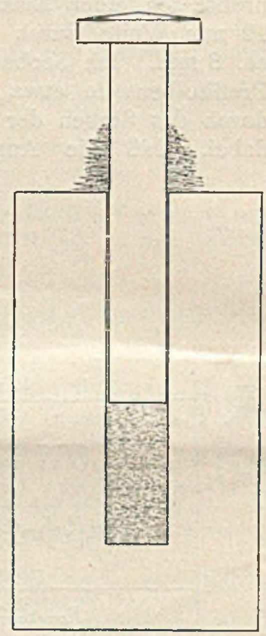


Fig. 7.

Gleichgiltig, welche Erklärung für diesen Fall nun die richtige ist — eine Entscheidung kann erst durch sorgfältigere Untersuchungen mit geeigneten Mitteln durchgeführt werden. Ich glaube, sie verspricht nähere Auskunft über den Aufbau des Eises, das im Begriffe der Verflüssigung ist, und damit auch tieferes Eindringen in unsere Kenntnis vom Verhalten anderer plastischer Substanzen.

Eins aber scheint mir sicher. Wenn solch halbflüssiges Eis, als welches ich die bei den Versuchen zu tage tretende Substanz ansehen möchte, erzeugt wird, so werden sich in ihm die Druckkräfte in ähnlicher Weise ausbreiten, wie bei einer Flüssigeit. Hätten wir also etwa einen Gletscher von 1100 m Mächtigkeit, dessen Basis also unter einem Drucke von rund 100 kg/cm^2 stände, so würde, wenn auch nur die Hälfte der von mir ermittelten Schmelzgeschwindigkeit angesetzt wird, bei einer Temperatur von 0 ^{0} eine Schmelzgeschwindigkeit von 0,04, bei einer solchen von — 5° eine Schmelzgeschwindigkeit von 0,02 mm/sec bestehen. Das heißt die Basis eines solchen Gletschers müßte eine derartige Beweglichkeit erhalten, daß seine Dicke sehr rasch reduziert und seine Substanz aus den Gebieten der tiefen Querschnitte sehr schnell in die der weniger tiefen übergeleitet werden müßte. Mit anderen Worten: Es ist völlig ausgeschlossen, daß Gletscher von solcher Mächtigkeit überhaupt existieren oder daß sie auch früher in einem Gebirge existiert hätten, wo nicht die mittlere Jahrestemperatur weit unter der jetzigen gelegen war. Als maximale Dicke eines Gletschers von Eis mit dem spezifischen Gewicht 0,91 würde sich ungefähr der Betrag von 5—600 m ergeben. (Nach den Beobachtungen der „Discovery“ am Rand des antarktischen Inlandeises darf übrigens, wie es scheint, auch die Dicke dieser spezifisch leichteren Eisdecke nicht größer angesetzt werden.)

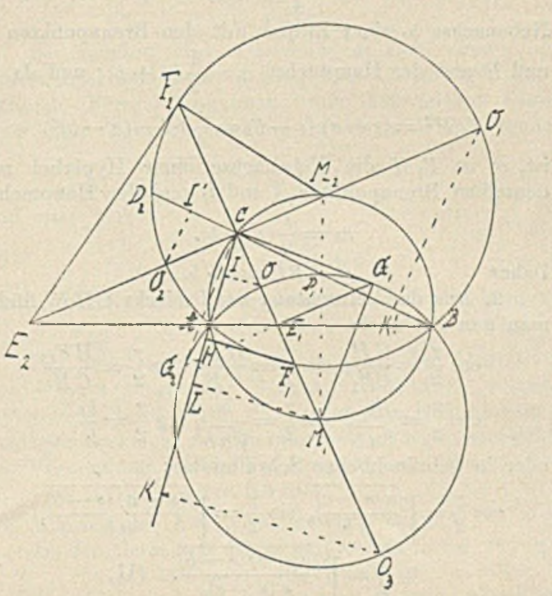
Zur völligen Klarstellung dieser Sache ist nun nach meiner Meinung nötig: einmal eine genauere Untersuchung der „Schmelzfläche“ in der Nähe von 0° und bei geringen Drucken. Das erfordert entsprechend temperierte Beobachtungsräume und besondere Apparate. Des weiteren ist nötig, daß wir uns über die Verteilung der Temperatur in der Gletschermasse noch besser unterrichten, als es bisher geschehen konnte. Wir müssen ermitteln, wie die Temperatur des Firnschnees, der wahrscheinlich mit der mittleren Jahrestemperatur seines Ablagerungsortes in die Gletschermasse eindringt, allmählich bis zur Schmelztemperatur in der Gletscherzunge steigt. Ein Stück zur Lösung dieser Aufgabe hoffe ich in diesem Sommer im Verein mit meinem Freunde Blümcke beitragen zu können.

Damit wären die Hauptaufgaben skizziert, welche nach meiner Meinung die Gletscherkunde zu lösen hat. Zwei wichtige Erfordernisse muß ich aber noch streifen, erstens die Gewinnung der nötigen Geldmittel, welche erlauben, auch außerhalb der Domäne des Deutschen und Oesterreichischen Alpenvereins solche Untersuchungen zu veranstalten, wie sie hier durchgeführt werden, und zweitens die Gewinnung neuer, tatkräftiger Mitarbeiter.

Geometrische Ableitungen einiger trigonometrischer Formeln.

Von Prof. Dr. C. Ibrügger (Stargard i. Pomm.)

Um $\triangle ABC$ — dessen Seiten und Winkel in bekannter Weise mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet werden — sei ein Kreis gezeichnet, und in diesem der zu AB senkrechte Durchmesser $M_1 M_2$ gezogen. Um M_1 und M_2 seien die Kreise mit den Radien $M_1 A$ und $M_2 A$ beschrieben, die BC in D_1 und D_2 schneiden. Dann ist $CD_1 = CD_2 = b$. Zieht man ferner CM_1, — wodurch AB in E_1 und der Kreis M_2 in F_1 und F_2 geschnitten wird — sowie CM_2 — wodurch auf AB der Punkt E_2 bestimmt wird —, so ist CE_1 die Halbierungslinie w_1 des Winkels C und CE_2 die Halbierungslinie w_2 seines Nebenwinkels.



Dann ist $CF_1 \cdot CF_2 = CB \cdot CD_2 = ab$, und da $F_1 F_2$ auf dem durch C in dem Kreise M_2 gezogenen Durchmesser senkrecht steht, so ist

$$CF_1 = CF_2 = \sqrt{ab}.$$

Legt man ferner von C an den Kreis M_1 die Tangente CG_1, so ist $CG_1^2 = CD_1 \cdot CB$, also auch

$$CG_1 = \sqrt{ab}.$$

1. Wir projizieren nun CF_1 auf eine der Seiten a oder b, etwa auf CA, so ist die Projektion

$$CH = \sqrt{ab} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

und das Projektionslot $F_1 H = \sqrt{ab} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$. Der Inhalt des Dreiecks CHF_1 ist also $\frac{1}{2} ab \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4} ab \sin\gamma$, demnach halb so groß als $\triangle ABC$. Um CH zu berechnen, fälle man von den Punkten O und O_3, in denen CM_1 den Kreis M_1 schneidet, d. h. von dem Mittelpunkt des in $\triangle ABC$ einbeschriebenen Kreises und dem Mittelpunkt des an AB anbeschriebenen Kreises, auf CA die Lote OJ und $O_3 K$, so ist $CJ = s - c$ und $CK = s$, wo s den halben Umfang von $\triangle ABC$ bedeutet. Dann ergeben sich die Proportionen: $CH : CJ = CF_1 : CO$ und $CH : CK = CF_1 : CO_3$, also $CH^2 : CJ \cdot CK = CF_1^2 : CO \cdot CO_3$. Nun ist $CF_1^2 = ab$, $CO \cdot CO_3 = CG_1^2 = ab$, folglich

$$CH^2 = CJ \cdot CK = s(s - c).$$

Zur Berechnung von $F_1 H$ fällen wir von den Punkten O_2 und O_1, in denen der Kreis M_2 von CM_2 geschnitten wird, die Lote auf eine der schrägen Dreiecksseiten $O_2 J'$ und $O_1 K'$, so ist $\triangle CHF_1 \sim \triangle O_2 J' C \sim \triangle O_1 K' C$, also $HF_1 : J'C = CF_1 : O_2 C$, sowie $HF_1 : K'C = CF_1 : O_1 C$. Da aber $J'C = s - a$, $K'C = s - b$ und $O_2 C \cdot O_1 C = CF_1^2 = ab$ ist, so findet man $HF_1^2 = (s - a)(s - b)$.

Endlich ergibt sich aus

$$\frac{1}{2}\triangle ABC = \frac{1}{2} HF_1 \cdot HC:$$

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \text{(I)}$$

Da $CH^2 = s(s-c) = \frac{1}{4}((a+b)^2 - c^2)$, so ist CH die Nebenachse b_e einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B und der Hauptachse $a_e = \frac{1}{2}(a+b)$; und da

$$F_1 H^2 = (s-a)(s-b) = \frac{1}{4}(c^2 - (a-b)^2)$$

ist, so ist $F_1 H$ die Nebenachse einer Hyperbel mit denselben Brennpunkten A und B und der Hauptachse

$$a_h = \frac{1}{2}(a-b).$$

Daher $\triangle ABC = b_e \cdot b_h$.

2. Aus der Betrachtung des Dreiecks CHF_1 findet man nun leicht, da

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{CH}{CF_1},\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{HF_1}{CF_1},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{HF_1}{CH}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b_e}{\sqrt{ab}},\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{b_h}{\sqrt{ab}},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{b_h}{b_e},$$

oder in gebräuchlicher Schreibweise:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \quad \text{(II)}$$

3. Wir ziehen von C auch die andere Tangente CG_2 an den Kreis M_1, so muß die Berührungssehne $G_1 G_2$ senkrecht auf CM_1 stehen, und ihr Schnittpunkt mit CM_1 bildet zusammen mit COO_3 vier harmonische Punkte. Dasselbe gilt auch von O_3, O, C und dem Fußpunkt der Winkelhalbierenden CE_1 — da O und O_3 auf den Halbierungslinien der Nebenwinkel bei A liegen — also geht $G_1 G_2$ durch E_1. Nun ist

$E_1 G_1^2 = AE_1 \cdot E_1 B = u_1 \cdot v_1$, wo u_1 und v_1 die Abschnitte, welche die Winkelhalbierende CE_1 auf AB bildet, bedeuten. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $CE_1 G_1$ ergibt sich also die Relation

$$u_1 v_1 + w_1^2 = ab. \quad \text{(III a)}$$

Aehnlich sind $E_2 C O_2 O_1$ harmonische Punkte. $E_2 F_2$ muß daher den Kreis M_2 in F_2 berühren, d. h. auf $F_2 M_2$ senkrecht stehen. Bezeichnet man die Abschnitte, welche CE_2 auf AB bildet, $E_2 B = u_2$, $E_2 A = v_2$, so findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck $CE_2 F_2$

$$u_2 v_2 - w_2^2 = ab. \quad \text{(III b)}$$

4. Zur Berechnung der Winkelhalbierenden CE_1 und CE_2 schlagen wir folgenden Weg ein. Wir ziehen $M_1 L \perp CA$, so ist $CL = \frac{1}{2}(a+b) = a_e$. Dann verhält sich $CL : CH = CM_1 : CF_1$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $CG_1 M_1$ ergibt sich nun $CM_1 = \cdot CG_1^2 : CE_1 = ab : w_1$, und da $CH = b_e$, $CF_1 = \sqrt{ab}$ ist, so bekommt man

$$a_e : b_e = \sqrt{ab} : w_1 \quad \text{oder} \quad w_1 = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}. \quad \text{(IV a)}$$

Wird in analoger Weise von M_2 auf eine der schrägen Seiten a oder b die Senkrechte gefällt, so findet man $a_h : b_h = \sqrt{ab} : w_2$. (IV b)

Wenn man einen Brennpunkt der oben erwähnten Ellipse mit einem Nebenscheitel verbindet, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $c = \frac{c}{2}$ und b_e, und der Hypotenuse a_e. Derjenige seiner Winkel, der durch die Gleichung $\cos\varphi = \frac{c}{a_e}$ bestimmt wird, wird bei trigonometrischen Rechnungen vielfach als Hilfswinkel eingeführt. Dieselbe Größe wie φ hat, wie man aus Formel IV a ersehen kann, $\sphericalangle CG_1 E_1$. Entsprechendes gilt von der Hälfte ψ des Asymptotenwinkels der Hyperbel, die durch die Gleichung $\operatorname{tg}\psi = \frac{b_h}{a_h}$ bestimmt ist, und $\sphericalangle CF_2 E_2$.*)

5. Daß die oben gezeichnete Figur zur „Analysis" von Konstruktionsaufgaben verwandt werden kann, bedarf kaum der Erwähnung. Befinden sich unter den gegebenen Stücken eines Dreiecks w_1 und ab, so ist $\triangle CM_1 G_1$ zu zeichnen aus einer Kathete und dem anliegenden Höhenabschnitt. Auch das rechtwinklige Dreieck $F_1 F_2 G_1$ kann benutzt werden. Wenn w_2 und ab gegeben ist, ist $\triangle E_2 M_2 F_2$ zu zeichnen.

Handelt es sich um die Zeichnung eines Dreiecks aus c, r, ab, so sind von $\triangle CM_1 G_1$ die beiden Katheten bekannt.

Ist c, r, w_1 gegeben, so kennt man von $\triangle CM_1 G_1$ eine Kathete $M_1 G_1$ und den nicht anliegenden Höhenabschnitt CE_1 — woraus sich dann die bekannte Lösung dieser Konstruktions-Aufgabe ergibt.

Die Aufgabe, ein Dreieck zu zeichnen aus $a+b$, c, w_1 kann dadurch gelöst werden, daß man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $\frac{a+b}{2}$ und einer Kathete $\frac{c}{2}$ herstellt. Hieraus findet man $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle CG_1 E_1$, wodurch, da auch $CE_1 = w_1$ gegeben ist, die Zeichnung von $\triangle CG_1 E_1$ ermöglicht wird. Dadurch findet man $CG_1 = \sqrt{ab}$. Man kann dann aus $a+b$ und $\sqrt{ab}$ a und b bestimmen; oder, da $CF_1 = \sqrt{ab}$ ist, und $CH = b_e$ aus dem zuerst gezeichneten rechtwinkligen Dreieck entnommen werden kann, läßt sich $\sphericalangle HCF_1 = \frac{1}{2}\gamma$ zeichnen. Analog wäre die Aufgabe $a-b$, c, w_2 zu behandeln.

Auch die Aufgabe a, b, w_1 oder a, b, w_2 läßt sich hier anschließen. Zuerst ist $\sqrt{ab}$ zu zeichnen.

Wird in der Anfangsfigur E_1 mit D_1 verbunden, so hat $\triangle D_1 E_1 B$ die Seiten $E_1 B = u_1$, $E_1 D_1 = v_1$, der von ihnen eingeschlossene Winkel ist gleich $\alpha - \beta$, und $E_1 G_1$ halbiert diesen Winkel. Das diesem Dreieck entsprechende ist $BE_2 D_2$ mit den Seiten u_2 und v_2 und dem Winkel $\alpha - \beta$. Durch die Betrachtung dieser beiden Dreiecke können manche Aufgaben, in denen die Radien der Berührungskreise gegeben sind, ihre Lösung finden.

Zur Frage der Korrektheit von Gleichsetzungen.

Von E. Kullrich (Gera in Reuß).

Die Klage über Inkorrektheiten bei Gleichsetzungen ist eine alte. Solche Inkorrektheiten entstehen, wenn das Gleichsetzen nicht scharf genug gefaßt wird, wie etwa, wenn man $3 \cdot 3 = 9 + 2$ schreibt, statt $3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2$. Man kann aber beim Gleichsetzen im Schulunterricht nicht streng genug sein, und es sei gestattet, einiges, was bei expliziten und impliziten Gleichsetzun-

*) Die obigen Darlegungen zeigen den Zusammenhang trigonometrischer Formeln mit der Lehre von den Kegelschnitten. Weitere Ausführungen hierüber finden sich in des Verfassers Programmschrift „Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte im Anschluß an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln". Greifenberg in Pomm. 1903.

gen als Inkorrektheit zu empfinden ist, der Reihenfolge des Auftretens im Schulunterricht folgend kurz zu besprechen.

Bei Divisionsaufgaben ist die Schreibart:

$$\begin{array}{c}31:6=5\\ \overline{1}\end{array}$$

unkorrekt; die rechte Seite muß $5\frac{1}{6}$ heißen. Solange Brüche noch nicht eingeführt sind, empfiehlt es sich, zu schreiben $= 5\,R \cdot 1$.

Das Gleichsetzen benannter und unbenannter Größen ist zu vermeiden. Verstöße wie $\frac{51}{2} = 25\frac{1}{2}\,m$ finden sich immer wieder. Größen mit verschiedenen Benennungen derselben Art sind in richtiger Weise gleichzusetzen, etwa 17 St. = 17 · 60 Min. und nicht 17 St. 60 = 1020 Min.

Bei Regeldetriaufgaben ist das Gleichheitszeichen oft ein Lückenbüßer, der zwischen ganz heterogenen Größen auftritt; etwa

$3\,l = 72$ Pfg. statt $3\,l$ kosten 72 Pfg.,

was man abkürzen kann:

$3\,l$ k. 72 Pfg. oder $3\,l \cdots\cdots$ 72 Pfg.

Wenn solche Fragen auf der Oberstufe auftreten, läßt sich auch das Aequivalenzzeichen $\sim$ anwenden. Man schreibe bei Aufgaben der astronomischen Himmelskunde

$$15^0 \sim 1^h,$$

um das Gleichheitszeichen zu vermeiden.

Unkorrektheiten beim Setzen von Klammern und inbezug auf die Stellung des Bruchstriches sind recht störend. Es ist falsch:

$$3 + 2 : 5 = 2 + 2 : 4$$

zu schreiben, während es

$$(3 + 2) : 5 = (2 + 2) : 4$$

heißen muß. Falsch ist

$$2 = \begin{array}{c}3\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\end{array} \quad \text{anstelle von} \quad 2 = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}.$$

Beim Abkürzen der Dezimalbrüche lasse man nicht

$$8,332 = 8,33$$

schreiben. Man kann ohne das Gleichheitszeichen auskommen, z. B. durch Untereinandersetzen der Werte. Auch kann hier und in vielen anderen Fällen ein Zeichen wie $\doteq$ (lies „angenähert gleich") angewendet werden.

Bei eingekleideten Gleichungen wird oft eine Lösung als abgekürzte Dezimalzahl gewünscht. Hat man etwa:

$$x = \frac{1}{3}$$

und setzt dann, weil die Benennung M ist:

$$x = 0,33,$$

so ist dies eine implizite Gleichsetzung von $\frac{1}{3}$ und 0,33, die unangenehm empfunden wird. Man kann durch Ueberstreichen des Buchstabens kennzeichnen, daß es sich jetzt um einen Annäherungswert handelt

$$\bar{x} = 0,33.$$

Die Einführung besonderer Zeichen für den wirklichen und für einen Annäherungswert ist in weiten Gebieten vorteilhaft. Die Schüler gewöhnen sich hieran leicht. Sie sind Betrachtungen über die Fehlergrenze nicht so unzugänglich, wie vielfach angenommen wird. Wesentliche Hilfe hat man aus solcher, manchem vielleicht zunächst pedantisch erscheinenden, Strenge für die Klärung des Begriffes der irrationalen Zahlen.

In der Wurzellehre ist unkorrekt:

$$\sqrt{2} = 1,414 \text{ statt } 1,414\cdots\cdots,$$

auch sind Härten der Schreibart bei impliziten Gleichsetzungen in der eben besprochenen Weise zu vermeiden, etwa:

$$a = \sqrt{2}$$
$$\bar{a} = 1,414.$$

Bei quadratischen Gleichungen zieht man die beiden Lösungen gern in eine, zwei Gleichungen darstellende Formel zusammen; man kennzeichne dann aber diese Zusammenziehung in klarer Weise, etwa:

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

und setze nicht

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b};$$

analog schreibe man bei trigonometrischen Gleichungen

$$\varphi_{1,2,\ldots k} = \varphi + k \cdot 360;\ k = 1 \cdots n.$$

Bei den Logarithmen ist es nach der Definition von ${}^{10}\log 2$ unkorrekt, ${}^{10}\log 2 = 0,30103$ zu setzen. Gesonderte Zeichen für den durch die Definition geforderten und einen Annäherungswert ermöglichen leicht die Vermeidung solcher Ungenauigkeiten, etwa

$$\underline{l}\,2 = 0,30103.$$

Die Klarheit der Auffassung gewinnt so.

In der Geometrie ist es empfehlenswerter

$$180^0 - a^0,\ 180^0 - 30^0$$

zu schreiben statt $2\,R - a^0$; zu beanstanden ist $\pi - a^0$. Nur wenn a als arcus bestimmt wird, ist $\pi - a$ am Platze. Näherungswerte spielen bei den Winkelfunktionen eine Rolle. Unkorrekt ist es, $\sin 60^0 = 0,8660254$ zu setzen; man unterscheide:

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\overline{\sin}\, 60^0 = 0,8660254,$$

auch kann man sich durch Anhängen von Punkten an den Annäherungswert helfen. Aus $\sin a = 0,4$ folgt nicht in gleicher Weise $a = 23^0\,34,7'$, wie aus $\operatorname{tg} \beta = 1$ sich $\beta = 45^0$ ergibt. Man kennzeichne den Annäherungswert, d. h. $\bar{a} = 23^0\,34,7'$.

Mengenlehre im Unterricht?

Bemerkungen von Dr. Kurt Geißler (Luzern).

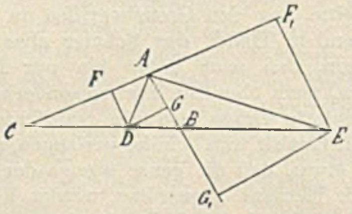
Der Vortrag H. Wieleitner's (Jhrg. XII, No. 5, S. 102) stellt sich auf den Standpunkt, als ob die Mengenlehre eine unzweifelhafte Errungenschaft der Wissenschaft wäre. Er sagt zwar, die Begriffe seien erst seit etwa 30 Jahren „in der Klärung begriffen", will aber doch überraschend einfache „Grund wahrheiten" vor Augen führen und möchte damit „bekannt machen", „weil viele von diesen Dingen in engster Beziehung zum Unterricht stehen". Es liegt also die Absicht vor, solche Sätze wie die „gleiche Mächtigkeit aller Kontinua", die „überraschende und trotzdem leicht verständliche Wahrheiten" seien, wenigstens in den Unterricht „einzustreuen", dem „Schüler so Zusammenhänge aufzudecken" und „Unterbrechung in die unvermeidliche Eintönigkeit trigonometrischer etc. Uebungsaufgaben" zu bringen. Freilich wird noch nicht geradezu verlangt, daß man der Meinung beipflichte, „all das soll unbedingt in den Unterricht der entsprechenden Klasse und jedes Jahres aufgenommen werden", aber es wird sogar gewünscht, daß in „hoffentlich nicht mehr zu langer Zeit eine neue Lehrordnung käme" und behauptet, daß dieselbe mit solchen Mitteln eine Aenderung bringen könne, wie sie dem „Wunsche der Mathematiker aller Nationen", der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und unseres Vereines entspräche. Da scheint es mir immerhin an der Zeit zu sein, einem solchen ernsthaften Versuche und den in jenem Vortrage gegebenen Mitteln kritisch näher zu treten und nicht einfach stillschweigend scheinbar beizustimmen, als ob an der Mengenlehre gar nichts auszusetzen und mehr zu bezweifeln wäre. Das gilt sicherlich höchstens von einer bestimmten Richtung heutiger Mathematiker und Bücher, welch letztere im Vortrage „modern" genannt werden. Eine eingehende Kritik der Mengenlehre erfordert mehr Raum, als die Zeitschrift gewähren kann, eine Rechtfertigung derselben mehr Raum, als ein Vortrag geben kann; aber der Behauptung, diese Lehre gebe unzweifelhaft Wahrheiten, kann zunächst ebensogut entgegengesetzt werden, die Grundbegriffe wie der der Mächtigkeit, die „einfachen Sätze" darüber, die Definition und Auffassung des Unendlichen darin wären unrichtig oder sehr zweifelhaft. Ich kann hier nur auf die Versuche der Darstellung für die Schüler eingehen, wie sie der Vortrag gibt. Für die Einführung der negativen Zahlen etc. wird die äußerlich formalste Art gewählt, die sich denken läßt, der aber keineswegs von allen Mathematikern oder Lehrern gehuldigt wird. $a - b$, wenn $b > a$, soll ein „bloßes Symbol sein, das andeutet, daß wir etwas Unerfüllbares verlangt hätten" und es soll ihm eine Bedeutung nur „beigelegt" werden. Damit harmoniert freilich die Art, wie bei vielen Neueren, auch in dem Vortrage, zahlenartigen Vorstellungen geometrische Namen wie „Linie" beigelegt werden. Die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ und Pfeile auf der Linie der positiven und negativen Zahlen sollen „unbedenklich dem Schüler andeuten", daß in der einen Richtung „sozusagen eine positiv unendlich große Zahl, in der anderen eine negativ unendlich große Zahl liegen wird". Daß man links und rechts von „einer" sprechen könne, ist dem Schüler denn doch keineswegs selbstverständlich, diese Angabe auch nicht unbedenklich. Wie aber soll die anerkannte Schwierigkeit entfernt werden, daß „diese beiden Grenzzahlen durch die mysteriöse Unendlickeit wie durch eine gähnende Kluft getrennt zu sein scheinen". Dazu wird ein Kreis benutzt, weil ja die Auftragung der Zahlenreihe auf eine Gerade willkürlich war, und zwar „ebensogut" ein Kreis. Dies soll aber eine nur praktische Sache sein, man nimmt die Bogen 0—1, 1—2 etc. durch passende Strahlen (Fig. S. 103) nicht gleich, sondern, weil dies „unpraktisch" sei, so daß sie immer kleiner werden, die Punkte für die positiven und negativen Zahlen sich wieder nähern, statt wie bei der Geraden immer mehr auseinanderzuweichen und man nun in dieser Abbildung wirklich ein einziges gemeinsames Ende, Punkt Q für $+\infty$ und $-\infty$ herstellt. Dies ist auf jeden Fall eine Willkür, gemacht zu den genannten bestimmten Zwecken, es ist eine bloße Willkür, liegend in der Wahl eines Kreises und des Punktes P auf ihm. Hierbei natürlich laufen die Punkte, die man mit den Zahlen bezeichnet, zu einem zusammen. Nun aber soll der Schüler, der noch nicht weiß, warum man von e i n e m unendlichfernen Punkte der Geraden spricht, dem auch nicht diese Redeweise als absolut berechtigt hingestellt werden darf (man kann diese Berechtigung sehr anzweifeln), recht klar sehen, wie man $+\infty$ und $-\infty$ einem einzigen „unendlichfernen Punkte der Geraden" zuweisen kann. Das ist gewiß kein Ueberzeugen und Nachweisen solcher Berechtigung, sondern bloß eine Erleichterung, um etwas Behauptetes, wovon etwa der betreffende Lehrer überzeugt ist, glatt eingehen zu lassen. Und dann soll diese Vorstellung wichtig sein, um die Schwierigkeit des Unendlichen bei tan 90° und tan 270° verstehen zu lassen. Was „nur auffalle", die Ungleichheit der Strecken für 0 — 1, 1 — 2 usw. auf dem Kreise für gleichgroße Zahlen — ein Fehler, der einen Schüler freilich geradezu vor den Kopf stoßen muß — wird nun weiter gerade für einen Vorteil erklärt.. Die Willkür, daß man die Punkte für die Zahlen 1, 2, 3 usw. auf der Geraden in gleichen Abständen wählt (wenn das eine Willkür ist, wozu tut man es denn regelmäßig? Doch wohl, um die tatsächliche Gleichheit der arithmetrischen Differenzen 1 — 0, 2 — 1, . . . darzustellen) wird nun durch die neue Willkür klar gemacht, daß man auf dem Kreise so auffallend verschiedene Bogen wählt, die bis zu Null oder der Punktgröße hinabgehen. Man soll nun dafür einführen, daß die ungleichen Bogen nur „im gewöhnlichen Sinne ungleich seien, aber daß es b e g r i f f l i c h vollkommen frei stehe, gleichen Zahlendifferenzen auch auf dem Kreise gleiche Strecken zuzuweisen" (bei Erfüllung oder Nichterfüllung des Archimedischen Axioms ist von gleichen Strecken die Rede), und nun soll mit dem Punkte Q und den „durch D e f i n i t i o n als gleich b e t r a c h t e t e n Bogen 0 — 1, 1 — 2 usw." die Figur eine vorzügliche Illustration für eine Messung geben, bei der das Archimedische Axiom nicht erfüllt sei. Ich begreife nicht, wie man auf diese Weise etwa den mathematischen Unterricht gelegentlich weniger trocken machen soll, ohne den jungen Geistern die Ueberzeugung von der logischen Strenge der Mathematik zu nehmen.

Die Mächtigkeit ferner, dieser „grundlegende Begriff für die ganze Mengenlehre", wird nun den Schülern klar machen, daß unter Umständen „der Teil gleich dem Ganzen sein kann". Der Vortrag behauptet, diese „Beziehung" sei dem Schüler nicht fremd, und erinnert an die harmonische Teilung einer Strecke AB durch einen inneren Punkt O und äußeren O', wenn $AO = BO$ also AB halbiert wird; dann sei auch das Ganze AO' gleich dem Teile BO', da O' ins Unendliche gerückt sei. Die Zusammenstellung, die hier bei Heranziehung des Unendlichen gelten soll: „es ist $AO' = BO'$ bezw. $AO' - BO' = AB$" ist einfach unsinnig und nicht bloß für einen Schüler, sondern in dieser einfachen Form mit „ist" auch für den Erwachsenen, wie ich behaupte. Wenn man auch das Unendliche (Transfinite), die Kardinalzahl, die Mächtigkeit etwa, wie manche wollen, nur durch Definition schaffen will, so muss doch auch die Definition der Logik entsprechen, und zwar für den Schüler einer klaren Logik, und diese darf nicht übergangen und in geschwächtes Ansehen gesetzt werden durch die Behauptung der Möglichkeit einer Definition, mit der man einen Satz fertig bekommen kann wie: Der Teil ist gleich dem Ganzen. Bei der harmonischen Teilung entsteht dies scheinbare Resultat einfach durch falsche Auslegung, nicht aber etwa durch klares Einsehen seitens des Schülers, der große Schwierigkeit findet. Stellt man die harmonische Teilung durch ähnliche Dreiecke her, so ist solche Herstellung keineswegs dieselbe und gleich klar für den Fall, daß man O als Mitte von AB nimmt; der auf O' führende Strahl ist parallel, und es tauchen die Schwierigkeiten des Unendlichen und der Parallelen auf; man darf durchaus nicht einfach wie vorher auf „Gleichheit" von AO' und BO' schließen, weil AO und BO gleich sind! Die von A aus ins Unendliche gehende Gerade ist ganz augenfällig nicht gleich der von B aus nach derselben Seite ins Unendliche gehenden, sondern um das sinnlichvorstellbare Stück AB davon verschieden. Es ist durchaus nötig, hier den Seinsgegensatz von Endlich (Sinnlichvorstellbar) und Unendlich (Uebersinnlichvorstellbar) anzuerkennen und nicht einfach zu sagen, der „Teil" sei gleich dem „Ganzen". Nach meiner Lehre von den Weitenbehaftungen wird die Gleichheit nach Weitengebieten definiert, nicht absolut, der Mittelpunkt O wie jeder Punkt ist nichts absolutes, nicht ohne jede Ausdehnung (wie die Linie nicht ohne jede Dicke ist), sondern der Mittelpunkt O gehört der niederen Weitenbehaftung an, ist von unendlichkleiner Größe und wird als Punkt ohne Grenzen (unbegrenzt klein) vorgestellt (weil er sonst eine unendlichkleine Strecke oder ein unendlichkleiner Körper wäre). Also nur für Endliches liegt Halbierung vor, bei Heranziehung des Untersinnlichen, überhaupt einer anderen Weitenbehaftung damit noch nicht. Nun versteht man, warum bei Heranziehung der höheren Behaftung (O' liegt im Unendlichen) auch dort nicht von einer absoluten Gleichheit die Rede ist, sondern AO' und BO' nur für die bloße Vorstellung des Unendlichen (erster Ordnung) gleich sind, nicht aber für gemischte Behaftung, wobei man auch das Endliche AB hereinzieht (was für das Unendliche allein Punktgröße hat). Freilich, die Mächtigkeit wird in dem Vortrage — für den Schüler? — auch nur zaghaft eingeführt: „so etwas wie eine Zahl im weiteren Sinne", „sozusagen die Anzahl aller positiven Zahlen"; und dann müssen wir „sofort definieren". Wie wird das Unendliche und die Mächtigkeit in der Mengenlehre definiert? Cantor sagt (Zur Lehre vom Transfiniten, S. 24): „Ich nenne zwei Mengen M und N äquivalent, wenn sie sich gegenseitig eindeutig Element für Element einander zuordnen lassen." Den Allgemeinbegriff Mächtigkeit erhalte man, wenn man nur auf das Rücksicht nimmt, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M äquivalent sind (und wenn man von aller Beschaffenheit und aller Ordnung der Dinge absieht). Beim Endlichen sei es die einfache Anzahl, beim Unendlichen aber soll die Menge eine Teilmenge von gleicher Mächtigkeit enthalten. Dedekind will gar von unendlichen Mengen ausgehen und dann erst das Endliche dadurch definieren, daß es nicht unendlich sei. Bolzano wie die beiden Genannten erkannten wohl die Schwierigkeit, welche das Unendliche mit sich bringt, aber sie gerieten auf Begriffe und eine Theorie, welche für jugendliche Geister ganz besonders schwierig erscheint und bei welcher es nicht abgeht ohne große Willkür in der Definition, ohne künstliche Schaffung von Begriffen, die an sich wie in ihren Folgerungen starken Zwang an der natürlichen Logik verlangen. Für den Unterricht ist dergleichen gewiß am wenigsten geeignet, die Versuche einer leichten Darstellung im genannten Vortrage scheinen mir auch weiterhin wenig geglückt, was weniger am Geschick des Verfassers als an der Sache liegt. Den Schülern soll „leicht zugänglich sein, daß die Ebene c^2 Gerade, der Raum c^3 Ebenen, aber c^4 Gerade enthält". Dies „Enthalten", dies „Vorhandensein", dies „Ist", das „Evidentmachen" durch Abbildung, für welche doch erst hinreichende Berechtigung nachzuweisen wäre, das Definieren mit räumlichen Namen, wo in Wahrheit nichts Räumliches vorliegt, sind die wunden Punkte der Lehre. Mit dem Worte Punkt und der Dichtigkeit wird ein Spiel getrieben, welches äußerst wenig wirkliches Verständnis bei Schülern finden würde. Daß sich die Lehre auf Unendlichkleines nicht erstreckt, muß äußerst befremden; soll der Schüler, dem das sofort in den Sinn kommen muß, die Gründe einsehen, welche dafür gegeben werden? Cantor nennt (Lehre vom Transfiniten, Halle 1890) die Auffassung der Differentiale, „als wären sie bestimmte unendlichkleine Größen", einfach eine Verwechslung von Begriffen und behauptet ohne Beweis, „daß sie doch nur veränderliche beliebigklein anzunehmende Hilfsgrößen sind, die aus den Endresultaten der Rechnungen (natürlich wenn man bloß endliche Resultate gelten läßt!) gänzlich verschwinden". Die Mengenlehre geht mit der Lehre von den Grenzbegriffen in vieler Beziehung Hand in Hand; der Schüler aber muß sich sehr wundern, daß nach unten hin nur Limeswerte gelten sollen, nach oben hin aber so sonderbar und unlogisch definierte Dinge wie die transfiniten Zahlen. Soll man mit Gewalt vom Schüler verlangen, zu glauben, es gebe so etwas, daß die ganze Menge der Teilmenge Element für Element zugeordnet werden könne ohne Rest? Die geometrischen Beispiele sind, wie oben bei der harmonischen Teilung angedeutet, leicht anders erklärbar, für die Zahlen wird es ganz entsprechend durch Behaftungen ausgeführt, ohne daß doch Behauptungen aufgestellt werden, wie beim Beispiele, das Cantor (ebenda) gibt: Zwischen 0 und 5 lägen unendlichviele Zahlen, ebenso zwischen 0 und 12 und doch seien die ersteren ein Teil der letzteren. Dies Existieren wird angenommen, das Unendliche soll ein „in sich festes, konstantes, jedoch jenseits aller endlichen Größen liegendes Quantum bedeuten". Und nun sollen solche verschiedenen unendlichen Mengen einander zugeordnet werden auf Grund der Festsetzung $5y = 12x$, wo y zwischen 0 und 12, x zwischen 0 und 5 liegen soll. Es ist freilich selbstverständlich und leicht für jeden Schüler, daß bei der Annahme eines Wertes von y z. B. gleich 12, bei der Rechnung auch ein entsprechender Wert von x herauskommt; aber das unendlichviele einfach da seien und zwar verschieden viele, das ist keineswegs einleuchtend. Etwa weil von 0 bis 12 mehr Einheiten sind als von 0 bis 5? Daraus kann man auf Existenz von entsprechend unterschiedenen unendlichen Mengen nur schließen, wenn man eine Art von mystischer Existenz annimmt, statt klar und deutlich logisch die Zahlen zu bilden. Cantor allerdings nimmt seine Beispiele aus dem Zahlengebiete, dem Raume und der Natur (die Gesamtheit aller strengpunktartig — was heißt das? — vorzustellenden Monaden, welche zum Phänomen eines vorliegenden Naturkörpers als konstitutive Bestandteile beitragen (S. 42, 43)); er stellt sich da „Entitäten" oder Realitäten vor und will dann von den Entitäten absehen, von den Eigenschaften und ihrer Ordnung, um bloß noch etwas übrig zu behalten, was man nun definieren muß. Aber die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen, aller auf einem gegebenen Kreise liegenden Punkte, setzt trotz allen Definierens doch noch etwas Seiendes, Liegendes, Existierendes voraus, wenn auch im Geiste, und dieses bekommt nun einen nicht minder mystisch erscheinenden Charakter dadurch, daß nicht mehr gelten soll: totum est maius sua parte. Daß man zu solchen Behauptungen gelangen kann, ist begreiflich, wenn man die tatsächlichen, nicht durch Definitionen geschaffenen oder wegzuschaffenden Schwierigkeiten des Unendlichen in vielen Problemen kennen gelernt hat; daß man aber eine solche Lehre als schulmässig, logischbildend bei lernenden jungen Geistern oder gar als bloße Einstreuung zur Erfrischung empfiehlt, wird man selbst dann nicht billigen können, wenn keine andere Auffassung und ausgeführte Lehre für das Unendliche da ist.

Die einem Dreieck eingeschriebenen Halbkreise und die ihnen entsprechenden Aussenkreise in ihren Beziehungen zu anderen Dreieckskreisen.

Von Th. Harmuth (Groß-Lichterfelde).

Es sei AD die Halbierungslinie des Dreieckswinkels CAB, AE die Halbierungslinie des ihm benachbarten



Außenwinkels, es seien ferner DF und DG, EF_1 und EG_1 auf die Dreiecksseiten AC resp. AB gefällte Lote und es sei angenommen, daß $a > b > c$ ist. Dann ist $DF = DG$ Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf auf einer Dreiecksseite (a) liegt und der die beiden anderen Seiten (b und c) direkt berührt. Solcher Kreise, deren Hälfte also innerhalb des Dreiecks liegt, gibt es für jedes Dreieck drei; ihre Radien mögen mit ϱ'_a, ϱ'_b, ϱ'_c bezeichnet werden, je nachdem der Mittelpunkt auf a, b oder c liegt.

Dann ist nach der üblichen Bezeichnung

$$\triangle = \frac{abc}{4r} = \frac{\varrho'_a(b+c)}{2}, \text{ also } \varrho'_a = \frac{abc}{2r(b+c)} = \frac{2\triangle}{b+c};$$

analog $\varrho'_b = \frac{2\triangle}{a+c}$, $\varrho'_c = \frac{2\triangle}{a+b}$.

Es ist also zunächst $\varrho'_a : \varrho'_b = (a+c) : (b+c)$.

Ferner ist

$$\frac{1}{\varrho'_a} = \frac{b+c}{2\triangle} \text{ usw., also}$$

$$\frac{1}{\varrho'_a} + \frac{1}{\varrho'_b} + \frac{1}{\varrho'_c} = \frac{2(a+b+c)}{2\triangle} = \frac{2s}{\triangle}.$$

Die Vergleichung der Radien dieser Kreise mit den Radien der Berührungskreise ergibt folgende Beziehungen:

$$\varrho'_a = \frac{2\triangle}{b+c}, \quad \varrho = \frac{\triangle}{s}, \quad \frac{\varrho'_a}{\varrho} = \frac{2s}{b+c} = \frac{b+c+a}{b+c},$$

$$\varrho_a = \frac{\triangle}{s-a}, \quad \frac{\varrho'_a}{\varrho_a} = \frac{2(s-a)}{b+c} = \frac{b+c-a}{b+c}.$$

Daraus folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\frac{\varrho'_a}{\varrho} + \frac{\varrho'_a}{\varrho_a} = 2, \quad \frac{\varrho'_a}{\varrho} - \frac{\varrho'_a}{\varrho_a} = \frac{2a}{b+c}.$$

Bezeichnet man die Radien der Apollonischen Kreise mit r_a, r_b, r_c, so ist $r_a = \frac{abc}{b^2-c^2}$, also

$$\varrho'_a : r_a = \frac{abc}{2r(b+c)} : \frac{abc}{b^2-c^2}, \quad \frac{\varrho'_a}{r_a} = \frac{b-c}{2r}, \quad \frac{\varrho'_b}{r_b} = \frac{a-c}{2r},$$

$$\frac{\varrho'_c}{r_c} = \frac{a-b}{2r}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\varrho'_a}{r_a} + \frac{\varrho'_c}{r_c} = \frac{\varrho'_b}{r_b},$$

für welche Gleichung natürlich keine zyklische Vertauschung zulässig ist.

Zusatz: Aus $\varrho'_a = \frac{2\triangle}{b+c}$ folgt direkt $\varrho'_a = \frac{bc\sin\alpha}{b+c}$.

Wenn die Maßzahlen der Dreiecksseiten eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, so ist, wenn die Differenz derselben d genannt wird,

$$b = c+d, \quad a = c+2d, \text{ also}$$

$$\frac{1}{\varrho'_a} = \frac{2c+d}{2\triangle}, \quad \frac{1}{\varrho'_b} = \frac{2c+2d}{2\triangle}, \quad \frac{1}{\varrho'_c} = \frac{2c+3d}{2\triangle};$$

d. h. die reziproken Werte dieser Radien bilden dann ebenfalls eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Differenz gleich $\frac{d}{2\triangle}$ ist. Für den Radius des Kreises, der zu der zweitgrößten Seite gehört, folgt dann

$$\frac{1}{\varrho'_a} + \frac{1}{\varrho'_b} + \frac{1}{\varrho'_c} = \frac{3}{\varrho'_b} \text{ oder } \frac{1}{\varrho'_a} + \frac{1}{\varrho'_c} = \frac{2}{\varrho'_b}$$

$$\text{und } \frac{3}{\varrho'_b} = \frac{2s}{\triangle}, \text{ also } \varrho'_b = \frac{3\triangle}{2s}.$$

Die Vergleichung dieser Radien mit denjenigen der Apollonischen Kreise gibt dann noch die Beziehungen

$$\frac{\varrho'_a}{r_a} = \frac{\varrho'_c}{r_c} = \frac{d}{2r}, \text{ aber } \frac{\varrho'_b}{r_b} = \frac{d}{r}.$$

Es ist weiter $EF_1 = EG_1$ Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung einer Dreiecksseite (a) liegt und der die beiden anderen Seiten (b und c) bezw. ihre Verlängerungen berührt. Auch hier sei $a > b > c$.

$$\text{Es ist } BE = \frac{ac}{b-c}, \text{ also}$$

$$EG_1 = BE \sin\beta = \frac{ac}{b-c} \cdot \frac{b}{2r}.$$

Bezeichnet man diesen Radius mit ϱ''_a, so ist also

$$\varrho''_a = \frac{abc}{2r(b-c)} = \frac{2\triangle}{b-c}, \quad \varrho''_b = \frac{2\triangle}{a-c}, \quad \varrho''_c = \frac{2\triangle}{a-b}.$$

Aus der identischen Gleichung $b-c+a-b = a-c$ folgt dann

$$\frac{1}{\varrho''_a} + \frac{1}{\varrho''_c} = \frac{1}{\varrho''_b},$$

welche Gleichung wieder wegen $a > b > c$ keine zyklische Vertauschung zuläßt.

Aus der Vergleichung dieser Radien mit denjenigen der Berührungskreise ergibt sich:

$$\varrho''_a = \frac{2\triangle}{b-c}, \quad \varrho = \frac{\triangle}{s}, \quad \frac{\varrho''_a}{\varrho} = \frac{2s}{b-c}$$

$$\varrho_a = \frac{\triangle}{s-a}, \quad \frac{\varrho''_a}{\varrho_a} = \frac{2(s-a)}{b-c};$$

und durch Addition bezw. Subtraktion dieser Gleichungen

$$\frac{\varrho''_a}{\varrho} + \frac{\varrho''_a}{\varrho_a} = \frac{2(b+c)}{b-c}, \quad \frac{\varrho''_a}{\varrho} - \frac{\varrho''_a}{\varrho_a} = \frac{2a}{b-c}.$$

Die Vergleichung mit den Apollonischen Kreisen führt zu dem Resultat:

$$\varrho''_a : r_a = \frac{abc}{2r(b-c)} : \frac{abc}{b^2-c^2}, \quad \frac{\varrho''_a}{r_a} = \frac{b+c}{2r}, \quad \frac{\varrho''_b}{r_b} = \frac{a+c}{2r},$$

$$\frac{\varrho''_c}{r_c} = \frac{a+b}{2r}, \text{ also } \frac{\varrho''_a}{r_a} + \frac{\varrho''_b}{r_b} + \frac{\varrho''_c}{r_c} = \frac{4s}{2r} = \frac{2s}{r}.$$

Endlich findet man zu den im ersten Teile dieser Arbeit behandelten Kreisen bezw. deren Radien die Beziehung

$$\varrho'_a : \varrho''_a = (b-c) : (b+c).$$

Für den Fall, daß $b = c + d$, $a = c + 2d$ ist, d. h. daß die Maßzahlen der Dreiecksseiten eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, ist $a - b = d$, $b - c = d$, aber $a - c = 2d$, also

$$\varrho''_a = \frac{abc}{2rd}, \quad \varrho''_b = \frac{abc}{4rd}, \quad \varrho''_c = \frac{abc}{2rd}$$

also ist dann $\varrho''_a = \varrho''_c = 2\varrho''_b$.

Aus $\frac{\varrho''_a}{r_a} = \frac{b+c}{2r}$ und den beiden analogen Gleichungen folgt dann

$$\frac{\varrho''_a}{r_a} = \frac{2c+d}{2r}, \quad \frac{\varrho''_b}{r_b} = \frac{2c+2d}{2r}, \quad \frac{\varrho''_c}{r_c} = \frac{2c+3d}{2r},$$

d. h. die Quotienten $\frac{\varrho''_a}{r_a}$, $\frac{\varrho''_b}{r_b}$, $\frac{\varrho''_c}{r_c}$ bilden eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Quotient gleich $\frac{d}{2r}$ ist.

Neue Berechnung der Seite des regulären Dreissigecks nebst damit zusammenhängenden Beziehungen zwischen den zu 12⁰, 24⁰, 36⁰, 84⁰, 108⁰, 132⁰ und 156⁰ gehörenden Sehnen.

Von O. Schneider (Langendreer).

Aus der Seite des regulären Fünfzehnecks

$$s_{24^0} = \frac{1}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

(Reidt, Planimetrie) läßt sich mit Hilfe einer bekannten Formel die Seite des regulären Dreißigecks leicht berechnen.

$$s_{12^0} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24^0}{}^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{4}}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{\frac{16 - 7 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{4}}}$$

$$= \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}.$$

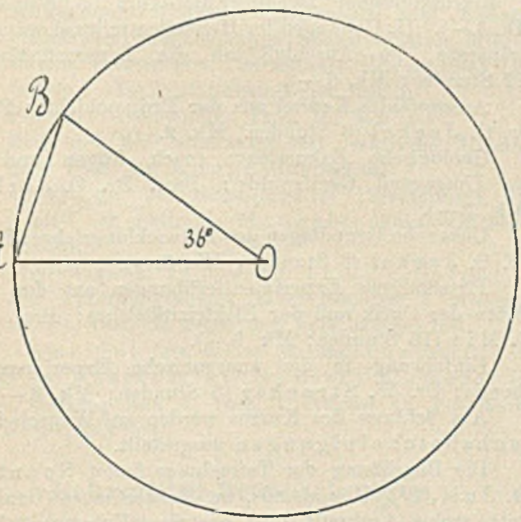


Fig. 1.

Man erhält aber eine weit einfachere Formel für s_{12^0} unter Benutzung der zwischen s_{12^0}, s_{24^0}, s_{36^0}, s_{108^0} und s_{132^0} bestehenden Beziehungen.

Die Trisektion eines Winkels führt bekanntlich auf eine Gleichung dritten Grades. Die allgemeine Form dieser Gleichung ist:

$$x^3 - 3x + a = 0$$

(vergl. Unterrichtsblätter 1904, Nr. 1), wobei der Radius des Kreises $= 1$ angenommen und a die Sehne des zu teilenden Winkels ist. Ist $\sphericalangle AOB = 36^0$, so sind die 3 Wurzeln der Gleichung, wie leicht ersichtlich, die zu 12⁰, 108⁰*) und 132⁰**) gehörenden Sehnen. Das Produkt der Wurzeln ist gleich dem mit x nicht behafteten Glied der Gleichung, also:

$$s_{12^0} \cdot s_{108^0} \cdot s_{132^0} = s_{36^0} \text{ oder}$$

$$s_{12^0} \cdot s_{108^0} \cdot s_{132^0} \cdot s_{36^0} = s_{36^0}{}^2.$$

Da aber $s_{108^0} \cdot s_{36^0} = 1$ ist (vergl. Unterr.-Bl. 1905, Nr. 1), so folgt:

$$s_{12} \cdot s_{132} = s_{36}{}^2,$$

d. h. die Seite des regulären Zehnecks ist die mittlere Proportionale zwischen den zu 12⁰ und 132⁰ gehörenden Sehnen.

Ist in der Gleichung $x^3 - 3x + a = 0$ a die zu 108⁰ gehörende Sehne, so sind die 3 Wurzeln der Gleichung:

$$s_{36^0}, \; s_{81^0} \text{ und } s_{156^0}.$$

Mithin $\quad s_{36} \cdot s_{81} \cdot s_{156} = s_{108},$

oder $\quad s_{36} \cdot s_{81} \cdot s_{156} \cdot s_{108} = s_{108}{}^2,$

oder $\quad s_{84} \cdot s_{156} = s_{108}{}^2,$

d. h. die zu 108⁰ gehörende Sehne ist die mittlere Proportionale zwischen den zu 84⁰ und 156⁰ gehörenden Sehnen.

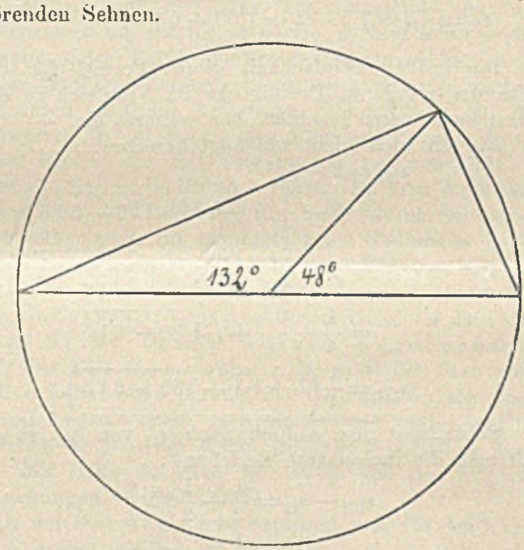


Fig. 2.

Es ist ferner:

$$s_{132}{}^2 = 4 - s_{48}{}^2$$
$$= 4 - s_{24}{}^2(4 - s_{24}{}^2)$$
$$= 4 - 4s_{24}{}^2 + s_{24}{}^4$$

oder

$$s_{132} = \sqrt{4 - 4s_{24}{}^2 + s_{24}{}^4}$$

$$s_{132} = 2 - s_{24}{}^2$$

$$s_{132} = 2 - s_{24}{}^2$$
$$= 2 - s_{12}{}^2(4 - s_{12}{}^2)$$
$$s_{132} = 2 - 4s_{12}{}^2 + s_{12}{}^4.$$

Mit Hilfe der Gleichungen: $s_{12} \cdot s_{132} = s_{36}{}^2$,

$$s_{132} = 2 - 4s_{12}{}^2 + s_{12}{}^4$$

und

$$s_{12}{}^3 - 3s_{12} + s_{36} = 0$$

läßt sich s_{12} berechnen.

$$0 = s_{12}{}^3 - 3s_{12} + s_{36}$$

$$0 = s_{12}{}^4 - 3s_{12}{}^2 + s_{12}s_{36}$$

$$s_{132} = s_{12}{}^4 - 4s_{12}{}^2 + 2$$

---

*) $\frac{360 - 36}{3} = 108.$ **) $\frac{360 + 36}{3} = 132.$

$$s_{132} = -s_{12}^2 + 2 - s_{12} \cdot s_{36}$$
$$\frac{s_{36}^2}{s_{12}} = -s_{12}^2 + 2 - s_{12}\, s_{36}$$
$$s_{36}^2 = -s_{12}^3 + 2\, s_{12} - s_{12}^2 \cdot s_{36}$$

(Für s_{12}^3 läßt sich setzen: $3\, s_{12} - s_{36}$)

$$s_{36}^2 = -3\, s_{12} + s_{36} + 2\, s_{12} - s_{12}^2 \cdot s_{36}$$
$$s_{36}^2 = -s_{12} + s_{36} - s_{12}^2 \cdot s_{36}$$
$$s_{12}^2 \cdot s_{36} + s_{12} = s_{36} - s_{36}^2$$
$$s_{12}^2 + \frac{s_{12}}{s_{36}} = 1 - s_{36}$$
$$= -\frac{1}{2\, s_{36}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\, s_{36}^2} + 1 - s_{36}}$$
$$= -\frac{1}{2\, s_{36}} \pm \frac{1}{2\, s_{36}} \sqrt{1 + 4\, s_{36}^2 - 4\, s_{36}^3}$$

s_{36} ist aber $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$$s_{12} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sqrt{1 + 6 - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 8}$$
$$= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$$
$$= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$
$$s_{12} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$$

Die größere Einfachheit dieser Formel für die Seite des regulären Dreißigecks im Vergleich zu der zuerst berechneten leuchtet ohne weiteres ein. —

s_{132} läßt sich leicht wie folgt berechnen:

$$s_{132} = 2 - s_{24}^2$$
$$= 2 - \frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$$
$$= 2 - \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$
$$s_{132} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right).$$

Subtrahiert man endlich noch s_{12} von s_{132}, so erhält man die interessante Beziehung:

$$s_{132} - s_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$s_{132} - s_{12} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$
$$s_{132} - s_{12} = s_{108}.$$

Kleinere Mitteilungen.

Gazeto Mathematika Internacio: Es besteht die Absicht, unter dem vorgenannten Titel eine in Esperanto redigierte mathematische Zeitschrift herauszugeben, für die F. J. Vaes in Rotterdam, Mathenesserdan 290 einen Prospekt veröffentlicht. Die neue Zeitschrift, für die ein Umfang von 12 Bogen und ein Abonnementspreis von 10 Mk. p. a. in Aussicht genommen ist, will zwischen den bestehenden in den einzelnen Volkssprachen geschriebenen Zeitschriften eine innigere Verbindung herstellen.

Vereine und Versammlungen.

79. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in Dresden vom 15. bis 21. September ds. Js.

Geschäftsführer der Versammlung sind die Herren Geh. Hofrat Prof. Dr. E. v. Meyer und Geh. Medizinalrat Prof. Dr. Leopold.

Die allgemeinen Sitzungen der diesjährigen Tagung sollen Montag, den 16. und Freitag, den 20. September vormittags stattfinden; es sind dafür Vorträge von den Herren Professoren Dr. Hempel (Dresden), Dr. Hergesell (Straßburg), Dr. Hoche (Freiburg i B.), Dr. zur Straßen (Leipzig) in Aussicht genommen. Für Donnerstag, den 19. September vormittags ist eine Gesamtsitzung der beiden wissenschaftlichen Hauptgruppen, für den Nachmittag desselben Tages sind gemeinsame Sitzungen je der beiden Hauptgruppen geplant.

Die Abteilungssitzungen sollen am 16. nachmittags und am 17. und 18. vormittags und nachmittags abgehalten werden. Die Abteilungen sind seit der vorjährigen Versammlung in Stuttgart um eine — 1 b Astronomie und Geodäsie — vermehrt worden.

Die Abteilung für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Nr. 12), deren Einführende die Herren Prof. Dr. Weinmeister (Tharandt) und Prof. Dr. Heger, deren Schriftführer die Herren Prof. Dr. Witting und Dr. Lohmann sind, ersucht um Vortragsanmeldungen bis zum 25. Mai, diese sind an Prof. Dr. Weinmeister in Tharandt zu richten.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Ferienkurse in Greifswald vom 15. Juli bis 3. August.

An naturwissenschaftlichen Kursen sind in Aussicht genommen:

Psychologie-Seminar: Prof. Dr. J. Rehmke (18 Stunden; Mk. 9.—).

Schul-Hygiene (mit Demonstrationen): Prof. Dr. F. Löffler (3 Stunden; Mk. 2.—).

Mikroskopische Botanik: Prof. Dr. F. Schütt. I. Mikroskopischer Demonstrationskurs (6 Stunden; Mk. 3.—). II. Uebungen im Herstellen mikroskopischer Präparate, im Anschluß an die Demonstrationen (12 Stunden; Mk. 6.—).

Ausgewählte Kapitel aus der Erdgeschichte: Prof. Dr. O. Jaekel (3 Stunden; Mk. 2.—).

Geologische Exkursionen (nach Rügen und in die Umgegend Greifswalds): Prof. Dr. O. Jaekel (Mk. 3.—).

Ueber die Grundlagen der Entwicklungslehre: Prof. Dr. O. Jaekel (6 Stunden; Mk. 3.—).

Physikalische Experimentierübungen aus den Gebieten der Optik und der Elektrizitätslehre: Prof. Dr. G. Mie (18 Stunden; Mk. 9.—).

Einführung in die anorganische Experimentalchemie: Dr. W. Strecker (6 Stunden; Mk. 3.—).

Am Schlusse des Kursus werden auf Wunsch Besuchsbescheinigungen ausgestellt.

Die Begrüßung der Teilnehmer findet Sonntag 14. Juli, $8^1/_2$ Uhr abends, im Konzerthause (Gruihn) statt, wobei Auskunft über Vorträge, Uebungen, Ausflüge usw. erteilt wird.

Die Mitgliedskarte zum Preise von 5 Mk., die zum Belegen der Vorträge und Uebungen, zur Besichtigung der Institute und Museen, sowie zur Beteiligung an den Ausflügen und sonstigen Veranstaltungen des Ferienkurses berechtigt, ist in Greifswald im Geschäftszimmer des Ferienkurses (Auguste-Viktoria-Schule) zu lösen. Ebenso werden dort zu den oben angemerkten Preisen die Karten für die einzelnen Vorträge und Uebungen gelöst.

Anfragen sind an die Adresse „Ferienkurs Greifswald" zu richten. Auskunftsstelle und Geschäftszimmer befinden sich vom 12. Juli ab in der Auguste-Viktoria-Schule.

* * *

Ferienkurse in Jena vom 5. bis 17. August 1907. Die Kurse umfassen Naturwissenschaft, Pädagogik, Physiologie nebst Psychologie und pädagogischer Pathologie, Sozialwissenschaft, Theologie nebst Geschichte und Philosophie, Vortragskunst und Sprachkurse, sie werden teils im Volkshaus, teils in den naturwissenschaftlichen Instituten der Universität abgehalten.

An naturwissenschaftlichen Kursen sind angesetzt:

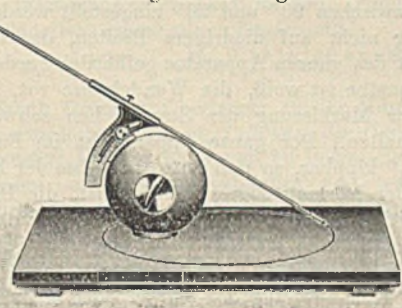
1. Naturphilosophie. Das Problem des Lebens; Ursprung und Wesen des Lebensprozesses: Prof. Dr. Detmer.
2. Die Biologie im botanischen Schulunterricht (Bau und Leben der Pflanzen; mit Experimenten): Prof. Dr. Detmer. (Botanisches Institut.)
3. Die Stammesgeschichte der Vögel und Säugetiere. Mit Demonstrationen mittelst des Epidiaskops: Prof. Dr. Ziegler. 6 Stunden vom 5.—10. August.
4. Wasser, Eis und Wind als geologische Kräfte an der Hand von Lichtbildern: Prof. Dr. Walther-Halle a. S. 6 Vorträge vom 5.—10. August.
5. Grundzüge der Chemie und Darlegung der wichtigsten chemischen Vorgänge in der Natur; mit Experimenten und Demonstrationen: Prof. Dr. Immendorff. (Agrikultur-chemisches Laboratorium.)
6. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Musik (mit akustischen Experimenten und optischen Projektionen, daher auch für nicht spezifisch Musikalische): Prof. Dr. Auerbach.
7. Ausgewählte Kapitel aus der neueren Elektrizitätslehre, mit Experimenten: Privatdozent Dr. Reich.
8. Anwendung optischer Instrumente zum Zwecke chemischer Untersuchungen: Spektralanalyse, Mikroskopie, Polarisation, Refraktion: Privatdozent Dr. Gänge (Agrikultur-chemisches Institut).
9. Populäre Astronomie: Prof. Dr. Knopf.
10. Zeit- und Ortsbestimmung, mit praktischen Uebungen: Prof. Dr. Knopf (Sternwarte).
11. Physiologie der Sinnesorgane: Privatdozent Dr. med. et phil. E. Mangold (Physiologisches Institut).
12. Physiologische Psychologie: Prof. Dr. Berger.

Der Eröffnungsabend findet Sonntag 4 August, abends $8^1/_2$ Uhr, im Saale des Volkshauses statt.

Anmeldungen nimmt an und Auskunft erteilt das Sekretariat (Frl. Clara Blomeyer in Jena, Gartenstrasse 4, vom 3. August ab Volkshaus am Karl-Zeiß-Platz).

Lehrmittel-Besprechungen.

Modell zur Demonstration der räumlichen Entstehungsweise der Kegelschnitte unter Zugrundelegung des Dandelin'schen Satzes. Unter dieser Bezeichnung ist in dem bekannten Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling in Halle ein vom Unterzeichneten konstruierter Apparat erschienen, der manchem Lehrer der Mathematik und der darstellenden Geometrie für seinen Unterricht willkommen sein dürfte. Die Konstruktion ist im ganzen dieselbe wie die eines im Jahre 1891 veröffentlichten „Kegelschnittzirkels". Während es aber bei diesem — als einem hauptsächlich für die Praxis bestimmten Zeicheninstrumente — in erster Linie auf Genauigkeit, vielseitige Verwendbarkeit und bequeme Einstellbarkeit ankam, ist bei dem vorliegenden Modelle hiervon abgesehen und der Nachdruck auf die Veranschaulichung des räumlichen Vorganges gelegt. Aus diesem Grunde wird auch, wie die Figur zeigt, die eine der beiden Dandelin'schen Kugeln in massiver Ausführung direkt vorgeführt.



Führt man den eine Kugeltangente bildenden Zeichenstab um die Kugel herum, so beschreibt er den Mantel eines Berührungskegels, dessen Achse durch einen drehbaren Zapfen gebildet wird. Hierbei zeichnet ein unten am Stabe befestigtes Stück Kreide auf der schwarzen Grundplatte einen Kegelschnitt auf, dessen einer Brennpunkt mit dem Punkte zusammenfällt, in dem die Kugel die Platte berührt. Da man der Kegelachse und der Tangente, die beide durch Schrauben feststellbar sind, die mannigfachsten Stellungen geben kann, so erhält man nicht nur Ellipsen, sondern auch Parabeln und Hyperbelzweige als Schnittkurven der Grundplatte und des vom Stabe beschriebenen Kegelmantels. Für den Fall einer Parabel z. B. muss der Stab nach halber Umdrehung parallel zur Grundplatte, also horizontal liegen. Stellt man Achse und Stab einander parallel, so geht der Kegel in einen Zylinder über.

Mit Hilfe des Modelles lassen sich also folgende Beziehungen veranschaulichen:

1. der Dandelin'sche Satz und zwar für den Kegel sowohl wie für den Zylinder;
2. die räumliche Entstehungsweise der einzelnen Kegelschnitte;
3. der Uebergang einer Art von Kegelschnitten in eine andere;
4. Kegelschnittscharen;
5. die Zentral- und Parallelprojektion der Kugel (oder eines Kreises) auf eine Ebene;
6. der Schlagschatten einer Kugel (oder eines Kreises) auf einer Ebene bei Zentral- oder Parallelbeleuchtung.

Das Modell erscheint demnach in gleicher Weise verwendbar beim Unterricht in der Stereometrie sowie in der darstellenden Geometrie.

Jede Kurve wird nicht in einem Zuge, sondern in zwei Längshälften gezeichnet, worüber näheres aus dem Prospekt zu ersehen ist. Die Grundplatte des Modelles, welches in der bekannten Werkstatt von Günther & Tegetmeyer in Braunschweig angefertigt wird, beträgt 45×60 cm, der Durchmesser der Kugel 18 cm, der Preis des Apparates 50 Mk.

Prof. Dr. C. Hildebrandt (Braunschweig).

Caelotellurium nach Fricke-Ernecke. Dieser Apparat zeigt 1. den Himmel dargestellt durch die Koluren, den Aequator, die Wendekreise, die Polarkreise und die Ekliptik, 2. den Tierkreis als Draht, der die Ekliptik in geringem Abstande konzentrisch, auf besonderen Stützen ruhend, umschließt, 3. die Sonne, die auf einem zwischen Ekliptik und Polarkreis durchgeführten Draht befestigt ist, 4. die Erde in Scheibenform, also den Horizont mit Meridian und erstem Vertikal an der Himmelsachse so befestigt, daß er auf Breiten zwischen 90° und 20° eingestellt werden kann — leider nicht auf niedrigere Breiten, da sonst die Stabilität des ganzen Apparates gefährdet worden wäre. Der Aequator ist weiß, die Wendekreise rot, die Ekliptik zur Markierung der Sternzeichen schwarz und weiß gehalten. Der ganze Apparat ist im Fußgestell um $23^1/_2{}^0$ kippbar, so daß statt der Achse der Ekliptik, die in der Normalstellung vertikal ist, die Himmelsachse vertikal zu stehen kommt. Der Antrieb des Apparates erfolgt durch ein teils sichtbares, teils in eine am Fußgestell befestigte Kapsel eingebautes Räderwerk mit Kurbel. Eine Drehung der Kurbel oder eines Knopfes am oberen Ende der Himmelsachse löst gleichzeitig eine dreifache Bewegung aus: 1. die Rotation des Horizontes um die Himmelsachse, 2. den Umlauf der Sonne, da der ihren Befestigungsdraht tragende Kapseldeckel um die Achse der Ekliptik drehbar ist, 3. die Praecessionsbewegung der Himmelskugel. Die Uebersetzungen am Räderwerk sind derart, daß das tropische Jahr 29 Tage, das platonische Jahr 37 tropische Jahre hat.

Dem Caelotellurium sind außer einigen an beliebigen Stellen des Himmels anzuhängenden Sternen keinerlei Nebenapparate beigegeben, die, wie es bei ähnlichen Instrumentarien der Fall ist, erst zusammengesetzt werden müßten; es ist daher immer gebrauchsfertig und auf die denkbar einfachste Weise in Betrieb zu setzen. Die Kombination der Rotation, Revolution und Präzession bietet den nicht zu unterschätzenden Vorteil, daß dem Schüler bei jeder Benutzung des Apparates ein annähernd richtiges Bild von dem Zusammenwirken der drei Bewegungen vermittelt wird, und gestattet, eine Reihe von Tatsachen, die erfahrungsgemäß dem Verständnis der Schüler außerordentlich schwer nahezubringen sind, in so eindrucksvoller einfacher Weise zu veranschaulichen, wie es wohl mit Hilfe keines ähnlichen Apparates möglich ist: z. B. den Unterschied zwischen Sonnen- und Sterntag, zwischen tropischem und siderischem Jahr, zwischen Sternzeichen und Sternbildern, also das Vorrücken der Tag- und Nachtgleichen u. s. f. Selbstverständlich lassen sich auch die meisten anderen Begriffe und Erscheinungen, die in Zusammenhang mit der Rotation und Revolution der Erde zu besprechen sind, klar und weithin sichtbar demonstrieren. Als besonders wirksam sei nur noch hervorgehoben die Vorführung der drei Coordinatensysteme, der Jahreszeiten, der parallelen Sphäre mit Polarnacht und Mitternachtssonne.

Der in der Praxis schon bestens erprobte Apparat kann zur Anschaffung aufs angelegentlichste empfohlen werden. E. Knothe (Bremen).

Bücher-Besprechungen.

J. Thomae. Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig, B. G. Teubner 1906. X und 184 S. 8° m. 8 Textfiguren. Preis geb. 3.60 Mk.

Von den kleinen Handbüchern der analytischen Geometrie, die für Mathematiker bestimmt sind, ist dieser »Grundriß« sicher eines der besten. Er ging hervor aus einem Skelett von des Verfassers Vorlesung über analytische Geometrie, das den Zuhörern in die Hand gegeben wurde, um ihnen das Nachschreiben zu ersparen. In der vorliegenden Form aber ist er gewiß über diesen Zweck hinausgewachsen; denn er enthält in nuce alle Grundtatsachen und Methoden der analytischen in Verbindung mit der projektiven Geometrie; Linien- und Dreieckskoordinaten, die Korrelation und Kollineation bis zur harmonischen Kovariante zweier Kegelschnitte neben allem anderen, was ein Grundriß enthalten muß. Man findet aber auch eine sehr schöne Behandlung der Kreissysteme mit Einschluß des Apolliniusschen und Malfattischen Problems, ferner die Aufgabe des Ottajano und einen Fall des Ponceletschen Schließungsproblems. Es wird alles aufs einfachste behandelt und viel konstruiert; sogar die konstruktive Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades durch Kreis und Parabel ist angegeben. Durch Einführung der Determinanten, denen in der Mitte des Buches 5 Seiten gewidmet sind, gewinnt der zweite Teil außerordentlich. Es ist sicher verkehrt zu glauben, die Vermeidung der Determinanten erleichtere das Studium eines elementaren Buches. Vielleicht am wenigsten glücklich ist der Anfang. Ob es überhaupt angezeigt ist mit der binären Geometrie (auf der Punktreihe und im Strahlenbüschel) zu beginnen, ist schließlich pädagogische Streitfrage. Wenn aber, dann muß die Behandlung eine wesentlich induktive sein. Identische Umformungen (wie z. B. S. 13 und 18) sind zwar sehr elegant, aber mehr verblüffend als beweisend. Die späteren Teile leiden aber nicht unter diesem Mangel.

Im einzelnen möchte ich bemerken, daß auch die homothetische Lage der Kegelschnitte, die bei Salmon-Fiedler (Art. 242) erst in der 6. Auflage korrekt dargestellt wurde (vgl. die Kritik von R. Müller, Arch. Math. Phys. (3) 2, 1902, 342), hier kurz und einwandfrei gegeben ist. Aber dafür möchte ich entschieden eintreten, daß die Gleichung der Hyperbel in Polarkoordinaten (ϱ, ω):

$$\varrho = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e \cos \omega}$$

doch die ganze Hyperbel und nicht bloß einen Zweig derselben darstelle, wie es auf S. 112 heißt. Man muß nur die Polarkoordinaten in der Weise auffassen, wie schon R. Baltzer und A. de Morgan anregten und wie dies G. Loria allgemein durchführte, d. h. kurz gesagt auch negative Radienvektoren zulassen.*)

Zwei Dinge formaler Art möchte ich noch erwähnen. Im ersten Teil des Buches wirkt störend, daß der Setzer häufig o und 0 verwechselte, sogar auf einer Seite (41), wo o einen Punkt der Figur bezeichnet. Das hätte korrigiert werden müssen. Außerdem meine ich, man sollte sich doch, was die Klammern betrifft, an die üblichen, von E. Schröder (1873) zuerst scharf fixierten Regeln halten, da die Weglassung der Klammern weder Geld, noch viel Zeit und Mühe erspart (vgl. S. 20, 96, 114). — Auf S. 170, Z. 2 vor § 174 ist mir ein Druckfehler aufgefallen. Es muß statt $(g_1 g_1')(g_2 g_2')$ heißen $(g_1 g_2')(g_2 g_1')$.

H. Wieleitner (Speyer).

* * *

Dr. Friedrich Reidt, weiland Professor am Gymnasium zu Hamm, *Anleitung zum mathematischen Unterricht* an höheren Schulen. 2. Aufl. Revidiert und mit Anmerkungen versehen von Dr. Heinrich Schotten, Direktor der städt. Oberrealschule zu Halle a. S. — 269 S. 8° m. mehreren Textfiguren. Berlin 1906, G. Grote. Preis geh. 4 Mk.

Das alte, gute Büchlein von Reidt empfehlen, das hier in zweiter Auflage, 20 Jahre nach seinem Erscheinen, sich den Mathematiklehrern vorstellt, hieße Eulen nach Athen tragen. Herr Schotten gab es im ganzen unverändert heraus und fügte nur teils zustimmende, teils abweichende Ansichten in Fußnoten bei. Ich kann hier nicht die Absicht haben, mich im einzelnen zu Reidts und Schottens Anschauungen äußern zu wollen, darf aber eine sehr weitgehende Uebereinstimmung konstatieren. Allerdings neige ich oft mehr zu Reidts strengeren Anschauungen als zu den von Schotten als für den Unterricht genügend empfohlenen „anschaulichen" Beweisführungen (z. B. S. 34, 44, 55, 56, 57).

Wenn ich nach Italien sehe und staune, wie dort z. B. in den für den Elementarunterricht bestimmten *Elementi di geometria* von P. Veronese (Padova, Fratelli Drucker 1900) das einfachste nicht für selbstverständlich gehalten und alles mit ermüdender Strenge auf das denkbar höchste logische Niveau gebracht wird, und hier in Deutschland gesagt bekomme, der sog. Thibautsche Beweis für die Dreieckswinkelsumme sei nicht nur propädeutisch, sondern genüge überhaupt für den Unterricht, so sind das so ziemlich die größten Extreme, die sich denken lassen. Und ich bin persönlich der Ansicht, daß das Richtige auch hier etwas näher bei der Mitte liegt.

Aehnlich ist es mit der Arithmetik. Trotz mannigfacher zutreffender Erörterungen steht in dem zur Besprechung vorliegenden Buche nirgends das eigentliche Prinzip, auf dem die Erweiterung der Begriffe beruht, das „Prinzip der Permanz der formalen Operationen" (Hankel 1867), welches man weniger schwülstig „Prinzip der Ausnahmslosigkeit" nennen kann. Auch fehlt für diesen Teil das Zitat von M. Simons *Methodik der elementaren Arithmetik etc.* (Leipzig, Teubner, 1906), das vielleicht noch hätte angebracht werden können.*) Dort ist manches schärfer zum Ausdrucke gebracht wie bei Reidt.

Aber abgesehen von diesen nur die Grundlagen berührenden Bemerkungen enthält das Reidtsche Buch so viel Beherzigendes für jüngere und ältere Lehrer, dass wir nur wünschen, es möchte mehr als bisher gelesen werden. Wenn es aber dann wieder aufgelegt wird, würden die Zusammenstellungen von Lehrbüchern, da sie ganz veraltet sind, wegbleiben müssen oder sie müßten durch ganz neue ersetzt werden. Auch manche Zitate bedürften irgend einer Ergänzung.

H. Wieleitner (Speyer).

* * *

Prof. Erich Geyger, Oberlehrer an der Königl. Baugewerkschule in Kassel, *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie* für den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium. I. Teil: Affinität und Perspektivität ebener Figuren, Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde. Kegelschnitte als Kreisprojektionen. Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion. Zylinder, Kegel, Kugel; ebene und Raumkurven. Schnitte und Abwickelungen. Durchdringungen. Gr. 8°. 321 S. m. 290 Fig. im Text. Leipzig 1906, G. J. Göschen. Preis geb. 8.60 Mk.

Wir haben oben den langen Untertitel abdrucken lassen, um nicht hier alles aufzählen zu müssen, was das Buch enthält. Auch was es will, ist im Titel schon einigermaßen ausgedrückt. Aber das ist kein Buch für einen Schüler, trotz des Standpunktes, auf den sich der Verfasser stellt. Ein solches Buch ist für einen Schüler zu umfangreich. Das müssten denn doch ganz andere Schüler sein, als sie sonst sind, mit denen man 214 Seiten Kegelschnittlehre durchnehmen könnte, um dann erst noch die gewöhnliche darstellende Geometrie mit zwei Projektionsebenen so ziemlich vorauszusetzen. Denn das Buch hat einen ganz fundamentalen Mangel: es wohnen zwei Seelen in seiner Brust. Einerseits sollte und wollte der Verfasser das Buch von J. Schröder, der Sammlung Schubert XII. Band (Göschen 1901) fortsetzen, andererseits stellt er sein Lehrbuch als etwas Selbstständiges hin — es soll ja auch drei Bände erhalten. Hätte doch der Verfasser, seiner ursprünglichen Absicht folgend, sich darauf beschränkt, dem Schröderschen Buche innerhalb der Sammlung Schubert einen II. Teil zu geben! Er hätte der Verlagshandlung und gewiß auch sich selbst einen viel größeren Dienst erwiesen.

Was ist nun das erste Darstellend-Geometrische, was in diesem Buche behandelt wird? Die Grundaufgaben der orthogonalen Axonometrie! Und dies textlich nicht glücklich**) und mit einer infolge ihrer Kleinheit ganz unübersichtlichen Figur (Fig. 189). Es folgen einige Beispiele, auch für schiefe Projektion (IV. Kap. von S. 215—262). Das letzte Kapitel, dessen Inhalt man aus dem Titel entnehmen möge, beginnt mit der Darlegung der Aufgabe, wenn die Spuren einer Ebene in zwei senkrechten Tafeln gegeben sind und die eine Projektion eines Punktes der Ebene, die andere zu finden, sowie die Umlegung der Ebene in die eine Tafel.

*) Dieser Auffassung hat sich G. Scheffers in der neuen Auflage von Serret, Diff.- u. Integr.-Rechnung, Teubner 1906 (I. Bd. S. 345/6) durchaus angeschlossen.

*) M. Simons *Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrh.* (Leipzig, Teubner, 1906) ist zitiert.

**) Auf S. 225 ist offenbar eine ganze Stelle weggeblieben. Es tritt plötzlich ein Punkt A_1 auf, von dem vorher gar nicht die Rede war. Es wird nur sehr wenige Schüler geben, die sich das ergänzen könnten.

Welcher Kontrast! Wir behaupten frischweg, wenn ein Leser diese Grundaufgaben der Zweitafelprojektion nicht gründlich versteht, kann er das Vorhergehende überhaupt nicht fassen. Im übrigen befaßt sich dieses Kapitel nur mit der Zweitafelprojektion der krummflächigen Körper, weil das Schrödersche Buch diese nicht in den Bereich seiner Betrachtungen zog. Auch hier muß einigen Figuren der Vorwurf unübersichtlicher Kleinheit gemacht werden (bes. Fig. 253, 254, 260). Auch müßten die Umrißlinien, vor allem bei den Durchdringungen besser hervortreten. Man sehe nur etwa die ganz analogen Figuren in Doehlemanns *Geom. Transf. I.* (S. S. XXVII, Göschen 1902).

Der beregte fundamentale Mangel macht nun zwar das Buch als Grundlage des Unterrichtes für die ins Auge gefaßten Schulen ungeeignet, hindert aber nicht, daß ein Lehrer einer solchen Schule aus ihm für diesen Unterricht reichen Nutzen ziehe. Denn der Band ist in bezug auf die Kegelschnittlehre recht reichhaltig und enthält im zweiten Teil viele praktische Beispiele bautechnischer Art, auch ist die Ausstattung eine sehr gute.

H. Wieleitner (Speyer).

* * *

Thomé, Dir. Prof. Dr., Flora von Deutschland, Oesterreich und der Schweiz in Wort und Bild, 2. Auflage, in 57 Lieferungen. Preis der Lieferung 1,25 M. Gera, F. v. Zezschwitz (Botanischer Verlag), 1903 bis 1905.

Thomé, Dir. Prof. Dr., Kryptogamen-Flora, herausgegeb. v. W. Migula (Thomés Flora von Deutschland, V. bis VII. Band), in 27 Lieferungen, Preis der Lieferung 1,00 M. Gera, F. v. Zezschwitz (Botanischer Verlag) 1903 bis 1905.

Die beiden ausgezeichneten Werke, deren erste Lieferungen bereits im Jahrgang X, S. 19, eingehende Würdigung gefunden haben, liegen nunmehr abgeschlossen vor. Die Vorzüge, die ihnen von der Fachkritik übereinstimmend nachgerühmt worden sind, haben beide Werke sich bis zum Schluß bewahrt, für den Unterricht der höheren Schulen sind sie ein vortreffliches Hilfsmittel, dessen Anschaffung allen Anstalten nur auf das wärmste empfohlen werden kann.

P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Barchanek, Klemens, Lehr- und Uebungsbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Mit 309 Fig. 2. Aufl. Leipzig 1907, Freytag. geb. Mk. 3.—.

Busch, F., Ein neuer Experimentierkasten für den Unterricht in der Elektrostatik. Beilage zum Programm des Kgl. Gymnasiums zu Arnsberg. Progr. Nr. 420. Ostern 1907.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Mit 87 Fig. 2. Band. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 12.—.

Driesmans, H., Der Mensch der Urzeit. Stuttgart 1907, Strecker & Schröder. geb. Mk. 2.80.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl. IX. année, Nr. 2. Paris 1907, Gauthier-Villars. Genève, Georg & Cie.

Francé, R. H., Der heutige Stand der Darwinschen Fragen. 4 Bildnisse. 2. Aufl. Leipzig 1907, Thomas. Mk. 3.60.

Galle, A., Geodäsie. Sammlung Schubert, Band XXIII. Mit 96 Fig. Leipzig 1907. Göschen. geb. Mk. 8.—.

Glinzer, E., Kurzes Lehrbuch der Festigkeitslehre für Baugewerkschulen und Baupraxis. Mit 120 Fig. 3. Aufl. Leipzig 1907, Degener.

Hartwich, Th., Das Stereoskop und seine Anwendungen. Mit 40 Abb. u. 19 Tafeln. (Aus Natur und Geisteswelt 135. Bändchen.) Leipzig 1907, B. G. Teubner. geb. Mk. 1.25.

Hegi, G., Dunzinger, G., Illustrierte Flora von Mittel-Europa. München. J. F. Lehmann. Mk. 1.—.

v. Hemmelmayr, Fr., Lehrbuch der anorgan. Chemie für die 5. Klasse der Realschulen. Mit 40 Abb. u. 1 Tafel. 3. Aufl. Wien 1906, Tempsky. geb. Mk. 2.55.

—„— Lehrbuch der organ. Chemie. Mit 11 Abb. und 1 Tafel. 3. Aufl. Ebenda. geb. Mk. 2.—.

Herbersch, G., Entwurf zu einem Lehrplan f. d. Oberrealschule. Nürnberg 1907, U. E. Sebald. Mk. 1.—.

Hočevar, Fr., Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik f. d. unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Mit 3 Fig. 6. Aufl. Wien 1906, Tempsky. geb. Mk. 1.80.

Hoffmann, Bernhard, Zur Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde. Beilage zum Bericht des Königlichen Gymnasiums zu Bromberg 1906—07. 1907, Progr. Nr. 195. Bromberg 1907, Grünauersche Buchdruckerei.

Kiesewetter, W., Die Einrichtung der Physik- und Chemieräume höherer Lehranstalten. Sonderabdruck a. d. Zeitschr. „Das Schulhaus".

Latzel, Rob., Grabers Leitfaden der Zoologie f. d. oberen Klassen der Mittelschulen. Mit 474 Abb., 4 Farbendrucktafeln und 1 Karte. 5. Aufl. Wien 1906, Tempsky. geb. Mk. 3.25.

Löwe, M., Unger, F., Richter, M., Praktisches Rechnen f. Realschulen und ähnliche Lehranstalten in 3 Heften. 1. Heft. 2. Aufl. Mk. 1.20. 2. Heft. 2. Aufl. Mk. 1.20. 3. Heft. 3. Aufl. Mk. 1.20. Leipzig 1905, Klinkhardt.

—„— Aufgaben f. d. kaufmännische Kopfrechnen. 2. Aufl. Ebenda. Mk. 1.20.

—„— Rechenaufgaben mit ausgeführten Beispielen aus der Arbeiterversicherung. Ebenda. Mk. 0.50.

—„— Aufgaben zum kaufmännischen Rechnen. 1.—3. Teil. Ebenda.

Lony, Gustav, Ueber die beim Nachzeichnen von Streckenteilungen auftretenden Grössenfehler. Beilage zum Jahresbericht der Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg. O. 1907. Progr. Nr. 916. Hamburg 1907, Druck von Schröder & Jeve.

Meyer, K., Naturlehre (Physik und Chemie) für höhere Mädchenschulen, Lehrerinnenseminare und Mittelschulen. Mit 324 Abbild. 4. Aufl. Leipzig 1906, Freytag. geb. Mk. 2.20.

Mosbacher, L., Die Definitionen u. Regeln der elementaren Algebra und ihre Anwendungen. Nürnberg, C. Koch. Mk. 0.60.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen. Im Auftrage des mathem.-naturwissensch. Vereins in Württemberg, herausg. v. A. Schmidt, A. Haas u. E. Wölffing. 2. Serie, 7. Band, 1. bis 3. Heft; 8. Band, 1. bis 3. Heft. Stuttgart 1905/06, J. B. Metzler.

Newest, Th., Einige Weltprobleme. 5. Teil: Erdendämmerung. Vergangene u. künftige Katastrophen. 1—10. Tausend. Wien 1907, Karl Konegen. Mk. 2.50.

Oels, W., Pflanzenphysiologische Versuche. 2. verb. Aufl. Mit 87 Abb. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. geh. Mk. 3.—.

Ohmann, O., Leitfaden der Chemie und Mineralogie. Vierte, die neuen Anschauungen berücksichtigende Auflage. Berlin 1907, Winckelmann & Söhne. Mk. 1.80, geb. Mk. 2.20.

Pabst, A., Die Knabenhandarbeit in der heutigen Erziehung. Mit 21 Abb. Leipzig 1907, Teubner. Mk. 1.25.

Periodische Blätter f. Realienunterricht u. Lehrmittelwesen, herausg. v. J. Fischer u. R. Neumann. Jahrg. XI, Heft 6. Tetschen a. E. 1907, Otto Henckel.

Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. Mit 207 Fig. 1. Teil. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 3.20.

Poske, Fr., Oberstufe der Naturlehre. Nach A. Höflers Naturlehre bearbeitet. Mit 442 Abb. u. 3 Tafeln. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. Mk. 3.—.

Roesen, K., Lehrbuch der Physik. Mit 328 Abb. Leipzig 1906, Leiner.

—„— Ergänzungen zum Lehrbuch der Physik. Mit 61 Abb. Ebenda. Mk. —.90.

Roller, Karl, Hausaufgaben u. höhere Schulen. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. Mk. 2.80.

Ruska, J., Die Wirbeltiere. 2. Aufl. Leipzig 1907, Nägele.

Sattler, A., Leitfaden der Physik und Chemie. 31. verb. Aufl. Mit 291 Fig. Braunschweig 1906, Vieweg & Sohn. Mk. 1.35.

Scheid, Karl, Praktischer Unterricht in Chemie. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 1.40.

Schmeil, O., Pflanzenkunde, unter besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zwischen Bau und Lebensweise der Pflanzen. Bearbeitet von J. Norrenberg. Ausgabe für Realanstalten, Sexta, Quinta, Quarta. Mit 29 Tafeln und zahlreichen Textbildern. Leipzig 1907. Nägele. Mk. 2.80.

—„— Tierkunde, bearb. von J. Norrenberg. Ausg. für Realanstalten, Sexta, Quinta, Quarta. Mit 9 mehrfarbigen und 3 einfarbigen Tafeln, sowie zahlr. Textbildern. Ebenda.

Schmidt, J., Chemisches Praktikum. 2. Teil: Organ- und Nahrungsmittel-Chemie. Mit 47 Fig. Breslau 1907, Hirt. geh. Mk. 1.80.

Schubert, H., Mathematische Mußestunden. 3. Aufl. Bd. I: Zahl-Probleme. Leipzig 1907, Göschen. geb. Mk. 4.—.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben u. Lehrbuch der Geometrie. Mit 2 Tafeln. 2. Aufl. Ausgabe B. Leipzig 1906. Teubner. geb. Mk. 1.80.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Uebersetzung. 3. Aufl., bearbeit. von G. Scheffers. Bd. I: Differentialrechnung. Mit 70 Fig. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 13.—.

Simmersbach, O., Die Eisenindustrie. (Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe). Ebenda. Mk. 7.20.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!


Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus
F. Apels Nachf., Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate.
Apparat zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante nach Nernst
Modelle von Dach- und Brückenkonstr. nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Krystallmodelle aus Holz- u. Glastafeln

Keiser & Schmidt
Berlin N., Johannisstr. 20/21
Elektrische Messinstrumente
zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken.
Demonstrations- und Schul-Apparate.

Elektrizitäts-Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen 3.
Schalttafeln, Messinstrumente und Laboratoriums-Widerstände
für Lehr- und Projektionszwecke.
Man verlange Preisliste Nr. 12 u. 12a.

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und :::
:::: chemischen Gerätschaften ::::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

Neuartige vielseitige
Projektions-Apparate
für alle Zwecke.
Gebr. Mittelstrass
Magdeburg 23.

R. Fuess, Steglitz-Berlin.
Projektionsapparate und optische Bänke — Heliostaten — Kathetometer — Spektralapparate u. Spektrometer
Lichtbrechungsapparate für höhere Lehranstalten.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

TELLURIEN,
Horizontarien, Armillarsphären, Fernrohre usw., zerleg- u. verstellbar, als „beste und billigste" allgemein anerkannt, in über 6000 Schulen bewährt.
Adolf Mang, Geographisch-Astronomischer Verlag.
Stuttgart, Reinsburgstr. 16.

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

R. Brendel
Fabrikant botanischer Modelle
Grunewald b. Berlin
Bismarckallee 37.
Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
Patent Klingelfuss.

Naturw. Lehrmittel-Institut
Wilh. Schlüter
Halle a. S.
Erzeugung und Vertrieb naturwissensch. Präparate, Sammlungen und Modelle in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mässigen Preisen. — Kataloge kostenlos.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Spectralröhren
aller Gase auch Argon, Helium etc.
Elektr. Vakuumröhren
(Geissler, Goldstein, Crookes etc.)
F. O. R. Goetze, Leipzig
Glastechnische Werkstätte.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz * Wetzlar
Optische Werke
Mikroskope, Mikrotome, Mikrophotogr. u. Projektions-Apparate
Photographische Objektive

Physikal. Apparate
Ferdinand Ernecke
Hoflieferant Sr. Maj. des deutschen Kaisers
Berlin-Tempelhof

Alfred Brückner
Fabrik photograph. Apparate
Rabenau
bei Dresden


Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Haidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Meiser & Mertig
Dresden-N. 6. Z
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
◆ Chemische Apparate ◆
Preisverzeichnis kostenlos

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Sammlung zerlegbarer Körper

für den Unterricht in der Geometrie in verschiedenen Dimensionen rücksichtlich Anzahl und Größe. Selbstverlag von

Otto Küster,

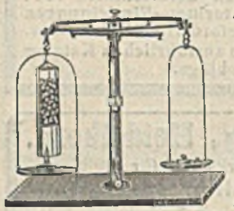
Hauptlehrer a. D. in Wermelskirchen

Richard Müller-Uri,

Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.

Braunschweig, Schleinitzstrasse 19

liefert auch



sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Physikalische Freihandversuche.

Unter Benutzung des Nachlasses von

Prof. Dr. Bernhard Schwalbe

weil. Geh. Reg.-Rat und Direktor des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin.

Zusammengestellt und bearbeitet von

Hermann Hahn,

Professor am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin.

I. Teil:

Nützliche Winke. Mass u. Messen. Mechanik der festen Körper.

Mit 269 Figuren im Text.

Preis geh. 3 Mk., gebd. Mk. 3.75.

II. Teil:

Eigenschaften d. Flüssigkeiten u. Gase

Mit 509 Figuren im Text.

Preis geh. 5 Mk., gebd. 6 Mk.

Verlag von Otto Salle, Berlin W 30.

Physikalische Apparate und Versuche

einfacher Art

aus dem

Schäffermuseum.

Von

H. Bohn

Oberl. am Dorotheenst. Realgymnasium in Berlin.

Mit 216 Abbildungen im Text.

Preis 2 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. W. Krumme, Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von Oskar Lesser, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Arithmetik

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10.

Servus: **Regeln der Arithmetik und Algebra** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Oberlehrer Dr. H. Servus in Berlin. — Teil I (Pensum der 2 Tertien und Untersekunda). Preis 1 M. 40 Pf. — Teil II (Pensum der Obersekunda und Prima). Preis 2 M. 40 Pf.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. Heussi. 16. völl. umgearb. Aufl. Mit 199 Holzschnitten. Bearb. von Prof. Dr. E. Götting. Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Elemente der Chemie." Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. Heussi. 6. verb. Aufl. Mit 422 Holzschnitten. Bearbeitet von Dr. Leiber. Preis 5 M.

Chemie.

Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie** unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. Wilh. Levin. 5. Aufl. Mit 112 Abbildungen: Preis 2 M.

Levin: **Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Ober-Realschulen.** Von Prof. Dr. Wilh. Levin. Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Unter-Sekunda der Ober-Realschule). Mit 72 Abbild. Preis Mk. 1.40. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 M. 40 Pf.

Weinert: **Die Grundbegriffe der Chemie** mit Berücksichtigung der wichtigsten Mineralien. Für den vorbereit. Unterricht an höheren Lehranstalten. Von H. Weinert. 3. Aufl. Mit 31 Abbild. Preis 50 Pf.

Mineralien, Mineralpräparate, geschliffene Edelsteine, Edelsteinmodelle, Meteoriten, Metallsammlungen, mineralogische Apparate und Utensilien.

Gesteine, Dünnschliffe von Gesteinen, petrographische Apparate und Utensilien; geologische Hämmer.

Petrefakten, Gipsmodelle seltener Fossilien, Geotektonische Modelle. Sammlungen für allgemeine Geologie. Exkursions-Ausrüstungen.

Krystallmodelle aus Holz, Glas und Pappe. Krystalloptische Modelle.

Diapositive für den geologischen und petrographischen Unterricht.

Der allgemeine mineralogisch-geologische Lehrmittel-Katalog (reich illustr.) No. XVIII, steht auf Verlangen portofrei zur Verfügung.

Meteoriten, Mineralien und Petrefakten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen.

Dr. F. Krantz, Rheinisches Mineralien-Kontor,

Fabrik und Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel.

Gegründet 1833. Bonn a. Rh. Gegründet 1833.

☞ Hierzu Beilagen der Firmen **A. Glaschker,** Aquarien-Versandhaus in **Leipzig, Gottfried Huwendiek,** Weinhandlung in **Hamburg, Julius Klinkhardt,** Verlag in **Leipzig, Otto Salle,** Verlag in **Berlin,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.