Jahrgang XIII. 1907. No. 5.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Leonhard Euler. Sein Leben und Wirken.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Dresden.*)

Von Felix Müller (Berlin-Friedenau).

Der 15. April dieses Jahres war für alle Vertreter der exakten Wissenschaften ein Festtag. Mathematische, physikalische, astronomische und naturwissenschaftliche Vereine haben diesen Tag festlich begangen zur Erinnerung an einen der größten Mathematiker, an Leonhard Euler, der vor 200 Jahren zu Basel geboren wurde.

Angesichts der hervorragenden Bedeutung, welche Leonhard Euler für die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften gehabt hat, schien es mir eine Ehrenpflicht zu sein, daß auch unser Verein zur Beförderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts bei seiner diesjährigen Hauptversammlung einen der Vorträge dem Gedächtnis des großen Mathematikers widmete. Im folgenden werde ich Sie kurz an die Hauptmomente im Leben Leonhard Eulers erinnern und einige der bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen dieses auf fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik bahnbrechenden Genies hervorheben. Carl Gustav Jacob Jacobi, der große Mathematiker, schrieb im Jahre 1849 an seinen Bruder, den Physiker Moritz Jacobi: „Es ist wunderbar, daß man noch heute jede der Abhandlungen Leonhard Eulers nicht bloß mit Belehrung, sondern mit Vergnügen liest." Diese Worte gelten auch noch heute; möchte ihre Wiederholung an dieser Stelle zu neuem Studium der Eulerschen Schriften anregen. —

Leonhard Euler war der Sohn eines Pfarrers und ließ sich, dem Wunsche des Vaters folgend, auf der Universität Basel in die theologische Fakultät aufnehmen. Aber der freundschaftliche Umgang mit den Söhnen Joh. I. Bernoulli, Nicolaus II. (geb. 1695) und Daniel I. (geb. 1700), weckte in Leonhard Euler eine große Vorliebe für die Mathematik und ließ in ihm den Wunsch rege werden, das Studium der Theologie mit dem der Mathematik zu vertauschen. Der Vater, welcher selbst unter Johann Bernoulli mathematische Vorlesungen gehört hatte und seinen Sohn in die Anfangsgründe dieser Wissenschaft eingeführt, gab den Wünschen Leonhards nach. Schon im Jahre 1723, also im jugendlichen Alter von 16 Jahren bestand Leonhard Euler die Prüfung als magister artium. Er erregte bald in Basel die Aufmerksamkeit der Fachgenossen durch mehrere wissenschaftliche Arbeiten, u. a. durch eine Abhandlung über die Isochrone im widerstehenden Mittel, durch eine „Dissertatio physica de sono" und durch ein „Mémoire sur la matûre des vaisseaux", mit dem er im Jahre 1727 das Accessit der Pariser Akademie gewann. Als Nicolaus und Daniel Bernoulli im Jahre 1725 als Professoren der Mathematik an die Akademie zu Petersburg berufen waren, bemühten sie sich, auch ihren jüngeren Freund Leonhard Euler dorthin zu ziehen. Am 7. Mai 1727, an demselben Tage, an welchem

*) S. Unt.-Bl. XIII, S. 62.

der 20jährige Euler, als Adjunkt der mathematischen Klasse der Akademie berufen, die Grenze Rußlands überschritt, starb Katharina I., die hochherzige Gründerin der Akademie. Ihr Nachfolger auf dem russischen Thron, Peter II., war den Wissenschaften weniger hold als dem Kriegshandwerk, und Euler konnte froh sein, daß er als Schiffsleutnant in der Marine Beschäftigung fand. Erst nach drei Jahren erhielt Euler die Professur der Physik und nach Daniel Bernoullis Rückkehr in die Heimat, im Jahre 1733, wurde er Professor der Mathematik an der Petersburger Akademie.

Die Publikationen der Petersburger Akademie enthalten, vom 2. Bande der Commentarii für das Jahr 1727 an bis zum Jahre 1830, in jedem Bande Abhandlungen von Leonhard Euler, im ganzen 477. Leider sind die Commentarii, die Novi Commentarii, die Acta, die Nova Acta Academiae Petropolitanae, sowie auch die älteren Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg oft schwer zugänglich, und die wertvollen Abhandlungen Eulers in ihnen so gut wie vergraben. Jacobi sagt in dem oben erwähnten Briefe: „Euler würde wieder auferstehen, wenn die Petersburger Akademie das ruhmvolle und nützliche Unternehmen der Herausgabe der Eulerschen Schriften fortsetzen und zu Ende führen würde." Nicolaus Fuß und Paul Heinrich Fuß, die zuerst eine Gesamtausgabe planten, gaben nur zwei Bände der „Opera minora collecta" heraus, nämlich die „Commentationes arithmeticae collectae", 1849, und 2 Bände „Opera posthuma", 1862. Sie schätzten den Umfang der Werke Eulers auf 25 Bände gr. 4^0 zu je 640 Seiten.

In neuerer Zeit hat der Astronom Johannes Hagen durch seinen „Index Operum Leonardi Euleri" eine Gesamtausgabe der Werke Eulers wiederum angeregt und gleichsam vorbereitet, sich auch eifrig bemüht, einen amerikanischen Mäcen zu gewinnen, der die Herausgabe pekuniär unterstützte, — aber leider bis jetzt vergeblich.

Eulers Einzelwerke sind ja durch mehrfache Auflagen und durch gute Uebersetzungen verbreitet. Seine vortreffliche „Anleitung zur Algebra", 1770, seine klassische „Introductio in analysin infinitorum", 1748, werden wohl noch heut von jedem Mathematiker studiert; allgemein bekannt sind auch die „Institutiones calculi differentialis", 1755, die „Institutiones calculi integralis", 1768—70, die „Mechanica" vom Jahre 1736, die „Theoria motus corporum solidorum", 1765, und andere Einzelwerke, aber von seinen bahnbrechenden Abhandlungen läßt sich das gleiche nicht sagen.

In einem kleinen bibliographischen Aufsatze, den ich einigen von Ihnen zu überreichen mir gestattete, habe ich auf diejenigen literarischen Quellen hingewiesen, auf welche das Studium der Eulerschen Abhandlungen führt. Ich werde hier in meinem Vortrage kurz diejenigen Gebiete der reinen und angewandten Mathematik erwähnen, welche von Euler neu erschlossen worden sind, und Ihnen an einzelnen Abhandlungen den Nachweis führen, daß sich die Spuren mehrerer ganz moderner Theorien bis auf Euler zurückverfolgen lassen. —

Das schon vorhin erwähnte klassische Werk Eulers, die „Introductio in analysin infinitorum" enthält die Keime für ganz neue mathematische Disziplinen. Es ist das erste Werk, welches den Funktionsbegriff, dessen Schöpfer Euler war, an die Spitze stellt. Man könnte den ersten Teil der Introductio eine „algebraische Analysis" nennen, um einen erst seit Cauchy gebräuchlichen Namen zu wählen. Dieser Teil enthält eine zusammenhängende Darstellung der Haupteigenschaften der elementaren algebraischen und transzendenten Funktionen, ihre Zerlegung in Partialbrüche und ihre Entwicklung in unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche. Hier findet sich zum ersten male die formale Definition der algebraischen Funktionen, deren Theorie von Abel begründet wurde. Die trigonometrischen Linien betrachtete Euler schon seit dem Jahre 1729 nicht bloß als Verhältniszahlen, sondern auch als analytische Funktionen. Die fundamentalen Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument und den trigonometrischen Funktionen ausdrücken, teilte er schon 1740 brieflich an Joh. Bernoulli mit; veröffentlicht wurden diese Formeln drei Jahre später im 7. Bande der Miscellanea Berolinensia. Wie fruchtbar diese Beziehungen für die ganze Analysis, für die Theorie der Reihen, für das Problem der Quadratur des Kreises wurden, brauche ich hier nicht weiter auszuführen.

Eine erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche, für die er den Namen fractiones continuae schuf, gab Euler im 9. Bande der Commentarii für das Jahr 1737. Schon in dieser Abhandlung, die 1744 erschien, gab er Kettenbruchentwicklungen von e, $\sqrt{e}$ und anderen transzendenten Funktionen, verwandelte Kettenbrüche in schnell konvergente Reihen von Brüchen, wertete auch periodische Kettenbrüche aus und leitete merkwürdige Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und gewissen Differentialgleichungen her, in welchen der Keim für die Beweise der Irrationalität von e und e^2 liegt, 30 Jahre vor Lambert! Zugleich leitet er diejenigen allgemeinen Kettenbruch-Entwicklungen her, auf denen der Lambertsche bezw. Legendresche Irrationalitätsbeweis für e^x, $tg x$, π und π^2 beruht. Eine neue klare Darstellung der Haupteigenschaften der Kettenbrüche enthält eine Abhandlung Eulers: „De transformatione serierum in fractiones continuas" im 2. Bande der Opuscula analytica 1785.

Sowohl die „Introductio" (1748) wie die „Institutiones calculi differentialis" (1755) sind für die Entwicklung der Theorie der Reihen von fundamentaler Bedeutung. In der Differentialrechnung finden sich auch die Anfänge der Konvergenz und Divergenz. Die Methoden der Differenzenrechnung, der ein großer Teil der Institutiones gewidmet ist, gestatten, langsam konvergierende Reihen in schnell konvergierende zu verwandeln. Erst neuerdings ist bekannt geworden, daß Euler ca. 90 Jahre vor Cauchy die nach letzterem benannte Konvergenzbedingung einer unendlichen Reihe vorbereitet hat, in einer Abhandlung: „De progressionibus harmonicis observationes", Commentarii 7, a. 1734/35 (1740).

In derselben Abhandlung kommt Euler bei Herleitung der Beziehung zwischen der Summe der harmonischen Reihe und log i auf die nach ihm benannte Constante; er berechnet sie hier auf 6, später (1769) auf 16 Dezimalstellen. Mascheroni gab 1790 ihren Wert auf 32 Stellen. Neben den Bernoullischen Zahlen, die bei der Summierung von Reihen aus Potenzen der natürlichen Zahlen und ihren Reziproken von großem Nutzen sind, führte Euler die Sekantenkoeffizienten in die Analysis ein, die nach ihm Eulersche Zahlen genannt werden. Sie erweisen sich für die numerische Rechnung vorteilhafter als die Bernoullischen Zahlen.

In einer Arbeit über Reihen für π im 11. Bande der Commentarii für das Jahr 1739 (1750) treten zum ersten Male halbkonvergente Reihen auf. Hier betont Euler ausdrücklich, wie vorsichtig man bei der Summation divergenter Reihen sein müsse. Er definiert schon in einem Briefe an Goldbach aus dem Jahre 1745, und später in einer Abhandlung: „De seriebus divergentibus", Novi Comm. 5, a. 1754/55 (1760), ausdrücklich: „Summe einer Reihe ist der geschlossene Ausdruck, aus welchem sie durch Entwicklung hervorgebracht werden kann". Man hat Euler wiederholt den Vorwurf gemacht, daß er in leichtfertiger Weise mit divergenten Reihen gerechnet habe. Neuerdings hat Borel durch seine „Leçons sur les séries divergentes" Euler glänzend gerechtfertigt. Er zeigt, daß man eine divergente Reihe durch einen schnell konvergierenden Kettenbruch ersetzen kann, wie es Euler getan. In Eulers Untersuchungen liegen die Keime der Behandlung semikonvergenter Reihen durch Stieltjes, der ebenso wie Euler eine divergente Reihe durch ein bestimmtes Integral ersetzt, und der Anwendung asymptotischer Reihen durch Poincaré. Es stehen diese Untersuchungen im Zusammenhange mit der Weierstraßschen Theorie der analytischen Fortsetzung und mit den neuesten Entwicklungen von Mittag-Leffler.

Die prinzipielle Bedeutung der Darstellung durch unendliche Produkte, wie sie Vieta und Wallis für π gewonnen haben, wurde schon früh von Euler erkannt und verwertet. Als Nic. Fuß i. J. 1843 die „Correspondance mathématique" veröffentlichte, schrieb Jacobi an seinen Bruder: „Dirichlet ist ebenfalls über Fuß' Briefwechsel sehr entzückt. Er bemerkte, daß gleich der 1. Brief des 1. Bandes mit einer Formel anfange, die man bis jetzt Gauß zugeschrieben". Es handelt sich um das von Euler in einem Briefe an Goldbach im Jahre 1729 mitgeteilte unendliche Produkt, das er für die Interpolation von $n!$ eingeführt hat. Gauß bringt in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe dieselbe Formel und Weierstraß legt sie bei der Behandlung seiner „Primfunktionen" zugrunde. So ward das von Euler i. J. 1729 gefundene Produkt und seine Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch unendliche Produkte bahnbrechend für die Weierstraßsche Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Wir wollen bei dieser Gelegenheit erwähnen, daß schon Euler in seinen Untersuchungen über die sogenannte Gaußsche hypergeometrische Reihe die Differentialgleichung herleitet, von der Gauß als Definition ausgeht.

Der 2. Band des vorhin erwähnten Lehrbuchs: „Vollständige Anleitung zur Algebra" enthält die Theorie der Gleichungen und die Diophantische Analysis. Was die Entdeckungen Eulers in der Algebra betrifft, so erinnere ich kurz an die neue Auflösung der biquadratischen Gleichung, an die Einführung der Benennung „reziproke Gleichung", an die Verwendung des Begriffs der Resolvente und der Resultante und an die Ausbildung der Theorie der Elimination, in der er ein Vorläufer Bezouts war. Die Lösungen der unbestimmten Gleichungen und der Probleme der Diophantischen Analysis beschäftigten Euler vom Jahre 1732 bis in sein hohes Alter, u. a. auch die Herstellung der Figuren mit rationalen Linien.

Die Zahlentheorie verdankt Euler zahlreiche wertvolle Entdeckungen, deren Priorität ihm teilweise erst spät gesichert wurde, weil man seine Arbeiten nicht kannte. Jacobi schreibt in einem Briefe aus dem Jahre 1849: „Dirichlet und ich studieren fleißig im Euler und haben schon in den ineditis mehrere durch Induktion gefundene Theoreme ermittelt, die zu Gauß' berühmtesten Entdeckungen gehören". — Euler gab zwei Beweise des Fermatschen Satzes über Potenzreste 1736 und 1758. Die Funktion $\varphi(x)$ — welche die Anzahl aller zu x teilerfremden Zahlen, die kleiner als x, bedeutet, — heißt mit Recht die Eulersche φ-Funktion. Euler findet ca. 100 Jahre vor Riemann die Funktionalgleichung der Zetafunktion, welche Riemann bei der Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze verwertet. Das Reziprozitätsgesetz für die quadratischen Reste, das allgemein Legendresches Reziprozitätsgesetz heißt, wurde zuerst von Euler entdeckt. Mehrere Theoreme einer Abhandlung im 14. Bande der Commentarii für die Jahre 1744—46 (1751) umfassen es, und in vollkommener Form ist es ausgesprochen in einer Abhandlung der Opuscula analytica: „Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos", 1783.

In der „partitio numerorum", der Zerfällung von Zahlen, der Euler eine ganze Reihe von Abhandlungen widmete, war er ein Vorläufer von Gauß. Ausgangspunkt für diese von Euler begründete Theorie war die schon 1741 betrachtete Entwicklung des unendlichen Produktes $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ usw., deren Bedeutung für eine Reihe allgemeiner Betrachtungen über die Zerlegung der Zahlen später von Legendre und Jacobi ausdrücklich hervorgehoben wurde. Eine Theorie der befreundeten Zahlen gab Euler 1750 im 2. Bande der Opuscula varii argumenti. Die „Commentationes arithmeticae collectae" 1849 enthalten 16 bis dahin ungedruckte Kapitel aus der Zahlentheorie und die „Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta" in den Opera posthuma, Bd. 2, umfassen 110 Artikel aus diesem Gebiete, unter anderen neue Untersuchungen über befreundete Zahlen. Derselbe Band der Opera posthuma enthält eine Abhandlung über magische Quadrate, deren Theorie Euler schon früher durch Untersuchungen in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Vlissingen, Bd. 9, 1782, gefördert hatte.

Schon vor dem Erscheinen seines Lehrbuches der Differentialrechnung hatte Euler die Summe verschiedener Reihen mit Hilfe der Taylorschen Reihe bewirkt. Er war der Erste, der die Bedeutung der Taylorschen Reihe erkannte und sie durch vielfache Anwendungen erhellte. Die Summenformel, welche Maclaurin aus der Taylorschen Reihe herleitete, war schon vorher von Euler im 5. Bande der Commentarii für das Jahr 1730—31 gegeben, der 1738 erschien.

Eulers „Institutiones calculi integralis" sind ein vorzügliches, ungemein reichhaltiges Lehrbuch der Integralrechnung. Euler bewältigte die schwierigsten Integrationen mit einer erstaunlichen Leichtigkeit durch Kunstgriffe, die freilich nur einem seltenen Genie zu Gebote stehen. Sein Lehrbuch enthält u. a. eine Theorie der Beta- und Gammafunktionen, die von Legendre 1814 Eulersche Integrale 1. und 2. Gattung genannt worden sind. Sätze über die Gammafunktionen gab Euler schon in einem Briefe an Goldbach vom 8. Januar 1730. Erschienen sind dieselben erst 1738, zugleich mit einer Begründung der Theorie der bestimmten Integrale in der Abhandlung: „De progressionibus transcendentibus“, im 5. Bande der Commentarii, den wir soeben erwähnten. Durch diese in mehrfacher Beziehung fundamentale Abhandlung wurden die Gamma- und Betafunktionen in die Wissenschaft eingeführt.

In einer Arbeit: „De integratione aequationum differentialium altiorum graduum“, Miscell. Berol. 7, 1743, veröffentlichte Euler die erste Methode, eine Differentialgleichung n O. ohne 2. Glied durch eine einzige Operation zu lösen. Er hatte über diese neue Methode schon im Jahre 1739 an Joh. Bernoulli berichtet. Im 3. Bande der Novi Commentarii für das Jahr 1750/51 (1753) folgte dann der Fall, wo das 2. Glied nicht null, sondern eine Funktion von x ist. Die Eulersche Methode beruht auf der Zerlegung eines algebraischen Ausdrucks in lineare oder quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. In ihr liegt der Keim für das Fundamentaltheorem der algebraischen Gleichungen, das 1799 von Gauß in seiner berühmten Dissertation streng bewiesen wurde.

Die erste Theorie des integrierenden Faktors oder des Eulerschen Multiplikators ist enthalten in der Abhandlung: „De integratione aequationum differentialium“, Novi Commentarii 8 für 1760/61 (1763). Sie wurde von Euler in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen verwertet. Durch die Abhandlung: „De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae“ im 10. Bande der Novi Commentarii a. 1764 (1766) begründete Euler die Theorie der elliptischen Transzendenten. Er hat das allgemeine Additionstheorem der elliptischen Integrale zuerst deutlich ausgesprochen, er hat auch vor Legendre eine Art Normalform elliptischer Integrale angenommen. Seine Arbeiten wurden für Legendre eine reiche Quelle fruchtbarer Ideen. Eine Umgestaltung der Eulerschen Relationen zwischen den oberen Grenzen der elliptischen Integrale (in § 645 des 1. Bandes der Institutiones calculi integralis) führte Abel auf das nach ihm benannte Theorem. Wichtig für die Geschichte der Funktionen einer komplexen Variabeln, besonders der Integration durch imaginäres Gebiet, ist der Nachweis des Herrn Stäckel, daß hier Euler als Vorläufer von Poisson und Cauchy Beachtung verdient.

Der 3. Band der Integralrechnung enthält die Variationsrechnung in einer Darstellung, die als Einführung auch heute noch zu empfehlen ist. Schon im 6. Bande der Commentarii für das Jahr 1732 und 1733 findet sich eine Arbeit von größter Tragweite, welche eine Klassifikation aller isoperimetrischen Probleme enthält. Das für die Geschichte der Variationsrechnung fundamentale Werk, die „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes“ erschien zu Lausanne und Genf 1744. Die „Elementa calculi variationum“, welche die von Lagrange und Euler geschaffene Theorie im Zusammenhange darstellen, finden sich im 10. Bande der Novi Commentarii für das Jahr 1764 (1766). Die Verdienste Eulers um die Variationsrechnung schildert eingehend der lehrreiche Vortrag, den Herr Kneser bei der Euler-Feier in Berlin gehalten hat; dieser Vortrag wird in unserer Euler-Festschrift veröffentlicht werden.

Im Jahre 1679 hatte Leibniz den Gedanken einer neuen geometrischen Analysis angeregt, „welche unmittelbar den situs ausdrückt“. Erst Euler wußte im Jahre 1736 diesen Gedanken fruchtbar zu machen, indem er die Analysis situs schuf. Verwandt mit dieser Theorie ist die ausführliche Behandlung des Rösselsprungs, die Euler im 15. Bande der Mém. de Berlin für das Jahr 1759 (1760) gab.

Die Elementar-Geometrie verdankt Euler eine neue Behandlung mehrerer hübscher Probleme. Seine „Variae demonstrationes geometriae“ im 1. Bande der Novi Commentarii für das Jahr 1747/48 (1750) enthalten eine Fülle von Formeln für das Dreieck, das Sehnenviereck und den Kreis. Als Lemma für den Beweis des Fermatschen Satzes vom Kreise benutzt Euler die bekannte Relation für vier Punkte auf einer Geraden, welche die Fundamentalgleichung des Doppelverhältnisses von Möbius ist. — Wir erwähnen noch eine Konstruktion des Satzes von Pappus und seiner Verallgemeinerung (1780) und eine Arbeit über den Satz vom Aehnlichkeitszentrum aus dem Jahre 1791, ferner die Lösung des Apollonischen Taktions-Problems (1788) und Lösungen der Aufgabe, eine Kugel zu finden, die vier gegebene Kugeln berührt, in den Mém. de Pétersbourg, a. 1807/8, die erst 1810 erschien. Wichtige Sätze aus der sogen. neueren Dreiecksgeometrie über merkwürdige Punkte und Geraden enthält eine Abhandlung Eulers im 11. Bande der Novi Commentarii für das Jahr 1765 (1767). Die Gerade, auf der das Orthozentrum, das Baryzentrum und das Umkreiszentrum liegen, heißt bekanntlich Eulersche Gerade.

Die Trigonometrie wurde durch die übersichtliche Schreibweise, welche Euler schon 1729 einführte, eine ganz neue Wissenschaft; durch dieses neue Hilfsmittel wurde das Feld ihrer Anwendungen wesentlich erweitert. Seine klassischen Darstellungen der sphärischen und der sphäroidischen Trigonometrie aus den Mém. de Berlin, 9, a. 1753 (1755) sind durch die trefflichen Uebersetzungen Hammers allgemein bekannt geworden.

Wenn man einen Nichtmathematiker fragt, was er von Euler weiß, so antwortet er in der Regel: „Wir haben in der Schule einen Satz über Polyeder gehabt, der von Euler entdeckt wurde“. Daß dieser berühmte Satz schon Descartes bekannt war und von Euler wiederentdeckt wurde, wird auf der Schule wohl selten mitgeteilt. In zwei zusammenhängenden Abhandlungen über Polyeder in den Novi Commentarii für das Jahr 1752/53 (1758) findet sich der Eulersche Satz: in der ersten wird er durch Induktion gefunden, in der zweiten streng bewiesen.

Der 2. Band der „Introductio“ enthält eine methodische Darstellung der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Durch die neue Einteilung der algebraischen Kurven, ebenso durch die Lehre von den Asymptoten wird Euler zum Vorläufer Plückers, durch die neue Klassifikation der Flächen zum Vorläufer von Monge und Hachette. In zwei aufeinanderfolgenden Abhandlungen der Mém. de Berlin, 4, für das Jahr 1748 (1750) gab Euler die richtige Erklärung des sogen. Cramerschen Paradoxons, dessen wahre Bedeutung Lamé, Gergonne und Plücker erhellten.

Interessante Untersuchungen über die Differentialgeometrie der Kurven enthält die Sectio III der Institutiones calculi differentialis, die erst 1862 im 1. Bande der Opera posthuma veröffentlicht wurde. Mit dem Problem der kürzesten Linie auf einer Oberfläche, das zuerst von Joh. Bernoulli behandelt war, beschäftigt sich Euler in einer Abhandlung des 3. Bandes der Commentarii für 1728 (1732). Erste Untersuchungen über die Krümmung der Flächen im 16. Bande der Mém. de Berlin a. 1760 (1767) enthalten die Eulersche Formel für den Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes, ausgedrückt durch die beiden Hauptkrümmungsradien und den Winkel, den die Ebene des Schnittes mit der Ebene des Hauptnormalschnittes bildet. In dieser Theorie ist Euler Vorläufer von Meusnier und Dupin. Die Opera posthuma enthalten einen Aufsatz über die Biegung der Flächen, der schon 1766 geschrieben war und die Resultate von Gauß in den 60 Jahre später erschienenen Disquisitiones generales vorbereitete. Die wichtigen Abhandlungen Eulers über die Abbildungen der Flächen aus dem Jahre 1777 sind durch die Uebersetzungen Wangerins bekannt. — —

Für die älteren Histoires et Mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin vom Jahre 1745 bis 1769 lieferte Euler ca. 120 Abhandlungen. Euler war im Jahre 1741 von Petersburg, wo er 14 Jahre hindurch als Mitglied der Akademie gewirkt hatte, wo ihm aber zuletzt unerquickliche politische Zustände den Aufenthalt verleideten, nach Berlin übergesiedelt. Er folgte der ehrenvollen Berufung des Königs Friedrich II. an die neu organisierte Königl. Preußische Akademie der Wissenschaften. In Petersburg befinden sich 54 Briefe, welche Friedrich der Große zum Teil eigenhändig an Euler geschrieben hat. Sie legen Zeugnis dafür ab, daß sich der große König von dem großen Mathematiker gern Rat erholt in wissenschaftlichen und praktischen Fragen, z. B. bei Anlage von Kanälen und Fontänen, bei Anschaffung von Maschinen, in Finanzfragen, Problemen der Wahrscheinlichkeit, Einrichtung von Witwenkassen u. a. Einst fragte Friedrich der Große Euler nach dem besten Lehrbuch der Artillerie. Euler nannte das Buch von Bj. Robins, des Erfinders des ballistischen Pendels: ‚New principles of gunnery', London 1742. Euler gab eine deutsche Bearbeitung desselben unter dem Titel: „Neue Grundsätze der Artillerie, enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers, nebst einer Untersuchung über den Unterschied des Widerstandes der Luft in schneller und langsamer Bewegung. Aus dem Englischen des Bj. Robins übersetzt", Berlin 1745. Diese Bearbeitung Eulers bahnt eine richtige Auffassung des Luftwiderstandes an und enthält eine neue Theorie der Bewegung der Geschosse, die fast ein halbes Jahrhundert in Geltung war. Von der Eulerschen Bearbeitung erschien wieder eine englische Uebersetzung; der französische Marineminister ließ sie ins Französische übersetzen und führte sie als Lehrbuch in die Artillerieschulen ein.

Während seines Aufenthaltes in Berlin versammelte Euler in seinem Hause — eine Universität gab es bekanntlich damals in Berlin noch nicht — die Eleven, welche die Akademie nach Berlin schickte, um Mathematik zu studieren. Auch den Töchtern des Markgrafen von Brandenburg-Schwedt hielt Euler Vorlesungen über Mathematik, Physik und Philosophie. Als diese Vorlesungen infolge der Uebersiedlung des Hofes nach Magdeburg abgebrochen wurden, schrieb er seine berühmten „Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie", St. Pétersbourg 1768—72, 3 Bände, ein in alle Kultursprachen übersetztes populäres Lehrbuch der Physik, das noch heute sehr lesenswert ist. Eine sehr interessante Skizze des Aufenthaltes Eulers in Berlin gibt ein Vortrag, den Herr Valentin am 15. April bei der Euler-Feier in der Berliner Mathematischen Gesellschaft gehalten hat, und der in unserer Festschrift zu Ehren Eulers erscheinen wird.

Am 17. Juli 1766 kehrte Euler an die Kaiserliche Akademie zu Petersburg zurück, von Katharina II. mit Ehren und Geschenken überhäuft. Leider traf ihn bald ein schweres Unglück. Schon im Jahre 1733 hatte er infolge einer Krankheit die Sehkraft auf dem rechten Auge verloren; bald nach seiner Rückkehr erkrankte er abermals und erblindete auf beiden Augen. Durch diesen Verlust wurde er aber nicht, wie wohl mancher andere, so entmutigt, daß er seine wissenschaftlichen Arbeiten einstellte. Seine Schaffensfreudigkeit, unterstützt durch ein geradezu phänomenales Gedächtnis, wurde nicht gelähmt; in den 17 Jahren bis zu seinem Tode diktierte er seinem Schreiber, sowie seinem Sohne Johann Albert und seinen Schülern Nicolaus Fuß, Golovin, Lexell und Krafft die Hälfte seiner zahlreichen Werke. Seinen Schreiber, einen einfachen Schneiderlehrling, den er aus Berlin mitgenommen hatte, bereitete er durch das Diktat seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" in der Mathematik so weit vor, daß derselbe die Nachschriften fehlerlos leisten konnte.

Euler verschmäht es nicht, elementare Lehrbücher zu schreiben. In der ersten Petersburger Zeit verfaßte er eine „Einleitung zur Rechenkunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg", 2 Bände, St. Petersburg 1738 und 1740, wodurch er sich große Verdienste um die Schulen erwarb. Geradezu musterhaft für ein Lehrbuch ist die Darstellung in den schon vorhin erwähnten „Lettres à une Princesse". Die in diesen Briefen zur Erklärung der Anziehung, der elektrischen und magnetischen Erscheinungen herangezogene neue Aetherthеorie wird weiter entwickelt in der „Anleitung zur Naturlehre, worin die Gründe zur Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen fortgesetzt werden", einem naturphilosophischen Werke, das erst 1862 im 2. Bande der „Opera posthuma" veröffentlicht wurde. Hier gelangt Euler, in dem Bestreben, die Gesetze der Natur aus möglichst einfachen Voraussetzungen zu erklären, zu ähnlichen Anschauungen über die Materie, wie sie 100 Jahre später durch Secchi gelehrt wurden; hier erkannte Euler den Zusammenhang zwischen Licht und Elektrizität, der erst neuerdings als richtig nachgewiesen wurde, und wir sehen aus den nachgelassenen naturphilosophischen Aufsätzen B. Riemanns, daß dieser ganz in den Fußstapfen Eulers wandelte. Die Zeitgenossen Eulers waren wenig geneigt zu spekulativen Betrachtungen der Naturerscheinungen; daher wurde Euler erst spät als Vorläufer der neueren Entdecker des Gesetzes von der Umwandlung der Kräfte anerkannt. Schon in einem Aufsatze der Commentarii vom Jahre 1727, welcher die Eigenschaften der Luft zu erklären suchte, faßte Euler die Wärme als Bewegung auf, und für eine Abhandlung über das Feuer aus dem Jahre 1739 erhielt er den Preis der Pariser Akademie. Diese Abhandlung ist nebst 12 anderen Preisschriften Eulers in den „Recueil de Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie des sciences de Paris", 9 Bände, 1752—1777, aufgenommen. Der ersten schon vorhin erwähnten Preisschrift „De implatatione malorum" folgten zunächst andere, die ebenfalls nautische Probleme behandelten. Die praktischen Kenntnisse, welche Euler als Schiffsoffizier gesammelt hatte, kamen der Wissenschaft zu statten. Mit seinem Hauptwerke: „Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus", das schon 1738 vollendet war, aber erst 1749 zu Petersburg erschien, begründete Euler die wissenschaftliche Nautik. Da dieses Werk in einer Sprache geschrieben war, die den Fachleuten, dem Schiffbauer und dem Steuermann unbekannt, so entschloß sich Euler, auf den Wunsch höherer Marineoffiziere, ein Lehrbuch für Seeleute in französischer Sprache, unter Fortlassung der nicht durchaus notwendigen Entwicklungen, abzufassen, das unter dem Titel „Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux, mise à la portée de tous ceux qui s'appliquent à la navigation" 1773 zu Petersburg erschien. Dieses Werk erzielte einen beispiellosen Erfolg. Es ward ins italienische, englische und russische übersetzt und in Frankreich als Lehrbuch in die Marineschulen eingeführt, und Euler erhielt von der Kaiserin Katharina II. von Russland ein Geschenk von 2000 Rubeln, vom Könige Ludwig XVI. von Frankreich 6000 Lires als Zeugnis der Wertschätzung seiner Arbeit.

In der „Scientia navalis" hatte Euler alle Untersuchungen über die Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung schwimmender Körper zusammengefaßt, von denen er in seinen Briefen an Joh. Bernoulli aus den Jahren 1737 bis 1740 spricht. Im Jahre 1741 gewann er den Preis der Pariser Akademie mit seiner Schrift über die Ebbe und Flut. Eine ganz neue Epoche der Hydrodynamik, die bekanntlich von Daniel I Bernoulli im Jahre 1738 begründet war, begann mit einer Reihe von Abhandlungen, die Euler im 11. Bande der Mémoires de Berlin für das Jahr 1755 veröffentlichte. Später gab er eine zusammenhängende neue Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten im 13. bis 16. Bande der Novi Commentarii, für die Jahre 1768—1771, in vier Artikeln, die deutsch übersetzt von Brandes, Leipzig 1806, herausgegeben wurden. —

Newtons „Philosophiae naturalis principia mathematica" und Hermanns „Phoronomia" waren lange Zeit die einzigen großen zusammenfassenden Werke über Mechanik. In beiden war die Behandlung synthetisch. Durch Eulers schon vorhin erwähnte „Mechanica, sive motus scientia analytice exposita", 2 Teile, Petersburg 1736, wurde die analytische Mechanik begründet. Ihr folgte, gleichsam als 3. Teil im Jahre 1765 ein zweites grundlegendes Werk, die „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accommodata".

In einem Aufsatze: „Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum", Opusc. varii arg. 1, 1—136, 1746, spricht Euler das Prinzip der Erhaltung der Flächen oder das Prinzip der Erhaltung der Rotationsmomente aus. Sein neues Prinzip der Mechanik behandelt er in den Aufsätzen: „Découverte d'un nouveau principe de mécanique" und „Recherches sur l'origine des forces", Mém. de Berlin, 6, a. 1750 (1752). Bekannt ist, daß Euler in dem heftigen Streite um die Priorität der Entdeckung des Prinzipes der kleinsten Aktion zwischen Maupartuis und König, in mehreren Publikationen der Berliner Akademie, einseitig Partei nahm für den Präsidenten dieser Akademie. —

In klarer Weise hat Euler in einer bahnbrechenden Arbeit: „Sur la force de percussion et sa véritable mesure", im 1. Bande der Mém. de Berlin für das Jahr 1745, den für die Mechanik und Physik wichtigen Vorgang des Stoßes erklärt und dessen Gesetze mathematisch behandelt. Dadurch wurde der Streit der Leibnizianer und der Cartesianer über den Begriff der mechanischen Leistung oder der Energie geschlichtet. Ein anderer für die Mechanik wichtiger Begriff, der der Reibung, wurde zuerst von Euler klar definiert, so daß der Reibungswiderstand einer exakten mathematischen Behandlung unterzogen werden konnte. — Die erste mathematische Begründung der technischen Mechanik gab Euler in einer Abhandlung: „De machinis in genere" im 3. Bande der Novi Commentarii für das Jahr 1751. Euler beschäftigte sich mit verschiedenen Problemen der technischen Mechanik, z. B. mit der Tragfähigkeit der Säulen, der Festigkeit von Brücken, dem Widerstand der Erddämme, der Kraft der Rammen beim Einschlagen von Pfählen, der Konstruktion der Windmühlen, der vorteilhaftesten Gestalt der Zahnräder.

Durch eine bahnbrechende astronomische Untersuchung Eulers: „Recherches sur la précession des équinoxes et sur la mutation de l'axe de la terre", Mém. de Berlin, 5 a. 1749 (1751) wurde Joh. Andr. Segner (Specimen theoriae turbinum, Halle 1755) auf den Beweis der Existenz der drei zueinander senkrechten Hauptträgheitsachsen geführt. Eine eingehende Behandlung dieser Hauptachsen gab Euler in einer fundamentalen Arbeit: „Recherches sur la connaissance mécanique des corps", Mém. de Berlin, 14, a. 1758 (1765) und in seiner „Theoria motus corporum solidorum". Die Rotation eines festen Körpers um eine bewegliche Achse wurde zwei Jahre später, im 16. Bande der Mém. de Berlin für das Jahr 1760, in grundlegender Weise behandelt. Für das Kreiselproblem, das zuerst von Euler in richtiger Weise erfaßt wurde, verweise ich auf den geistvollen Vortrag, den Herr Fritz Kötter bei unserer Euler-Feier gehalten hat. — Wir erwähnen hier nur noch zwei zusammenhängende Arbeiten Eulers über die Translation starrer Körper im 20. Bande der Novi Commentarii für 1775 (1776), 189—207 und 208—238. Sie zeigen Euler als Vorläufer von Hachette und Chasles. Er beweist den wichtigen Satz, daß „2 starre kongruente Körper durch eine Drehung um eine Achse und durch eine hierauf folgende Verschiebung in einer bestimmten Richtung ineinander übergeführt werden." Es fehlt also nur noch die Ergänzung, die Chasles in seinen Beziehungen zwischen kongruenten Räumen gab, daß die Parallelverschiebung in Richtung der Drehachse, wenn dieselbe gehörig festgelegt wird, erfolgt. Erwähnen möchte ich hier, daß in der 2. Eulerschen Abhandlung die Formeln sich finden, welche die 9 Cosinus der orthogonalen Substitution durch 3 Parameter rational ausdrücken.

Eulers Entdeckungen in der Mechanik setzten ihn zugleich in den Stand, die Theorie der Bewegung der Himmelskörper zu vervollkommnen. Ganz neue Methoden für die Bahnbestimmung entwickelte Euler in dem klassischen Werke: „Theoria motuum planetarum et cometarum, continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi", Berlin 1744, deutsch von J. v. Pacassi, Wien 1781. Dieses Werk ist mit Recht der bahnbrechende Vorläufer der „Theoria motus" von Gauß genannt worden. Hier gibt Euler auch eine neue Herleitung des sogen. Lambertschen Theorems über die Fläche des parabolischen Sektors, das er schon im Jahre vorher, 1743, in einer Abhandlung über die Bahn des Kometen vom März 1742 in den Miscellanea Berolinensia, 7, 1—90, veröffentlicht hatte. Eulers Theorem geriet in Vergessenheit, so daß es Lambert (Insignores orbitae cometarum proprietates) 1761, und (Beiträge, 3) 1765 von neuem finden konnte. Erst Gauß nannte in seiner „Theoria motus", 1809, Euler als den eigentlichen Entdecker des Lambertschen Theorems.

Ein praktisch sehr wichtiges astronomisches Werk: „Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates", wurde auf Kosten der Petersburger Akademie 1753 zu Berlin gedruckt. Mit zahlreichen Tafeln: „Novae tabulae lunares", erschien es in neuer Auflage 1772 zu Petersburg. Es wurde die Grundlage für die Korrektion von Tobias Mayers „Novae tabulae motuum solis et lunae".

Bahnbrechend für die Theorie der Störungen war der Gedanke Eulers, anstelle des Planeten, der einen Mond hat, den Schwerpunkt von Planet und Mond zu setzen; dieser Schwerpunkt beschreibt, z. B. bei Erde und Mond, die Ekliptik, während die Erde bald über, bald unter der Ekliptik stehen wird, je nachdem der Mond, dessen Bahn gegen die Ekliptik geneigt ist, unter oder über der Ekliptik steht.

Als grundlegende Arbeiten für die Theorie der planetarischen Störungen sind 4 von der Pariser Akademie gekrönte Preisschriften Eulers zu nennen: „Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne", Recueil 7, 1769; „Recherches sur les inégalités du mouvement des planètes produites par leurs actions réciproques", 8, 1771; „Théorie de la lune", 9, 1777 und „Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la lune", in demselben Bande. Später gab Euler eine neue Behandlung des Störungsproblems im 5. Bande der Acta für das Jahr 1781, der aber erst 1784, also nach Eulers Tode, erschien.

In der ersten dieser Untersuchungen führte Euler das fruchtbare Prinzip der Variation der Konstanten ein, welches ihm erlaubte, ein System von Differentialgleichungen 2. O., das bisher unüberwindliche Schwierigkeiten bot, in vollständiger Form zu lösen, wodurch er die höchste Bewunderung Lagranges erzielte. Euler bereitete auch den Weg, auf dem eine richtige Behandlung des Problems der 3 Körper ermöglicht wurde, im 14. und 19. Bande der Mém. de Berlin, im 13. Bande der Novi Commentarii und im 3. Bande der Acta, indem er wichtige spezielle Fälle annahm und erledigte.

Eulers Verdienste um die Astronomie und die Physik schildert in ansprechender Weise ein Vortrag von Prof. Ed. Hagenbach-Bischoff, der in der Festschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel: „Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert", Basel 1884, veröffentlicht wurde. Wir wollen nur noch erwähnen, daß 1862 in den Opera posthuma, 2, 177—332 und 402—446, 120 Paragraphen einer hinterlassenen „Astronomia mechanica" und ebendaselbst S. 365—390 3 Kapitel aus einem größeren Werke über die Theorie des Mondes zum ersten Male veröffentlicht wurden.

In seinen Mußestunden beschäftigte sich Euler mit der Musik. Er suchte dabei, wie er schon 1731 in einem Briefe an Johann Bernoulli schrieb, nach Gründen und Regeln für eine dem Ohr angenehme Zusammensetzung der Töne. Im Jahre 1739 erschien zu Petersburg sein „Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae", die erste mathematische Behandlung der Musik. Er ging von dem Prinzip aus, daß die Konsonanz eines Intervalles durch die Einfachheit des Verhältnisses der betreffenden Schwingungszahlen bedingt sei. Seine Theorie behielt ihre Geltung bis zu den physiologischen Untersuchungen der Tonempfindungen von Helmholtz. Leider erfuhr das Werk, welches sich durch meisterhaft klare Darstellung auszeichnet, nicht den gebührenden Erfolg, weil — wie Nicolaus Fuß in seiner Euler-Biographie sagt — die Mathematiker zu wenig von Musik, die Musiker zu wenig von Mathematik verstehen. Im Jahre 1865 erschien zu Paris eine französische Uebersetzung.

Die erste Dissertation Eulers über die Natur und die Ausbreitung des Schalles aus dem Jahre 1727 haben wir schon im Vorigen erwähnt. Drei Abhandlungen im 15. Bande der Mém. de Berlin a. 1759 und eine Fortsetzung im 19. Bande derselben für das Jahr 1765 untersuchen eingehend die Fortpflanzung des Schalles. Hier fand Euler das Prinzip der Superposition der Bewegungen, die beim Zusammentreffen verschiedener Wellenbewegungen eintritt, und wurde damit ein Vorläufer Thomas Youngs, des Entdeckers der Interferenz.

Für verschiedene mathematische Disziplinen fruchtbringend wurde die Beschäftigung Eulers mit dem berühmten Problem der schwingenden Saiten. In der ersten grundlegenden Arbeit: „Sur la vibration des chordes", im 4. Bande der Mém. de Berlin, a. 1748 (1750), gibt Euler eine neue Darstellung der Arbeit d'Alemberts vom Jahre vorher, stellt die Bedingungen für die Lösung des neu formulierten Problemes auf und führt zum ersten Male die willkürlichen Funktionen in die Lösung einer gewissen partiellen Differentialgleichung ein. Fortgesetzt wurden seine Untersuchungen 5 Jahre später durch 2 Abhandlungen im 9. Bande der Mém. de Berlin, wo er die Lösung Daniel Bernoullis kritisiert, die in der Form von trigonometrischen Reihen erschien. Hier zeigt er sich als Vorläufer Fouriers, was die Darstellung willkürlicher Funktionen durch eine trigonometrische Reihe betrifft. Die erste Integraldarstellung der Koeffizienten in der Entwicklung einer willkürlichen Funktion gab Euler in einer Abhandlung der Nova Acta 11 für das Jahr 1793, die aber erst 1798 erschien, immerhin 10 Jahre vor Fouriers Abhandlung, im Bulletin de la Société philomatique. Die Bewegungen der Saiten von ungleicher Dicke untersuchte Euler in den Acta für 1780, P. II, der 1784 erschien. Zu einer neuen Behandlung physikalischer Probleme, die auf partielle Differentialgleichungen 2. O. führen, veranlaßten Euler die Untersuchungen über schwingende Membranen aus dem Jahre 1764. Bemerkenswert ist daß er bei der Lösung eine Funktion einführt, die bis auf einen Zahlenfaktor die Zylinderfunktion $J_\rho(a\,r)$ mit beliebigem Index ist.

In der Optik war Euler schon früh ein Gegner der Newtonschen Emanationstheorie. In seiner „Nova theoria lucis et colorum", Opusc. var. arg. 1, 169—245, 1746, erklärt er die Farben nach der Undulationstheorie und unterscheidet sie nach den Schwingungszahlen. Mit dem Aufsatze Eulers: „Sur la réfraction de la lumière", Mém. de Berlin 10, a. 1754 (1756), beginnt eine neue Epoche für die mathematische Behandlung der astronomischen Refraktion. Die von Euler hergeleitete, später von Lagrange bedeutend vereinfachte Differentialgleichung bildet noch jetzt den Ausgangspunkt der Theorie.

Um die Farbenzerstreuung bei der Brechung, die störend in den astronomischen Instrumenten wirkte, zu vermeiden, schlug Euler eine Kombination von Linsen vor, die aus verschiedenen Medien hergestellt werden sollten. Seine „Constructio lentium objectivarum", Petersburg 1762, ist die erste mathematische Behandlung achromatischer Linsen. Der praktischen Ausführung stellten sich aber bedeutende Schwierigkeiten entgegen, bis Dollond, der aus diesem Grunde zuerst ein Gegner der Eulerschen Theorie war, sich aber nach der Verteidigung Eulers durch den schwedischen Mathematiker Klingenstjerna derselben wieder zuwandte, die achromatischen Linsen erfand. Eulers Arbeiten über optische Instrumente sind sehr zahlreich; sie erschienen zum größten Teil in den Mémoires de Berlin vom Jahre 1756 bis 1767. Mit ihnen begründete er eine ganz neue Wissenschaft, die Dioptrik. Sein dreibändiges Hauptwerk, die „Dioptrica", erschien zu Petersburg 1769—1771. In ihm liegen die Keime der neueren geometrischen Optik. In seinem Nachlaß fand sich eine „Théorie générale de la Dioptrique" von 187 Paragraphen, dazu 6 Kapitel mit 142 Paragraphen dioptrischen Inhalts aus einem Manuskript ohne Titel; beide wurden im 2. Bande der Opera posthuma, 1862, veröffentlicht. —

Sie sehen aus den angeführten Schriften, daß Leonhard Euler von früher Jugend an bis in sein spätes Alter ein reges Interesse für die mathematische Behandlung praktisch wichtiger Probleme an den Tag legte. Schon im Jahre 1741 schrieb er zu Berlin einen interessanten Aufsatz: „De matheseos sublimioris utilitate", als Antwort auf die Frage nach dem Nutzen der höheren Mathematik, auf welche der junge König Friedrich II. in der Unterhaltung gern zurückkam. Dieser Aufsatz wurde erst nach 100 Jahren im Manuskript wieder aufgefunden und im 35. Bande des Crelleschen Journals für Mathematik im Jahre 1847 veröffentlicht. Man kann behaupten, daß Euler kein neues praktisch wichtiges Problem, das der mathematischen Behandlung zugänglich war, unbeachtet vorübergehen ließ. In voller geistiger Frische soll er sich noch am letzten Tage seines Lebens, am 11./18. September 1783, mit Berechnungen über die Tragfähigkeit der neu erfundenen Luftballons beschäftigt haben. Während der Mittagstafel unterhielt er sich lebhaft mit seinem Sohne Joh. Albert Euler und seinem Schüler Nic. Fuß über den neu entdeckten Planeten Uranus. Beim Tee scherzte er mit einem seiner Enkel, sank mit den Worten „Ich sterbe" plötzlich um und verschied sanft, in einem Alter von 76 Jahren und 5 Monaten. —

Möge die Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, mögen die sich daran knüpfenden Vorträge und Schriften den Erfolg haben, daß die Eulerschen Abhandlungen fleißiger studiert werden. Bei der immermehr schwindenden Aussicht auf eine Gesamtausgabe der Werke Eulers ist wohl der Wunsch gerechtfertigt, daß eine Reihe bahnbrechender Abhandlungen Eulers durch Uebersetzungen oder Neuausgaben der Vergessenheit möge entrissen werden. Das Studium der Eulerschen Schriften gewährt wegen der einfachen und klaren Darstellung einen großen Genuß. Die Offenheit, mit der der Meister die Wege enthüllt, auf denen er zu seinen Resultaten gelangt ist, entbehrt nicht eines besonderen Reizes und ist von großem pädagogischen Wert. Seine Darstellung fördert nicht bloß das Wissen, sondern auch das Können. Ein Vorbild für alle Lehrer der Mathematik, versteht es Euler in hervorragendem Maße, die Liebe zur Wissenschaft und die Begeisterung, mit der er die einzelnen Probleme umfaßt, auch auf die Schüler zu übertragen. Hochbegabte Lehrer, wie Dirichlet, Jacobi, Franz Neumann, Schellbach, Schlömilch u. a. haben Euler fleißig studiert und sich an seiner Kunst vorgebildet. Pietätvoll und dankbar wollen auch wir heute gedenken Leonhard Eulers, unseres großen Meisters und Lehrers.

Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Dresden.*)

Von M. Brückner (Bautzen).

Mit 1 Lichtdrucktafel in Nr. 6.

Meine Herren! In meinem Buche „Vielecke und Vielflache" [1]) habe ich seinerzeit versucht, die Geschichte der Polyedertheorie im Zusammenhange darzustellen, und einer Anregung des leider so früh verstorbenen Prof. Heß folgend, wandte ich mich dann der Untersuchung der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder zu, besonders der diskontinuierlichen und nichtkonvexen, und veröffentlichte das Gefundene in den Abhandlungen der Ksl. Leop.-Carol. Akademie.[2]) Wenn ich es heute unternehme, Ihnen eine historische Uebersicht der Entwicklung dieses besonderen Problems der Polyedertheorie zu geben und Sie überdies an der Hand der hier vorliegenden Modelle mit meinen letzten Ergebnissen bekannt zu machen versuche, so darf ich vielleicht eine Berechtigung dazu aus der Tatsache entnehmen, daß diese Fragen doch, wie Herr Prof. Holzmüller bemerkt hat, den Elementen der Mathematik nicht fernstehen, für die dafür interessierten Lehrer an den meisten gymnasialen Anstalten in den Akten der Carol. Akademie aber nicht überall zugänglich sein dürften.

Das Problem lautet: Alle Polyeder zu finden, die von kongruenten Flächen begrenzt werden und deren Ecken ebenfalls sämtlich kongruent sind, oder wenigstens symmetrisch gleich. In dieser allgemeinsten Fassung

*) S. Unt.-Bl. XIII, S. 62. Der Vortrag, dessen Ausführungen durch Vorlegung einer grösseren Sammlung von Modellen erläutert wurde, erscheint hier hauptsächlich durch die Anmerkungen erweitert.

[1]) Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte. Leipzig 1900, B. G. Teubner. (Weiterhin angeführt unter V. u. V.)

[2]) Ueber die gleicheckigen und gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder. Nova Acta, Abh. d. Ksl. Leop. Carol. deutschen Akademie d. Naturforscher. Bd. LXXXVI, Nr. 1. (Weiterhin angeführt unter N. A.)

ist über die Form der Flächen und Ecken ebensowenig irgend eine beschränkende Festsetzung getroffen, wie über die Beschaffenheit des Gesamtpolyeders irgend eine Voraussetzung gemacht ist; gleichgiltig also, ob es konvex ist oder nicht, ob es einen kontinuierlichen Zusammenhang besitzt oder gleichsam aus mehreren Einzelpolyedern gebildet erscheint. Die Lösung des Problems unter Zugrundelegung der allgemeinsten Auffassung eines Polyeders ist selbstverständlich der Schlußstein der ganzen historischen Entwicklung, und wir haben zunächst zu zeigen, wie man sich diesem Endziele immer mehr näherte, wobei es nicht auffallen wird, daß unter Fallenlassen der Forderung der Gleichheit aller Flächen oder Ecken zunächst ganze Klassen anderer, jenen verwandter Polyeder untersucht wurden. Sollen die Flächen eines Polyeders regelmäßige Figuren sein und die Ecken regulär, so existieren, wie schon im Altertum bekannt war, das unter regelmäßigen Figuren nur die mit nichtschneidendem Perimeter verstand, die noch heute als Platonische bezeichneten fünf Vielflache. Unter der gleichen Voraussetzung regelmäßiger Begrenzungsflächen, aber von je gleichviel Flächen verschiedener Kantenzahl und der Beibehaltung der Forderung kongruenter Ecken löste Archimedes, wie uns von Pappus überliefert ist, das Problem der Aufzählung dieser sogen. halbregelmäßigen Vielflache, die noch heute seinen Namen tragen. Diese Archimedischen halbregulären Polyeder haben zuerst wieder nach dem Wiederaufblühen der Wissenschaften bei den Geometern Interesse erregt und wir finden ihre Besprechung bei Luca Paciuolo ebenso wie bei dem auch ihre Netze zum ersten Male zeichnenden Meister Albrecht Dürer.[3]) Ein Schritt vorwärts wurde nun erst möglich durch Erweiterung des Begriffes des regelmäßigen Vielecks. Indem Kepler auch das sternförmige Fünfeck als Grenzfläche eines regelmäßigen Polyeders zuließ, gelang ihm die Auffindung von zwei jener regulären Sternpolyeder höherer Art, deren vollständige Entdeckung wir Poinsot[4]) am Anfange des 19. Jahrhunderts zu verdanken haben. Wenn es sich aber nicht allein um die Aufzählung gewisser Polyeder von bestimmten Eigenschaften, sondern besonders um die Klarstellung der zu ihrer Auffindung dienenden Methoden handelt, so haben wir in der schönen Abhandlung von Cauchy[5]) die erste systematische Behandlung der vier regulären Sternpolyeder zu suchen, indem Cauchy der Beweis gelingt, daß die von Poinsot beschriebenen vier Polyeder die einzig möglichen sind. Dieser Beweis fußt auf dem Satze, daß jedes regelmäßige Sternpolyeder dadurch entsteht, daß man die Grenzflächen und Kanten eines Platonischen Polyeders erweitert, d. h. also nichts anderes, als daß der innere Kern, die innerste Zelle eines regelmäßigen Sternpolyeders ein reguläres Platonisches Polyeder sein muß. Für seine Ecken bewies dann Bertrand[6]) 1858 den dualistisch zugeordneten Satz, daß sie die Ecken eines zweiten Platonischen Polyeders sein müssen, daß also jedes solche Sternpolyeder eine umbeschriebene Kugel besitzt und seine Kanten bestimmte Diagonalen im Innenraum der regelmäßigen Polyeder erster Art sind. Hierbei verstehen wir zunächst unter Art eines Polyeders die Anzahl der Kugelbedeckungen, die sich ergibt, wenn man sämtliche Punkte der Oberfläche eines regelmäßigen Vielflaches auf die ihm umbeschriebene Kugel aus deren Mittelpunkte projiziert. Verfährt man analog mit den regelmäßigen Figuren der Ebene, wobei nur an Stelle der Kugel der umbeschriebene Kreis tritt, so erhält man den gleichen Artbegriff für die ebene Figur, wonach z. B. das Sternfünfeck von der 2. Art und somit die innerste Zelle, das gewöhnliche regelmäßige Fünfeck mit doppeltem Inhalte angesetzt werden muß. Die richtige Bestimmung der Art eines Sternpolyeders, die Poinsot nur angebahnt hatte, gelingt erst Cayley in seiner Abhandlung vom Jahre 1859, die ohne Kenntnis der Arbeiten Cauchys geschrieben ist.[7])

Aus den beiden Sätzen von Cauchy und Bertrand folgen nun zwei Konstruktionsmethoden, von denen die Cauchys des Folgenden wegen hier etwas ausführlicher darzulegen ist. Für die Ableitung der Poinsotschen Körper kommen nur das Dodekaeder und Ikosaeder in Frage. Faßt man nach Bezeichnung aller Grenzflächen eines Dodekaeders mit Zahlen die Ebene der Fläche 1) als Grundebene auf, und bringt mit

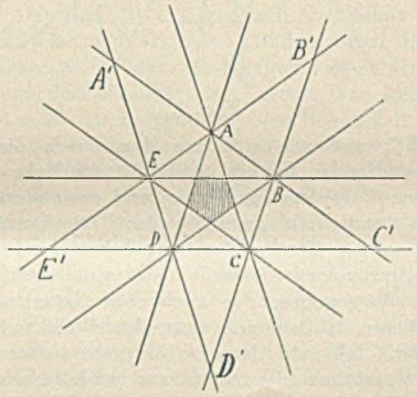


Fig. 1.

ihr die Ebenen der übrigen Grenzflächen zum Schnitt, so erhält man in der Grundebene eine Figur von Geraden, die als vollständige Figur des Dodekaeders bezeichnet sein möge, wie sie Fig. 1 zeigt. Hier stellt das schraffierte Fünfeck die Grenzfläche des Dodekaeders dar; die Spuren der übrigen Flächen schneiden sich zunächst in den fünf Punkten A, B, C, D, E, und bilden sowohl ein Fünfeck erster Art $ABCDE$, wie auch ein solches zweiter Art $ACEBD$, die einen gemeinsamen umbeschriebenen Kreis besitzen, der auf der um den Mittelpunkt des Dodekaeders beschriebenen Kugel liegen muß. Das gleiche gilt aber für die fünf Punkte A', B', C', D', E', und es ergeben sich also nach dem Cauchyschen Satze hier drei regelmäßige Polyeder höherer Art, von denen zwei Sternfünfecke, eins aber Fünfecke erster Art als Grenzflächen besitzt. Da durch jeden der Punkte A, B, C, D, E fünf Spuren, d. h. Schnittlinien von Ebenen der entstehenden Sternpolyeder hindurchlaufen, so haben diese fünfkantige

[3]) In dem Buche: Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt. 1525.

[4]) Poinsot, Mémoire sur les polygones et les polyèdres. J. de l'éc. polyt. 10. cah. t. IV à Paris 1810. p. 14—46.

[5]) Cauchy, Recherches sur les polyèdres. Ier mémoire, lu à la première classe de l'institut en février 1811.

[6]) Bertrand, Note sur la théorie des polyèdres réguliers. Compt. Rend. t. 46. 1858.

[7]) Cayley, On Poinsots four new Regular Solids. The London, Edinb. and Dubl. Philos. Magaz. vol. XVII fourth series (Jan — June 1859) London. S. 123. Vergl. dazu V. u. V., S. 178, Anm. 4. Heute sind die von Wiener und Heß gebrauchten Benennungen üblich: vergl. V. u. V., S. 167—169. Die Abbildungen wohl zuerst in Wieners Schrift; in V. u. V., Taf. VII usw.

Ecken, während die Ecken A', B', C', D', E' des dritten Polyeders nur dreikantig sind. Die Fläche des vierten Poinsotschen Polyeders ergibt sich, wenn man die vollständige Figur des Ikosaeders zeichnet, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist. Es ist hier das Drei-

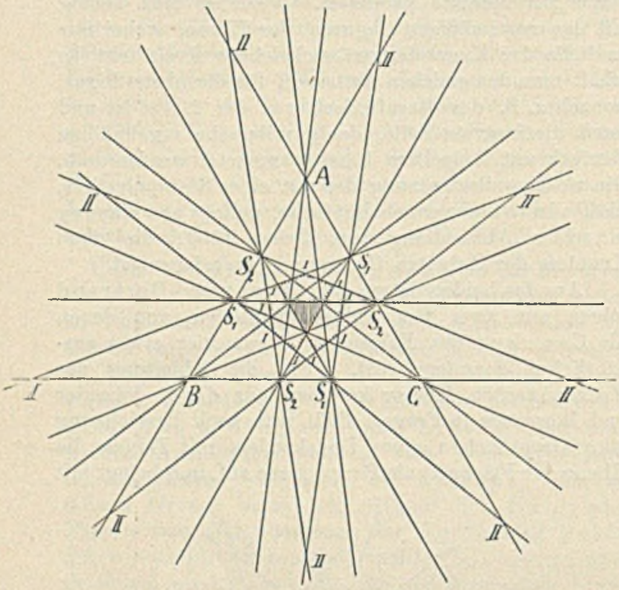


Fig. 2.

eck ABC, und wie sich aus den durch diese drei Punkte laufenden Spuren ergibt, ist die Ecke des entstehenden Polyeders fünfkantig und zwar sternförmig, da zwei der Spuren innerhalb des Dreieckswinkels zu liegen kommen. Die Beschreibung dieser vier Poinsotschen Sternpolyeder wurde späterhin erneut von Wiener[8]) gegeben, der auch ihre Netze zeichnete. Die äußeren Hüllen sind entweder Dodekaeder oder Ikosaeder. Ich gehe darauf aber nicht weiter ein, da es sich wesentlich hier nur darum handelte, die grundlegende Cauchysche Konstruktion in Erinnerung zu bringen. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß die vier genannten regulären Sternkörper die Symmetrieachsen und Ebenen der erzeugenden inneren Kerne besitzen.

War nun die Frage nach den regulären Polyedern durch Cayley und Wiener in der Mitte des 19. Jahrhunderts endgültig beantwortet, so müssen wir für die weitere Entwicklung des uns interessierenden Problems wieder in das 18. Jahrhundert zurückkehren. Es war der heute wohl nicht immer nach Verdienst gewürdigte Kästner, der in einer ausführlichen Abhandlung[9]) die Archimedischen halbregulären Polyeder aufs neue der Betrachtung unterwarf, auch ihre metrischen Eigenschaften untersuchte und besonders auf ihre Entstehung durch Abschneiden der Ecken und Kanten der regulären Vielflache hinwies. Von anderem Gesichtspunkte aus finden wir dieselben Vielflache von Meier Hirsch[10]) und von Gergonne[11]) behandelt, ohne daß aber in den Resultaten etwas wesentlich Neues hinzugekommen wäre. Dasselbe muß z. T. von einer Arbeit Catalans[12]) aus dem Jahre 1865 gesagt werden. Die Pariser Akademie hatte 1861, und erneut 1863, als Preisaufgabe gestellt, die geometrische Theorie der Polyeder in irgend einem wichtigen Punkte zu vervollkommnen. Keine der acht eingereichten Abhandlungen, auch nicht die die Entdeckung der einseitigen Polyeder enthaltende von Moebius wurde gekrönt; Catalan aber erhielt eine ehrenvolle Erwähnung, obgleich er den ihm freilich unbekannt gebliebenen Resultaten seines Landsmannes Gergonne nur die Beschreibung derjenigen Vielflache hinzugefügt hatte, die polar-reziprok sind den nun schon so oft behandelten Archimedischen Polyedern. Es sind bekanntlich zwei Polyeder — wir sprechen jetzt der Kürze wegen nur von den hier zu behandelnden — polar-reziprok zueinander, wenn die umbeschriebene Kugel des einen, nämlich des Archimedischen, zugleich die einbeschriebene Kugel des andern ist. Den kongruenten Ecken des ersten sind dann die kongruenten Flächen des letzteren zugeordnet, die Zahl der Kanten ist die gleiche, usw. So sind also Ikosaeder und Dodekaeder, sowie je zwei der Poinsotschen Polyeder polar-reziproke Vielflache. Die den Archimedischen Polyedern, denen die Achsen des Hexaeders zukommen, polar-reziproken Vielflache sind die aus der Kristallkunde bekannten Tetrakishexaeder, Triakisoktaeder usw. Die entsprechenden Untersuchungen für die übrigen Archimedischen Polyeder, die die Achsen des Dodekaeders besitzen, waren übrigens bereits vor Catalan von den deutschen Mathematikern Hessel[13]) (1830) und Müller[14]) (1852) vollständig durchgeführt.

Derselbe Hessel nun veröffentlichte kurz vor seinem Tode im Jahre 1871 ein kleines, aber höchst inhaltsreiches Schriftchen,[15]) in dem endlich das erweiterte Problem der Bestimmung sämtlicher gleicheckigen Polyeder, sowie der gleichflächigen erster Art eine vollständige Lösung fand. Die Grenzflächen sind also nun nicht mehr regulär, sondern nur noch gleicheckig, sie haben somit bei gleichen Winkeln abwechselnd gleiche Kanten. Hessels Konstruktionsmethode war dieselbe, mittels der Kästner die halbregulären Vielflache abgeleitet hatte, die des Abschneidens der Ecken und Kanten der Prismen und Platonischen Polyeder, sowie des Aufsetzens gewisser Pyramiden auf deren Flächen. Zunächst ist jetzt einer Reihe anderer Untersuchungen zu gedenken, die sich auf halbreguläre Sternpolyeder beziehen. Wie die Poinsotschen Polyeder auf die Platonischen folgen, indem man auch reguläre Grenzflächen und Ecken höherer Art zuläßt, so ergeben sich analog zu den halbregulären Vielflachen die sogen. Archimedischen Sternpolyeder, deren Flächen mehrererlei Kantenzahl z. T. reguläre Sternpolygone sind oder deren Ecken bei Flächen erster Art dann sternförmig werden. Diese Polyeder sind von verschiedenen Mathematikern aufgezählt und beschrieben worden, aber immer unvollständig, so lange eine allgemeine Methode für die Ab-

[8]) Wiener, Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864.

[9]) Kästner, De corporibus polyedris data lege irregularibus. Comment. Societat. Reg. scient. Gottingensis. T. VI 1783/84. T. VIII 1785/86. T. IX 1787/88.

[10]) M. Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben. 2. Tl. Berlin 1807.

[11]) Recherches sur les polyèdres etc. Par un Abonné. Gergonnes Annalen. Bd. 9. 1818/19.

[12]) Catalan, Mémoire sur la théorie des polyèdres. Journ. de l'éc. imp. polytechnique XLI. cah. 1865.

[13]) Hessel, Artikel „Krystall" in Gehlers Phys. Wörterbuch. 1830. Bd. V.

[14]) J. H. T. Müller, Lehrbuch der Math. 2. Tl. 3. Abt. 1852. S. 345 ff.

[15]) Hessel, Uebersicht der gleicheckigen Polyeder und Hinweisung auf die Beziehungen dieser Körper zu den gleichflächigen Polyedern. Marburg 1871.

leitung noch nicht gefunden war, so z. B. von Pitsch[16]) (1881) und von Badoureau[17]) (1878), dessen Arbeit aber nicht nur unvollständig, sondern sogar höchst fehlerhaft ist. Nach verschiedenen Einzeluntersuchungen[18]) führte Heß auch die Lösung dieses Problems vollständig durch in seinem für die ganze Theorie der gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder grundlegenden Werke über die Kugelteilung.[19]) Zunächst werden hier die gleicheckigen und die gleichflächigen Vielflache erster Art auf eine neue systematische Weise gefunden und es zeigt sich dabei, daß die Lösung von Hessel völlig korrekt und erschöpfend war. Stellt man das Problem in der Form, alle Fälle zu ermitteln, in denen ein sphärisches Polygon, nämlich ein Drei-, Vier- oder Fünfeck, nebst seinen kongruenten oder symmetrischen Wiederholungen eine geschlossene Fläche bildet, die die Kugelfläche einmal bedeckt, so ist das von den Kanten, d. h. Teilen von Hauptkreisen gebildete Netz ein gleichflächiges Kugelnetz. Mit der Lösung dieser Aufgabe hat man die weitere, alle gleicheckigen Netze zu finden, sofort erledigt, indem man innerhalb jeder Fläche des gleichflächigen Netzes einen Punkt so bestimmt — was im allgemeinen auf mehrfache Weise möglich ist — daß um ihn die übrigen in übereinstimmender Weise gruppiert sind, und die Nachbarpunkte durch Hauptkreise verbindet. Jedem solchen gefundenen gleicheckigen Netze ist dann ein gleicheckiges Polyeder einzuschreiben und ein gleichflächiges umzuschreiben. Die Ausführung dieser Gedanken bildet eben den ersten Teil von Heß' Kugelteilung, während im weiteren ebenso die Kugelnetze höherer Art, d. h. die die Kugel mehrfach lückenlos bedeckenden Netze abgeleitet werden, wonach es Heß gelingt, von ihnen aus auch die gleichflächigen und die gleicheckigen Polyeder höherer Art aufzufinden. Freilich bedarf dies eines Zusatzes. Die höheren Netze zerfallen in bewegliche und veränderliche,[19]) und nur die ersteren sind bisher sämtlich abgeleitet; es ist also auch die Auffindung der zu den beweglichen Netzen gehörenden Polyeder höherer Art ein bis heute noch ungelöstes Problem. Nun leuchtet ein: Wäre das Problem endgültig erledigt, so würden die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder höherer Art alle die sein, die sich in den beiden Klassen gemeinsam finden! Bei der Unmöglichkeit, auf diese Weise zu ihrer Kenntnis zu gelangen, müssen also neue Wege eingeschlagen werden und auch hier hat Heß die zweckdienlichen Sätze abgeleitet[20]) und das Problem dann teilweise gelöst. Die Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes über die Beschaffenheit von Kern und Hülle eines regulären Sternpolyeders ist der Heßsche Satz für die gleicheckig-gleichflächigen Polyeder höherer Art, wonach die innerste Zelle eines solchen Vielflaches ein gleichflächiges Polyeder erster Art, die äußere Hülle ein gleicheckiges Polyeder erster Art sein muß, so daß also seine Ecken auf der umbeschriebenen Kugel zugleich die Ecken eines gewöhnlichen gleicheckigen Polyeders sind. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß dieser Satz für alle Arten von Polyedern gilt (wir lassen das Beiwort gleicheckig-gleichflächig künftig weg, wenn kein Irrtum möglich ist) mögen sie konvex oder nicht konvex sein, kontinuierlich oder nicht. Nach dem ersten Teile des genannten Theorems sind also zur Auffindung aller Polyeder die „vollständigen Figuren" sämtlicher gleichflächigen Polyeder erster Art zu konstruieren, indem man wieder die Ebenen sämtlicher Flächen eines solchen Polyeders zum Schnitt bringt mit der Ebene einer ersten Fläche, die als Zeichenebene gewählt wird.[21]) In dieser schneiden sich die erhaltenen Spuren in einer Anzahl von Punkten, unter denen sich die Ecken der voraussichtlich vorhandenen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder befinden werden. In diesen letzteren Punkten, die auf einem Kreise liegen müssen, nämlich auf einem kleinen Kreise der umbeschriebenen Kugel des zu findenden Polyeders, müssen sich überdies stets gleichviel Spuren schneiden, da die Ecken des Polyeders ja von gleichviel Ebenen begrenzt werden. Das sind die einzigen zur Auffindung dieser Punkte dienenden Merkmale. Bilden dabei die Verbindungskanten ein konvexes Polygon, dessen sämtliche Kanten dem Mittelpunkte des Kreises ihre Innenseite zukehren, z. B. das Polygon mit den Ecken I in Fig. 2, so ist das gefundene Polyeder ein konvexes, andernfalls ein nichtkonvexes (z. B. für das Fünfeck in Fig. 6c). Ist das Polygon übrigens selbst schon diskontinuierlich, so gilt dies natürlich auch von dem Polyeder, dem es als Grenzfläche angehört, während ein kontinuierliches Polygon nicht ohne weiteres auch den Schluß auf ein ebensolches Vielflach zuläßt. Wir fügen zu den vollständigen Figuren der beiden Platonischen Polyeder hier zunächst in Fig. 3 die des Triakontaeders oder Rhombendreißigflaches. Wie aus dem Gesagten hervorgeht, ist es also zur Auffindung aller gewünschten Polyeder erforderlich, die vollständigen Figuren sämtlicher verfügbaren gleichflächigen Polyeder erster Art zu konstruieren,[22]) und es wird deshalb geraten sein, wenigstens einen Ueberblick über diese Polyeder zu geben. Die gleichflächigen Polyeder gehören nach ihren Achsen und ihrer Symmetrie drei großen Typen zu. Der erste Typus umfaßt alle diejenigen mit einer Hauptachse und n unter gleichen Winkeln gegeneinander geneigten zur Hauptachse senkrechten Nebenachsen. Wir bezeichnen diesen Typus als Doppelpyramidentypus. Das polare gleicheckige Hauptpolyeder ist das $(n+n)$-seitige Prisma, mit zwei Arten von Rechtecken als Seitenflächen[23]) Der zweite Typus, der Hexakisoktaedertypus enthält alle die Polyeder, deren Achsen mit den Ecken-, Flächen- und Kantenachsen des regulären Hexaeders identisch sind.[24]) Bezeichnet man die Längen dieser Achsen in der genannten Reihenfolge im Hexaeder mit C, A_h und B_h, und nimmt — da die

[16]) J. Pitsch, Ueber halbreguläre Sternpolyeder. Ztsch. f. d. Realschulwesen v. Kolbe. VI. Jahrg. Wien 1881.

[17]) Badoureau, Mémoire sur les figures isoscèles. Compt. Rend. XLIX. cah. (Vorgel. 1878.)

[18]) Veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Gesellschaft zur Beförderung der ges. Naturwissenschaften zu Marburg. 1872, Nr. 5. 1875, Nr. 1 u. 2. 1877, Nr. 1. 1878, Nr. 2. 1879, Nr. 1 u. 9, sowie in den Schriften ders. Gesellschaft. Bd. XI. Abh. 1. Kassel 1876. Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder, und 1878: Ueber vier Archimedische Polyeder höherer Art.

[19]) Heß, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Leipzig 1883. Ueber den Unterschied fester und beweglicher Netze vergl. daselbst S. 75.

[20]) In der Schrift vom Jahre 1876. (Vergl. Anm. 18.)

[21]) Dieses Verfahren ist auch aus der Kristallographie als Quenstedtsche Linearmethode bekannt.

[22]) In den N. A. 20 Tafeln mit den vollst. Figuren aller Varietäten gleichflächiger Polyeder, in denen sich gleicheckig-gleichflächige Polyeder höherer Art vorfinden.

[23]) Vergl. N. A. S. 34—42.

[24]) N. A. S. 75—92.

absolute Größe des Gebildes gleichgültig ist — C als Maßeinheit, so ist bekanntlich $A_h = \frac{C}{3}\sqrt{3}$ und $B_h = \frac{C}{3}\sqrt{6}$. Nimmt man nun auf sämtlichen Flächen-

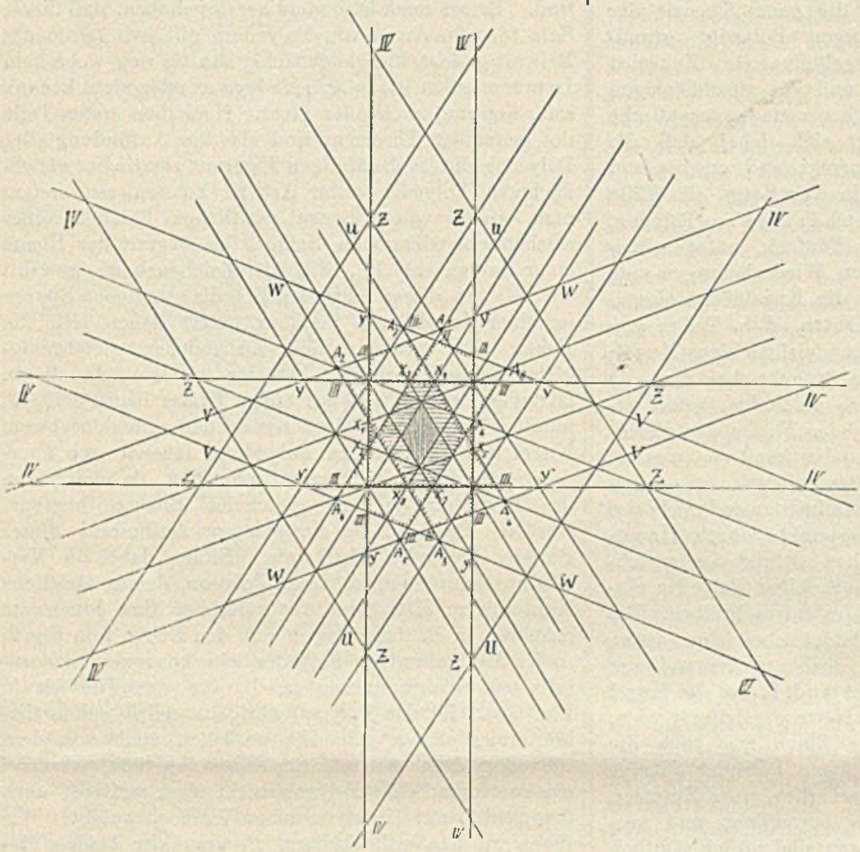


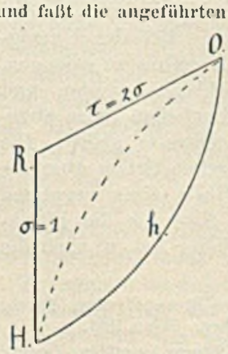
Fig. 3.

achsen Punkte an im Abstande $A = A_h \cdot \tau$ vom Zentrum des Hexaeders, auf sämtlichen Kantenachsen im Abstande $B = B_h \cdot \sigma$, wobei τ und σ reelle Parameter sind, größer als 1 und legt durch die Endpunkte jeder der Achsen C und je zweier Nachbarachsen A und B die Ebenen, also in Summa 48 Ebenen, so entsteht das allgemeinste gleichflächige Polyeder des Typus, das Hexakisoktaeder. Soll es konvex sein, so dürfen σ und τ die Werte $\frac{3}{2}$ und 3 nicht überschreiten. Fällt eine seiner Flächen in die Ebene einer der drei Nachbarflächen, so ergeben sich die übrigen vollzähligen Polyeder desselben Typus, d. h. solche, denen noch die volle Anzahl der Symmetrieebenen zukommt, nämlich das Ikositetraeder, Triakisoktaeder und Tetrakishexaeder, wonach dann zwischen den σ und τ bestimmte Relationen bestehen. Für das Rhombendodekaeder, Oktaeder und Hexaeder haben σ und τ bestimmte feste Werte. Es existiert danach nur ein Rhombendodekaeder, während es z. B. eine einfach unendliche Reihe von Triakisoktaedern gibt, wie dies ja aus der Kristallkunde bekannt ist.[25]) Hiernach könnte es scheinen, als sei die Möglichkeit, sämtliche vollständige Figuren der gleichflächigen Polyeder zu konstruieren, überhaupt zu verneinen, aber es hat sich gezeigt, daß die Ausführung für alle erdenklichen Werte der σ und τ glücklicherweise nicht nötig ist.

Auf den dritten Typus will ich nur noch hindeuten. Dieselbe Konstruktion, die wir soeben an den Achsen des Hexaeders vornahmen, wiederholen wir an denen des Dodekaeders. Das 120-flächige entstehende Polyeder, das Dyakishexakontaeder, dem also die $12 + 20 + 30$ Achsen des Dodekaeders zukommen, gibt dem Typus den Namen und die speziellen Polyeder entstehen dann ebenso wie vorher durch Zusammenfallen der Ebenen der Nachbarflächen, wobei für die neuen Parameter σ und τ analoge Betrachtungen anzustellen sind.[26]) Um nun die vollständige Figur eines bestimmten gleichflächigen Polyeders wirklich zu konstruieren, es ist dies offenbar eine Aufgabe der darstellenden Geometrie, hat man analytisch-geometrisch die Gleichungen seiner sämtlichen Flächen, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufzustellen und die Schnittlinien aller Ebenen mit der Bildebene, die

---

[25]) Die Bedingungen, denen σ und τ für die speziellen vollzähligen Polyeder des Typus genügen, sind: $\tau = \frac{\sigma}{2-\sigma}$, Deltoidikositetraeder: $\tau = 2\sigma$, Triakisoktaeder; $\sigma = 1$, τ beliebig zwischen 1 und 2, Tetrakishexaeder; während sich für $\sigma = 1$, $\tau = 2$ das Rhombendodekaeder und für $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$ das Oktaeder ergibt. $\sigma = 1$, $\tau = 1$ kennzeichnet das Hexaeder. Vergl. N. A. S. 79. Betrachtet man σ und τ als rechtwinkl. Koordinaten und faßt die angeführten Gleichungen als solche von Kurven auf, so stellen $\sigma = 1$ und $\tau = 2\sigma$ die von 2 Geraden dar (s. d. Fig.); die Gl. $\tau = \frac{\sigma}{2-\sigma}$ ist die einer Hyperbel, deren ein hier zu verwendender Ast h durch die Punkte $\sigma = 1$, $\tau = 1$ (Hexaeder) und $\sigma = \frac{3}{2}$, $\tau = 3$ (Oktaeder) verläuft. R hat die Koord. $\sigma = 1$, $\tau = 2$ für das Rhombendodekaeder. Die Wertsysteme σ, τ die zu Punkten innerhalb des von den drei Kurven eingeschlossenen Gebietes gehören, sind Parameter konvexer Hexakisoktaeder. Vergl. N. A. S. 81.



[26]) Vergl. N. A. S. 163—186. Bedeutet φ den Winkel, den eine fünfzählige und benachbarte dreizählige Achse des Dodekaeders bilden, so bestehen für die Parameter σ, τ der speziellen vollzähligen gleichflächigen Polyeder des Dyakishexekontaedertypus die Bedingungen: $\tau = \frac{\sigma}{(4 - \sigma \cot^2 \varphi) \cos^2 \varphi}$, Deltoidhexekontaeder; $\tau = \frac{\sigma}{\cos^2 \varphi}$, Triakisikosaeder; $\sigma = 1$, τ beliebig, Pentakisdodekaeder, während sich für $\sigma = 1$, $\tau = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$

Distanzen der Achsenpunkte in ihr, d. h. die Abstände der Punkte, in denen sie von den verlängerten Achsen des Polyeders geschnitten wird, rechnerisch zu bestimmen und dann mit möglichster Genauigkeit das Bild zeichnerisch zu entwerfen. In der Abhandlung der Acta habe ich für sämtliche vollzählige gleichflächige Polyeder der drei Typen die Rechnung allgemein durchgeführt und für die nötigen Werte der σ, τ die Zeichnungen gegeben,[27]) gehe aber hier nicht weiter darauf ein. — Es ist nun noch der zweiten Konstruktion, die nach dem Theorem von Heß möglich ist, zu gedenken. Legt man nämlich von einer Ecke eines gleicheckigen Polyeders durch die sämtlichen übrigen die Diagonalebenen, und wiederholt dies an allen Ecken, so ergibt sich als innerster Kern, der von einer bestimmten Zahl gewisser gleichweit vom Zentrum abstehender Ebenen gebildet wird, unter Umständen ein gleichflächiges Polyeder erster Art; es ist aber sofort ersichtlich, daß die Konstruktion in diese Form ihrer Kompliziertheit wegen im allgemeinen unausführbar bleibt. Dennoch habe ich sie besonders verwandt, um das Vorhandensein gewisser Polyeder überhaupt zu erschließen. Hierzu sei noch auf die Fadenmodelle hingewiesen, die dadurch entstehen, daß bestimmte Diagonalen zwischen den Ecken der äußeren gleicheckigen Hülle die Kanten des einbeschriebenen Polyeders höherer Art darstellen.

Nach diesen allgemeinen Ausführungen kommen wir nun zurück zur geschichtlichen Entwicklung des Problems. Um die kontinuierlichen konvexen Polyeder abzuleiten, hatte Heß zunächst die vollständigen Figuren der gleichflächigen Polyeder, denen feste Werte der σ, τ zukommen, untersucht und dadurch die Grenzflächen von 4 solchen Polyedern gefunden, zwei aus der Figur des Ikosaeders, die beiden andern aus der des Triakontaeders. Die beiden erstgenannten haben neunkantige Grenzflächen, nämlich die beiden Neunecke mit den Ecken *I* und *II* in Fig. 2, die aus der Triakontaederfigur erhaltenen besitzen zwölfkantige Grenzflächen, die von den Punkten *III* und *IV* in Fig. 3 gebildet werden und alle haben einfache dreikantige Ecken, die mit denen gewisser gleicheckiger Polyeder des Dyakishexekontaedertypus zusammenfallen.[28]) Weiter gelang es nun Heß leicht, die vier zu diesen polar-reziproken gleicheckig-gleichflächigen Polyeder aufzufinden.[29]) Ebenso wie nämlich die Varietäten der gleichflächigen Polyeder erster Art durch Variation der genannten Parameter σ und τ erhalten werden, ergeben sich alle gleicheckigen Polyeder erster Art, die jenen polar zugeordnet sind, durch Variation gewisser Parameter s und t, die die Weise der Abstumpfung der Ecken und Kanten der regulären Polyeder bestimmen, aus denen sie abzuleiten sind. Diese Parameter s, t genügen für polar-reziproke Polyeder den Gleichungen $\sigma \cdot s = 1$ und $\tau \cdot t = 1$.[30]) Besitzt nun ein gleicheckig-gleichflächiges Polyeder höherer Art einen Kern des Parameterpaares σ, τ und eine Hülle mit den Parametern s, t, so sind Kern und Hülle des polar-reziproken ebenfalls gleicheckig-gleichflächigen Polyeders durch die Parameterpaare $\sigma' = \frac{1}{s}$, $\tau' = \frac{1}{t}$ und $s' = \frac{1}{\sigma}$, $t' = \frac{1}{\tau}$ charakterisiert, d. h. Kern und Hülle des einen Polyeders ist reziprok zu Hülle und Kern des anderen, wonach also das eine mit dem andern vollkommen bestimmt ist. Aus den gleicheckigen Hüllen der vier ersten Heßschen Polyeder ergaben sich ihm also die Parameter σ, τ für die vollständigen Figuren der übrigen.[31]) — Mit diesen

das Triakontaeder und für $\sigma = 3\tan^2\varphi$, $\tau = \frac{3\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi}$ das Ikosaeder ergibt. Für das Dodekaeder war $\sigma = 1$, $\tau = 1$. Die Maximalwerte von σ und τ sind die des Ikosaeders, wenn sich nur konvexe gleichfl. Polyeder des Typus ergeben sollen. Die geom. Diskussion der Gln. vergl. N. A. S. 170.

[27]) Vergl. N. A. S. 79ff u. S. 165ff, sowie die Zeichnungen der Taf. 1–2).

[28]) Von den beiden Polyedern, deren Grenzflächen sich in der vollständigen Figur des Ikosaeders befinden, ist nach der Bezeichnung von Heß das erste ein $20 \cdot (3 + 2 \cdot 3)_2$-flächiges $60(3)_1$-Eck der fünften Art. Danach sind von den 9 Kanten jeder Fläche je 3 bezw. $2 \cdot 3$ für sich untereinander gleich und die Fläche ist von der zweiten Art. Die Ecken des Polyeders sich zugleich die der Archimedischen Varietät des $(12 + 20 + 30)$-flächigen 60-Ecks erster Art. Projiziert man das Polyeder höherer Art aus seinem Zentrum auf die umbeschriebene Kugel, so wird diese fünfmal lückenlos überdeckt. Das zweite aus dem Ikosaeder erhaltene Vielflach ist ein $20 \cdot (3 + 2 \cdot 3)_4$-flächiges $60(3)_1$-Eck der 25. Art. Die äußere von den Ecken gebildete Hülle ist ein besonderes $(12 + 20)$-flächiges $12 \cdot 5$-Eck mit den Parametern (vergl. die folgende Anm. 30) $s = 1$, $t = \frac{\sqrt{5}+2}{5}$. Die aus der vollständigen Figur des Triakontaeders erhaltenen Polyeder sind: Das $30 \cdot (4 + 4 + 4)_3$-flächige $2 \cdot 60\,(3)_1$-Eck der 15. Art mit der Fläche *III* in Fig. 3, die dreimal je 4 unter sich gleiche Kanten besitzt. Die Hülle des Polyeders ist eine Varietät des $(12 + 20 + 30)$-flächigen $2 \cdot 60$-Ecks für die Parameterwerte $s = \frac{11 + 3\sqrt{5}}{19}$, $t = \frac{21\sqrt{5} + 20}{95}$, dessen Flächen dreierlei Kantenzahl halbreguläre, d. i. gleicheckige Zehnecke, Sechsecke und Vierecke (d. i. Rechtecke) sind. Das zweite Polyeder, dessen Fläche das Zwölfeck *IV* in der Triakontaederfigur ist, bezeichnen wir als $30 \cdot (4 + 4 + 4)_5$-flächiges $2 \cdot 60\,(3)_1$-Eck der 45. Art. Die Projektion seiner Oberfläche auf die umbeschriebene Kugel würde diese also 45 mal lückenlos überdecken. Das äußere gleicheckige Polyeder erster Art ist die Archimedische Varietät des $(12 + 20 + 30)$-flächigen $2 \cdot 60$-Ecks für $s = \frac{3\sqrt{5}-1}{6}$, $t = \frac{\sqrt{5}}{3}$, dessen Flächen 12 reguläre Zehnecke, 20 reguläre Sechsecke und 30 Quadrate sind. Die Figuren 17, 16, 19 und 10 der Tafel zeigen diese vier Heßschen Polyeder in der gegebenen Reihenfolge.

[29]) Die zum zweiten, dritten und vierten der in Anm. 28 beschriebenen polar-reziproken Vielflache sind in Fig. 22, 20 und 24 der Tafel dargestellt. Ueber das fehlende Polyeder vergl. V. u. V. S. 208. Anm. 3.

[30]) Es werden die gleicheckigen Polyeder erster Art des Hexakisoktaedertypus aus dem Oktaeder mit der Flächenachse C, der Eckenachse $A_0 = C\sqrt{3}$ und der Kantenachse $B_0 = \frac{C}{2}\sqrt{6}$ durch gerade, zu den Achsen senkrechte Abstumpfung der Ecken und Kanten erhalten. Sind die Längen der vierzähligen und zweizähligen Achsen des entstehenden Polyeders $A = A_0 \cdot t$ und $B = B_0 \cdot s$, worin s und t die oben genannten Parameter bedeuten, die für das allgemeinste gleicheckige Polyeder des Typus beide variabel und nur an bestimmte Grenzen gebunden sind, wenn das Polyeder konvex bleiben soll, so ergeben sich für die besonderen Polyeder wieder bestimmte Bedingungen zwischen ihnen, die man sofort aus denen für die σ, τ der gleichflächigen ableiten kann, wenn man ihnen σ und τ durch $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{t}$ ersetzt: z. B. lautet die Gl. zwischen s und t für das $(6 + 8 + 12)$-flächige 24-Eck $t = 2s - 1$, usw. Vergl. N. A. S. 92. Für den Dyakishexekontaedertypus gelten analoge Betrachtungen, N. A. S. 184 ff.

[31]) Von den in Anm. 29 eingeführten Polyedern soll nur das in Fig. 22 dargestellte weiter erläutert werden. Nach den allgemeinen Betrachtungen ist es als $20 \cdot (3 + 2 \cdot 3)_4$-eckiges $60(3)_1$-Flach der 25. Art zu bezeichnen, dessen innerste Zelle das Pentakisdodekaeder für $\sigma = 1$, $\tau = \frac{5}{\sqrt{5}+2} = 5(\sqrt{5} - 2)$, dessen äußere Hülle das Dodekaeder ist. Die Grenzfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck und die 20 Ecken des Polyeders sind neunkantig und von der vierten Art, d. h. ziemlich komplizierte sternförmige Ecken, wie die Abbildung des Modelles erkennen läßt. Die äußeren Hüllen der letzten Heßschen Polyeder, Fig. 20 und 24 der Tafel sind beidemal das Triakontagon, das aus dem Dodekaeder durch gerade bis zur Mitte der Kanten reichende Abstumpfung der Ecken entsteht

acht Polyedern war die Zahl der konvexen kontinuierlichen tatsächlich erschöpft, soweit sie sich aus den vollständigen Figuren fester gleichflächiger Polyeder ableiten ließen und es hat sich überhaupt nur noch ein (neuntes) Polyeder ergeben, das dem Hexakisoktaedertypus zugehört, dessen Kern und Hülle polarreziprok sind und das autopolar ist, wonach sich bei der Konstruktion des reziproken Polyeders das ursprüngliche wieder ergibt.[32]) Ich habe dieses Polyeder erst gelegentlich der weiteren Untersuchungen gefunden. Soweit, m. H.! die Ergebnisse, wie ich sie, abgesehen von dem zuletzt Gesagten, in meinem Buche vom Jahre 1900 ausführlich dargestellt habe. Ich wende mich nun zum zweiten Teile meines Vortrages, der Besprechung der nichtkonvexen und diskontinuierlichen Vielflache. — Bei Bestimmung der regulären Sternpolygone hatte schon Poinsot nur die kontinuierlichen Vielecke beachtet und die diskontinuierlichen ausdrücklich beseitigt, obgleich die analytische Behandlung des Problems ihnen bekanntlich als Sternpolygonen ebenfalls Existenzberechtigung zugesteht, da sie ja alle wesentlichen Eigenschaften mit den kontinuierlichen teilen. Deshalb darf es nicht wundernehmen, wenn endlich Heß die Konsequenz zog und sie den kontinuierlichen als völlig ebenbürtig beifügte.[33]) Dasselbe tat er folgerichtig mit den diskontinuierlichen Polyedern, die bis dahin z. B. bei Wiener nur ganz nebensächlich behandelt worden waren. Dieser erwähnt wohl die konzentrischen Anordnungen von Tetraedern, Hexaedern und Oktaedern, erblickt aber in ihnen offenbar keine Sternpolyeder. Die eingehende Untersuchung der diskontinuierlichen Polyeder hat Heß an verschiedenen Stellen seiner veröffentlichten Arbeiten versprochen, doch das Versprechen nicht mehr einlösen können. Ebenso ist er über einige kurze Anläufe in der Aufzählung der nichtkonvexen Polyeder nicht hinausgekommen, doch hat er wenigstens die allgemeine Theorie entwickelt, deren Grundzüge bereits von Moebius festgelegt waren. Indem er den für die konvexen Polygone und Polyeder bereits erörterten Begriff der Art auf die nichtkonvexen Polyeder übertrug[34]) gelang ihm die Ableitung der fundamentalen nach ihm benannten Relation, die zwischen den Anzahlen der Begrenzungsstücke jedes beliebigen Polyeders und seiner Art bestehen und mit Zugrundelegung der Vorschriften von Moebius für die Bestimmung des Inhaltes eines Polygones und Polyeders[35]) teilte er alle nichtkonvexen Polyeder in zwei Klassen, je nachdem nämlich ihr Inhalt von Null verschieden ist, oder identisch verschwindet. Ich habe diese Polyeder der zweiten Klasse kurz als Nullpolyeder bezeichnet. Wie einem überschlagenen Vierecke, dessen absolut genommene Zellen kongruent sind, der Inhalt Null zuzuschreiben ist, da den Zellen die entgegengesetzten Koëffizienten + 1 und — 1 zu erteilen sind, so existieren nichtkonvexe Polyeder, bei denen neben jeder positiven räumlichen Zelle eine absolut gleiche negative desselben Koëffizienten auftritt. Der Inhalt eines solchen Polyeders ist dann Null, obgleich es dem Moebiusschen Kantengesetz genügt und die gesamte Oberfläche eine innere und äußere Seite besitzt, wonach ein auf der Außenseite wandernder Punkt nicht ins Innere dringen kann, ohne die Fläche zu durchsetzen, diese also zweiseitig ist. Die einfachsten Nullpolyeder sind die Stephanoide, deren Grenzflächen überschlagene Vierecke der eben geschilderten Art sind, während an vielen komplizierteren Nullpolyedern besonders die in Fig. 4a gezeichneten Sechsecke dritter Art auftreten. Bei Umfärbung der Innen- und Außenseite der Oberfläche geht jedes Nullpolyeder, ebenso wie dieses Sechseck bei Umkehrung des Perimeters in sich selbst über.[36]) Jedem nichtkonvexen zweiseitigen Polyeder der ersten Klasse nach Heß kann aber durch passende Wahl der Außenseite der Oberfläche ein positiver von Null verschiedener Inhalt zuerteilt werden, während bekanntlich bei den einseitigen Moebiusschen Polyedern, unter denen es auch gleicheckig-gleichflächige Individuen gibt, von einem Inhalt überhaupt nicht gesprochen werden kann. (Schluß folgt.)

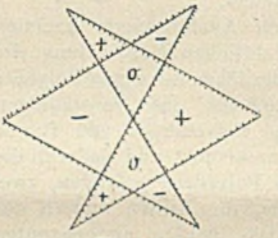


Fig. 4a.

Elektrostatische Versuche.

Demonstrationsvortrag auf der Hauptversammlung zu Dresden.*)

Von H. Lohmann (Dresden).

Der Vortragende erläuterte an der Hand von schematischen Zeichnungen den Unterschied zwischen neben- und hintereinander geschaltenen Leydener Flaschen und zeigte, daß die Kapazität von drei hintereinander verbundenen Flaschen der neunte Teil des Fassungsvermögens derselben Batterie bei Schaltung auf Menge ist. Dies Ergebnis wurde praktisch bestätigt

---

[32]) Sind bei einem gleicheckig-gleichflächigen Polyeder höherer Art das innere gleichfl. Polyeder und die äußere gleicheckige Hülle polar-reziprok, d. h. genügen ihre Parameter σ, τ und s, t den Gleichungen $s\sigma = 1$, $t\tau = 1$, so besitzt das polar-reziproke Polyeder höherer Art offenbar Kern und Hülle derselben Parameterwerte; doch sei bemerkt, daß diese Bedingungen nur notwendig, aber nicht hinreichend sind, um das Polyeder als sich selbst reziprok (autopolar) anzusprechen. Vergl. N. A. S. 23. Das neunte konvexe gleicheckig-gleichfl. Polyeder, das den Heßschen hinzuzufügen ist, findet sich N. A., S. 161 beschrieben.

[33]) Bes. in der Schrift Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone. Kassel 1874.

[34]) Für jedes beliebige n-eck ist die Artzahl a definiert durch die Gl.: $U = 2a\pi$, worin U die Summe der Umfangswinkel (Außenwinkel) des Polygons bedeutet, und man findet $a = \frac{n + 2\varkappa - q}{2}$, wenn $\varkappa$ die Anzahl der überstumpfen Innenwinkel und $q\pi$ die ganze Innenwinkelsumme ist. Bei entgegengesetzter Schraffierung des Perimeters sei die Art a'. Dann gilt der Satz: $a + a' = n$. Für konvexe Polygone ist a identisch mit der Anzahl der Kreisbedeckungen. Bei jedem Polyeder gilt für die Artzahl A, d. h. die Anzahl der Kugeln, die sich ergibt, wenn man die Summe aller Polarecken der Ecken des Polyeders bildet, die Gleichung: $2A = \sum a + \sum \alpha - \sum \varkappa - K$. Darin bedeutet $\sum a$ die Summe der Artzahlen aller Flächen, $\sum \alpha$ die Summe der Artzahlen aller Ecken, $\sum \varkappa$ die Zahl der an sämtlichen Grenzflächen auftretenden überstumpfen Kantenwinkel und K die Zahl der Kanten des Polyeders. Ist bei entgegengesetzter Färbung des Polyeders die Artzahl A', so gilt wieder der Satz: $A + A' = K$. Die obige Gl. geht für einfache kugelartige (Eulersche) Polyeder, in denen $\sum \varkappa = 0$ ist und $\sum a$ und $\sum \alpha$ die Anzahlen der Flächen und Ecken selbst sind, in die Eulersche Gl. $2 = f + e - k$ über, da für sie $A = 1$ ist. Für konvexe Polyeder wird A identisch mit der Anzahl der Kugelbedeckungen. Vergl. V. u. V. S. 4, 177 u. 213. N. A. S. 17—19.

[35]) Vergl. Moebius, Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. Ges. Werke II. S. 475 ff. , Ueber den Inhalt beliebiger Polygone und Polyeder V. u. V. S. 6 u. 69.

[36]) Ueber Nullpolyeder, deren Inhalt identisch verschwindet, ohne daß die Flächen, deren Inhalt Null ist, kongruente Zellen besitzen. Vergl. N. A. S. 305 ff.

*) S. Unt.-Bl. XIII, S. 62.

mit Hilfe einer Vorrichtung, die es ermöglichte, leicht beide Arten von Schaltungen in einander überzuführen. Gab die Batterie „auf Menge geschaltet“ bei konstantem Ladungsstrom in einer bestimmten Zeit eine Selbstentladung, so gab sie auf Spannung geschaltet in derselben Zeit bei derselben Funkenstrecke neun Selbstentladungen. — Wurde so der Unterschied der Kapazitäten durch die eine Batterie erläutert, so führte der Vortragende mit Hilfe einer anderen Batterie von sechs großen Flaschen die Wirkung der Umschaltung auf die dann auftretende Spannung vor. Verbindet man sechs nebeneinander geschaltete Flaschen plötzlich hintereinander, so fällt die Kapazität auf den 36. Teil, und die Spannung steigt auf das sechsfache einer Flasche. Daß nun dabei die Funkenlänge nicht etwa ebenfalls auf das sechsfache steigt, sondern ganz anderen komplizierten Gesetzen*) folgt, zeigte der Vortragende, indem er Funken von über 30 cm Länge überspringen ließ, während jede einzelne Flasche höchstens 2 cm Funkenweite gestattete. Der Vortragende erwähnte noch, daß der von ihm konstruierte Apparat vollständig den Henleyschen Entlader ersetzt und daß bei Anwendung der Umschaltevorrichtung sich leicht und schnell Spannungen von über 250 Kilovolt herstellen lassen. Zum Schlusse erklärte der Vortragende eine Vorrichtung, mit Hilfe deren mehrere Fallversuche im luftleeren Raume nacheinander ausgeführt werden können. Die sämtlichen benutzten Apparate waren von der Dresdener Firma Meiser & Mertig hergestellt worden.

Zur Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

Von Prof. J. Schacht (Berlin).

Errichtet man in zwei beliebigen Punkten A und B einer Geraden (Fig. 1) die Lote AA' und BB' und

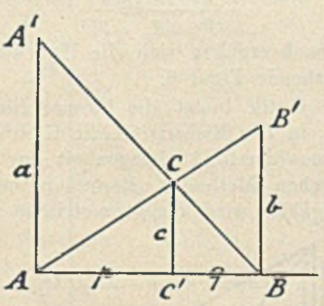


Fig. 1.

fällt von dem Schnittpunkte C der Linien AB' und $A'B$ das Lot CC', so besteht zwischen den drei Loten a, b, c die Beziehung

$$\text{1)} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Denn es gelten die Gleichungen

$$\text{2)} \qquad \frac{c}{a}=\frac{q}{p+q}$$

$$\text{3)} \qquad \frac{c}{b}=\frac{p}{p+q},$$

aus denen durch Addition die Gleichung 1) hervorgeht. Für Schüler, welche die ersten Kenntnisse in der analytischen Geometrie haben, führt man den Beweis passend in folgender Weise. Faßt man A als Anfangspunkt der Koordinaten, die Richtungen AB und AA' als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Linie $A'B$

$$\frac{x}{p+q}+\frac{y}{a}=1,$$

die der Linie AB'

$$y=\frac{b}{p+q}\cdot x.$$

Hieraus ergibt sich für die Abscisse des Schnittpunktes der Wert

$$x=\frac{a\cdot(p+q)}{a+b}$$

und für die Ordinate

$$y=\frac{ab}{a+b}.$$

Letztere ist also unabhängig von p und q, genügt der Gleichung

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

und stimmt daher mit der Größe c überein.

Die Gleichung 1) und die beiden Beweise gelten auch für den allgemeineren Fall, daß die Linien AA', BB', CC' parallel sind, ohne auf AB senkrecht zu stehen. (Fig. 2).

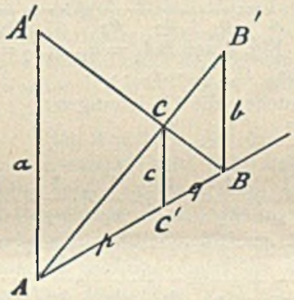


Fig. 2.

Sind von den drei Größen zwei in Zahlen gegeben, so läßt sich hiernach die dritte auf graphische Weise bestimmen. Ist c die Unbekannte, so errichtet man auf einer Geraden zwei Lote und trägt auf denselben nach Wahl eines geeigneten Maßstabes die Größen a und b ab. Hierauf verbindet man den Fußpunkt eines jeden Lotes mit dem Endpunkte des anderen und fällt von dem Schnittpunkte dieser Verbindungslinien das Lot. Aus der Länge desselben ergibt sich mit Hilfe des Maßstabes der Wert der Unbekannten c.

Liegt die Gleichung

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

vor, so hat man nur die Strecke b auf dem in B errichteten Lote statt nach oben, nach unten abzutragen und zu beachten, daß c negativ ist, wenn der Schnittpunkt C und das Lot CC' unterhalb der Linie AB liegen.

Die Gleichung der Linie L (Fig. 3) ist

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Halbiert man den rechten Winkel BOA, so erhält man den Punkt C der Linie, für welchen $x=y$ ist, und die Gleichung

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

besteht. Der Abstand des Punktes C von einer der Achsen stellt daher die Größe c dar. Die sich hieraus ergebende Konstruktion ist noch etwas einfacher,

*) Näheres s. Annalen der Physik IV, 22., 1907, S. 1008.

stimmt aber ihrem Wesen nach mit der vorigen überein, wie man erkennt, wenn man in A das Lot errichtet und bis zum Schnittpunkte mit OC verlängert. Die bisher unbestimmte Strecke AB (Fig. 1) ist hier so gewählt, daß die Linie AB' den rechten Winkel bei A halbiert.

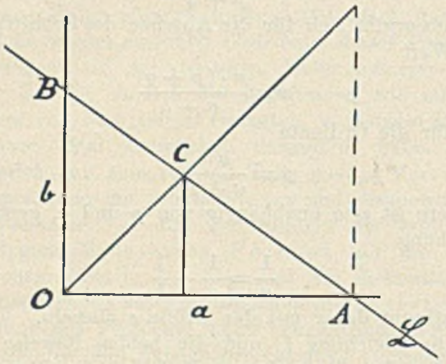


Fig. 3.

Es sei nun die allgemeinere Gleichung

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\frac{1}{a_n}$$

gegeben. In Fig. 4 sei $BA_1=a_1$, $AA_2=a_2$, $AA_3=a_3 \cdots C_2C_2'=x_2$, $C_3C_3'=x_3 \cdots$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\frac{1}{x_2}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$$

$$\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}.$$

Die Größe a findet man daher in folgender Weise: Man errichte in zwei beliebigen Punkten A und B einer Geraden Lote, mache $BA_1=a_1$, $AA_2=a_2 \cdots AA_n=a_n$, ziehe die Linien AA_1 und A_2B, fälle von dem Schnittpunkte C_2 das Lot C_2C_2', ziehe A_3C_2', fälle das Lot C_3C_3' und so fort. Das vom Punkte C_n gefällte Lot C_nC_n' ist die Größe a.

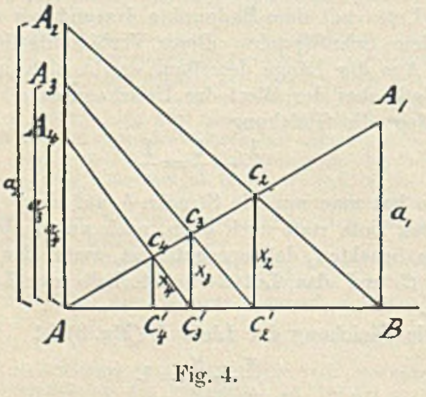


Fig. 4.

Setzt man $a_1=a_2=a_3\cdots=a_n=s$, so ist

$$\frac{1}{a}=\frac{n}{s};\quad a=\frac{s}{n}.$$

Hieraus folgt die in Fig. 5 angedeutete Konstruktion zur Herstellung aller ganzzahligen Teile einer Strecke s.

Die im vorhergehenden gegebenen graphischen Methoden können im Unterrichte der mittleren und oberen Klassen mit Vorteil benutzt werden, da die behandelten Gleichungen nicht nur in der Geometrie, sondern auch in den verschiedensten Teilen der Physik eine bedeutende Rolle spielen.

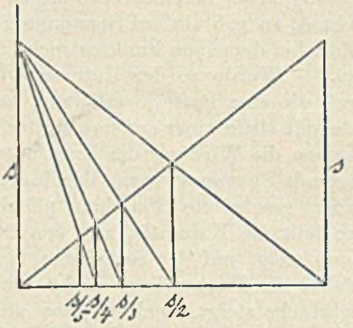


Fig. 5.

In der Geometrie kommen besonders die Beziehungen in Betracht, welche zwischen den Radien der Berührungskreise, sowie zwischen diesen und den Höhen eines Dreiecks bestehen. Nehmen wir z. B. die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Radien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Hier hat man zunächst ϱ zu bestimmen nach der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}.$$

Der dabei gewöhnlich eingeschlagene Weg ist umständlich und unübersichtlich, so daß die oben gegebene Konstruktion dem Schüler große Freude bereitet.

Sollen drei Größen x, y, z, zwischen denen die Gleichungen

$$y-x=p, \quad z-y=q$$

bestehen, eine stetige Proportion bilden, so muß

$$xz=y^2,$$

$$(y-p)(y+q)=y^2$$

oder

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{y}$$

sein. Hiernach ergeben sich die Unbekannten durch die nebenstehende Figur 6.

In der Optik bietet die Formel für Linse und Hohlspiegel, in der Elektrizität die Gleichung für den Kombinationswiderstand Gelegenheit zur Anwendung der graphischen Methode. Besonders bei häuslichen Uebungsaufgaben wird die geometrische Lösung dem

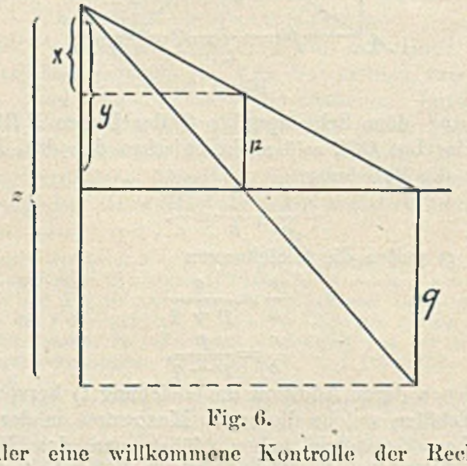


Fig. 6.

Schüler eine willkommene Kontrolle der Rechnung sein und von ihm gern ausgeführt werden. Aber auch im physikalischen Unterrichte selbst kann man, besonders wenn die Schüler Millimeterpapier bei der

Hand haben, von ihr Gebrauch machen. Sind z. B. behufs Bestimmung der Brennweite einer Linse eine Reihe von Wertepaaren a, b durch Versuche ermittelt, so läßt man die Schüler in Gruppen die Versuchsergebnisse gleichzeitig bearbeiten und erhält auf diese Weise sehr schnell die entsprechenden Werte von f.

Aus den Gleichungen 2) und 3) folgt

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}.$$

Soll daher mit einer Linse von der Brennweite f eine n-fache Vergrößerung hergestellt werden, so wird man, um a und b zu finden, folgendermaßen verfahren: Man mache das Lot CC' gleich f, wähle AC' beliebig, BC' n-mal so groß, errichte die Lote in A und B und bestimme ihre Längen durch die Linien AC und BC.

Auch auf die algebraischen Aufgaben sei hingewiesen, welche die Form haben: Ein Zuflußrohr liefert 1 cbm Wasser in t_1 Sekunden, ein anderes in t_2 Sekunden; in welcher Zeit werden beide Röhren zusammen 1 cbm liefern? Sie führen auf die Gleichung

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}.$$

Knüpft man diese Aufgaben an wirklich gemachte Versuche und Messungen an, so wird die Uebereinstimmung des Versuches mit rechnerischer und geometrischer Lösung den Schülern die größte Befriedigung gewähren. Unter Benutzung von zwei Hebern verschiedenen Querschnittes, einem großen Becherglase, einem Meßglase und einer Uhr sind solche Versuche von den Schülern selbst bequem anzustellen. Nur ist zu beachten, daß in dem Becherglase, aus welchem das Wasser mit den Hebern entnommen wird, während des ganzen Versuches dieselbe Druckhöhe herrscht. Man erreicht dies am einfachsten, wenn man das Glas in ein größeres Gefäß setzt und nun mit Hilfe der Wasserleitung zum Ueberlaufen voll hält.

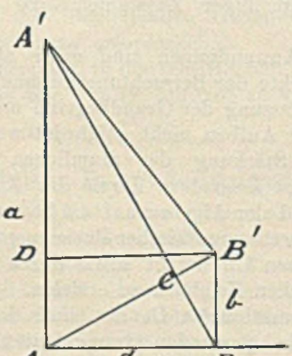


Fig. 7.

Der für die zeichnerische Bestimmung des Punktes C (Fig. 1) günstigste Fall ist der, wo die beiden Linien AB' und $A'B$ sich senkrecht durchschneiden. Dies kann durch passende Wahl der Strecke AB erreicht werden. Sind die Winkel bei C (Fig. 7) Rechte, so ist

$$AA'^2+BB'^2=AB^2+A'B'^2$$

oder

$$a^2+b^2=d^2+A'B'^2.$$

Da nun aus dem Dreiecke $A'B'D$

$$A'B'^2=d^2+(a-b)^2$$

folgt, so ist

$$a^2+b^2=2d^2+(a-b)^2$$

oder

$$d=\sqrt{ab}.$$

Man wird daher zur Bestimmung von c den Abstand der beiden Punkte A und B so wählen, daß er dem geometrischen Mittel zu a und b etwa gleichkommt.

Die mathematischen und die naturwissenschaftlichen Zahlen.

Von K. Schreber (Greifswald).

In Nummer 2 des laufenden Jahrganges dieses Blattes*) behandelt Herr Kullrich die Frage der Korrektheit von Gleichsetzungen in einer mir recht sympathischen Weise. Es kann nicht streng genug darauf hingewiesen werden, daß Gleichungen, wie die von ihm angeführte $\frac{51}{2}=25\frac{1}{2}\,m$ unzulässig sind. Ich schreibe in ähnlichen Fällen $\left(\frac{51}{2}=25\frac{1}{2}\right)m$; das ist eine zwar wenig schön aussehende, aber sehr bequeme Methode, um in einem längeren Ausdruck Zwischenrechnungen ausführen zu können, ohne gleich den ganzen Ausdruck hinschreiben zu müssen. Ebenso ist mit K. zu tadeln die unrichtige Stellung von Gleichheitszeichen zu Bruchstrich. Ich vermute, diese üble Angewohnheit rührt von den im ersten Rechenunterricht üblichen schrägen Bruchstrichen her; es muß hier schon die Reformation einsetzen.

Aber gegen einen Punkt der Darstellung muß ich mich doch wenden. Der Verfasser will nicht, daß man schreibe

$${}^{10}\log 2=0{,}301\ 030\ 0,$$

weil der Definition entsprechend ${}^{10}\log 2$ eine irrationale Zahl ist. Wollte man soweit gehen, so müßte das Gleichheitszeichen überall da vollständig wegfallen, wo man mit naturwissenschaftlichen Zahlen rechnet. Diese Zahlen sind niemals mit der durch die Definition verlangten Genauigkeit anzugeben, weil bei sämtlichen zu ihrer Festsetzung gemachten Beobachtungen Fehler gemacht wurden. Hier muß der Schüler von Anfang an daran gewöhnt werden, schon in der aufgeschriebenen Zahl ihre Genauigkeit anzudeuten. Am bequemsten geschieht dieses dadurch**), daß man festsetzt: es dürfen in keiner Zahl mehr Ziffern angegeben werden, als daß die vorletzte noch vollständig richtig sein muß, die letzte dagegen bis auf einige Einheiten ihres Stellenwertes falsch sein darf.

Der Temperaturkoeffizient des Volumens eines vollkommenen Gases wird definiert durch die Gleichung

$$\alpha=\frac{1}{v_e}\cdot\frac{dv}{dt},$$

in welcher man nach K. ein Gleichheitszeichen setzen darf. Unter Berücksichtigung der Regeln über die Angabe der Genauigkeit darf man aber mit demselben Recht auch den Temperaturkoeffizienten des Wasserstoffes angeben durch die Gleichung

$$\alpha=0{,}003\ 665.$$

Die von K. vorgeschlagene Andeutung, daß eine Zahl nur ein Näherungswert ist, dadurch, daß man den Buchstaben überstreicht, hilft gar nicht einmal. Nach dieser Bedingung könnte man auch schreiben

$$\bar{l}2=0{,}301\ 029\ 0.$$

Den Regeln der Genauigkeitsangabe genügt aber dieser Annäherungswert nicht.

Gesündigt wird in dieser Form vielfach bei Zinseszinsaufgaben. Stehen für den Zinsfuß nur fünfstellige

---

*) S. Unt.-Bl. 1907, S. 30.

**) Schreber-Springman: Experimentierende Physik. II. Schreibtischarbeiten.

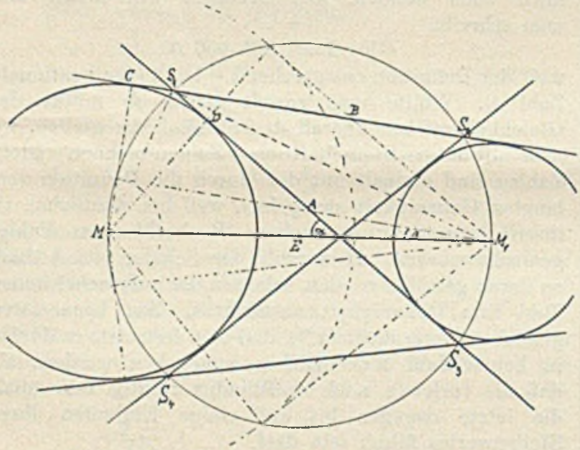
Logarithmen zur Verfügung, so erhält man, wenn das Kapital über 100 Jahr aussteht, nach den Regeln über das Rechnen mit Näherungswerten im Resultat nur einen dreistelligen Logarithmus, so daß die fünfstellige Tafel zu genau ist für die weitere Rechnung.

Man sieht, daß ohne die Regeln über die Genauigkeitsangabe einer Zahl, die bloße Andeutung, daß sie nur ein Annäherungswert ist, nicht einmal in der Mathematik, viel weniger in den Naturwissenschaften genügt; bei Kenntnis dieser Regeln ist sie aber überflüssig, und geradezu schädlich wirkt sie in den Naturwissenschaften. Schon jetzt leiden diese darunter, daß für die Unmenge von Begriffen sich keine Bezeichnungen mehr auftreiben lassen, jeder Index, jeder Strich muß für eine besondere Bedeutung des Buchstabens aufbewahrt bleiben, der Strich über ihm z. B. für den Mittelwert. Und es muß, so wertvoll dieser Vorschlag von K. vom Standpunkt des exakten Mathematikers auch ist, vom Standpunkt des Naturwissenschaftlers sehr vor ihm gewarnt werden.

Kleinere Mitteilungen.

Tangentenschnittpunkte bei zwei Kreisen.

Lehrsatz. Die äusseren Tangenten an zwei Kreisen schneiden die inneren in vier Punkten [S] auf dem Kreise, der die Zentrale zum Durchmesser hat.



Beweis. Die Zentrale bilde mit jeder inneren Tangente den Winkel α, mit jeder äußeren den Winkel β. Je eine äußere Tangente mit der parallelen Hilfstangente und je eine innere mit ihrer Hilfstangente bilden ein Parallelenpaar von gleichem Abstande. Deshalb ist z. B. $S_1 A M_1 B$ ein Rhombus, und $< A M_1 B \; (= \alpha - \beta)$ wird durch $S_1 M_1$ halbiert. Daher $< S_1 M_1 M = \frac{\alpha - \beta}{2} + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

$< C M M_1 = 90^0 - \beta$, $< D M M_1 = 90^0 - \alpha$, also $< C M D = \alpha - \beta$ und $S_1 M M_1 = \frac{\alpha - \beta}{2} + 90^0 - \alpha = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Also sind $< S_1 M M_1$ und $< S_1 M_1 M$ Komplemente, d. h. $< M S_1 M_1 = 90^0$. Das ist aber nur möglich, wenn S_1 auf dem Kreise liegt, der die Zentrale $M M_1$ als Durchmesser hat.

Um den Satz für S_2 zu beweisen, muß man die beiden Hilfskreise um M_1 und die Hilfstangenten von M aus legen. Die Winkelberechnung ist analog; als Komplemente erhält man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und $90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Folgerung. Wenn ein Tangentenpaar schon da ist, kann das andere durch den Kreis gefunden werden, der die Zentrale zum Durchmesser hat.

Zusatz. Die Verbindungslinie eines der vier Kreuzungspunkte der äußeren und der inneren Tangenten mit dem Mittelpunkt der Zentralen bildet mit der $\left\{\begin{matrix}\text{äußeren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right\}$ Tangente den Winkel $\frac{\alpha}{\beta}$, den die $\left\{\begin{matrix}\text{innere}\\ \text{äußere}\end{matrix}\right\}$ mit der Zentralen bildet. $\left(\begin{matrix}< E S_1 B = \alpha\\ < E S_1 A = \beta\end{matrix}\right)$.

M. Gericke (Hamburg).

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts mit besonderer Berücksichtigung der Vorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

Auf der westfälischen Direktoren-Konferenz, die in der Zeit vom 12. bis zum 14. Juni d. J. in Arnsberg tagte, wurde das oben genannte Thema unter Leitung des Prov.-Schulrates Prof. Dr. Norrenberg zu Münster behandelt. Die Ergebnisse der Verhandlung wurden in folgende Leitsätze zusammengefaßt:

1. Der mathematische Unterricht hat neben der Pflege der logischen Schulung die Aufgabe, die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen zu wecken und zu fördern.

2. Als besondere Aufgabe dieses Unterrichts ergeben sich hieraus die Heranziehung geeigneter Anwendungen, die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zum Aufsuchen und Erfassen gesetzmäßiger Zusammenhänge (funktionalem Denken).

3. Die Anwendungen sind mehr als bisher zum Ausgangspunkte der Betrachtung zu machen, doch darf die klare Erfassung der Grundbegriffe und der logischsystematische Aufbau nicht gefährdet werden.

4. Die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens ist besonders durch die Anwendung des Rechnens und der Algebra auf die Stereometrie, durch Heranziehung stereometrischer Beziehungen im gesamten planimetrischen Unterricht sowie durch Uebungen im stereometrischen Zeichnen zu erzielen.

5. Im funktionalen Denken sind die Schüler von Anfang an bei passenden Gelegenheiten zu üben; sie sind nach und nach mit dem Funktionsbegriff möglichst vertraut zu machen.

6. Für eine klare Erfassung des Funktionsbegriffes sind graphische Darstellungen von Funktionen und ihre Benutzung zur Auflösung von Gleichungen ein wertvolles Mittel. Doch ist streng darauf zu halten, daß der Begriff der Funktion und die Art ihrer Darstellung nicht verwechselt werden. — Es empfiehlt sich, an jeder Anstalt den Stoff nach gemeinsamer Vereinbarung auf die einzelnen Klassen zu verteilen.

7. Die planimetrischen Konstruktionsaufgaben sind nach wie vor sorgfältig zu pflegen, indessen ist auch hier eine Sichtung der bisher üblichen Dreiecksaufgaben zu empfehlen.

8. Im planimetrischen Anfangsunterricht ist der größte Wert darauf zu legen, dass die Beweise anschaulich vorbereitet werden.

9. Die geometrischen Beweise sind möglichst so zu gestalten, daß den Schülern die innerliche Ueberzeugung von der Richtigkeit der einzelnen Sätze verschafft wird, auch in der Arithmetik kommt es darauf an, daß möglichst viel direkt und anschaulich eingesehen wird.

10. In der Untersekunda der Realanstalten ist ein propädeutischer Kursus der Stereometrie und Trigonometrie in dem bisherigen Umfange beizubehalten, deshalb ist auch ferner in dieser Klasse das Rechnen mit Logarithmem zu lehren.

11. Ob und inwieweit die Schüler mit den Grundgedanken bezw. den Anfangsgründen der Infinitesimalrechnung bekannt gemacht werden sollen, muß vorläufig der Entscheidung der Fachlehrer überlassen bleiben; es ist indessen wünschenswert, daß an möglichst vielen Vollanstalten nach dieser Richtung hin Versuche gemacht werden.

---

12. Der mathematische Unterricht muß versuchen, diese Aufgaben zu erfüllen, soweit es im Rahmen der Lehrpläne von 1901 möglich ist.

13. Zugunsten der geforderten Einführung in das funktionale Denken müssen und können andere Uebungen, namentlich solche formalistischer Art, wie Umformungen arithmetischer Ausdrücke, Auflösung von Buchstabengleichungen, Berechnung fingierter ebener Dreiecke, rein rechnerische Verwendung der Volumformeln u. dgl., mehr eingeschränkt werden.

14. Eine Verminderung der Zahl der Rechenstunden in der Quinta der Gymnasien empfiehlt sich nicht.

15. Den Realschulen und Oberrealschulen bis Untersekunda ist auch fernerhin die Möglichkeit zu geben, ihren Lehrplan in gewisser Weise den örtlichen Verhältnissen anzupassen.

16. Eine Aenderung der Bestimmungen über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an Realanstalten ist dringend erforderlich.

17. Der Vorschlag, in der schriftlichen Reifeprüfung die Behandlung nur einer Aufgabe zu verlangen, ist abzulehnen.

Bücher-Besprechungen.

J. Fricks Physikalische Technik. 7. vollkommen umgearbeitete Auflage von Otto Lehmann. In 2 Bänden. I. Band, 1. Abteilung, mit 2003 Abbild. und einem Bildnis des Verfassers. XXIII und 630 S. 2. Abteilung mit 1905 Abbildungen. XX und 1001 S. Preis des ganzen Bandes geh. M 40. Braunschweig 1904/05, Vieweg & Sohn.

Das altbekannte, wohl in keiner Bibliothek einer höheren Lehranstalt fehlende Werk erscheint hier in völlig neuem Gewande. Schon äußerlich, das Format ist erheblich vergrößert, aus 725 Seiten mit 708 Figuren, die der erste Band der vorhergehenden Auflage aufweist, sind 1631 Seiten mit 3908 Figuren geworden, so daß eine Teilung des Bandes erforderlich wurde. Diese erhebliche äußere Aenderung findet ihre Erklärung nicht nur in der seitdem mächtig angewachsenen Fülle des Stoffes, sondern vor allem auch in einer wesentlich veränderten Auffassung von der Aufgabe des Werkes.

Ueber den ursprünglich verfolgten Zweck hinaus hat sich dieses Werk zu einer physikalischen Didaktik entwickelt, die allerdings ihren Ausgang von der Behandlung der Apparate nimmt, aber nach Auswahl und Anordnung des Stoffes zu einer Anleitung für die Erteilung des physikalischen Experimental-Unterrichts überhaupt geworden ist.

Der Bearbeiter, der schon die vorhergehende Auflage herausgegeben hatte, spricht sich über die Grundsätze, von denen er bei der neuen, vollständig umgearbeiteten Ausgabe geleitet worden ist, in der Vorrede eingehender aus, indem er die verschiedenen für Auswahl und Anordnung des Stoffes möglichen Prinzipien aufführt und kritisch beleuchtet. Bei der Auswahl ist er bestrebt gewesen, der Tradition folgend, möglichst vielen Ansprüchen gerecht zu werden, insbesondere auch ältere Apparate, wie sie sich in vielen Schulkabinetten finden, nicht ganz unberücksichtigt zu lassen; bei der Anordnung war ihm das „psychologische" Prinzip maßgebend, den Stoff in der Folge zu bringen, wie sich das Nachherkommende naturgemäß aus dem Vorhergehenden ergibt. Auch an sich ist diese Vorrede, die eine Menge von bedeutsamen Fragen der Didaktik streift, höchst lesenswert.

Aus alle dem ergab sich nun im Einzelnen eine wesentlich veränderte Stoffgruppierung.

Die erste Abteilung des ersten Bandes umfaßt in der Hauptsache die Technik des Physikunterrichts im engsten Sinne, zunächst die Räume und deren bauliche Einrichtung nebst Anleitung zum Gebrauch dieser Einrichtungen in 5 Kapiteln (Physikalische Demonstrationen und das Institutsgebäude — Das große Auditorium — Vorbereitungszimmer — Sammlungs- und Verwaltungsräume — Räume für Mechaniker und Diener). Schon der äußerliche Vergleich mit der alten Auflage, wo dieser Stoff auf 130 Seiten mit 65 Figuren abgehandelt wurde, zeigt die vollkommene Neuheit der vorliegenden Auflage, in der namentlich bemerkenswert ist, wie die gesamte Experimentaltechnik auf das Vorhandensein geeigneter Räume basiert wird. So werden z. B. Arbeiten, wie Beizen, Lackieren usw. hier in einem Paragraphen des fünften Kapitels abgehandelt, der die Ueberschrift „Lackierraum" trägt, u. dgl. m.

Ist in Abteilung I nun alle Anleitung zur technischen Behandlung der verschiedenen Apparate übersichtlich zusammengefaßt, so beginnt mit der zweiten Abteilung des ersten Bandes die Anweisung zur richtigen und sachgemäßen Verwertung der Apparate für die Zwecke des Unterrichts. Die Eigenart der Stoffbehandlung zeigt sich dabei schon in den Kapitelüberschriften. Nach einem einleitenden Vorabschnitt über „Messungen" folgen zwölf Kapitel: Statik — Feste Körper — Hydrostatik — Flüssigkeiten — Aërostatik — Gase — Temperatur — Wärmemenge — Dynamik — Hydrodynamik — Aërodynamik — Thermodynamik.

Einzelheiten aus der Fülle des Stoffes herauszugreifen würde zwecklos sein, so sei nur im allgemeinen bemerkt, daß, wie schon aus der Stoffeinteilung hervorgeht, hier ein wohldurchdachter Plan vorliegt, dessen festes Gefüge auch der Lehrer gern anerkennen wird, der selbst eine andere Stoffanordnung vorzieht. Ueberall ist auch der Standpunkt festgehalten, daß das Experiment niemals Selbstzweck sein kann, daß es vielmehr die Aufgabe hat, die Antworten auf die aus dem Gange des Unterrichts entspringenden Fragen zu vermitteln, indem es durch sich selbst zugleich zu einer Quelle neuer Fragestellungen wird. Dementsprechend hat der Bearbeiter auch kein Bedenken getragen, in den Gang seiner Ausführungen öfter rein theoretische, sich der mathematischen Formel bedienende Ableitungen einzufügen. Die Anweisung für den Gebrauch der einzelnen Apparate selbst wird dadurch nicht beeinträchtigt, diese ist stets durchaus praktisch gehalten und nimmt auf die Bedürfnisse des Lehrers auch insofern Rücksicht, als sie jedesmal mit Hinweisen auf Bezugsquellen ausgestattet ist.

Man kann vielleicht Bedenken hegen gegen die Ausdehnung, die der Bearbeiter dem Werke gegeben hat, von zwei Seiten her. Einmal wegen der Fülle des Stoffes, der selbst an Hochschulen entfernt nicht in dem hier angeführten Umfange erledigt werden kann. Aber mit Recht betont der Bearbeiter die Verschiedenheit der Bedürfnisse an den einzelnen Schulgattungen und der einzelnen Anstalten, für die möglichst erschöpfend zu sorgen war. Da hat jeder Lehrer seine Auswahl zu treffen, die ihm durch das sehr spezialisierte Inhaltsverzeichnis sowie durch ein umfassendes Namen- und Sach-Register im höchsten Grade erleichtert wird. Ein anderes Bedenken liegt in dem idealen Maßstab, den der Bearbeiter anlegt. Solche Vorbedingungen, namentlich hinsichtlich der bereitzustellenden Räume, wie er sie annimmt, sind in höchst seltenen Fällen verwirklicht. Indessen kann ich gerade aus meiner eigenen Unterrichtspraxis heraus nur sagen, daß die vom Verfasser gegebenen Anweisungen und Winke auch für andere, viel einfachere und primitivere Verhältnisse, wie sie wohl an der Mehrheit der höheren Provinzialanstalten bestehen, sehr verwertbar und nützlich sind. Man muß sich daraus eben soviel nehmen, wie es unter den jeweiligen Verhältnissen möglich ist. Und die Anpassung solcher für ideale Verhältnisse gegebenen Vorschriften an die Enge der praktischen Sachlage ist an und für sich von erziehlicher Bedeutung. Wenn daneben durch die Ausführungen des Buches immer wieder ein Anstoß gegeben wird, bei den zuständigen Stellen auf die Schaffung der unerläßlichen Vorbedingungen für einen gedeihlichen Physikunterricht zu dringen, so wäre das auch eine nur mit Freude zu begrüssende Wirkung.

Auf die neue Gestalt, die der zweite, voraussichtlich noch umfangreichere Band des Werkes zeigen wird, darf man mit Recht gespannt sein. Dem ganzen Werke gerade auch in der gegenwärtigen Erweiterung ist die verdiente Verbreitung in den Fachkreisen aufs Höchste zu wünschen. P.

* * *

Heussi, Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. 7. Auflage, vollständig neu bearbeitet von Dr. E. Götting, Prof. am kgl. Gymnasium zu Göttingen. Berlin 1907. Otto Salle. 8°. 475 S. Geheftet M 5.—.

Heussi, Leitfaden der Physik. 16. Auflage, neu bearbeitet von Prof. Dr. E. Götting. Berlin 1906. Otto Salle. 8°. 139 S. und Anhang über die Elemente der Chemie mit 42 S. Geheftet mit Anhang M 1.80, ohne Anhang M 1.50.

Beide Bücher hatten sich bereits in ihrer ersten Ausführung durch Heussi in fortgesetzt erweiterten Kreisen bewährt und verdienten Beifall gefunden. Sie haben beide mitgeholfen, in die heute vorwiegend anerkannte Methode des Physikunterrichts einzuführen. Insbesondere war im Leitfaden das Voranstellen der Beschreibung komplizierter Apparate oder von umfangreichen Definitionen und vorzeitiges Eingehen auf schwierigere Fragen gänzlich verworfen. Ueberall sollte mit den dem Schüler bekannten Erscheinungen der Anfang gemacht werden. Die eigene Beobachtung war dabei anzuregen und durch sich anschließende einfache Versuche zu ergänzen, so daß nachher selbst weitergehende Abstraktionen ohne besondere Schwierigkeit erreichbar werden.

Die bedeutenden Fortschritte der physikalischen Wissenschaft und ihrer Anwendungen sowie die daneben sich vollziehende gänzliche Veränderung der Unterrichtsanordnung infolge der neuen Anschauungen durften in der Schule nicht unberücksichtigt bleiben, und deshalb erwies sich das alte Lehrbuch nicht mehr ausreichend. Da war es ein glücklicher Griff, die erforderliche Umarbeitung beider Bücher in die Hand des als erfahrenen Schulmannes bekannten Professors E. Götting zu legen, der mit großem Geschick das Notwendige und Wichtige hervorzuheben, das weniger Brauchbare zurückzudrängen verstanden hat. Alle Veränderungen sind im Interesse des praktischen Bedürfnisses oder aus didaktischen Gründen sorgfältig ausgeführt.

Götting hat Heussis Lehrbuch der Physik vollständig neu bearbeitet. Es zeigt sich besonders in der Mechanik wie in den Abschnitten über Magnetismus und Elektrizität. Die jüngsten Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung sind mit berücksichtigt. Elektronen und die Funkentelegraphie sind erwähnt. Letztere allerdings allzu kurz. Auch die Luftelektrizität konnte einen etwas weiteren Raum beanspruchen, aber sie ist den neuesten Beobachtungen entsprechend auf die Jonentheorie zurückgeführt. Die Influenzmaschine von Holtz ist nach Rieß erklärt, die von Wimshurst bloß abgebildet. Die Wirkung der optischen Instrumente erfährt von den üblichen Darstellungen abweichend durch die Verwendung von Abbes Theorie eine genauere Ableitung. Beim Regenbogen sind die an den Rändern durch Beugung entstehenden Strahlen erwähnt, erklärt ist er nur nach Descartes.

Man wird meist dem Verfasser zustimmen, wenn er beim Schulbuch einen größeren Umfang möglichst zu vermeiden sucht. Er bietet jedoch auf 475 Seiten einen reichen Inhalt und bringt etwa so viel Stoff, als er auf den heutigen höheren Realanstalten mit Erfolg sich verwerten läßt. Nach der Aufnahmefähigkeit wie nach dem Interesse der Schüler kann dann der Lehrer je nach Plan und Gelegenheit das Passendste auswählen oder bevorzugen.

Die Darstellung mußte sich der Kürze befleißigen, aber sie ist sorgfältig überwacht und bleibt durchweg, selbst bei ganz knapper Fassung, deutlich genug. Wie zu erwarten war, ist für die Ableitung die induktive Form bevorzugt, aber auch die deduktive wird nicht ausgeschlossen. Daß sogar die Beziehung zwischen dem Fallraum und der Fallzeit aus dem Versuche hergeleitet ist, hält der Ref. für etwas künstlich herangezogen, doch gibt er die konsequente Durchführung zu. Das Prinzip der Erhaltung der Energie ist in der Mechanik wie in den folgenden Abschnitten gebührend hervorgehoben und neben der mechanischen Wärmetheorie wird zugleich die Hypothese der kinetischen Wärmetheorie ihrer Bedeutung entsprechend erklärt.

Verbesserungsbedürftig erscheinen dem Ref. die Zeilen 4 bis 8 oben auf der Seite 182, weil sie in der zu starken Abkürzung dem Schüler unverständlich sind. Ferner vermißt man hinter Seite 316 eine kurze Bechreibung und Abbildung der Lokomotive, wie sie sich nur im Leitfaden findet. Nach der Art des vorhergehenden Paragraphen über die Dampfmaschine ausgeführt, würde eine solche Erweiterung, trotz ausreichender Deutlichkeit, nur wenig Raum beanspruchen. Auf Seite 335 konnte die für die Wetterprognose wichtige Bewegung des barometrischen Minimums leicht hinzugefügt werden. Wie in anderen Lehrbüchern ist auf S. 359 für die elektrischen Grundversuche allein das elektrische Pendel genannt. Der Ref. zieht nach eigener längerer Erfahrung den Apparat für elektrische Grundversuche, wie er ihm seinerzeit von der Firma Stöhrer & Sohn aus Leipzig bezogen hat, weit vor. Die an einer horizontal drehbaren Glasstange befestigten Scheiben von Glas und von Hartgummi zeigen die Anziehung und Abstoßung mit ungleich größerer Sicherheit, als man sie mit dem Pendel erreichen kann.

Diese geringen Ausstellungen lassen das Gesamturteil über die Physik von Heussi-Götting unverändert. Sowohl ihre wissenschaftliche Ausarbeitung wie die Anpassung an das Bedürfnis der neuen Unterrichtsweise machen sie zu einem ganz vortrefflichen Schulbuch, das der Unterz. unbedingt empfiehlt.

Der Leitfaden der Physik erscheint in seiner neuen, 16. Auflage wesentlich verbessert und vervollständigt, er ist ein für die Unterstufe völlig abgeschlossenes Uebungsbuch, das noch weitere Verbreitung finden wird. Die Abschnitte vom Magnetismus und von der Elektrizität sind meist umgearbeitet, der über atmosphärische Elektrizität ist gerade für diese Stufe reichlich kurz. Die Erweiterung durch einen Anhang über die Elemente der Chemie ist namentlich für das Gymnasium eine zweckmäßige Verbesserung. Dort erteilt in der Regel derselbe Lehrer den Unterricht in der Physik und in der Chemie. Für die Chemie ist dabei wegen der geringen ihr zugewiesenen Stundenzahl nur selten ein besonderes Lehrbuch eingeführt. Der Schüler kann aber gerade wegen der beschränkten Stundenzahl einen gedruckten Anhalt für die ihm so notwendigen Grundlehren der Chemie nicht gut entbehren und deshalb ist ein solcher Anhang zu seiner Physik eine recht brauchbare Zugabe.

Müller-Erzbach (Bremen).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Bachmann, Fr., und Kanning, R., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 3. Heft, 3. Aufl. Leipzig 1907, Freytag. Mk. —.70.

Baur, L., Sammlung arithmetischer Aufgaben und Resultate. 2. Aufl. Horb 1907, Christian.

Bieler, A., Arithmetisches Lehr- und Uebungsbuch für Knabenmittelschulen. Teil I u. II. Leipzig 1906, Teubner.

Brüsch, W., Beschreibung der Lehrzimmer für Physik u. Chemie im Johanneum zu Lübeck. Sonderabdruck aus der Beilage des Jahresberichts 1907. Lübeck 1907, M. Schmidt.

Dennert, E., Biologische Fragen und Aufgaben für den Unterricht in der Botanik. Leipzig, Nägele.

Diels, O., Einführung in die organische Chemie. Mit 34 Textabbild. Leipzig 1907, Weber. 7.50 Mk.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr, avec la collaboration de A. Buhl. IX. Année, Nr. 4, 5. Paris 1907, Gauthier-Villars et Genève, Georg & Cie.

Fischer, K. T., Vorschläge zur Hochschulausbildung der Lehramtskandidaten für Physik. Sonderabdruck aus Natur und Schule. Leipzig 1907, Teubner. Mk. —.80.

Fischer, M., Pokornys Naturgeschichte des Tierreiches. Mit Abb. u. 29 Tafeln. 27. Aufl. Leipzig 1907, Freytag. geb. Mk. 4.—.

Geistbeck, M., Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie. Mit 116 Abb. Freiburg 1907, Herder.

ANZEIGEN.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 76
Verlag von Kagerah's technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus
F. Apels Nachf., Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate.
Apparat zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante nach Nernst
Modelle von Dach- und Brückenkonstr. nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Krystallmodelle aus Holz- u. Glastafeln

Keiser & Schmidt
Berlin N., Johannisstr. 20/21
Elektrische Messinstrumente
zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken.
Demonstrations- und Schul-Apparate.

Elektrizitäts-Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen 3.
Schalttafeln, Messinstrumente und Laboratoriums-Widerstände
für Lehr- und Projektionszwecke.
Man verlange Preisliste Nr. 12 u. 12a.

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
: : : **Physikalischen Apparaten** und : : :
: : : : **chemischen Gerätschaften** : : : :
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

Neuartige vielseitige
Projektions-Apparate
für alle Zwecke.
Gebr. Mittelstrass
Magdeburg 23.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Alleinige Fabrikanten: **Jul. Pintsch, Akt.-Ges.,** Berlin O., Andreasstr. 71/73.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung chemischer Laboratorien.

TELLURIEN,
Horizontarien, Armillarsphären, Fernrohre usw., zerleg- u. verstellbar, als „beste und billigste" allgemein anerkannt, in über 6000 Schulen bewährt.
Adolf Mang, Geographisch-Astronomischer Verlag,
Stuttgart, Reinsburgstr. 16.

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

R. Brendel
Fabrikant botanischer Modelle
Grunewald b. Berlin
Bismarckallee 37.
Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
Patent Klingelfuss.

Naturw. Lehrmittel-Institut
Wilh. Schlüter
Halle a. S.
Erzeugung und Vertrieb naturwissensch. Präparate, Sammlungen und Modelle in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mässigen Preisen. — Kataloge kostenlos.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Spectralröhren
aller Gase auch Argon, Helium etc.
Elektr. Vakuumröhren
(Geissler, Goldstein, Crookes etc.)
F. O. R. Goetze, Leipzig
Glastechnische Werkstätte.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz * Wetzlar
Optische Werke
Mikroskope, Mikrotome, Mikrophotogr. u. Projektions-Apparate
Photographische Objektive

Physikal. Apparate
Vollständige Einrichtung von physikal. Kabinetten
Ferdinand Ernecke
Berlin-Tempelhof

Alfred Brückner
Fabrik photograph. Apparate
Rabenau
bei Dresden

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Haidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Meiser & Mertig
Dresden-N. 6. Z
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
◆ **Chemische Apparate** ◆
Preisverzeichnis kostenlos

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.