

Ryszard Gryboś

Katedra Mechaniki Technicznej

Wymuszone drgania poprzeczne (tłumione) pręta silnie zakrzywionego

Rozważono stan odkształcenia pręta silnie zakrzywionego i wyprowadzono równanie różniczkowe drgań poprzecznych takiego pręta. Uwzględniono tłumienie drgań według liniowej hipotezy Voigta-Thompsona. Rozwiązanie powyższego równania podano w postaci zamkniętej. Na przykładzie łuku dwuprzegubowego omówiono sposób ustawienia odpowiedniej ilości warunków brzegowych, potrzebnych dla wyznaczenia stałych całkowania.

1. Wstęp

Zagadnienie wymuszonych drgań poprzecznych z uwzględnieniem tłumienia w odniesieniu do prętów przyrmatycznych prostych zostało rozwiązane po raz pierwszy przez Giovanociego (1937). Liczni późniejsi badacze zajmujący się tym zagadnieniem starali się wyniki tej pracy rozszerzyć i uogólnić przez uwzględnienie wpływu masy wibratora, zmienności przekroju pręta lub przez podanie rozwiązania w postaci najwygodniejszej do obliczeń. Na uwagę zasługuje tu praca K. T. Szatałowa [5], w której podał on rozwiązanie w postaci zamkniętej.

Drgania poprzeczne prętów prostych i krzywych różnią się między sobą dość istotnie. I tak np. Lamb (1889) badając drgania własne pręta swobodnego, słabo zakrzywionego łukiem kołowym zauważył obniżenie się częstości tych drgań w porównaniu z prętem prostym.

Podane poniżej rozwiązanie wymuszonych drgań poprzecznych pręta silnie zakrzywionego ujmuje to zagadnienie nieco szerzej, ponieważ zawiera w sobie analogiczne drgania pręta prostego jako przypadek graniczny (tj. dla promienia krzywizny $\rho_0 \rightarrow \infty$). Odnośne równanie różniczkowe daje się również scałkować w postaci zamkniętej.

W zagadnieniu drgań wymuszonych sprawą dość istotną jest sposób, w jaki uwzględnia się działanie sił wymuszających. Spośród licznych metod stosowanych w tym przypadku najwygodniejsza, a zarazem najogólniejsza wydaje się metoda polegająca na odniesieniu tych wielkości do warunków brzegowych. Odnośne równania różniczkowe drgań pręta przyjmują wtedy postać jednorodną i dają się łatwiej całkować. Sposób ten znany już Giovanociemu i zalecany przez Kryłowa [4] stosowany jest również przez Szatałowa [5].

W pracy niniejszej ze względu na jej ograniczone rozmiary podane jest jedynie rozwiązanie zagadnienia w postaci ogólnej, bez dokonywania specyfikacji dla różnych warunków brzegowych. To zagadnienie omówione jest tylko pobieżnie w zakończeniu na przykładzie łuku dwuprzegubowego, pobudzanego do drgań wibratorem umieszczonym w środku. Ograniczymy się zatem do stwierdzenia, że działanie sił wymuszających należy uwzględnić w sposób wskazany powyżej. Odnośne rozważania i obliczenia można łatwo przeprowadzić w oparciu o cytowane wyżej prace (np. [4], [5]).

Zestawienie oznaczeń

$D_{\varphi, t}$	— symbol różniczkowania (indeks oznacza argument, podług którego należy różniczkować),
e	— podstawa logarytmu naturalnego,
E kG/cm ²	— moduł sprężystości podłużnej,
F cm ²	— pole przekroju poprzecznego pręta,
i_0 cm	— promień bezwładności (biegunowy) elementu pręta,
J_w kG · cm · sec ²	— moment bezwładności (masowy) wibratora względem osi obrotu,
m kG · sec ² /cm ²	— masa jednostki długości pręta,
m_w kG · sec ² /cm	— masa wibratora,
M kG · sec ² /cm	— moment zginający,
M_d kG · cm	— moment wymuszający drgania,
P kG	— siła wymuszająca drgania,
r cm	— promień krzywizny powierzchni obojętnej,
S cm ³	— moment statyczny pola przekroju względem osi obojętnej zginania,
t sec	— czas,
T kG	— siła poprzeczna,
y cm	— składowa promieniowa ugięcia pręta,
z cm	— składowa styczna ugięcia pręta,
γ	— długość (kątowna) pręta,

ε	— wydłużenie jednostkowe,
φ	— współrzędna kątowna,
$\kappa \text{ kG} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$	— współczynnik tarcia zewnętrznego,
$\mu \text{ sec}$	— współczynnik tarcia wewnętrznego,
$\omega \text{ sec}^{-1}$	— częstość kołowa,
$\varrho \text{ cm}$	— promień krzywizny,
$\sigma \text{ kG}/\text{cm}^2$	— naprężenie normalne,
Θ	— kąt obrotu przekroju,
$\eta \text{ cm}$	— odległość warstwy pręta od powierzchni obojętnej.

2. Stan odkształcenia pręta silnie (kołowo) zakrzywionego

Rozważamy pręt pryzmatyczny, którego oś jest pierwotnie zakrzywiona promieniem ϱ_0 , współmiernym z wymiarem charakterystycznym przekroju poprzecznego pręta, a więc np. z jego średnicą. Zajmować się będziemy wyłącznie drganiami płaskimi, tzn. takimi, które odbywają się w płaszczyźnie osi pręta.

Drgania poprzeczne (giętne) wywołują w pręcie krzywym naprężenia normalne, których rozkład w przekroju poprzecznym — zgodnie z hipotezą Winklera — przyjmujemy według krzywej hiperbolicznej. Odkształcona oś takiego pręta opisana jest równaniami odmiennymi niż w przypadku pręta prostego. Równania te postaramy się w skrócie wyprowadzić (według [2] i [3]).

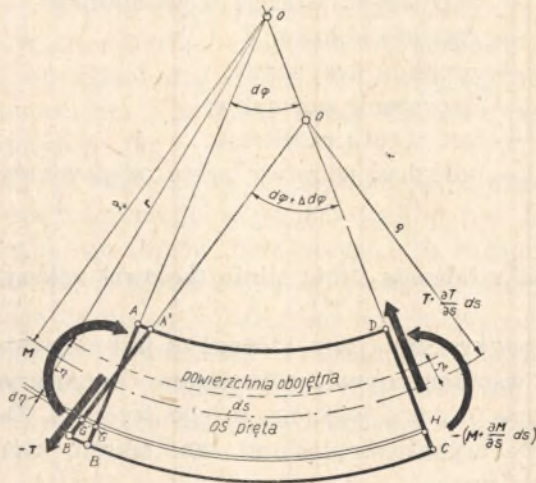
W tym celu rozpatrujemy element pręta krzywego o długości ds , wycięty dwoma płaszczyznami nachylonymi do siebie pod kątem $d\varphi$ (rys. 1). W stanie pobudzonym do drgań pręt doznaje zginania w płaszczyźnie krzywizny swojej osi. Rozpatrywane przekroje płaskie pręta obracają się względem siebie o kąt $\Delta d\varphi$, a promień krzywizny osi zmienia się z początkowej wartości ϱ_0 na ϱ . Powierzchnia obojętna przesunięta jest o η_0 od osi pręta w kierunku środka krzywizny, a jej promień krzywizny (w stanie nie odkształconym) wynosi $r = \varrho_0 - \eta_0$.

Włókno odległe o η od powierzchni obojętnej doznaje wydłużenia jednostkowego:

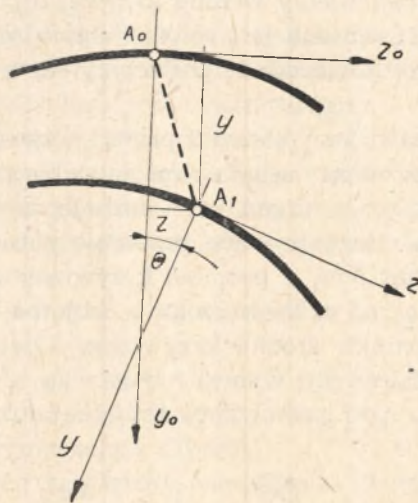
$$\varepsilon = \frac{\overline{GG'}}{\overline{HG}} = \frac{\eta}{r + \eta} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (1)$$

Wskutek odkształcenia pręta jego przekroje poprzeczne doznają przemieszczeń liniowych i obrotów. Celem określenia ich wielkości zwiążemy prostokątny układ współrzędnych $y_0 z_0$ z dowolnym przekrojem poprzecznym pręta nieodkształconego w ten sposób, że oś z_0 jest styczna do osi pręta (rys. 2). Położenie tego przekroju określa współrzędna kątowna φ .

Po odkształceniu rozważany przekrój zajął położenie A_1 , tzn. doznał przemieszczenia $\overline{A_0A_1}$, którego rzuty na osie układu y_0z_0 wynoszą odpo-



Rys. 1.



Rys. 2.

wiednio y i z . Ponadto przekrój nasz obrócił się o mały kąt Θ związany ze składowymi przemieszczenia następującą zależnością:

$$\Theta = \frac{dy}{ds} + \frac{z}{\rho_0} \quad (2)$$

Dalsze rozważania geometryczne prowadzą ponadto do znanej zależności

$$\frac{dz}{ds} - \frac{y}{\varrho_0} = 0, \quad (3)$$

która wyraża po prostu warunek nieściśliwości osi pręta.

Różniczkując (2) i korzystając z równania (3) otrzymujemy

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{y}{\varrho_0^2} \quad (4)$$

Ale $d\Theta/ds$ oznacza zmianę krzywizny osi pręta, spowodowaną jego zginaniem, czyli

$$\frac{d\Theta}{ds} = \Delta k = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho \cdot \varrho_0} \quad (5)$$

Z rysunku 1 widać, że

$$ds = \varrho_0 \cdot d\varphi = \varrho \cdot (d\varphi + \Delta d\varphi), \quad (6)$$

skąd

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho}$$

Podstawiając tutaj równania (5) i (4) dochodzimy do znanej zależności

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y \right), \quad (7)$$

w której równocześnie dokonano zmiany argumentu na podstawie pierwszej spośród równości (6). Podstawiając zależność (7) do (1) otrzymujemy wzór na wydłużenie jednostkowe włókna w pręcie silnie zakrzywionym:

$$\varepsilon = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \cdot \left(\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y \right). \quad (8)$$

3. Tłumienie drgań

Tłumienie drgań może mieć zarówno swoje przyczyny zewnętrzne, jak i wewnętrzne. W obu przypadkach przyjmować będziemy liniowy charakter oporów tarcia, tzn. ich proporcjonalność do prędkości odkształcenia.

A zatem elementarną siłę tarcia zewnętrznego, związaną z oporem, jaki ośrodek stawia poruszającemu się w nim ciału wyznaczamy ze wzoru:

$$dT_t = -\alpha \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot ds, \quad (9)$$

gdzie ν — współczynnik tarcia zewnętrznego odniesiony do jednostki długości pręta.

Tarcie wewnętrzne — jak to zwykle czyni się w teorii drgań liniowych — wprowadzamy do rozważań za pośrednictwem znanej zależności reologicznej:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \quad (10)$$

podanej przez J. H. Thompsona (1933), a opisującej zachowanie się modelu ciała lepkko-sprężystego, zaproponowanego przez H. Voigta (1892).

Hipoteza powyższa, mimo że wykazuje pewne niezgodności z danymi doświadczalnymi, to jednak bywa nadal często stosowana do badania teoretycznego drgań, ponieważ dość dobrze opisuje zjawisko opóźnionej sprężystości (histerezy sprężystej), które wszakże jest istotne dla tłumienia wewnętrznego drgań.

4. Równanie równowagi wewnętrznej momentów

Wprowadzając zależność (8) do równania Thompsona (10) otrzymujemy

$$\sigma = E \cdot \varrho_0 \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \left(\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2 \cdot \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\mu}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{y}{\varrho_0} \right). \quad (11)$$

W dalszym ciągu niniejszej pracy — dla skrócenia zapisu — wprowadzimy uproszczenie polegające na zastąpieniu ilorazów różniczkowych następującymi symbolami:

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} = \frac{1}{\varrho_0^n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} \equiv \frac{1}{\varrho_0^n} \cdot D_\varphi^n \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} \equiv D_t^n.$$

Korzystając z tego równania (11) możemy przedstawić w postaci

$$\sigma = \frac{E}{\varrho_0} \cdot \frac{\eta}{r + \eta} \cdot (\mu \cdot D_t + 1) \cdot (D_\varphi^2 + 1) \cdot y. \quad (11')$$

Warunek równowagi wewnętrznej momentów po uwzględnieniu zależności (11) prowadzi do równania

$$M = \int_{(F)} \sigma \cdot \eta \cdot dF = \frac{E}{\varrho_0} \cdot (\mu \cdot D_t + 1) \cdot (D_\varphi^2 + 1) \cdot y \cdot \int_{(F)} \frac{\eta^2}{r + \eta} dF.$$

Ale ostatnia całka — jak łatwo wykazać (np. [3]) — przedstawia moment statyczny pola przekroju F względem osi obojętnej:

$$\int_{(F)} \frac{\eta^2}{r + \eta} dF = \int_{(F)} \eta \cdot dF \equiv S = F \cdot \eta_0$$

A zatem równanie równowagi wewnętrznej ma ostatecznie postać

$$M_t = \frac{E \cdot S}{Q_0} (\mu \cdot D_t + 1) \cdot (D_\varphi^2 + 1) \cdot y. \quad (12)$$

Widać stąd, że tarcie wewnętrzne daje dodatkowy moment oporu występujący w warunku równowagi wewnętrznej. Natomiast tarcie zewnętrzne — jak się przekonamy za chwilę — daje w warunkach równowagi zewnętrznej dodatkową siłę hamującą ruch.

W rozważaniach powyższych pominięto istnienie sił tarcia wewnętrznego, powstałych na skutek odkształcenia postaciowego i odpowiednich naprężeń stycznych powstających w elemencie w wyniku istnienia sił poprzecznych pochodzenia bezwładnościowego. To uproszczenie tłumaczy się nieznaczną wartością wymienionych naprężeń w porównaniu z naprężeniami normalnymi. Z tych samych powodów nie uwzględniono istnienia promieniowych naprężeń normalnych powstałych wskutek wzajemnego nacisku warstw zginanego pręta.

5. Równania równowagi zewnętrznej. Równanie drgań

Ponieważ w rozważanym pręcie nie występują żadne siły podłużne, przeto można ustalić dwa równania równowagi zewnętrznej elementu pręta.

Równanie równowagi sił poprzecznych (rys. 1):

$$-T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} \cdot ds \right) - \kappa \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot ds - m \cdot ds \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

po uproszczeniu i zmianie argumentu przyjmuje postać

$$D_\varphi T = Q_0 \cdot (m \cdot D_t + \kappa) \cdot D_t y \quad (13)$$

Jest to równanie przybliżone w tym sensie, że nie uwzględnia pochylenia sił poprzecznych wskutek odkształcenia elementu.

Z kolei ustawimy warunek równowagi zewnętrznej momentów. Dla ścisłości uwzględnimy w nim także moment wynikający z bezwładności obrotu elementu pręta, który to moment jest proporcjonalny do przyspieszenia kąowego $\ddot{\Theta}$. Oznaczając przez i_0 biegunowy promień bezwładności elementu o długości ds możemy napisać

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial s} \cdot ds \right) - T \cdot ds - m \cdot i_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \cdot ds = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = -T \cdot Q_0 - m \cdot i_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \cdot Q_0. \quad (14)$$

Różniczkując to wyrażenie podług φ oraz podstawiając zależność

$$(D_{\varphi} \cdot D_t^2) \cdot \Theta = \frac{1}{\varrho_0} \cdot (D_{\varphi}^2 + 1) \cdot D_t^2 y$$

uzyskaną przez dwukrotne zróżniczkowanie podług czasu równania (4), otrzymujemy

$$D_{\varphi}^2 M = -\varrho_0 \cdot D_{\varphi} T - m \cdot i_0^2 \cdot (D_{\varphi}^2 + 1) \cdot D_t^2 y.$$

Podstawiając tutaj (13) mamy ostatecznie

$$D_{\varphi}^2 M = [-m \cdot i_0^2 \cdot (D_{\varphi}^2 + 1) \cdot D_t - \varrho_0^2 \cdot (m \cdot D_t + \kappa)] \cdot D_t y \quad (15)$$

Celem wyrugowania momentu zginającego M posłużymy się warunkiem równowagi wewnętrznej (12) po uprzednim dwukrotnym zróżniczkowaniu podług φ . W przyjętym tutaj uproszczonym zapisie takie działanie jest równoznaczne z obustronnym pomnożeniem tego równania przez symbol 2 D . Mamy zatem

$$D_{\varphi}^2 M = \frac{E \cdot S}{\varrho_0} \cdot (\mu \cdot D_t + 1) \cdot (D_{\varphi}^2 + 1) \cdot D_t^2 y \quad (12')$$

Porównując ze sobą prawe strony równań (15) i (12) otrzymujemy ostatecznie podstawowe równanie drgań poprzecznych tłumionych pręta silnie zakrzywionego stałym promieniem ϱ_0 . Z kolei przystąpimy do całkowania tego równania.

6. Całkowanie równania różniczkowego drgań

Rozwiązania wyprowadzonego powyżej równania szukamy w postaci

$$y = U(\varphi) \cdot \sin \omega t + V(\varphi) \cdot \cos \omega t \quad (16)$$

gdzie ω — częstość kołowa drgań wymuszonych. $U(\varphi)$ i $V(\varphi)$ są nie znanymi na razie funkcjami samej tylko współrzędnej kątowej φ .

Podstawiając wartości odnośnych pochodnych cząstkowych do równania wyjściowego i przyrównując do zera oddzielnie współczynniki stojące przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ otrzymujemy układ dwóch równań dla znalezienia funkcji $U(\varphi)$ i $V(\varphi)$:

$$\begin{aligned} U^{(IV)} + a_1 \cdot U'' - b_1 \cdot U - c_1 \cdot V - d_1 \cdot V'' - d_1 \cdot V^{(IV)} &= 0 \\ V^{(IV)} + a_1 \cdot V'' - b_1 \cdot V + c_1 \cdot U + d_1 \cdot U'' + d_1 \cdot U^{(IV)} &= 0 \end{aligned} \quad (17 \text{ a, b})$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 1 + \frac{m \cdot i_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \varrho_0}{E \cdot S} & b_1 &\equiv \frac{m \cdot \omega^2 \cdot (\varrho_0^2 - i_0^2) \cdot \varrho_0}{E \cdot S} \\ c_1 &\equiv \frac{\kappa \cdot \omega \cdot \varrho_0^3}{E \cdot S} & d_1 &\equiv \mu \cdot \omega \end{aligned}$$

W dalszym ciągu — mając na uwadze, że kąt obrotu przekroju Θ przyjmuje bardzo małe wartości — pomijając będziemy człon uwzględniający bezwładność obrotu ($i_0 = 0$). Takie uproszczenie jest dopuszczalne zwłaszcza dla niższych częstości sił wymuszających ω oraz dla prętów cienkich, tzn. o nieznaczących wymiarach poprzecznych przekroju w stosunku do długości pręta. Założenie to wprowadza znaczne uproszczenie w układzie równań (17); współczynniki a_1 i b_1 stają się wtedy równe.

$$a_1 \equiv 1 \qquad b_1 \equiv \frac{m \cdot \omega^2 \cdot \varrho_0^3}{E \cdot S},$$

a układ (16) — na drodze krzyżowych podstawień daje się sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} U^{(IV)} + U'' + a \cdot U &= b \cdot V \\ V^{(IV)} + V'' + a \cdot V &= -b \cdot U \end{aligned} \quad (18 \text{ a, b})$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{c_1 \cdot d_1 + c_1}{1 + d_1^2} = \frac{\omega^2 \cdot \varrho_0^3 \cdot (\mu \cdot \kappa - m)}{E \cdot S \cdot (\mu^2 \omega^2 + 1)} \\ b &\equiv \frac{b_1 \cdot d_1 + c_1}{1 + d_1^2} = \frac{\omega \cdot \varrho_0^3 \cdot (\mu m \omega^2 + \kappa)}{E \cdot S (\mu^2 \cdot \omega^2 + 1)} \end{aligned} \quad (19)$$

Rozwiązania układu (18) szukamy w postaci

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= u_1(\varphi) \cdot \cos \varphi + u_2(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ V(\varphi) &= v_1(\varphi) \cdot \cos \varphi + v_2(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (20 \text{ a, b})$$

gdzie $u_{1,2}(\varphi)$ i $v_{1,2}(\varphi)$ są nie znanymi na razie funkcjami φ . Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się zatem do znalezienia ich postaci.

Ponieważ jednak do rozwiązania każdego z równań układu (20) wprowadzono po dwie nowe funkcje, a mianowicie u_1 , u_2 oraz v_1 , v_2 , przeto można na nie nałożyć dwa warunki wiążące, a mianowicie

$$\begin{aligned} u_1'(\varphi) \cdot \cos \varphi + u_2'(\varphi) \cdot \sin \varphi &= 0 \\ v_1'(\varphi) \cdot \cos \varphi + v_2'(\varphi) \cdot \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (21 \text{ a, b})$$

tak, że tylko dwie spośród tych funkcji, np. u_1 i v_1 pozostają niezależne. W równaniach powyższych, podobnie jak poprzednio, przecinkiem u góry oznaczono różniczkowanie podług φ .

Z kolei podstawiamy wyrażenia (20) oraz odpowiednie pochodne do równania (18a), wykorzystując równocześnie warunek (21a) i następnie przyrównujemy kolejno do zera wyrazy stojące przy $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$. W rezultacie tych działań otrzymujemy nowy układ równań różniczkowych, już tylko trzeciego rzędu

$$\begin{aligned} u_2''' - u_1'' + a \cdot u_1 &= b \cdot v_1 \\ -u_1''' - u_2'' + a \cdot u_2 &= b \cdot v_2 \end{aligned} \quad (22 \text{ a, b})$$

jednakże nadal uwikłany względem poszukiwanych funkcji u i v . Ale z warunku (21a) po dwukrotnym zróżniczkowaniu i ponownym przyrównaniu do zera wyrazów przy $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$ otrzymujemy

$$u_1''' + 2u_2'' = 0 \quad \text{oraz} \quad u_2''' - 2u_1'' = 0.$$

Wykorzystanie tych zależności pozwala nam na dalsze obniżenie rzędu obu równań układu (22); otrzymujemy mianowicie

$$\begin{aligned} u_1'' + a \cdot u_1 &= b \cdot v_1 \\ u_2'' + a \cdot u_2 &= b \cdot v_2 \end{aligned} \quad (23 \text{ a, b})$$

Przeprowadzając analogiczne przekształcenia w odniesieniu do równania (18 b) otrzymujemy nowy układ równań o podobnej budowie

$$\begin{aligned} v_1'' + a \cdot v_1 &= -b \cdot u_1 \\ v_2'' + a \cdot v_2 &= -b \cdot u_2 \end{aligned} \quad (24 \text{ a, b})$$

Układy (23) i (24) dają się już na drodze krzyżowych podstawień i kolejnych eliminacji rozwikłać względem odnośnych funkcji, co jednak odbywa się kosztem podniesienia rzędu tych równań o dwa; otrzymujemy mianowicie

$$\begin{aligned} u_1^{(IV)} + 2a \cdot u_1'' + (a^2 + b^2) \cdot u_1 &= 0 \\ u_2^{(IV)} + 2a \cdot u_2'' + (a^2 + b^2) \cdot u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (25 \text{ a, b})$$

i analogiczny układ dla funkcji v_1 i v_2 . Tak więc ostatecznie zagadnienie dało się sprowadzić do całkowania czterech jednorodnych równań różniczkowych czwartego rzędu ze stałymi współczynnikami.

Jak widać, wszystkie te równania mają identyczną budowę, a w związku z tym jednakowe równania charakterystyczne

$$\lambda^4 + 2a \cdot \lambda^2 + (a^2 + b^2) = 0. \quad (26)$$

Fakt ten warunkuje równość odnośnych pierwiastków λ_n , a ponadto równość całek ogólnych, których możemy szukać w postaci

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_1^4 A_n \cdot e^{\lambda_n \varphi} & u_2 &= \sum_1^4 B_n \cdot e^{\lambda_n \varphi} \\ v_1 &= \sum_1^4 C_n \cdot e^{\lambda_n \varphi} & v_2 &= \sum_1^4 D_n \cdot e^{\lambda_n \varphi} \end{aligned} \quad (27)$$

Równanie charakterystyczne (26) jest dwukwadratowe, czyli przez podstawienie $\lambda^2 = \xi$ daje się sprowadzić do kwadratowego

$$\xi^2 + 2a \cdot \xi + (a^2 + b^2) = 0,$$

którego pierwiastkami są:

$$\xi_{1,2} = -a \pm i \cdot b \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Powracając do pierwiastków równania pierwotnego (25) otrzymujemy

$$\lambda_n = \pm \sqrt{\xi_{1,2}} = \pm \sqrt{-a \pm i \cdot b} = \pm (\alpha \pm i \cdot \beta) \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

gdzie współczynniki

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}$$

są rezultatem wyciągnięcia spod pierwiastka jednostki urojonej. Wartości stałych a i b określone są równaniami (19).

Ponieważ, jak widać, pierwiastki λ_n są liczbami zespolonymi, przeto całka ogólna każdego z równań (25) jest liniową kombinacją mieszanych iloczynów funkcji \sin i \cos kąta $\beta \cdot \varphi$, oraz funkcji sh i ch kąta $\alpha \cdot \varphi$, czyli np. dla funkcji u_1 ma ona postać następującą

$$u_1(\varphi) = A_1 \cdot \sin \beta \varphi \cdot sh \alpha \varphi + A_2 \cdot \sin \beta \varphi \cdot ch \alpha \varphi + \\ + A_3 \cdot \cos \beta \varphi \cdot sh \alpha \varphi + A_4 \cdot \cos \beta \varphi \cdot ch \alpha \varphi \quad (28)$$

7. Wyznaczanie stałych całkowania na przykładzie łuku dwuprzegubowego

Dla wyznaczenia wszystkich stałych A_n, B_n, C_n, D_n ($n = 1, 2, 3, 4$) musimy ułożyć 16 równań niezależnych, ponieważ tyle stałych zawiera całka ogólna (16) równania różniczkowego drgań. Należy zatem dobrać takie wartości stałych całkowania, aby na brzegach przedziałów spełnione były

- warunki geometryczne,
- warunki statyczne,
- warunki (21).

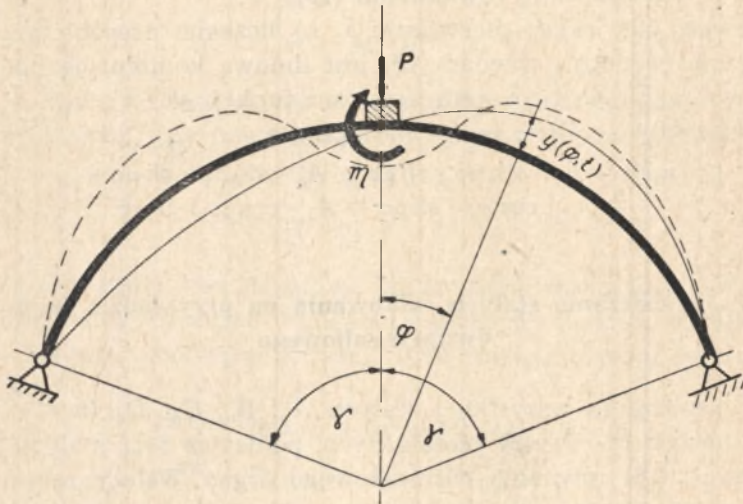
Niezbędne są zatem dość żmudne obliczenia, zwłaszcza przy rozwiązywaniu odnośnych równań na liczbach ogólnych. Sprawa jednakże upraszcza się dość znacznie, kiedy operujemy konkretnymi wartościami liczbowymi.

Ze względu na brak miejsca nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej analizy warunków brzegowych dla wszystkich sześciu możliwych przypadków zamocowania końców pręta. Ograniczymy się jedynie do ustawienia odnośnych równań dla jednego, typowego przypadku celem zilustrowania przebiegu postępowania.

Rozpatrzmy mianowicie łuk dwuprzegubowy o długości kątowej 2γ , pobudzany do drgań poprzecznych, płaskich za pomocą wibratora umieszczonego pośrodku (rys. 3). Taki pręt może wykonywać albo drgania symetryczne (na rys. linia przerywana dla tonu podstawowego), jeżeli impulsem wymuszającym jest siła skupiona, okresowo zmienna: $P = P_0 \cdot \sin \omega t$,

albo drgania antysymetryczne (na rys. linia cienka dla tonu podstawowego), jeżeli impulsem wymuszającym jest moment $M_d = M_0 \cdot \sin \omega t$. Będziemy zatem oba te przypadki rozważali oddzielnie i równolegle. Przedtem jeszcze wprowadzimy nową współzrzedną φ , określającą położenie przekroju według wzoru

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi \cdot \pi}{\gamma} \quad -\pi \leq \bar{\varphi} \leq \pi.$$

Rys. 3¹

Warunek braku przemieszczeń i momentów zginających na obu końcach przegubowo podpartych daje

$$y(\pi) = 0 \quad (29)$$

$$M(\pi) = 0 \quad (30)$$

$$y(-\pi) = 0 \quad (31)$$

$$M(-\pi) = 0 \quad (32)$$

Następnie możemy napisać, że w przypadku drgań symetrycznych przekrój środkowy ($\varphi = 0$) nie doznaje obrotu: $\Theta(0) = 0$, co według wzoru (2) jest równoważne zależności

$$y'(0) = 0, \quad (33 a)$$

jeśli zważymy, że dla tego przekroju $z = 0$.

Ponadto warunek dynamicznej równowagi sił w tym przekroju dostarcza nam następującego równania

$$P_0 \cdot \sin \omega t + T(0) = m_w \cdot y(0) \quad (34 a)$$

W przypadku drgań antysymetrycznych mamy odpowiednio brak przemieszczenia

¹ Zamiast m gotyckiego na rysunku 3 powinno być M_d .

$$y(0) = 0. \quad (33 \text{ b})$$

Warunek równowagi momentów

$$M_{do} \cdot \sin \omega t + M(0) = J_w \cdot \ddot{\theta}(0) \quad (34 \text{ b})$$

Do sześciu powyższych równań należy dołączyć jeszcze dwa warunki (21) zastosowane do dowolnych dwóch przekrojów, najlepiej określonych charakterystyczną współrzędną, tzn. $\varphi = 0, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}$ itp. Wybór odpowiedniej pary przekrojów jest w zasadzie dowolny, ponieważ warunki (21) muszą być spełnione na całej długości pręta, a więc w każdym jego przekroju; chodzi jedynie o prostotę obliczeń. W efekcie warunki te prowadzą zawsze do czterech par równań jednorodnych. Wyznaczniki układów tych równań przyrównane do zera dają kolejno następujące cztery zależności pomiędzy stałymi całkowania

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{C_1}{C_4}, \quad \frac{A_2}{A_3} = \frac{C_2}{C_3}, \quad \frac{B_1}{B_4} = \frac{D_1}{D_4}, \quad \frac{B_2}{B_3} = \frac{D_2}{D_3}. \quad (35)$$

Biorąc dalej pod uwagę budowę całki (16) dochodzimy do wniosku, że każdy z warunków (29) do (34) jest równoważny dwom wynikającym z oddzielnego przyrównania do zera wyrazów stojących przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$. Tak więc mamy ostatecznie wystarczającą ilość równań do wyznaczenia wszystkich stałych całkowania.

I tak np. warunek (29) daje

$$\frac{A_4}{A_1} = \frac{C_4}{C_1} = -\operatorname{tg} \beta \pi \cdot \operatorname{th} \alpha \pi, \quad (29')$$

warunek (31) zaś

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{C_3}{C_2} = -\operatorname{tg} \beta \pi \cdot \operatorname{cth} \alpha \pi. \quad (31)$$

Przy rozwiązywaniu warunków (30) i (32) jak również (34) i (33) musimy korzystać z równań (12) i (14) (po przyjęciu $i_0 = 0$) określających moment zginający i siłę poprzeczną. Prowadzi to do nieco bardziej złożonych równań, mimo że niektóre spośród stałych całkowania przyjmują wartości zerowe.

8. Zakończenie

Dla postawionego na wstępie zagadnienia drgań wymuszonych (tłumionych) pręta krzywego zostało zatem podane rozwiązanie w postaci zamkniętej. Mimo uproszczeń polegających na liniowym ujęciu tłumienia oraz pominięciu wpływu bezwładności obrotu rozwiązanie to ma

postać dość złożoną i stosowanie go w tej formie w praktycznych obliczeniach mogłoby nastroczać pewne trudności.

W związku z tym wyłania się konieczność podania rozwiązań przybliżonych. Zagadnienie to zostanie podane w jednym z najbliższych numerów „Zeszytów Naukowych — Mechanika”.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. P. Strielkow, *Wwiedienije w teoriju kolebanij*. Moskwa-Leningrad 1951.
- [2] A. N. Dinnik, *Prodolnyj izgib. Kruczenije*. Moskwa 1955.
- [3] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. III, Warszawa 1951.
- [4] A. N. Kryłow, *O niekotorych diffierencjalnych urawnienijach matiematycznej fiziki*. Moskwa 1950.
- [5] K. T. Szatałow, *Wynużdiennyje popieriecznyje kolebanija swobodnogo stierznia s ucetom trienija*. Izd. A. N. SSSR. *Popieriecznyje kolebanija i kriticzeskije skorosti*. Moskwa 1951, str. 5 — 45.