

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von Bernhard Schwalbe,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 46 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder. Von M. Brückner in Bautzen, Schluß (S. 121). — Ueber den Gewichtsbegriff. Von M. Grübler in Dresden (S. 127). — Masse und Gewicht. Von K. Schreiber in Greifswald (S. 128). — Versuche mit dem Heronsball für Aetherdampfdruck. Von H. Rebenstorff in Dresden (S. 128). — Ableitung der Neperschen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie. Von Prof. Dr. Carl Schmidt in Mainz (S. 130). — Nochmals die Korrektheit von Gleichsetzungen. I. von C. Hoffmann in Schorndorf (S. 131); II. von A. Schülke in Königsberg i. Pr. (S. 132). — Berechnung trigonometrischer Zahlenausdrücke ohne Gebrauch logarithmisch-trigonometrischer Tabellen. Von Prof. Dr. R. Kreuschmer in Barmen (S. 133). — Kleinere Mitteilungen [Der pythagoreische Lehrsatz nebst seiner Erweiterung, hergeleitet aus dem Sekantensatz. — Nochmals die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. — Tangentenschnittpunkte bei zwei Kreisen] (S. 134). — Lehrmittel-Besprechungen (S. 135). — Bücher-Besprechungen S. 135. — Anzeigen.

Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder.

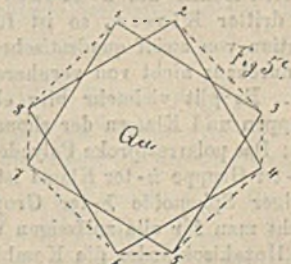
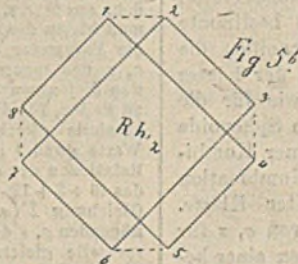
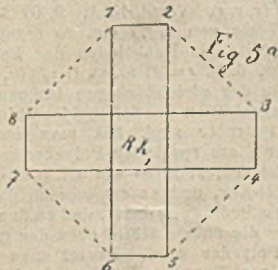
Vortrag auf der Hauptversammlung zu Dresden.

Von M. Brückner (Bautzen).

Mit einer Lichtdrucktafel.

(Schluß.)

Wir beginnen nun die Einzelbetrachtungen mit den diskontinuierlichen konvexen Polyedern, die offenbar regelmäßige oder symmetrische Kombinationen kontinuierlicher für sich schon gleicheckig-gleichflächiger Polyeder sein müssen. Dabei sind diese Einzelpolyeder entweder von der ersten Art oder selbst schon von höherer Art, aber in beiden Fällen bereits bekannt.



Nun stellen das quadratische und das rhombische Sphenoid die beiden einzigen existierenden nicht-regulären gleicheckig-gleichflächigen Polyeder erster Art dar, von denen sich je zwei einer quadratischen Säule und einem rechtwinkligen Parallelepiped ebenso einschreiben lassen, wie zwei reguläre Tetraeder bekanntermaßen einem Hexaeder einbeschrieben sind.

Aus diesen quadratischen und rhombischen Sphenoiden allein können also die diskontinuierlichen konvexen Vielfache gebildet werden, wenn die Einzelkörper erster Art sind. Eine große Anzahl solcher Sphenoidgruppierungen existiert bereits für den Doppelpyramidentypus und ihre eingehende Untersuchung bildet den ersten Teil meiner in den Nova Acta enthaltenen Abhandlung. Wir wählen hier als Beispiel des Folgenden wegen nur gewisse Gruppierungen in dem (4+4)-seitigen Prisma als äußerer gleicheckiger Hülle. Stellt in den Figuren 5a, b, c das gleicheckige Achteck 1, 2, 3... 8 die obere Deckfläche eines (4+4)-seitigen Prismas dar, so sieht man, wie sich

die Ecken dieses Prismas auf dreierlei Weise als Ecken von je zwei ihm einbeschriebenen rechtwinkligen Parallelepipeden anordnen lassen, wobei im dritten Falle das Parallelepiped zur quadratischen Säule wird. In den beiden ersten Fällen lassen sich, wie vorher bemerkt, je zwei rhombische, im letzten Falle zwei quadratische Sphenoide einschreiben und es existieren

demnach zwei Gruppierungen von je vier rhombischen und eine Gruppierung von vier quadratischen Sphenoiden im $(4+4)$ -seitigen Prisma, deren innerer Kern, wie leicht nachzuweisen ist, das der äußeren Hülle polarreziproke gleichflächige $2 \cdot 2 \cdot 4$ -Flach ist. Bei passend gewählter Länge der Hauptachse des Prismas können auch die rhombischen Sphenoiden zu quadratischen werden; wir bezeichnen diese dann als sekundäre quadratische Sphenoiden.³⁷⁾ — Kommen wir nun zur Bestimmung der Sphenoidgruppierungen des Hexakisoktaedertypus, die zunächst aus der äußeren gleich-eckigen Hülle zu erschließen sind. Das allgemeinste gleich-eckige Polyeder erster Art des Typus, das $(6+8+12)$ -flächige $2 \cdot 24$ -Eck hat zu Grenzflächen sechs $(4+4)$ -Ecke, acht $(3+3)$ -Ecke und zwölf Rechtecke und die $6 \cdot 8$ Ecken der sechs achtkantigen Flächen erschöpfen sämtliche Ecken des Polyeders. Als solche in erster Linie sind sie die Ecken von drei diesem einbeschriebenen $(4+4)$ -seitigen Prismen, wie sie vorher betrachtet wurden und es lassen sich also dem $2 \cdot 24$ -Eck soweit zwei Gruppierungen von je zwölf rhombischen und eine Gruppierung von zwölf quadratischen Sphenoiden einschreiben. Betrachtet man aber das $2 \cdot 24$ -Eck näher, so gewahrt man leicht, daß sich die 48 Ecken noch auf zweifache andere Weise als Ecken von je drei $(4+4)$ -seitigen Prismen auffassen lassen, da immer je zweimal acht Ecken in parallelen Ebenen, die senkrecht zu den vierzähligen Achsen des Polyeders sind, zu liegen kommen. Es lassen sich also noch auf vierfache Weise je zwölf rhombische und auf zweifache Weise je zwölf quadratische Sphenoiden dem gleich-eckigen Polyeder einschreiben, so daß im ganzen drei Gruppierungen quadratischer und sechs Gruppierungen rhombischer Sphenoiden zu existieren scheinen. Wie eine genaue Untersuchung aber zeigt, sind zwei der letzteren mit anderen identisch, so daß tatsächlich die rhombischen Gruppierungen sich auf vier reduzieren.³⁸⁾ Wie aus der Gesamtzahl der Flächen jeder Gruppierung, besonders aber durch Beachtung der Symmetrieverhältnisse zu schließen ist, muß die innerste Zelle jedes solchen aus zwölf Sphenoiden bestehenden diskontinuierlichen Polyeders ein Hexakisoktaeder sein, und wir können also dieselben sieben Gruppierungen durch Betrachtung der Flächenzonen des gleichflächigen Polyeders auffinden. Ordnet man nun die Flächen des Hexakisoktaeders den Ecken des $2 \cdot 24$ -Ecks zu und bezeichnet z. B. die drei Gruppierungen quadratischer Sphenoiden als solche erster, zweiter, dritter Gruppe, die für die gleich-bezeichneten Ecken des $2 \cdot 24$ -Ecks als solche erster, zweiter, dritter Klasse, so ist für eine bestimmte Kombination von zwölf quadratischen Sphenoiden die Gruppe durchaus nicht von vornherein mit der Klasse identisch. Es gilt vielmehr hier ebenso wie für die vier Gruppen und Klassen der rhombischen Sphenoiden der Satz: Das polarreziproke Polyeder zu einer Kombination i -ter Gruppe k -ter Klasse ist eine Kombination gleichartiger Sphenoiden k -ter Gruppe i -ter Klasse. Untersucht man für alle zulässigen Werte von σ, τ für konvexe Hexakisoktaeder die Kombinationen einer bestimmten, z. B. der ersten Gruppe, nach den Flächen des Kernes, so zeigt sich, daß diese Gruppierungen nach den Ecken mehreren Klassen zugehören, und es findet der Uebergang von Polyedern der einen zur

³⁷⁾ Vergl. N. A. S. 51 u. 59.

³⁸⁾ Vergl. N. A. S. 93—96.

anderen Klasse durch diejenigen Gruppierungen statt, für welche die Hüllen spezielle gleich-eckige Polyeder des Typus sind. In diesem Falle liegen offenbar, da für die 48 Ecken der Gruppierung nur noch 24 Ecken der Hülle verfügbar sind, je zwei Sphenoiden in einer Ecke des Hüllpolyeders. Für die reziproken Gruppierungen zu diesen sind dann die inneren Kerne die speziellen gleichflächigen Polyeder des Typus, und in der Ebene jeder Fläche eines solchen kommen zwei Flächen verschiedener Sphenoiden verschiedener Gruppen zu liegen, gleichsam ein diskontinuierliches $(3+3)$ -Eck bildend.³⁹⁾ In Fig. 6 a sind die Dreiecke $P_1 P_3 P_2$ und $P_1 P_4 P_5$ diese in einer Ebene einer Fläche der Archi-

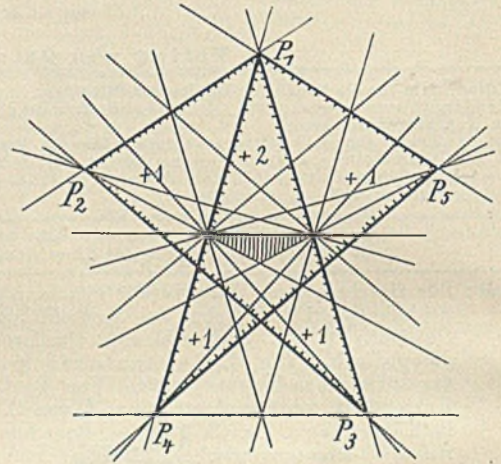


Fig. 6 a.

medischen Varietät des Trinkisoktaeders liegenden Flächen zweier Sphenoiden, die zu einer Gruppierung der ersten und zweiten rhombischen Gruppe gehören. Die Hülle des Polyeders ist die Archimedische Varietät des $(6+8+12)$ -flächigen 24 -Ecks und es fallen hier auch immer zwei Ecken verschiedener Sphenoiden in einer Ecke des Hüllpolyeders zusammen, wie aus der Anzahl der in der Figur durch jeden Punkt P

³⁹⁾ Zur näheren Erläuterung des oben Gesagten dienen die folgenden Ausführungen. Die Koeffizienten in den Gleichungen der Ebenen eines Hexakisoktaeders sind einfache Funktionen der Parameter σ und τ allein. Die Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen, die eine Ecke eines Sphenoids des zu diskutierenden Polyeders bilden, ergeben sich also durch Auflösung der drei Gleichungen nach x, y, z als Funktionen von σ, τ , etwa $x = \varphi(\sigma, \tau)$, $y = \psi(\sigma, \tau)$, $z = \chi(\sigma, \tau)$. Es sind aber auch die Parameter s, t des $(6+8+12)$ -flächigen $2 \cdot 24$ -Ecks ausdrückbar als Funktionen der Koordinaten x, y, z der Ecke, d. h. $s = \Phi(x, y, z)$, $t = \Psi(x, y, z)$. Vergl. N. A. S. 90 ff. Setzt man hierin die obigen Werte von x, y, z ein, so ergeben sich die Parameter s, t der Hülle als Funktionen der Parameter σ, τ des inneren Kernes, d. h. $s = F_1(\sigma, \tau)$, $t = F_2(\sigma, \tau)$. Um nun diejenigen Varietäten der gleichflächigen inneren Kerne zu finden, für die die Außenhüllen der Sphenoidkombinationen spezielle gleich-eckige Polyeder sind, hat man nur diese Werte s und t in die für diese speziellen Polyeder geltenden Relationen der s, t einzusetzen, z. B. in die Gl. $t = 2s - 1$ für das $(6+8+12)$ -flächige 24 -Eck, und es ergibt sich dann eine Gleichung $\Gamma(\sigma, \tau) = 0$ als Bedingung dafür, daß zu den ihr genügenden σ, τ des Kernes die äußere Hülle eben das genannte spezielle gleich-eckige Polyeder wird. Deutet man die Gl. $\Gamma = 0$ wieder als die einer Kurve und trägt sie in die zur Diskussion einer bestimmten Gruppe dienende Figur ein (vergl. den punktierten Zug in der Figur der Anm. 25), so übersieht man bei dieser geom. Darstellung leicht, zu welchen Klassen die Sphenoiden einer Gruppe gehören, denn die Kurve $\Gamma = 0$ trennt ja die Wertgebiete der σ, τ voneinander, die zu Sphenoidkombinationen verschiedener Klasse in derselben Gruppe führen. Vergl. die Darstellung N. A. S. 99—141 und die Uebersicht der polarreziproken Zuordnung S. 141—144.

laufenden Spuren hervorgeht. Diese Sphenoidkombination gehört demnach zugleich zu denen, die die Grenze bilden zwischen den Gruppierungen zweier verschiedener Klassen, beiden zugleich angehörend.⁴⁰⁾ Von besonderem Interesse sind überdies die Kombinationen in den einfachsten speziellen gleicheckigen Hüllen, da sich dann auch Polyeder aus nur sechs Sphenoiden ergeben können.⁴¹⁾ Außerdem werden die rhombischen Sphenoiden unter Umständen, d. h. für gewisse Werte der σ , τ des Kernpolyeders, zu sekundären quadratischen⁴²⁾ und die vorher quadratischen zu Tetraedern. Wir führen hier nur den interessanten Satz an: Die autopolaren Gruppierungen der zweiten Gruppe quadratischer Sphenoiden, die also zugleich der zweiten Klasse angehören, sind stets solche von zwölf Tetraedern, und es existiert überdies eine einzige autopolare Gruppierung von sechs Tetraedern, deren Kern eine bestimmte Varietät eines Tetrakis-hexaeders, deren Hülle das diesem reziproke $(6+8)$ -flächige $6 \cdot 4$ -Eck ist.⁴³⁾

Wir hätten nun in gleicher Weise die Sphenoidgruppierungen im Dyakishexekontaedertypus aufzusuchen und zunächst zu diesem Zwecke den früheren analogen Betrachtungen für die Ecken des allgemeinsten gleicheckigen Polyeders, nämlich des $(12+20+30)$ -flächigen $2 \cdot 60$ -Ecks anzustellen.⁴⁴⁾ Doch möge bei der weitaus größeren Kompliziertheit der hier auftretenden Verhältnisse nur als Resultat bemerkt werden, daß es in diesem Typus fünf Gruppierungen von je 30 rhombischen Sphenoiden gibt, die für besondere Parameter σ , τ des inneren Kernes in sekundäre quadratische übergehen können. Auch die Zuordnung von Gruppe und Klasse ist hier eine bedeutend schwieriger zu diskutierende.⁴⁵⁾ Für spezielle Kerne und Hüllen fallen die Flächen und Ecken verschiedener Sphenoiden wieder zusammen, und so sind z. B. in der vollständigen Figur des Triakontaeders (Fig. 3) die vier Dreiecke UVW die diskontinuierliche Grenzfläche einer Gruppierung von 30 Sphenoiden, deren äußere Hülle eine besondere Varietät des $(12+20+30)$ -flächigen $2 \cdot 60$ -Ecks ist.⁴⁶⁾ Auch die bekannten zehn Tetraeder im Dodekaeder gehören als ein Grenzfall zu solchen Sphenoidkombinationen.^{46a)} Zum Schlusse der Betrachtungen der diskontinuierlichen konvexen Polyeder weisen wir noch auf diejenigen hin, deren Einzelkörper bereits von höherer Art sind. Es finden sich nur zwei solche bereits von Heß angegebene zu-

einander reziproke Vielfache, die konzentrische Anordnungen Poinso'tscher Sternpolyeder sind.⁴⁷⁾

Ebenso wie die Sphenoiden die Elemente für die diskontinuierlichen konvexen Polyeder darstellen, so bilden die von Heß für die einfachsten Fälle bereits beschriebenen, von ihm Stephanoide genannten, eigentümlichen nichtkonvexen Polyeder zweiter Klasse die Einzelkörper für diskontinuierliche Nullpolyeder, denen wir uns zunächst zuwenden wollen. Wir beginnen mit der Definition der Stephanoide erster Ordnung und beschränken uns dabei vorläufig auf die Betrachtung des bestimmten Falles, in dem die äußere Hülle das reguläre sechsseitige Prisma ist. Bezeichnet man die Ecken von dessen Grund- und Deckfläche mit den Zahlen 1, 2, 3, . . . 6 bzw. 1', 2', 3', . . . 6', so daß die gleichen Zahlen Endpunkte derselben Seitenkante sind, so ergibt sich durch Verbindung der Punkte 1, 2', 4, 3' und zurück nach 1 ein überschlagenes Viereck mit zwei entgegengesetzt gleichen kongruenten Zellen. Führt man diese Konstruktion in dem sechsseitigen Prisma so oft durch wie möglich, so erhält man $2 \cdot 6$ solcher Vierecke, von denen je zwei immer eine Kante gemein haben, so daß das Gesamtgebilde ein geschlossenes Polyeder darstellt mit zwölf überschlagenen vierkantigen Ecken, wobei Oberfläche und Inhalt den Wert Null besitzen. Der innere Kern fällt, wie das Modell zeigt, heraus und das Polyeder besitzt die kronenförmige Gestalt, der es seinen Namen verdankt. Die zwölf Ebenen seiner Flächen würden als innerste Zelle eine sechsseitige Doppelpyramide einschließen, d. h. das zur äußeren Hülle reziproke gleichflächige Polyeder, wie denn jedes Stephanoid autopolar ist. — Nachdem wir an diesem Beispiele eines Stephanoides erster Ordnung das Wesen eines solchen einfachen Nullpolyeders erkannt haben, ist es nötig, für die weiteren Betrachtungen eine kurze Bezeichnung einzuführen. Für jedes n -seitige Prisma existiert nämlich eine bestimmte Anzahl voneinander verschiedener Stephanoide. Denn es ergibt sich immer ein überschlagenes Viereck als Grenzfläche eines solchen, wenn man zwei beliebige Punkte der einen Deckfläche des Prismas mit irgend zwei Ecken der anderen Deckfläche kombiniert, die von der Ebene durch die Achse des Prismas und die Mitte des Abstandes jener beiden ersten Punkte gleichweit entfernt sind. Ist φ der Zentriwinkel zur Kante der Deckfläche des Prismas im umschriebenen Kreise und sind $\lambda \cdot \varphi$ und $(\lambda + 2\mu) \cdot \varphi$ die Zentriwinkel zu den Diagonalen der Grenzfläche des Stephanoides als Sehnen in eben diesem Kreise, wobei also nur $\lambda \cdot \varphi$ sowohl wie $(\lambda + 2\mu) \cdot \varphi$ kleiner als 180° bleiben müssen, so soll das entstehende Stephanoid durch das Symbol $St_n \left(\begin{smallmatrix} \lambda + 2\mu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right)$ bezeichnet werden. Das vorgelegte Stephanoid im sechsseitigen Prisma ist danach ein $St_6 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Im regulären achtseitigen Prisma existieren, wie eine leichte Untersuchung zeigt, die drei Stephanoide erster Ordnung $St_8 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$, $St_8 \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ und $St_8 \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$. Betrachten wir aber das letztgenannte Vielfach genauer, so bemerken wir, daß es aus zwei kongruenten Teilkörpern besteht, deren jeder für sich ein Nullpolyeder darstellt und die Hälfte der Flächen und Ecken des Ganzen besitzt, also gemäß kristallographischem Gebrauche als Hemiedrie

⁴⁰⁾ Fig. 5 der Tafel zeigt das Modell dieses Polyeders. In den weiteren Figuren ist von jeder Klasse quadratischer und rhombischer Sphenoiden je eine allgemeine Gruppierung dargestellt. Bei allen, ausgenommen den rhombischen Sphenoiden zweiter Klasse, ist der innere Kern die Archimedische Varietät des Hexakisoktaeders, dafür ist hier die Hülle die Arch. Var. des 48-Ecks, während alle übrigen Modelle spezielle 48-Ecke zur Außenhülle haben. Quadratische Sphenoiden: Fig. 2: 1. Klasse, 3. Gruppe. — Fig. 12: 2. Kl., 2. Gr. — Fig. 6: 3. Kl., 1. Gr. — Rhombische Sphenoiden: Fig. 15: 1. Kl., 4. Gr. — Fig. 13: 2. Kl., 2. Gr. — Fig. 4: 3. Kl., 3. Gr. — Fig. 9: 4. Kl., 1. Gr. (Vergl. N. A. S. 106, 111, 101; 125, 132, 140, 121.)

⁴¹⁾ Vergl. N. A. S. 97—98.

⁴²⁾ Vergl. N. A. S. 123 u. 130.

⁴³⁾ Für den Kern dieser Gruppierung von sechs Tetraedern ist $\sigma = 1$, $\tau = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, also für die Hülle $s = 1$, $t = 2 - \sqrt{2}$. Vergl. N. A. S. 113.

⁴⁴⁾ Vergl. N. A. S. 186 ff.

⁴⁵⁾ Vergl. N. A. S. 196—200.

⁴⁶⁾ N. A. S. 212. Für die Hülle sind die Parameter

$$s = \frac{3\sqrt{5} + 1}{8}, \quad t = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

^{46a)} N. A. S. 193.

⁴⁷⁾ Vergl. Heß, Ueber zwei konzentrische regelmäßige Anordnungen von Kepler-Poinso'tschen Polyedern. Marburger Berichte 1878. Nr. 2.

und Hemigonic des Stephanoides erster Ordnung bezeichnet werden muß. Die äußere Hülle dieses sogenannten Stephanoides zweiter Ordnung ist ein kranrandiges $2p$ -Eck, wenn p die halbe Zahl der Ecken einer Deckfläche des vollzähligen Prismas bezeichnet. Diese Stephanoid zweiter Ordnung mit dem Symbol $St'_p \left(\lambda + 1 + \frac{2\mu}{\lambda} \right)$, — denn hier ist offenbar der Zentriwinkel zur einen Diagonale der Grenzfläche um ein ungerades Vielfaches von φ von dem zur anderen verschieden — bilden eine auch für sich zu betrachtende Gruppe von Nullpolyedern, die für bestimmte Werte der λ und μ auch selbst wieder diskontinuierlich sein, d. h. in mehrere St' zerfallen können.⁴⁸⁾ Das oben genannte Stephanoid erster Ordnung $St_8 \left(\frac{4}{2} \right)$ ist hier nach eine Kombination von zwei Stephanoiden zweiter Ordnung $St'_4 \left(\frac{2}{1} \right)$. Bedenken wir nun weiter, daß die Ecken eines halbregulären $(n \mp n)$ -seitigen Prismas sich als die zweier regulärer n -seitiger, gegeneinander um die Hauptachse gedrehten Prismen auffassen lassen, so leuchtet ein, wie sich ihm zwei St_n von gleichen Klammerindizes einschreiben lassen, die vereinigt ein diskontinuierliches Nullpolyeder ergeben, dessen Kern wiederum das zur Hülle reziproke gleichflächige Polyeder ist. Es kann dieses Vorkommnis erst für $2n = 10$ eintreten, wonach die Gruppierung aus $2 St_5 \left(\frac{3}{1} \right)$ besteht.

⁴⁸⁾ Vergl. die allgemeine Theorie der Stephanoides erster Ordnung in N. A. S. 61–64, 66 ff.; die zweiter Ordnung S. 64–66. Für ungerades p existieren $\frac{(p-1)(p-3)}{8}$ voneinander morphologisch verschiedene $St'_p \left(\lambda + 1 + \frac{2\mu}{\lambda} \right)$, die kontinuierlich sind, wenn die Zahlen p, λ und $\lambda + 1 + 2\mu$ relativ prim sind. Besitzen sie den gemeinsamen Faktor σ , so besteht das St'_p aus σ Stephanoiden zweiter Ordnung $St'_\frac{p}{\sigma}$. Ist p gerade, so ist die Anzahl der möglichen St' gleich $\frac{p(p-2)}{8}$, d. h. die Anzahl der St'_{2m} ist gleich der der St'_{2m+1} . Ist σ wieder gemeinschaftlicher Faktor der drei obengenannten Größen, so ist das Polyeder diskontinuierlich, z. B. ist $St'_{12} \left(\frac{6}{3} \right) \equiv 3 St'_4 \left(\frac{2}{1} \right)$. Für die Stephanoides erster Ordnung gelten die folgenden Sätze: Für ungerades n existieren $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$ verschiedene St_n , von denen alle die diskontinuierlich sind, und zwar Kombinationen von St geringerer Kantenzahl, in denen n, λ und $\lambda + 2\mu$ einen von 2 verschiedenen gemeinsamen Faktor besitzen. Ist n gerade, so ist die Anzahl der möglichen St_n $\frac{(n-2)(n-4)}{8}$, wonach also die Anzahl der St_{2m} gleich der der St_{2m-1} ist. Die St_n für gerades n zerfallen in drei Klassen. Sind die drei Zahlen n, λ und $\lambda + 2\mu$ relativ prim, so sind alle St_n kontinuierlich. Haben sie bei ungeradem λ den gemeinsamen ungeraden Faktor σ , so besteht das St_n aus σ Stephanoiden erster Ordnung $St'_\frac{n}{\sigma}$. Es sei endlich λ gerade, nämlich gleich $2r$; dann ist, wenn man $n = 2m$ setzt, $St_n \left(\lambda + \frac{2\mu}{\lambda} \right) \equiv 2 St'_m \left(\frac{r + \mu}{r} \right)$, wenn μ gerade ist und $St_n \left(\lambda + \frac{2\mu}{\lambda} \right) \equiv 2 St'_m \left(\frac{r + \mu}{r} \right)$, wenn μ ungerade ist. Dabei können in beiden Fällen die rechts stehenden Symbole selbst wieder kontinuierliche oder diskontinuierliche Polyeder bezeichnen, wie nach den vorhergehenden Kriterien zu entscheiden ist. Man hat z. B.:
 $St_{42} \left(\frac{18}{6} \right) \equiv 2 St_{21} \left(\frac{9}{3} \right) \equiv 2 \cdot 3 St_7 \left(\frac{3}{1} \right)$;
 aber $St_{42} \left(\frac{18}{12} \right) \equiv 2 St'_{21} \left(\frac{9}{6} \right) \equiv 2 \cdot 3 St'_7 \left(\frac{3}{2} \right)$.
 Die Figuren 23 und 21 der Tafel stellen das Stephanoid $St'_4 \left(\frac{2}{1} \right)$ und $St_5 \left(\frac{3}{1} \right)$ mit der je geringsten Flächen- und Eckenzahl dar.

Für $2n = 20$ existiert eine größere Anzahl Gruppierungen verschiedener Stephanoides, von denen ich nur die $2 St_{10} \left(\frac{4}{2} \right)$ hervorhebe. Hier ist nämlich, analog dem vorher betrachteten St_8 , bereits das Einzelstephanoid diskontinuierlich und besteht aus zwei $St'_5 \left(\frac{2}{1} \right)$, so daß das Gesamtpolyeder als $4 \cdot St'_5 \left(\frac{2}{1} \right)$ zu bezeichnen ist.⁴⁹⁾ Auf diese Gruppierung haben wir später zurückzukommen; jetzt wenden wir uns zunächst den Polyedern des Hexakisoktaedertypus zu.

Wir hatten früher erörtert, daß die 48 Ecken eines $(6 + 8 + 12)$ -flächigen $2 \cdot 24$ -Ecks sich auf dreifache Weise als die Ecken von je drei halbregulären achtseitigen Prismen auffassen lassen. Einem solchen Prisma lassen sich jedoch keine Stephanoides einschreiben. Sucht man aber alle diejenigen Varietäten des gleichbeckigen Polyeders auf, für welche diese $(4 + 4)$ -eckigen Flächen und Punktgruppen zu regulären Achtecken werden, so können jedem der regulären achtseitigen Prismen drei morphologisch verschiedene Stephanoides erster Ordnung St_8 einbeschrieben werden, von denen aber, wie hier ohne Beweis mitzuteilen ist, aus Gründen der Symmetrie nur die in je zwei Stephanoides zweiter Ordnung $St'_4 \left(\frac{2}{1} \right)$ zerfallenden realisiert sein können, wenn der innerste Kern der Kombination ein gleichflächiges Polyeder des Typus werden soll.⁵⁰⁾ Die Bedingungen dafür, daß die Ecken des $2 \cdot 24$ -Ecks sich in dreifacher Weise als reguläre Achtecke gruppieren, sind drei lineare Relationen zwischen den Parametern s und t ,⁵¹⁾ d. h. es gibt drei einfach unendliche Reihen von 48-Ecken, denen sich Stephanoides einschreiben lassen. Wir bezeichnen diese Gruppierungen von je $6 St'_4 \left(\frac{2}{1} \right)$ nach ihren Ecken als solche erster, zweiter und dritter Klasse. Die inneren Kerne sind Hexakisoktaeder, aber natürlich wieder nur solche, die linearen Bedingungen zwischen den σ und τ genügen, wonach auch drei Gruppen von Stephanoidgruppierungen existieren, und es zeigt die Untersuchung, daß stets die erste Gruppe zugleich der dritten Klasse, die dritte Gruppe der ersten Klasse zugehört, während die Polyeder der zweiten Gruppe zugleich zweiter Klasse sind, wonach auch ein autopolares Polyeder existiert.⁵²⁾ Untersucht man nun die speziellen gleichflächigen Polyeder, die den oben erwähnten Relationen genügen, und fragt für sie nach den möglichen Stephanoidgruppierungen, so stellt sich ein eigentümliches Resultat heraus. Ich knüpfe hier zur Erläuterung an die vollständige Figur der Archimedischen Varietät des Triakisoktaeders (Fig. 6b) an. Da jetzt zwei benachbarte Flächen des ursprünglichen Hexakisoktaeders in eine Ebene zu liegen kommen, so fallen zwei überschlagene vierkantige Grenzflächen zweier verschiedener Stephanoides in eine Ebene des Triakisoktaeders, nämlich die Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1 P_5 P_4 P_3$, deren in P_1 zusammenstoßende Zellen entgegengesetztes Vor-

⁴⁹⁾ Vergl. N. A. S. 71–74.

⁵⁰⁾ Vergl. N. A. S. 152.

⁵¹⁾ Sind z. B. die achteckigen Grenzflächen des $2 \cdot 24$ -Ecks selbst regulär, ohne daß natürlich dabei die Sechsecke und Vierecke regulär zu sein brauchen, so muß $t - (\sigma + 5 - 1) | 2 + 1$ sein. Vergl. über diese Relationen N. A. S. 145–147.

⁵²⁾ Vergl. die Zuordnung der drei Gruppen und Klassen N. A. S. 148–152. In Fig. 18 der Tafel ist eine Stephanoidkombination der ersten Klasse dargestellt, die die Anordnung der Einzelpolyeder deutlich erkennen läßt.

zeichen haben. Danach überdecken sich die beiden anderen Zellen in dem Dreiecke MP_1P_3 , das somit verschwindet, so daß das kontinuierliche Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ des Inhalts Null entsteht. Dabei hat in diesem speziellen Falle die Fläche das eigentümliche, daß sie an der Ecke P_1 des Hüllpolyeders mit zwei Zellen teilnimmt und von den sechs Kantenwinkeln in jeder Ecke des erhaltenen kontinuierlichen Nullpolyeders

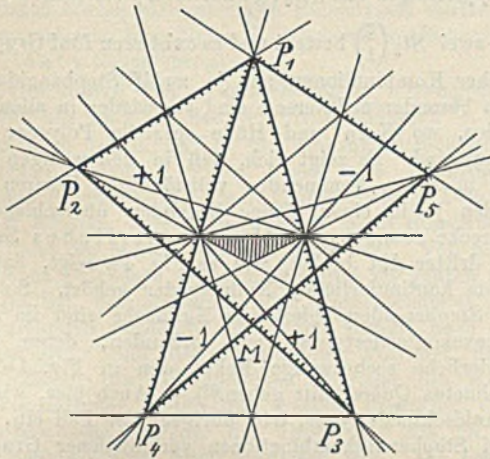


Fig. 6b.

liegen also immer zwei in einer Ebene, weil sie derselben Grenzfläche zugehören.⁵³⁾ In gleicher Weise ergibt sich eine große Zahl der übrigen vorhandenen kontinuierlichen Polyeder zweiter Klasse als Grenzfälle von Stephanoidkombinationen. — Da nun in derselben vollständigen Figur die Fläche der Sphenoidgruppierung, wie ein Vergleich von Fig. 6a und 6b zeigt, durch dieselben Spuren gebildet wird, wie die Fläche des kontinuierlichen Nullpolyeders, so kann man diese aus jener auch erhalten, indem man dem Dreiecke $P_1P_1P_3$ das negative Vorzeichen erteilt und es hat sich schließlich herausgestellt, daß sämtliche kontinuierliche Nullpolyeder in einfache Beziehung entweder zu den Sphenoid- oder den Stephanoidgruppierungen gesetzt werden können, ein Satz, der ebenso für die Polyeder des Dyakishexakontaedertypus Geltung besitzt. Aber auch die nichtkonvexen Polyeder erster Klasse haben sich merkwürdigerweise zum großen Teile bei der Diskussion der vollständigen Figuren solcher Varietäten gleichflächiger Polyeder ergeben, die bereits für die diskontinuierlichen Vielfache in Betracht kamen, da diese eben zu den ausgezeichneten gehören. In Fig. 6c haben Sie zum dritten Male die Punkte P , deren Verbindung in der Reihenfolge $P_1P_2P_3P_4P_5$ jetzt die Grenzfläche eines kontinuierlichen Polyeders ergibt, das nichtkonvex sein muß, da die Kante P_3P_4 ihre Außenseite dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises zuwendet und also die Zelle P_3MP_4 negativ ist.⁵⁴⁾

⁵³⁾ Das Modell dieses kontinuierlichen Nullpolyeders ist in Fig. 8 der Tafel dargestellt.

⁵⁴⁾ Vergl. das Modell des Polyeders in Fig. 1 der Tafel. Die vollständige Ableitung der nichtkonvexen Polyeder erster und zweiter Klasse des Hexakisoktaedertypus N. A. S. 144–162, woselbst vier kontinuierliche Nullpolyeder beschrieben sind, von denen sich drei aus Stephanoidgruppierungen ergeben. Zwei von diesen sind polarreziprok, das dritte autopolar. Dieses letzte Polyeder gehört zugleich der ersten und dritten Gruppe der Stephanoide an und hat zum Kerne die besondere

Varietät $\sigma' = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$, $\tau' = 3 - \sqrt{2}$. (Vergl. a. a. O. S. 157.)

Ich wende mich nun zu den nichtkonvexen Polyedern des Dyakishexekontaedertypus. Betrachtet man zwei einander gegenüberliegende zehnkantige Flächen des allgemeinsten gleichheckigen Polyeders erster Art des Typus, des $(12 + 20 + 30)$ -flächigen $2 \cdot 60$ -Ecks, so sieht man, daß zwar die Kanten der einen parallel denen der andern sind, daß aber wegen der wechselnden Länge der Kanten die zweimal zehn Ecken nicht die eines

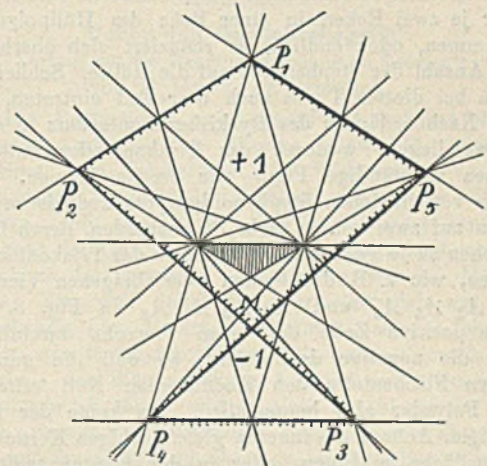


Fig. 6c.

halbregulären Prismas, sondern eines gleichheckigen Polyeders sind, das als Seitenflächen zehn gleichschenklige Trapeze hat. Würde man die Ecken des einen Zehneckes orthogonal auf die Fläche des andern, und umgekehrt, projizieren, so ergäbe sich ein halbreguläres zwanzigseitiges Prisma, in das nach den früheren Angaben sich eine diskontinuierliche Stephanoidgruppierung einschreiben lassen würde, die aus vier Stephanoiden zweiter Ordnung $St'_5 \binom{2}{1}$ besteht. Tilgt man dann wieder die erst durch Projektion erhaltene Hälfte der Eckpunkte, so verbleiben die noch vorhandenen zweimal zehn Ecken als die von zwei Stephanoiden $St'_5 \binom{2}{1}$ und da diese Konstruktion sich im gleichheckigen Polyeder sechsmal ausführen läßt, so ergibt sich ein diskontinuierliches Nullpolyeder aus zwölf solchen Stephanoiden zweiter Ordnung, dessen innerster Kern ein Dyakishexekontaeder ist. Nun liegen aber die 120 Ecken des $2 \cdot 60$ -Ecks, wenn man zunächst nur eine fünfzählige Achse ins Auge faßt, zu je zehn auf zwölf zueinander parallelen Ebenen, die senkrecht zu dieser Achse sind. Betrachtet man in irgend zwei gleich weit vom Zentrum des Polyeders liegenden solchen Ebenen die je zehn Eckpunkte des $2 \cdot 60$ -Ecks, so sind diese wieder die Ecken zweier Stephanoide $St'_5 \binom{2}{1}$, und da das Gleiche für die übrigen fünfzähligen

Das letzte ebenfalls autopolare Nullpolyeder findet sich bei Betrachtung der zweiten Gruppe rhombischer Sphenoiden (a. a. O. S. 156). Von den drei aufgefundenen nichtkonv. Polyedern erster Klasse stehen zwei einander polarzugeordnete in naher Verwandtschaft zu Sphenoidgruppierungen, wie für das eine im Text gezeigt wurde (N. A. S. 159); das dritte autopolare ergibt sich bei Betrachtung der vollständigen Figur des eben genannten Hexakisoktaeders der Parameter σ' , τ' und besitzt die Ecken gemeinsam mit jenem Polyeder zweiter Klasse in den Ecken des $2 \cdot 24$ -Ecks. Durch andere Auffassung der Spuren in derselben vollständigen Figur erhält man überdies das neunte kont. konv. Polyeder, das den Heßschen Polyedern noch zuzufügen ist. Vergl. N. A. S. 161.

Achsen gilt, so haben wir das Schlußresultat: Einem $(12 + 20 + 30)$ -flächigen allgemeinen $2 \cdot 60$ -Eck lassen sich immer sechs verschiedene Gruppierungen von je zwölf $St'_5 \binom{2}{1}$ einschreiben, die ein diskontinuierliches Nullpolyeder bilden, dessen Kern im allgemeinen ein Dyakishexekontaeder ist.⁵⁵⁾ Für die besonderen gleichflächigen Kerne oder gleichseitigen Hüllen fallen je zwei Flächen verschiedener Stephanoiden in eine Ebene oder je zwei Ecken in einer Ecke des Hüllpolyeders zusammen, oder endlich, es reduziert sich überhaupt die Anzahl der Stephanoiden auf die Hälfte. Schließlich kann bei diesem Typus auch der Fall eintreten, daß vier Nachbarflächen des Dyakishexekontaeders in einer Ebene liegen, wodurch das Triakontaeder entsteht, dessen vollständige Figur wir bereits kennen. Die sechs verschiedenen Stephanoidgruppen reduzieren sich dann auf zwei von je sechs Stephanoiden, deren $6 \cdot 10$ Flächen zu je zwei in den 30 Ebenen des Triakontaeders liegen, wie z. B. die beiden überschlagenen Vierecke $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $A_5 A_6 A_7 A_8$ in Fig. 3. Je eine positive Zelle des einen Vierecks durchdringt hier die negative des andern, so daß die gemeinsamen Flächenteile den Koeffizienten Null erhalten, am Polyeder also herausfallen. Da keine der fünfzähligen Achsen des inneren gleichflächigen Kernes die Grenzfläche im Innern oder in den Kanten trifft, so ist das Polyeder, wie das Modell⁵⁶⁾ zeigt, zwölfmal durchbrochen und es entsteht dadurch die merkwürdige Konfiguration eines Gebildes von mehrfachem Zusammenhange. Gleiches gilt für die polarreziproke Gruppierung von sechs Stephanoiden, deren Hülle das Triakontagon ist und deren Ecken diskontinuierliche achtkantige sind.⁵⁷⁾ Entsteht durch Zusammenfallen von je sechs Flächen aus dem Dyakishexekontaeder das Ikosaeder, so tritt an Stelle aller sechs Stephanoidgruppierungen ein einziges eigentümliches Nullpolyeder, dessen diskontinuierliche aus zwei gegeneinander gedrehten gleichseitigen Dreiecken bestehende sechskantige Grenzfläche in der vollständigen Figur des Ikosaeders mit den Buchstaben S bezeichnet ist. Das ebenfalls zwölfmal durchbrochen scheinende Polyeder mit dodekaedrischer Hülle ist insofern merkwürdig, als es nur aus kongruenten räumlichen Zellen der Koeffizienten $+1$ und -1 besteht, die bloß längs Doppelkanten zusammenhängen.⁵⁸⁾

Es liegt nun die Frage nahe, ob die bisher angeführten Gruppierungen von zwölf oder sechs Stephanoiden die allein möglichen im $2 \cdot 60$ -Eck sind und diese Frage ist für die allgemeinen Polyeder des Typus zu bejahen. Untersucht man aber auch hier die besonderen gleichseitigen Vierecke, bei denen die je

⁵⁵⁾ Die Begriffe von Gruppe und Klasse, je nachdem die Gruppierungen nach den Flächen des Kernes oder den Ecken der Hülle bestimmt sind, weichen hier von den für die Sphenoide festgesetzten ab; vergl. N. A. S. 239–243. Doch gilt der gleiche Hauptsatz der Zuordnung. Diese Zuordnung der Gruppen und Klassen, ebenda S. 243–249; die Besprechung der Einzelpolyeder der sechs Gruppen S. 249–283.

⁵⁶⁾ Vergl. die Fig. 11 der Tafel. Die Hülle des Polyeders ist die Archimedische Varietät des $(12 + 20)$ -flächigen $20 \cdot 3$ -Ecks; der Kern, das Triakontaeder, ist nicht realisiert. Vergl. N. A. S. 265.

⁵⁷⁾ Fig. 14 der Tafel. Vergl. N. A. S. 268.

⁵⁸⁾ Das Modell ist in Fig. 3 der Tafel dargestellt. Vergl. N. A. S. 257. Das Polyeder ist autopolar, besitzt die Art $A = A' = 30$ und entsteht auch aus der Kombination der zehn einem Dodekaeder einschreibbaren regulären Tetraeder, wenn man deren Hälfte mit negativem Inhalte ansetzt, sie also entgegengesetzt färbt, wie die übrigen.

zehn Punkte in den oben erwähnten Parallelebenen sich als Ecken regelmäßiger Polygone gruppieren,⁵⁹⁾ so erhält man noch eine große Anzahl aus Stephanoiden zusammengesetzte oder ableitbare diskontinuierliche und kontinuierliche Polyeder. Wenngleich sich aber einem regulären zehneckigen Prisma sechs verschiedene Stephanoiden St_{10} einschreiben lassen,⁶⁰⁾ so können doch aus Gründen der Symmetrie, als wesentlich neu, nur Gruppierungen von $St_{10} \binom{6}{2}$ auftreten, von denen jedes

aus zwei $St_5 \binom{3}{1}$ besteht und es existieren fünf Gruppen solcher Kombinationen aus je zwölf Stephanoiden.⁶¹⁾ Von besonderem Interesse sind sie wieder in allen den Fällen, wo Kern und Hülle spezielle Polyeder des Typus sind. Es zeigt sich, daß in den wenigen hier nur in Frage kommenden vollständigen Figuren die beiden je in einer Ebene liegenden überschlagenen Vierecke zusammen ein kontinuierliches Sechseck dritter Art bilden, wie es Fig. 4a zeigt, das zu einem kontinuierlichen Nullpolyeder gehört. Solcher aus Stephanoiden ableitbarer Nullfläche sind im Dyakishexekontaedertypus vier vorhanden, deren kontinuierliche sechskantige Ecken den in Fig. 4b gezeichneten Querschnitt geben.⁶²⁾ — Auch hier, wie im Hexakisoktaedertypus, tritt übrigens der Fall ein, daß zwei Stephanoidkombinationen verschiedener Gruppen

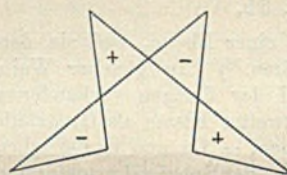


Fig. 4 b.

eine gemeinsame umbeschriebene Kugel besitzen und daß aus zwei ihrer vierkantigen überschlagenen Grenzflächen eine einzige kontinuierliche irreguläre sechskantige Fläche entsteht, deren Inhalt nachweisbar Null ist, obgleich hier keine kongruenten Zellen auftreten. Das von 120 solchen Flächen begrenzte autopolare Nullpolyeder besitzt demgemäß bei umgekehrter Färbung der Flächenzellen ein andersartiges Aussehen und besteht nicht wie die sonstigen Nullpolyeder aus lauter kongruenten Raumzellen entgegengesetzt gleicher Koeffizienten. Es ist der komplizierteste aller bisher im Modell dargestellten Körper, denn seine Oberfläche war aus über 3000 einzelnen Stücken zusammzusetzen.⁶³⁾

⁵⁹⁾ Die hierzu notwendigen und hinreichenden Relationen zwischen den Parametern s und t des gleichseitigen Polyeders vergl. N. A. S. 284–287; für die gleichfl. Polyeder ebenda S. 289 ff.

⁶⁰⁾ Es sind nach den Erläuterungen Anm. 49) die vier kontinuierlichen $St_{10} \binom{3}{1}$, $St_{10} \binom{5}{1}$, $St_{10} \binom{7}{1}$ und $St_{10} \binom{9}{1}$, sowie die zwei diskontinuierlichen

$$St_{10} \binom{4}{2} \equiv 2 St_5 \binom{2}{1} \text{ und } St_{10} \binom{6}{2} \equiv 2 St_5 \binom{3}{1},$$

von denen die $St_5 \binom{2}{1}$ im $2 \cdot 60$ -Eck offenbar nur Spezialfälle der bereits vorher betrachteten Stephanoiden für den Fall sind, daß die $(5 + 5)$ -kantigen Flächen regulär werden. Vergl. N. A. S. 283 ff.

⁶¹⁾ Ueber diese fünf Gruppen der Kombinationen von je 12 $St_5 \binom{3}{1}$ vergl. N. A. S. 294–309.

⁶²⁾ Diese vier kont. Nullpolyeder sind bereits von Heß angegeben worden: Marburger Berichte 1877, Nr. 1. (Das fünfte dort mitverzeichnete Polyeder existiert nicht.) Ihre Abbildungen zum ersten Male auf den Tafeln 26 und 27 der N. A.; die ausführliche Beschreibung ebenda S. 303–305. Je zwei der Polyeder sind polarreziprok.

⁶³⁾ Vergl. N. A. S. 305. Der Kern ist das Dyakishexekontaeder für $\sigma = \frac{5\sqrt{6-7}}{4}$, $\tau = 5 - 3\sqrt{5}$; die Hülle das rezi-

Aber mit diesen aus Stephanoiden ableitbaren kontinuierlichen Nullpolyedern ist deren Zahl noch nicht erschöpft, sondern es ergeben sich deren auch hier noch sechs durch Betrachtung der besonderen Varietäten gleichflächiger Kerne, die bei Diskussion der Sphenoidgruppen erhalten wurden. Die Grenzflächen dieser neuen Polyeder sind Sechsecke aus einem geschlossenen Ringe von Zellen mit abwechselnden Vorzeichen, wie es Fig. 6 b zeigte.⁶⁴⁾ Von allen den überhaupt auftretenden höchst merkwürdigen Einzeltypen durfte ich Ihnen nur eine sehr kleine Zahl speziell vorführen, um mit D a n t e fortzufahren:

„Von andern wird es löblich sein zu schweigen, weil allzukurz die Zeit für die Erzählung“.

Denn noch fehlen uns ja die kontinuierlichen nicht-konvexen Polyeder erster Klasse des Dyakishexokontaedertypus, sowie alle diskontinuierlichen Polyeder beider Klassen, deren Einzelkörper nicht Stephanoide sind, und die Moebius'schen Polyeder! Von nicht-konvexen Polyedern erster Klasse sind im ganzen fünf gelegentlich der vorhergehenden Untersuchungen von mir gefunden worden.⁶⁵⁾ Zu ihnen kommt noch eine ebenso große Zahl diskontinuierlicher Polyeder, deren Einzelkörper die nichtkonvexen Polyeder des Hexakisoktaedertypus sind⁶⁶⁾ und endlich existieren sechs Moebius'sche Polyeder des Typus, auf die ich nun zum Schlusse noch kurz hinweisen will. Die Grenzflächen von drei dieser einseitigen Gebilde, die auch als gleichkeckig-gleichflächige Polyeder zu gelten haben, da die 30 Flächen kongruente Figuren und die 2·30 Ecken symmetrisch sind, befinden sich in der vollständigen Figur des Triakontaeders und sind daselbst die Achtecke mit den Eckpunkten X, Y und Z.⁶⁷⁾ Betrachten wir nur die erste Fläche und das dazu gehörende Polyeder. Erteilen wir der großen sechseckigen Zelle der Fläche den Koeffizienten + 1, so erhält jede der kleinen Dreieckszellen den Koeffizienten - 1. Da nun für alle 30 Flächen des Polyeders die Zellen in gleicher Weise gewählt werden müssen, wenn jenes als gleichflächig gelten soll, an dem Polyeder aber immer eine Fläche mit einer Kante $X_1 X_2$ an eine Kante $X_3 X_4$ der benachbarten Fläche grenzt, so stoßen überall positive und negative Flächenzellen aneinander und es ist auch unmöglich, durch Umkehrung der Färbung von Flächen dieses Vorkommnis zu beiseitigen. Das Moebius'sche Kantengesetz ist unerfüllbar. Die drei letzten zu den genannten polar-

proke 2·60-Eck. Auch die Ecken des Polyeders sind wie die Flächen dritter Art irregulär sechskantig, und zwar von der Art 5 oder 7, je nach der Schraffierung des Perimeters der Fläche, die dabei zwei oder vier überstumpfe Winkel enthält. Die Art des Polyeders wird aber in beiden Fällen dieselbe:

$$A = A' = \frac{k}{2} = 180. \text{ Vergl. N. A. Taf. 11. Fig. 7 u. 8.}$$

⁶⁴⁾ Vergl. N. A. S. 343—345.

⁶⁵⁾ Die ausführliche Beschreibung dieser fünf Polyeder, von denen drei autopolar, die letzten beiden polarreziprok sind, vergl. N. A. S. 310—315.

⁶⁶⁾ Die Einzelkörper gehören zu den in Anm. 54) erwähnten Polyedern des Hexakisoktaedertypus. Vergl. N. A. S. 316—321.

⁶⁷⁾ Von diesen drei Möbius'schen Polyedern, deren Ecken sämtlich überschlagene vierkantige sind, ist das erste in Fig. 7 der Tafel dargestellt. Die Hülle ist ein $(12 + 20)$ -flächiges

12 5-Eck der Parameter $s = 1$, $t = \frac{2 + \sqrt{5}}{6}$. Da die Hüllpolyeder aller drei bereits vorher zu diskutieren gewesen sind, finden sich die Grenzflächen der drei polarreziproken Polyeder in ebenfalls schon früher gezeichneten vollständigen Figuren gleichflächiger Kerne. Vergl. N. A. S. 326—329.

reziproken einseitigen Polyeder sind dann nach bekannter Methode leicht aufzufinden. Ich bin zu Ende mit meinem Vortrage. Es sollte mich freuen, M. H., wenn es mir gelungen wäre, Ihr Interesse diesem mathematischen Gebiete erneut zuzuwenden, wenn ich Sie durch meine Ausführungen veranlassen könnte, die Originalabhandlung einzusehen und zu lesen, ich wage nicht zu sagen, zu kaufen.

Ueber den Gewichtsbezug.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Dresden*)
von M. Grübler (Dresden).

Der Vortragende weist darauf hin, daß die physikalische Auslegung des Wortes „Gewicht“, nämlich im Sinne von Schwerkraft, im Widerspruch zu der eigentlichen, sprachlich richtigen Bedeutung dieses Wortes stehe. Das Wort „Gewicht“ kommt her von Wiegen; das Gewicht eines Körpers bezeichnet sonach sprachlich das Ergebnis der Wägung auf der Hebelwage. Nun weiß jeder Physiker, daß sich auf der Hebelwage nur Massen bestimmen lassen, folglich müßte man in Physikerkreisen, da ganz allgemein das Ergebnis der Wägung eines Körpers sein „Gewicht“ genannt wird, Masse und Gewicht als identische Begriffe verwenden. Trotzdem benutzen die Physiker, und mit ihnen die Techniker, an dem auf einem wissenschaftlichen Irrtum der Vergangenheit beruhenden Brauche festhaltend, das Wort „Gewicht“ gleichbedeutend mit Schwerkraft.

Es ist wohl nicht überflüssig, hier auf das Dilemma aufmerksam zu machen, in welches sie durch diesen Brauch geraten. Die Schwerkraft eines Körpers ändert sich mit dem Orte, folglich auch sein Gewicht, falls Gewicht dasselbe bezeichnet, wie Schwerkraft. Da nun das Gewicht durch eine Wägung auf der Hebelwage ermittelt wird, so muß die Wägung des Körpers an verschiedenen Orten verschiedenes ergeben. Dieser Schluß steht aber bekanntlich im vollen Gegensatz zu der Tatsache, daß das Wägungsergebnis, d. i. das Gewicht des Körpers überall das gleiche ist.

Der Vortragende zeigt kurz die geschichtliche Entstehung der irrtümlichen Auffassung des Wortes „Gewicht“ in der Physik. Vor Galilei unterschied man genau zwischen Ponderosität und Ponderabilität der Körper; Galileis Versuche brachten den Unterschied zum Verschwinden, und die später folgende Entdeckung der Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche vermochte die irrtümliche Ansicht, daß Gewicht und Schwere dasselbe seien, nicht mehr zu beseitigen, da sie sich inzwischen in weiten Kreisen festgesetzt hatte.

Die Streitigkeiten, welche sich mit der Einführung der neuen Maß- und Gewichtsordnung im Deutschen Reiche verknüpften, ließen von neuem den Gegensatz zwischen der physikalischen Auffassung des Wortes „Gewicht“ einerseits und der sprachlich richtigen, dem volkstümlichen andererseits hervortreten, denn in dem bezüglichen Gesetz (vom 26. April 1893) wird „Gewicht“ im Sinne von Masse, also sprachlich richtig verwendet. Daß man auch im Handel und Geschäftsverkehr bei Käufen nach Gewicht stets nur eine gewisse Menge oder Masse des fraglichen Stoffes meint, nicht aber seine Schwere, ist allgemein bekannt. Vielmehr unterscheidet das Volk sogar Gewicht und Schwere sprachlich, denn man sagt z. B. beim Heben

*) S. Unt.-Bl. XIII, S. 62.

oder Tragen einer Last nie: „die hat ein großes Gewicht“, sondern stets: „die ist aber schwer“.

Wenn die Wissenschaft zur kurzen Bezeichnung eines Begriffes ein Wort aus der Umgangssprache entlehnt (wie z. B. Kraft, Arbeit, Geschwindigkeit u. s. f.), so muß dies sinngemäß geschehen, d. h. es muß sich die wissenschaftliche Verwendung des Wortes an die sprachliche Entstehung und Bedeutung anschließen. Im vorliegenden Falle wird dieser selbstverständlichen Forderung nicht genügt, wie nachgewiesen wurde; es ist also Pflicht der physikalischen Wissenschaft, hierin Wandel zu schaffen. Das ist sehr leicht; es braucht nur in der bezüglichen Literatur und im wissenschaftlichen Verkehr, insbesondere im Unterricht das Wort „Gewicht“ stets nur im sprachlich richtigen Sinne, d. i. gleichbedeutend mit Stoffmenge oder Masse (also wie im Handel und Geschäftsverkehr) verwendet zu werden, dagegen stets Schwerkraft oder Schwere benutzt, falls man letztere meint.

Es ist ja zweifellos, daß die Physiker über die Schwierigkeiten und Mißstände, welche an sich aus der zurzeit noch bestehenden Doppeldeutigkeit des Wortes „Gewicht“ entspringen, leicht hinwegkommen. Aber ebenso zweifellos ist es, daß diese Doppeldeutigkeit vielfach, besonders aber im Unterricht als ein Nachteil empfunden wird, und da nicht der geringste zwingende Grund vorliegt, für Schwere noch ein zweites Wort (nämlich Gewicht) zu haben, zumal Schwere oder Schwerkraft klar und eindeutig ist, so sollte man endlich daran gehen, die Doppeldeutigkeit des Wortes „Gewicht“ zu beseitigen, und dieses Wort nur im sprachlich richtigen, volkstümlichen Sinne, d. h. gleichbedeutend mit Stoffmenge oder Masse verwenden. Neben anderen Vorteilen (z. B. didaktischen) würde sich auch der ergeben, dann in Übereinstimmung mit der Maß- und Gewichtsordnung des Deutschen Reiches zu sein.

Masse und Gewicht.

Anmerkungen zu dem Vortrag des Herrn Staatsrats Grübler.

Von K. Schreiber (Greifswald).

I. Die Generalversammlung vom Oktober 1901 des Bureau international des Poids et Mesures, also der Institution, von welcher die Gesetze über Maße und Gewichte aller der Staaten, in denen das metrische System eingeführt ist, entworfen worden sind, hat erklärt: . . . „Le terme poids désigne une grandeur de la même nature qu'une force.“ Damit gibt diese Kommission zu, daß ihre erste unklare, im deutschen Gesetz noch erhaltene Ausdrucksweise zu falschen Auffassungen führen kann. Eine Berufung auf diese erste Ausdrucksweise ist nach der vorliegenden Erklärung der kompetenten Behörde nicht mehr zulässig.

II. Die im Handel und Wandel wie im chemischen Laboratorium gebräuchlichen Wagen sind eine ganz spezielle Form der allgemeinen Wage. Sie müssen der Bedingung genügen, daß die Verschiedenheit von „g“ für beide Wagschalen so klein ist, daß man sie vernachlässigen darf. Wagen, die dieser Bedingung nicht genügen, wie z. B. die Jolly, zur Bestimmung des spez. Gewichtes der Erde benutzt, sind für den Handel nicht brauchbar. Von einem Spezialfall eine allgemein gültige Regel ableiten zu wollen, ist unzulässig. Eine Wage, welche nicht im Hinblick auf die Bedingung, daß sie Verschiedenheiten des Gewichtes desselben

Körpers an verschiedenen Orten nicht anzeige, gebaut ist, wird stets diese Verschiedenheit angeben.

III. Maße und Stoff sind verschiedene Begriffe. 1 kg Blei und 1 kg Käse haben dasselbe Gewicht: sie geben auf sämtlichen Wagen den gleichen Ausschlag. Sie haben dieselbe Masse, denn es gehört die gleiche Arbeit dazu, um ihnen eine gleiche Geschwindigkeit zu erteilen. Trotzdem sind sie aber z. B. für den Magen etwas recht verschiedenes und die „Magenfrage“ ist im allgemeinen das den Wert der Körper, welche der Kaufmann auf der Wage mißt, bestimmende.

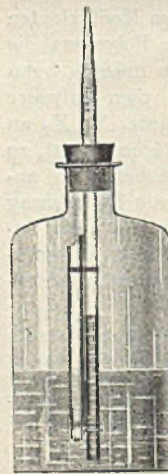
Der Kaufmann bestimmt Stoffmengen und benutzt dazu das Naturgesetz, daß bei gleicher Fallbeschleunigung die Stoffmenge dem Gewicht proportional ist. Daß sie auch der Masse proportional ist, interessiert nur den Artilleristen.

Versuche

mit dem Heronsball für Aetherdampfdruck.

Von H. Rebenstorff in Dresden.

Wie unter den „Wirkungen des Dampfdruckes von Aether“ in Poskes Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, XIX, 352, bereits beschrieben wurde, kann man mittels eines Heronsballes mit einem den Aether bereithaltenden „Füllröhrchen“ die ganze Kraft des Dampfes zur Anschauung bringen. In letzter Zeit habe ich diese Versuche noch wirksamer gestaltet, so daß eine Neubeschreibung hier gestattet sein möge. Der Heronsball mit Füllrohr gehört zu den von der Firma Gustav Müller in Ilmenau in einem Prospekt zusammengestellten Apparaten meiner Angabe (Nr. 13 desselben). Er ist ein starkwandiges Zylinderglas, durch dessen Gummistopfen das Strahlrohr bis fast auf den Boden hinabführt (s. Fig.). Die im Glase kräftige Zuspitzung des Rohres hat eine für die Wirkung erprobte Beschaffenheit. Neben der Rohrmittle ist das Füllrohr befestigt, dessen angeschlossene Abschrägung des Randes seiner Oeffnung das Eingießen von Aether erleichtert.



Müllers Prospekt
Nr. 13.

Dieser Heronsball kann natürlich, wie jeder andere, nach Hineinblasen von Luft mittels eines aufgestreiften Schlauches einen Wasserstrahl liefern. Den Schlauch drückt man jedesmal nach Hineintreiben einer Portion Luft nahe der Spitze des Glasrohres zu. Schüler blasen gewöhnlich mit voller Lungenkraft hinein; nach dem plötzlichen Abstreifen des Schlauches entspricht die Höhe des Strahles (ca. $\frac{1}{2}$ m) nicht recht dem inszenierten Kraftaufwande. Mit den Wangenmuskeln allein kann man die Luft fast doppelt so stark verdichten und zur Verwunderung der vorhin so Bemühten einen viel höheren Strahl heraustreten lassen (über 1 m). Auch ein kräftiges Gummigebläse ist mit der Vorsicht anwendbar, daß man die Wirkung des vorderen Ventils durch Fingerdruck gegen den Schlauch unterstützt, damit nicht etwa Wasser in das Gebläse zurücktritt. Manchem wird es bequemer sein, zuletzt den Schlauch nahe der Spitze durch einen von der Seite angestreiften Quetschhahn zu schließen, um mit beiden Händen Schlauch und Spritzrohr trennen zu können. Bringt

man in der Schlauchleitung zum irgendwelchen Hineinpresse von Luft ein T-rohr mit Seitenanschluß an ein Quecksilbermanometer an, so kann ermessen werden, um wieviel der Strahl hinter der durch den Druck geforderten Wasserhöhe zurückbleibt. Nur bei geringen Strahlhöhen hemmt das wieder herabfallende Wasser, wenn der Heronsball auf ebener Fläche steht. Hohe Strahlen haben fast stets eine genügende Abtrennung des in den beiden Richtungen bewegten Wassers. Der Gipfelteil eines hohen Strahles ist wegen der viel größeren Wassermenge anders gestaltet, als ein durch schwachen Druck nur wenige dm hochgetriebener Strahl. An diesem ruft die Gegenbewegung des Wassers auch bei nicht ganz senkrechten Richtungen leicht ein beständiges Aufundnieder hervor. Hierbei wirkt die Oberflächenspannung mit, wie die kugeligen Formen des zurückfallenden Wassers zeigen.

Geradezu imposant wird nun der Wasserstrahl, wenn der Gesamtdruck des Dampfes einer kleinen Aethermenge über dem Wasser im Heronsball sich ausbilden konnte. Daß Aether schnell verdampft, veranschaulicht beim elementaren Unterricht das Ausgießen einiger Tropfen davon auf das Schutzbrett des Experimentiertisches oder in eine recht grosse Glasschale, deren Dampf man mittels eines sehr langen Spanes (Gasflämmchen an langem Glasrohr) von der Seite her entzündet. Haben dabei die Schüler aus der anfänglichen Größe der Flamme die schnelle Erfüllung der Luft über dem Aether mit dem Dampfe erschlossen, so wird es selbst auf der niedersten Stufe verständlich sein, daß der Aetherdampf in einem abgeschlossenen Lufttraume den Druck erhöht. Um damit mühelos einen mehrere Meter hohen Wasserstrahl zu erhalten, gießt man das Füllröhrchen zur größeren Hälfte voll Aether, läßt etwa außen herabgelaufene Flüssigkeit in wenigen Augenblicken verdunsten und drückt den Gummistopfen recht fest auf die zum dritten Teil mit Wasser von Zimmerwärme verschene Flasche. Während man dann mit dem Zeigefinger der einen Hand die Rohrspitze zühlt, neigt man den Heronsball mit der anderen so weit, daß der Aether ausfließt und sich auf der Oberfläche des Wassers ausbreitet. Am besten hält man dabei die Flasche so, daß das geneigte Füllröhrchen sich oberhalb des mit ihm fest verbundenen Spritzrohres befindet. Ebenfalls ohne zu schütteln richtet man hierauf die Flasche auf und stellt sie, immer noch oben mit dem Finger schließend, auf den Tisch nahe der Kante hin. Der dann nach einigen Augenblicken des Wartens herausgelassene Wasserstrahl erreicht die Zimmerdecke mittelhoher Räume nicht. Man läßt das Wasser größtenteils jenseits des Tisches auf den Fußboden niederfallen, indem man je nach der sofort ersichtlichen geringen Seitenrichtung des Strahles die Flasche entsprechend herumdreht.

Läßt die Strahlhöhe merklich nach, so entspannt man die Luft in der Flasche durch Anheben des Stopfens. Durch einen ebenfalls auf der elementaren Stufe verständlichen Versuch kann man alsdann eine Anschauung von der Löslichkeit eines gasförmigen Körpers in Wasser übermitteln. Drückt man den Stopfen wieder fest, so macht erneutes schwaches Ansteigen des Wassers im Spritzrohr bemerkbar, daß der an der Wasseroberfläche schwimmende Aether sein Verdampfen noch nicht beendet hatte. Trotzdem entsteht in der Flasche eine Luftverdünnung, wenn man sie mit zugehaltener Spitze tüchtig durchschüttelt. Stellt man sie wieder auf den Tisch und nimmt den Finger

fort, so treibt der äußere Luftdruck einen Schwarm Luftblasen durch das Wasser in die Flasche zurück. Vor der Wiederholung des ganzen Versuches (nach Erprobung bei der Vorbereitung) muß man natürlich die Flasche ätherfrei machen; man braucht sie dazu nur einmal ganz voll Wasser und wieder leer laufen zu lassen.

Ist den Schülern bereits das Mariottesche Gesetz bekannt, so kann man dieses in Anwendung bringen, um die in einem luftgefüllten Raume allmählich vor sich gehende Entwicklung des Dampfdruckes verfolgen zu lassen. Wie früher erwähnt, ist dabei ein mittels Schlauch angeschlossenes offenes Quecksilbermanometer gut verwendbar. Einfacher kommt man wie folgt aus. Nach dem Einsetzen des Stopfens mit ätherbeschicktem Füllröhrchen (Flasche zu $\frac{1}{3}$ voll Wasser) setzt man auf die Rohrspitze ein etwa 8 cm langes Schlauchstück, das dem Strahlrohr ziemlich fest anliegt. Dann bläst man mit dem Munde Luft hinein, um mit dem wieder emporgereißten Wasser Rohr und Schlauch ganz zu erfüllen. Hierauf drückt man in das offene Schlauchende ein Glasrohr von am besten genau 40 oder 50 cm Länge, das am anderen Ende zugeschmolzen ist. Man achtet hierbei darauf, daß das Glasrohr nicht etwa erheblicher durch die Hand erwärmt wird. Uebrigens würde sich dies durch ein darauffolgendes Eindringen von Wasser bemerkbar machen. Das Rohr wird in der Klemme eines Bunsenstativs senkrecht festgemacht. Zur Ausführung des Meßversuches drückt man den Schlauch zwischen den Glasröhren zu und hebt, wie vorhin beschrieben, die Flasche an, so daß der Aether aus dem oberhalb des Spritzrohres befindlichen Füllröhrchen fließt. Es muß dies, ebenso wie das Hineinsetzen, nicht zu langsam geschehen, damit das wassergefüllte Spritzrohr nicht leer fließen kann. Steht nun die Flasche wieder unter dem eingespannten Glasrohr, so dringt das Wasser beim Aufheben des Fingerdruckes einige cm weit in das Glasrohr hinein. Wird hierbei ausnahmsweise eine Luftblase mit aufwärts befördert, so nimmt man die Länge des Luftvolumens im Rohr als $\frac{1}{2}$ cm größer an. Sofort bemerkt man nun, wie das Eindringen von Wasser in das Glasrohr fortschreitet. Die Verkürzung der Luftsäule mißt den zunehmenden Dampfdruck des Aethers. Nach der Ableitung aus dem Mariotteschen Gesetz: $\frac{h}{p} = \frac{h'}{p'}$ (siehe auch diese Zeitschrift XIII, 54 [1907]) ergibt sich die Proportion: Wassersäule im Meßrohr verhält sich zum neuen Luftvolumen, wie der Druckanstieg zum alten Drucke (1 Atmosphäre). Man erhält also den Druckanstieg als Bruchteil des gerade vorhandenen Atmosphärendruckes, wenn man die in cm abgemessenen Längen der Wassersäule und der Luftmenge dividirt. *) Um einen Anhalt für den Fortgang der Druckzunahme zu geben, sei erwähnt, daß in em 40 cm langes Meßrohr das Wasser in 4, 8, 12 Minuten um 10,2, 12,3, 13,2 cm hineingedrängt wurde. Die Temperatur des Wassers im Heronsball betrug 19,5°. Der auch zuletzt noch zunehmende Druck ergibt sich zu 13,2 : (40—13,2)

*) Natürlich ergibt sich der Ueberdruck auch nach der gebräuchlichen Formel für das Mariottesche Gesetz. Als Anwendung jener, manche Rechnungen sehr vereinfachenden Ableitung ist neben dem beschriebenen Versuche die Messung des Druckes der Wasserleitung mit dem „Druckrohr“ ein gutes Demonstrationsmittel. (Sonder-Prospekt von G. Müller, filmenau; Nr. 1).

= 0,49 Atmosphären. Er war noch etwa um $\frac{1}{6}$ kleiner als der Sättigungsdruck des Aetherdampfes bei jener Temperatur (430 mm).

Um nun den durch Abwarten erhöhten Druck seines Strahleffektes nicht zu berauben, drückt man den Schlauch mit den Fingern zu, zieht das Glasrohr heraus und schiebt statt dessen ein kurzes zugeschnitzenes Rohrstück hinein. Da jetzt die Zimmerdecke durch den Strahl gefährdet wäre, so stellt man die Flasche auf den Fußboden und zieht den Schlauch vom Spritzrohr, wobei man drehend erst soweit lüftet, daß man nach einem letzten Rück schnell zurücktreten kann. Ein etwa 4 m hoher Strahl läßt hierzu genügend Zeit. Die in unserem Physikzimmer befindliche, durch die ganze Zimmerhöhe geführte Meßplatte (in m und cm geteilt, mit Kopflatte zum Messen der Körperlänge und zur Demonstration des Nonius, der die cm angibt) gestattet, die Wurfhöhe des daneben gestellten Heronsballes annähernd abzumessen. Den für den Versuch sehr fest hineingedrehten Gummistopfen hält man beim Abziehen des Schlauches von der Spitze am besten mit der anderen Hand nach unten gedrückt.

Kommt es nur darauf an, für die Ausbildung eines hohen Strahles den Druck genügend lange ansteigen zu lassen, so kann man die Rohrspitze solange durch ein beliebiges Schlauchstück mit Stöpselchen abschließen. Mit kaltem, etwa soeben der Leitung entnommenem Wasser im Heronsball kann natürlich die Expansion nicht die erwähnte Stärke erreichen. Trifft ein Wasserstrahl einige Sekunden an demselben Flecke der Zimmerdecke auf, so bleibt daran ein kleiner Schaden des Anstriches zurück. In Rücksicht auf den Versuch mit dem Rohr für den Wasserstoß, der die Decke mit einer kleinen Gruppe von Tropfen bespritzt, sei erwähnt, daß diese keine sichtbare Spur hinterlassen.*)

Ableitung der Neperschen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Von Prof. Dr. Carl Schmidt (Mainz).

Zu dem Lehrplan der Prima unserer höheren Lehranstalten gehören die Elemente der sphärischen Trigonometrie und ihre Anwendung zur Auflösung der mannigfaltigen Aufgaben der mathematischen oder astronomischen Geographie, denen auch die meisten Schüler großes Interesse entgegenbringen. Man kann im Unterricht mit den Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks und mit dem sphärischen Cosinussatz und seiner Polarformel vollständig auskommen, wenn man nötigenfalls das schiefwinklige Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Ist aber die Zeit nicht ganz knapp bemessen, so wird man auch noch die bekannte Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \varrho : \sin (s - a),$$

wobei $\operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s}}$

ist, und die vier Neperschen Gleichungen entwickeln. Man hat dabei den Vorteil, die goniometrischen Formeln wieder in das Gedächtnis zurückzurufen und von neuem

anzuwenden, ferner die ebene Trigonometrie nebenbei zu wiederholen und die große Analogie zwischen ihr und der sphärischen Trigonometrie hervorzuheben. Wie ein sphärisches Dreieck in ein ebenes übergeht, wenn die Bogen im Verhältnis zum Radius der Kugel unendlich klein werden, so verwandeln sich auch bei diesem Grenzübergang die sphärischen Formeln in die entsprechenden des ebenen Dreiecks.

Da die vier sogenannten Gaußschen Gleichungen für die Schule vollständig entbehrlich sind, so kommt es darauf an, ohne ihre Vermittelung die Neperschen Gleichungen möglichst kurz und einfach abzuleiten.

Ich glaube dieses Ziel erreicht zu haben und will im folgenden zwei verschiedene Entwicklungen mitteilen, die wohl noch nicht bekannt, aber für den Unterricht zweckmäßig sind.

I.

In der ebenen Trigonometrie kann man die beiden Mollweideschen oder Gaußschen Gleichungen aus der bekannten Formel

$$(1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s - a}, \text{ wo } \varrho^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}$$

ist, leicht herleiten und dann die Entwicklung ohne weiteres auf das sphärische Dreieck übertragen.

Aus (1) folgt nämlich

$$(2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho^2}{(s - a)(s - b)} = \frac{s - c}{s} \text{ und}$$

$$(3) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{s - b}{s - a}$$

oder anders geschrieben:

$$(4) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{s - c}{s}$$

$$(5) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{s - b}{s - a}$$

Wendet man nun auf diese beiden Verhältnissgleichungen den Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion an, so ergibt sich

$$(6) \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{2s - c}{c} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a + b}{c}$$

und weiter

$$(7) \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{a - b}{2s - a - b} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a - b}{c}$$

Ueberträgt man diese Entwicklung auf das sphärische Dreieck, wo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\sin (s - a)}$$

und $(\operatorname{tg} \varrho)^2 = \frac{\sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s}$

*) Obiger Prospekt Nr. 2. Wie ich nachträglich ersah, beschrieb K. Antolik ein ziemlich gleiches Rohr für diesen Versuch. Das von mir angegebene ist kürzer und infolge geringerer Divergenz der Schenkel durch einfaches Umkehren und Wiederaufsteigenlassen der Luftblase, mehrmals hintereinander ohne Nachfüllen von Wasser verwendbar.

ist, so erhält man unmittelbar an Stelle von (6)

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(a+\beta)} = \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin s - \sin(s-c)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}c}{2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}$$

und an Stelle von (7)

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(a+\beta)} = \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin(s-b) + \sin(s-a)} =$$

$$\frac{2 \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a-b)}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c}$$

Das sind die beiden ersten Neperschen Gleichungen. Die beiden anderen erhält man in bekannter Weise, indem man die zwei ersten auf das Polardreieck anwendet und dann in das ursprüngliche Dreieck zurückkehrt.

II.

Im folgenden werden die vier Neperschen Gleichungen aus Hilfsdreiecken abgeleitet, die man erhält, indem man der Reihe nach $a+b$ und $a-b$ oder $a+\beta$ und $a-\beta$ in die Figur bringt. Dann benutzt man eine der beiden Verhältnisgleichungen

$$(8) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma - a)}{\cos \frac{1}{2}(a + \gamma - \beta)}$$

$$(9) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$$

die in jedem sphärischen Dreieck gelten. (9) ergibt sich durch Multiplikation aus den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin(s-a)}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin(s-b)}$$

wobei $(\operatorname{tg} \rho)^2 = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}$

ist. (8) folgt durch Division aus den beiden Polarformeln

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{cotg} r}{\cos(\sigma-a)}, \quad \operatorname{cotg} \frac{1}{2}b = \frac{\operatorname{cotg} r}{\cos(\sigma-\beta)}$$

wo $\sigma = \frac{1}{2}(a + \beta + \gamma)$ ist.

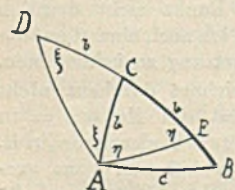


Fig. 1.

Ist in Fig. 1 ABC das gegebene Dreieck, so mache man $CD = CE = CA = b$ und verbinde D und E mit A durch Hauptkreisbögen. Dann ist $BD = a+b$ und $BE = a-b$. Da in einem Dreieck gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, so sind die beiden Winkel ξ und ebenso die beiden Winkel η einander gleich. Wendet man nun auf die beiden Hilfsdreiecke ABD und ABE die Formel (8) an, so erhält man der Reihe nach

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + \xi - a - \xi)}{\cos \frac{1}{2}(a-\beta)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + a + \xi - \xi)}{\cos \frac{1}{2}(a+\beta)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta + 180^\circ - \eta - a + \eta)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + a - \eta - 180^\circ + \eta)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(a+\beta)}$$

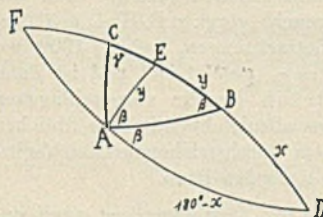


Fig. 2.

Ist in Fig. 2 ABC das gegebene Dreieck, so mache man $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAE = \beta$ und verlängere die Hauptkreisbögen BC und AD , bis das sphärische Zweieck mit den Ecken D und F entsteht. Dann ist

$\sphericalangle CAD = a + \beta$ und $\sphericalangle CAE = a - \beta$. Da gleichen Winkeln eines Dreiecks gleiche Seiten gegenüberliegen, so ist $AE = BE = y$. Da die beiden sphärischen Dreiecke ABF und BAD einander kongruent sind, denn $AB = BA$; $\beta = \beta$; $180^\circ - \beta = 180^\circ - \beta$, so ist $AD = BF = 180^\circ - BD$. Bezeichnet man BD mit x , so ist $AD = 180^\circ - x$. Wendet man nun auf die beiden Hilfsdreiecke ADC und AEC die Formel (9) an, so erhält man der Reihe nach

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+x+180^\circ-x-b)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+x+180^\circ-x+b)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-y+y-b)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a-y+y+b)}$$

Nochmals die Korrektheit von Gleichsetzungen.

Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn E. Kullrich über dieses Thema.*

I.

Von C. Hoffmann in Schorndorf.

In Jahrgang XIII, 1907, Nr. 2 dieser Blätter findet sich S. 30 ein Aufsatz von Herrn Kullrich, der eine möglichst scharfe Fassung der Gleichsetzungen im Schulunterricht fordert. Diesem Verlangen wird wohl jeder Lehrer, insbesondere jeder mathematisch gründlich vorgebildete, vollkommen zustimmen, und es wird nicht zu bezweifeln sein, daß es kaum dieser Anregung bedürft haben wird, um das Streben danach wachzurufen. Trotzdem ist eine Zusammenstellung häufig vorkommender Fälle, in denen der Schüler zu Ungenauigkeiten geneigt ist, dankenswert und ich stimme in den meisten der angeführten Fälle aus dem elementaren Rechnen den a. a. O. gegebenen Winkeln zu. Aber in einigen Punkten möchte ich mir erlauben, eine gegenteilige Ansicht zu äußern.

1. Der Doppelpunkt als Divisionszeichen sollte solange vermieden werden, bis die Bekanntschaft mit Brüchen die vollständige Ausführung einer nicht rest-

*) S. Unterrichtsblätter 1907, S. 30.

los aufgehenden Division ermöglicht; man schreibe anfänglich etwa:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 7 \text{ statt } 125 : 7 = 17 \text{ oder } = 17 \text{ R. } 6, \\ \hline 55 & 17 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$$

dagegen später $125 : 7 = 17\frac{6}{7}$ bzw. $\frac{125}{7} = 17\frac{6}{7}$ und zwar ohne Hinzufügung der ausgeführten Rechnung. Wird diese beigefügt, so ist das Gleichheitszeichen überhaupt nicht am Platz, obwohl ein Mißverständnis auch bei Angabe nur des ganzzahligen Quozienten ausgeschlossen erscheint. *)

2. Was die Verwendung des Äquivalenzzeichens \sim anbelangt, so wird dasselbe Zeichen auch im Sinn von „angenähert gleich“ gebraucht (vergl. z. B. Holzmüller, Elementare kosmische Betrachtungen, Leipzig 1906, wo häufig in diesem Sinn $= \sim$ gesetzt ist) und ist dann dem von Herrn Kullrich hierfür vorgeschlagenen Zeichen vorzuziehen, das allzuleicht mit dem üblichen Ungleichheitszeichen (dem durchstrichenen Gleichheitszeichen) \neq verwechselt werden kann.

3. $\frac{1}{3} = 0,33$ statt $\approx 0,33 \dots$ zu setzen, ist gewiß unrichtig, und doch fragt es sich, ob dies nicht unter Umständen bei benannten Zahlen zuzulassen ist. Oder sollte man nicht $\frac{1}{3}$ Mk. = 33 Pfg., $\frac{2}{3}$ Mk. = 67 Pfg. usw. schreiben lassen? Nach Herrn Kullrichs Vorschlag müßte man hier stets einen Hinweis auf die bloße Annäherung an die Gleichheit anbringen, was im Verlauf größerer Rechnungen sehr lästig und — zum mindesten für die Praxis — ganz unnötig wäre. Wie häufig ist z. B. bei den größeren Rechnungen über Ein- und Verkauf fast jedes Resultat mit einer Abrundung behaftet, zufällig kann auch eines darunter sein, wo die Rechnung z. B. mit der zweiten Dezimalstelle aufging, welche Umständlichkeit und welche Schwierigkeit ergäbe sich für den Schüler aus den dadurch notwendig werdenden Unterscheidungen, vom Zeitverlust noch abgesehen. Und was wäre denn dabei gewonnen? Für die Rechnung und das Schlußresultat hat es keine Bedeutung, ob die zweite Stelle abgerundet oder genau ist, höchstens verliert der Schüler durch den ständigen Hinweis auf das „annähernd gleich“ das Vertrauen in die Gültigkeit seiner Resultate, irgend ein Vorteil ist nicht einzusehen. Und daß eine solche „Schärfe“ nicht über die Grenze der Schule hinaus ins praktische Leben Eingang finde, ist wohl zweifellos. Man würde sich nur mit einigem Recht dem Vorwurf aussetzen, nur für die Schule statt für das Leben zu lehren. Ich möchte hier lieber die kleine Ungenauigkeit mit in Kauf nehmen, statt auf das einfache Gleichheitszeichen zu verzichten.

4. Die Verwendung des zweideutigen Zeichens \pm vor der Quadratwurzel bei Lösungen von Gleichungen ist schon manchenmal, aber erfolglos, bekämpft worden. Die vorgeschlagene Anfügung von Zeigern an die Unbekannte, $x_{1,2}$, ändert nicht viel, kann aber leicht Veranlassung zu Verwechslungen mit Doppelzeigern geben; besser, wenn auch etwas umständlicher, wäre es schon

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

für die Lösung der Gleichung $x^2 + ax = b$ zu setzen. Doch kann man die einfache Schreibweise:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

bezw. für die Lösung goniometrischer Gleichungen:

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 360^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ohne jeden Schaden beibehalten; es gibt eben jedes Zeichen bzw. jeder Wert von k einen Wert x bzw. φ , der, für x bzw. φ in die gegebene Gleichung eingesetzt, diese befriedigt. Erfordert eine Aufgabe nur einen der Werte, so muß man doch noch besonders feststellen, welcher es ist und kann dann diesen durch besondere Bezeichnung hervorheben.

5. Auch das Verlangen, jeden nicht ganzzahligen Logarithmus als Näherungswert zu bezeichnen (und ebenso die trigonometrischen Funktionen und die aus ihnen bestimmten Winkel), geht doch etwas zu weit. Es würde den Unterricht erschweren, ohne daß dadurch viel gewonnen würde, und jeder, der später praktisch zu rechnen hat, Geometer usw., wird sich von derlei Belastungen frei machen, sobald er die Schule hinter sich hat. Er wird sich ein für alle mal vorbehalten, daß die Logarithmen seiner Tafeln Näherungswerte, daß ebenso die gefundenen Winkel nur angenähert richtig sind, daß aber die Genauigkeitsgrenzen für seine Zwecke ausreichend, die Resultate für ihn also ganz genauen völlig gleichwertig sind. Gerade wenn ein Schüler Betrachtungen über Fehlergrenzen zugänglich ist, wird er kaum begreifen, weshalb er immer wieder auf die Annäherung hinweisen soll, nachdem man ihm doch gezeigt hat, daß der Fehler ganz belanglos, das Resultat für alle seine Rechnungen ebenso gut wie ein ganz genaues ist; er wird — und mit Recht — diese stets geforderten Hinweise als eine unnötige Erschwerung und Zeitvergeudung betrachten. Der abstrakte Mathematiker wird in diesem Fall als Lehrer besser daran tun, seinem Bedürfnis nach genauer Unterscheidung ein wenig Zwang anzutun und für das Leben, nicht bloß für die Schule zu lehren.

II.

Von A. Schülke (Königsberg i. Pr.)

In dieser Zeitschrift 1907, S. 30, tadelt Herr E. Kullrich zahlreiche Inkorrektheiten, die entstehen, wenn das Gleichsetzen nicht scharf genug gefaßt wird. Nun ist das Streben nach Korrektheit, nach Hervorhebung der logischen Unterschiede gewiß wertvoll, aber die dort gemachten neuen Vorschläge scheinen mir praktisch unausführbar, wenn man das ganze Gebiet des mathematischen Unterrichts in Betracht zieht. Das Gleichheitszeichen ist nicht eindeutig, sondern es wird in der Wissenschaft und im Unterricht in sehr mannigfachen Bedeutungen gebraucht. Weil jener Artikel keinen vollständigen Ueberblick gibt, und weil auch die üblichen Lehrbücher diesen Punkt nicht deutlich genug hervortreten lassen, so will ich noch einmal auf die verschiedenen Arten der Gleichsetzung zurückkommen.

Das Gleichheitszeichen bezeichnet durchaus nicht immer Identitäten. Offenbar hat das Zeichen $=$ in identischen und Bestimmungsgleichungen, z. B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $x+2=3$, ganz verschiedene Bedeutungen, nur im ersten Falle sind die Werte wirklich gleich, im zweiten ist der Wert von x gesucht, für welchen beide Seiten gleich werden. Auch der neue Lehrplan der Naturforscher-Versammlung verlangt für U II diese Unterscheidung. Dazu kommen die Funktionsgleichungen $y = 2x + 3$

*) Im „Archiv der Math. u. Phys.“ (3) XI, S. 355 macht Herr Kullrich eine solche Aussetzung bei der Besprechung von Rogel, Das Rechnen mit Vorteil, obwohl es sich auch dort um ein Divisionschema handelt, das jedes Mißverständnis ausschließt.

Nach einer gedruckten Tabelle der natürlichen Sinuswerte ist:

$$\sin 63^\circ + \sin 41^\circ = 0,8910 + 0,6561 = 1,5471.$$

Bemerkung: Diese beiden Beispiele zeigen recht deutlich, daß man bei Benutzung des neuen Transporteurs an einfachen Zifferbeispielen mit kleinen Zahlen den Schülern gelegentlich neben der sonstigen allgemeinen geometrischen Ableitung die Richtigkeit und Wahrheit der gewonnenen Hauptformeln für

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \text{ und}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ und so noch}$$

vieler anderer wichtiger allgemeiner Formeln auf diesem rechnerischen Wege recht überzeugend und anschaulich vorführen kann. Der Schüler wird dabei immer wieder daran erinnert, daß Winkelfunktionen „Verhältnswerte“ sind, was im logarithmischen Formelkram dem Schüler mitunter leicht entschwinden kann.

In den folgenden Beispielen können die Minuten und Sekunden auf Bruchteile eines Winkelgrads abgerundet werden.

$$3) \sin 37^\circ \cdot \cos 62^\circ = \frac{38}{63} \cdot \frac{27}{57} = \frac{2}{7} = 0,2857$$

[logarithmisch: 0,2825]

$$4) \sqrt{\frac{\sin 37^\circ 0' 3''}{\cos 48^\circ 0' 5''}} = \sqrt{\frac{38 : 63}{45 : 67}} = \sqrt{\frac{38 \cdot 67}{63 \cdot 45}} = 0,9476$$

[logarithmisch: 0,9484].

$$5) \sqrt{\frac{\sin 17^\circ 29' 59''}{\cos 83^\circ 29' 58''}} = \sqrt{\frac{\sin 17\frac{1}{2}^\circ}{\cos 83\frac{1}{2}^\circ}} = \sqrt{\frac{16,5 : 52,5}{6 : 50,5}} = 1,626$$

[logarithmisch: 1,6297].

$$6) \sqrt{\frac{\tan 42^\circ 29' 59''}{\cos 74^\circ 30' 2''}} = \sqrt{\frac{\tan 42\frac{1}{2}^\circ}{\cos 74\frac{1}{2}^\circ}} = \sqrt{\frac{46 : 50}{14 : 52}} = 1,85$$

[logarithmisch: 1,851].

$$7) \sqrt[3]{27 \cdot \sin 72^\circ 0' 2''} = \sqrt[3]{27 \cdot (50 : 52,5)} = 2,951$$

[logarithmisch: 2,9502].

$$8) \sqrt{\frac{\tan 48^\circ 30' 2'' \cdot \cotg 69^\circ 29' 59''}{\cos 35^\circ 29' 59''}} = \sqrt{\frac{(50 : 44,5) \cdot (19 : 50)}{(50 : 61,5)}} = 0,8068 \text{ [logarithmisch: 0,8036].}$$

Trigonometrische Zahlenausdrücke aus Dreiecksaufgaben, wobei noch einfache Bruchteile von Winkelgraden und Millimetern in Abschätzung und Anrechnung kommen können, wie:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}, h_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}, a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha},$$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}, f = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

$$f = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

usw. und ebensolche aus der Physik, wie: $g \sin \alpha$, $G \sin \alpha - \mu G \cos \alpha$, $\frac{P}{2} \tan \alpha$, $\frac{P}{4} \tan \alpha \cdot \tan \beta$, $g t \sin \alpha$,

$\frac{1}{2} g l^2 \sin \alpha$, $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ u. s. f. können also mit dem neuen

Transporteur (Schülerausgabe in Karton-Papierdruck) direkt, ohne Gebrauch der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, auf etwa zwei Dezimalstellen

genau, zur Kontrolle neben dem sonst üblichen logarithmisch-trigonometrischen Verfahren, bei Anwendung kleiner Zahlen, rasch und leicht ermittelt werden. Und gerade die Feststellung der Uebereinstimmung auf völlig anderem Wege gewährt nach meinen Erfahrungen dem Schüler große Freude und Genugtuung. Metalltransporteure mit Präzisions-, Winkel- und Millimeter-Teilungen liefern selbstverständlich genauere Resultate. In jedem Falle aber werden bei Benutzung des neuen Transporteurs die Logarithmen der Winkelfunktionen nicht gebraucht und es wird eine rasche und sichere Kontrolle, neben dem sonst üblichen logarithmisch-trigonometrischen Verfahren, auf ganz anderem Wege dabei in wünschenswertester Weise gewonnen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man ferner am neuen Transporteur (Schülerausgabe) an der Hand der veränderlichen rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten α , y und z , beziehungsweise a , x und z , ganz allgemein sämtliche goniometrischen Grundformeln wie:

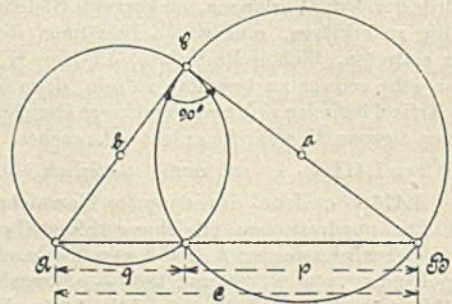
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \cotg a = \frac{\cos a}{\sin a} \text{ usw.}$$

und die goniometrischen Grundformeln der Winkelfunktionswerte für die Winkel: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 90^\circ - \alpha, 90^\circ + \alpha, 180^\circ - \alpha$ u. s. f. rein anschaulich im Kopfe — ohne besondere Zeichnung — ableiten kann. Der neue Transporteur mit seinen beweglichen und sichtbaren rechtwinkligen Dreiecken ersetzt eben in lebendig-anschaulichster Weise und, was gerade sehr wesentlich ist, im Zusammenhange eine ganze Reihe für die Ableitungen sonst nötig werdender Einzelzeichnungen. Aenderungen der Funktionswerte mit wachsendem oder abnehmendem Winkel, der Vorzeichenwechsel beim Uebergang aus einem Quadranten in den benachbarten u. s. f., kommen dabei vollkommen klar zur Anschauung. In meiner Bearbeitung der fünften Auflage von Lackemann, Teil 2 (Trigonometrie und Stereometrie), Verlag von Hirt-Breslau, ist der neue Transporteur für Winkelfunktionen, neben dem vom Verfasser konstruierten Universal-Winkelmeßapparat ganz ausführlich behandelt.

Kleinere Mitteilungen.

Der pythagoreische Lehrsatz nebst seiner Erweiterung, hergeleitet aus dem Sekantensatz.

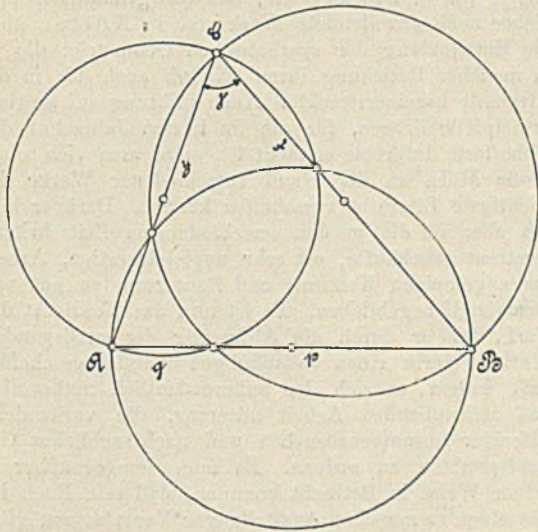
Konstruiert man (Fig. 1) über den beiden Katheten a und b des rechtwinkligen Dreiecks ABC als Durch-



messer die Kreise, so gehen diese durch den Fußpunkt der Hypotenusenhöhe, jede der beiden Katheten ist Tangente des Kreises, der die andere Kathete zum Durchmesser hat. Sind p und q die Hypotenusenprojektionen der beiden Katheten, so folgert man aus dem Tangentensatz ohne weiteres

$$a^2 = cp, \quad b^2 = cq, \quad a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2.$$

Jetzt sei im Dreieck ABC $\sphericalangle \gamma$ von 90° verschieden, zunächst sei $\sphericalangle \gamma < 90^\circ$. Man zeichnet dann über allen drei Seiten des Dreiecks als Durchmesser die Kreise;



je zwei schneiden sich in den Fußpunkten der Höhen. Es ist nach Figur 2

$cp = a(a - x)$ wegen der Sekanten von B durch den Kreis über b .

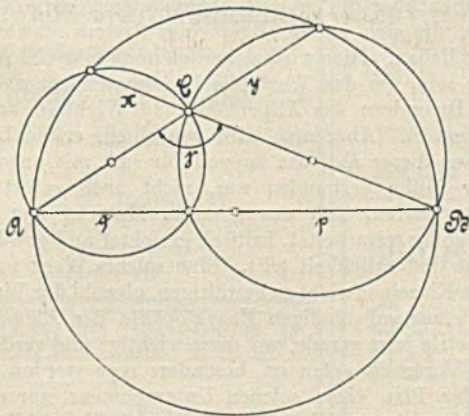
$cq = b(b - y)$ wegen der Sekanten von A durch den Kreis über a .

$$c^2 = a^2 + b^2 - (ax + by)$$

$by = ax$ wegen der Sekanten von C durch den Kreis über c ;

$$\text{folglich } c^2 = a^2 + b^2 - 2ax \text{ oder } c^2 = a^2 + b^2 - 2by.$$

In dem Falle, wo $\sphericalangle \gamma > 90^\circ$ ist, tritt nur insofern eine Aenderung ein, daß C in den Kreis über c fällt, sodaß der Sehensatz mit in Anwendung kommt.



Zwanglos erhält man dann $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$ nach Fig. 3.

Dr. zur Kammer (Posen).

* * *

Nochmals die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Durch nachträgliche gefällige Mitteilung habe ich erfahren, daß die in meinem Artikel „Zur Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ “ (Unt.-Bl. XIII, S. 111) durch Fig. 2 gegebene geometrische Darstellung bereits von Herrn Staatsrat Prof. Dr. Grübler in der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1884, Bd. 29, S. 382 abgeleitet

und auf ein mechanisches Problem angewandt ist. Gleichzeitig möchte ich bemerken, daß das von Herrn Prof. Dr. Fürle herausgegebene Rechenblatt Nr. 3 für photographische Zwecke auf derselben Darstellung beruht. J. Schacht (Berlin).

* * *

Tangentenschnittpunkte bei zwei Kreisen. Zu dem Artikel des Herrn Gericke (Unt.-Bl. XIII, S. 114) wird von verschiedenen Seiten bemerkt, daß die ganze Beweisführung viel kürzer gefaßt werden kann. Die Linien $S_1 M$ und $S_2 M_1$ halbieren die Tangentenwinkel $CS_1 D$ und $S_2 S_1 S_3$, die zu einander Nebenwinkel sind, demzufolge stehen sie aufeinander senkrecht.

Lehrmittel-Besprechungen.

Helikograph von Fricke. Von Herrn Dr. F. Fricke in Bremen, dessen Caelotellurium in Nr. 3 dieses Jahrgangs besprochen wurde, ist neuerdings ein Apparat zur Veranschaulichung der scheinbaren Bewegung der Planeten konstruiert worden, der vielen, die die unterrichtlichen Schwierigkeiten dieses Kapitels kennen, sehr willkommen sein wird.

Zwei Planeten, deren Umlaufzeiten und Bahnradien dem dritten Keplerschen Gesetz entsprechen, bewegen sich in konzentrischen Kreisen, deren Ebenen gegeneinander geneigt sind. Durch beide ist ein Draht geführt, dessen eines Ende einen Schreibstift trägt. Dieser zeichnet auf der mit Papierstreifen belegbaren Innenseite eines Zylindermantelstücks die scheinbare Bahn des äußeren Planeten so auf, wie sie einem Beobachter auf den inneren Planeten erscheint. Gleichzeitig läßt eine am kurzen Ende (Stabende) befestigte weiße Scheibe die scheinbare Bewegung des inneren Planeten, wie man sie vom äußeren Planeten aus sieht, erkennen, wegen der großen Ausschläge war es technisch nicht möglich, auch diese Kurven aufschreiben zu lassen. Der Fuß des Planetariums ist in einem Kreisring drehbar, auf dem die vom Schreibstift gelieferten Kurven abgebildet sind. Stellt man eine an diesem Fuß befindliche Marke auf eine der Schleifen ein, so liefert die Schreibvorrichtung diese und die beiden benachbarten.

Die Handhabung geschieht in einfachster Weise nach Einstellung des Schreibstiftes auf den Zylindermantel durch Bewegung eines Griffes am äußeren Planeten. Die leichte Beweglichkeit des den Schreibstift tragenden Drahtes ist in sinnreicher Weise durch cardanische Aufhängung in den beiden Planeten und eine Spiralfeder ermöglicht.

Der Helikograph, der für den in Anbetracht der Konstruktionsschwierigkeiten nicht zu hohen Preis von 95 M von Ferd. Erneck e-Berlin zu beziehen ist, stellt eine wesentliche Bereicherung des Instrumentariums für den astronomischen Unterricht dar und verdient wärmste Empfehlung. Knothe (Bremen).

Bücher-Besprechungen.

Physikalische Freihandversuche. Unter Benutzung des Nachlasses von Prof. Dr. B. Schwalbe zusammengestellt und bearbeitet von Hermann Hahn, Prof. am Dorotheenstädtischen Realgymnasium zu Berlin. II. Teil: Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase. VII u. 293 S. 569 Fig. im Text. Berlin 1907. Otto Salle. Preis geh. 5 M.

Der zweite Teil der Freihandversuche schließt sich in seiner Anordnung und Darstellung völlig dem früher (XII, S. 18) besprochenen ersten Teil an; deshalb kann das früher abgegebene günstige Urteil rückhaltlos auch auf den zweiten Teil ausgedehnt werden. Man kann zwar zweifelhaft sein, ob es im Interesse der Verbreitung des Buches liegt, daß der zweite Teil der „Enzyklopädie für Freihandversuche“ einen so sehr großen Umfang angenommen hat. Vielleicht wäre es möglich gewesen, eine größere Zahl von Versuchen, die nur mit geringen Modifikationen dasselbe zeigen und beweisen sollen, in einer oder nur wenigen Versuchsbeschreibungen zusammenzufassen. Offenbar ist aber der Verfasser auch hierin dem Vorgange Schwalbes gefolgt, der das Studium der Eigenschaften der flüssigen und gasförmigen Körper durch Freihandversuche als besonders geeignet hielt. In der Tat ist es erstaunlich, daß man für dieses Gebiet der Experimentalphysik eigentlich gar keinen Apparat im gewöhnlichen Sinne des Wortes nötig hat, sondern daß man alles improvisieren kann. So wird jeder Physiklehrer den vorliegenden Teil der Freihandversuche mit Interesse durchblättern, und keiner von ihnen wird das Buch aus der Hand legen, ohne neue Anregungen gewonnen zu haben. Ich möchte allerdings, trotz der vielen hübschen Vorschläge, wie man improvisieren kann, für manche der Anordnungen wirkliche Apparate vorziehen, gewiß im Sinne des Verfassers, der sicher auch z. B. eine richtige Wage im Unterricht lieber hat, als irgend eine der von ihm angegebenen Improvisationen.

Die Gefahr liegt vor, daß das physikalische Experiment zur Spielerei ausartet; doch wiederhole ich dieselben Worte, die ich am Schlusse meiner Besprechung des ersten Teiles schon ausgesprochen habe, daß nämlich ein junger versuchsfroher Lehrer umso eher ein eigenes Urteil über die richtigen Grenzen des Experiments erlangt, je mehr er in den ersten Jahren seiner Berufstätigkeit experimentiert. Das Hahn'sche Buch ermöglicht nun das Experiment in den allerweitesten Grenzen. Ein Lehrer, der die Hahn'schen Experimente wirklich alle ausführt, gewinnt dadurch nicht nur ein klares Urteil über die schulmäßigen Versuchsgrenzen, sondern er eignet sich zugleich sicher die dringend notwendige experimentelle Handfertigkeit an, für die ja der Hochschulunterricht einstweilen noch wenig Fürsorge trifft.

Das Buch zerfällt naturgemäß in zwei größere Abschnitte: I. Die Flüssigkeiten; II. Die Gase. Die Unterabteilungen sind: 1. Gleichgewicht der Flüssigkeiten (Gase), 2. Der Bau der Flüssigkeiten (Gase) und seine Eigenschaften, 3. Die Bewegung der Flüssigkeiten (Gase). Als Anhang ist ein erweitertes Verzeichnis der gleichbedeutenden Namen von Chemikalien, Drogen usw. beigegeben.
E. Grimsehl (Hamburg).

* * *

Ueber die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, erstattet von Max Simon. Leipzig 1906. Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 8 M.

Obwohl sich die Literatur über Elementargeometrie im letzten Jahrhundert außerordentlich vermehrt hat, gab es doch bisher kein zusammenfassendes Werk, aus dem man sich über irgend ein spezielles Gebiet orientieren konnte. Am weitesten ging in dieser Hinsicht das bekannte Werk von Baltzer, das für seine Zeit

von hervorragendem Werte war. Inzwischen sind nur über einige größere Gebiete besondere Monographien erschienen, wie die wertvolle Geschichte der Trigonometrie von v. Braunmühl und das gründliche, aber bisher noch unvollendete Werk von E. Kötter über die Entwicklung der synthetischen Geometrie, die ja in mancher Beziehung ihren Einfluß auch bis in die Elemente hinein erstreckte. Auch in bezug auf gewisse prinzipielle Fragen, für die im letzten Jahrzehnt das lebhafteste Interesse erwacht ist, wird man sich ohne große Mühe an der Hand verschiedener Werke die wichtigste Literatur verschaffen können. Darüber hinaus aber ist die in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut angehäufte, oft sehr ungleichwertige, Arbeit der allgemeinen Kenntnis und Benutzung so gut wie unzugänglich geblieben. Es ist nun das Verdienst des Verf., daß er durch die Abfassung des vorliegenden Werkes hierin einen vollständigen Wandel geschaffen hat, indem er sich der außerordentlich mühevollen und zeitraubenden Arbeit unterzog, die vorhandene Literatur zusammenzusuchen und nach sachlichen Gesichtspunkten zu ordnen. Es kann demgegenüber in keiner Weise in Betracht kommen, daß sein Buch im Einzelnen zu manchen Ausstellungen Veranlassung gibt, daß die literarischen Angaben nicht immer genau sind, eine absolute Vollständigkeit nicht erreicht wird, wichtigere Arbeiten nicht immer zu ihrem Rechte kommen, und daß sich auch gelegentlich Mängel der Darstellung eingeschlichen haben. Auch die allgemein philosophischen Gesichtspunkte, aus denen heraus der Verf. die Entwicklung erklären will, werden nicht viel Beifall finden. Es muß aber doch trotzdem hervorgehoben werden, dass er es darüber nicht versäumt, den Entwicklungsstufen spezieller Probleme und Theorien nachzuspüren. Allerdings treten die allgemeinen und zusammenfassenden Darlegungen den außerordentlich umfangreichen Literaturnachweisen gegenüber bedeutend in den Hintergrund; dafür findet man aber bei manchen genauere Angaben über die in den Abhandlungen aufgestellten Sätze, die sich in ein allgemeines System schwer einfügen ließen. Hier wird sicherlich noch sehr viel Arbeit nötig sein, um das Wertvolle herauszuschälen und aus dem Besondern das Allgemeine und Wichtige herauszuerkennen. Aber man wird von einem ersten Unternehmen dieser Art, das an und für sich mit unendlich vieler Mühe verbunden war, nicht auch sofort verlangen dürfen, daß das gesamte Material nun auch vollständig verarbeitet, kritisch gesichtet und gewürdigt an die Öffentlichkeit tritt. Eine solches Werk ist von einem Einzelnen nicht zu bewältigen, obwohl der Wunsch nach einer vollständigen Enzyklopädie der Elementargeometrie jetzt gerade, wo diese wichtige und verdienstvolle Vorarbeit getan ist, besonders rege werden wird. Da der Plan eines solchen Unternehmens nur durch die Mitwirkung Vieler Aussicht auf Verwirklichung hätte, und da die Fachgenossen an den höheren Schulen am meisten Interesse haben und in erster Linie dazu berufen sind, an einem Gegenstande mitzuarbeiten, der mit ihrer Berufstätigkeit in so engem Zusammenhange steht, so wäre unser Verein zur Förderung des Unterrichtes in der Mathematik und den Naturwissenschaften das geeignete Forum, von dem eine Anregung hierzu ausgehen könnte, die sicherlich nicht ohne Resultat verlaufen würde. Auf jeden Fall aber kann das vorliegende Buch nicht dringend genug zur Anschaffung und zum eingehenden Studium empfohlen werden.

O. Pund (Charlottenburg).

J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl., neu bearbeitet von **Georg Scheffers**. I. Bd. Differentialrechnung. — 624 S. 8^o m. 70 Fig. im Text. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Preis geb. 13 M.

Das Werk von Serret ist so bekannt geworden in den zwei Jahrzehnten, die es in Deutschland eingeführt ist, daß es sich erübrigt, es zu empfehlen. Aber die neue, dritte Auflage ist doch etwas mehr als die ursprüngliche **Harnacksche** Uebersetzung und die zweite, von **G. Bohlmann** besorgte Uebersetzung. Herr **Scheffers** hat das Buch erst zu einem deutschen Lehrbuch gemacht. Freilich blieb die ursprüngliche **Serretsche** Einteilung, so daß der Name des französischen Verfassers mit Recht noch obenan steht, aber Herr **Scheffers** hat erst alles, was **Harnack** und **Bohlmann** hinzufügten, zusammengearbeitet und den Text vielfach, sowohl im Ausdruck wie im Inhalt, verbessert. Insbesondere hat der Abschnitt, der die Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie behandelt, gewonnen. Wir hatten schon Gelegenheit (s. Unt.-Bl. S. 39, Fußnote), darauf hinzuweisen, daß hier endlich einmal die Definition der Polarkoordinaten in der Ebene so gegeben ist, wie sie jemand, der sie auf Kurven anwendet, wirklich braucht. Da die neue Auflage leider keine Literaturangaben mehr bringt, erlauben wir uns, den Leser darauf hinzuweisen, daß dieser Gegenstand sehr ausführlich von **Halphen** in dem *Appendice au „Traité de Géométrie analytique“* par **Salmon-Chemin**, (2^{de} éd. Paris 1903) behandelt

wurde. Richtig sind auch Epizykloiden und Hypozykloiden durch die Definition unterschieden; auch diese Definitionen sind, obwohl die doppelte Erzeugung der zyklischen Kurven schon seit **La Hire** und **Euler** bekannt ist, noch in manchen ganz neuen Büchern unrichtig. Und so wurde noch vieles andere verbessert, was der Verfasser zum Teil im Vorwort selbst hervorhebt.

Besonders zu danken ist aber Herrn **Scheffers**, daß er alle Figuren durch exakte, neu gezeichnete, ersetzte. Denn diese waren in den vorhergehenden Auflagen nicht bloß schlecht und ungenau, sondern an manchen Stellen auch falsch. Wir weisen nur auf die Archimedische Spirale hin, die, eben infolge mangelhafter Deutung der Polarkoordinaten, in manchen Büchern heute noch im Anfangspunkt endet, was für einen, der die geometrischen Beziehungen der Kurve kennt, ganz unvorstellbar ist. Wir heben ferner die hyperbolische Spirale hervor, die nicht mehr, wie früher, nur aus einem Aste besteht usw.

Wir zweifeln nicht, daß infolge der nur angedeuteten Vorzüge das Buch von **Serret-Scheffers** zu derselben Beliebtheit auf seinem Gebiet gelangen wird, wie die Bücher von **Salmon-Fiedler** auf dem ihrigen. Wie wir schon angedeuteten, hat Herr **Scheffers** aber das **Salmonsche** Prinzip reicher Literaturangaben nicht zur Richtschnur genommen. Warum wir das nicht billigen, haben wir in diesen Blättern schon so oft zum Ausdruck gebracht, daß wir es diesmal nicht wiederholen möchten. **H. Wieleitner** (Speyer).

ANZEIGEN.

Verlag von **Otto Salle**, Berlin W. 30

Soeben erschien
in meinem Kommissionsverlage:

Eine konforme Abbildung
als zweidimensionale Logarithmentafel
zur Rechnung mit komplexen
Zahlen.

Von

Dr. F. Bennecke

Professor am Kgl. Victoria-Gymnasium
zu Potsdam.

Mit 10 Lichtdrucktafeln. Preis 2 Mk.

Verlag von **Otto Salle**, Berlin W. 30.

Der

**Beobachtungs-
Unterricht**

in

Naturwissenschaft, Erdkunde und Zeichnen
an

höheren Lehranstalten
besonders als Unterricht im Freien
von **G. Lüddecke**.

Mit Vorwort von

Prof. Dr. Herm. Schiller.

Preis Mk. 2.40.

F. G. Gauß, Logarithmentafeln.

Vierstellige log. u. trigon. Tafeln. **Schulausgabe.**

3. Auflage. In braun Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Kleine Ausgabe.**

21. bis 24. Auflage. In grau Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Vollständige Ausgabe.**

92. bis 95. Auflage. In blau Leinen gebunden 2,50 M.

— Prüfungsexemplare stehen gern zur Verfügung. —

Eugen Strien, Verlagsbuchhändler in Halle-Saale.

Mineralien, Mineralpräparate, geschliffene Edelsteine, Edelsteinmodelle, Meteoriten, Metallsammlungen, mineralogische Apparate und Utensilien.

Gesteine, Dünnschliffe von Gesteinen, petrographische Apparate und Utensilien; geologische Hämmer.

Petrefakten, Gipsmodelle seltener Fossilien, Geotektonische Modelle. Sammlungen für allgemeine Geologie. Exkursions-Ausrüstungen.

Krystallmodelle aus Holz, Glas und Papp. Krystalloptische Modelle.

Diapositive für den geologischen und petrographischen Unterricht.

Der allgemeine mineralogisch-geologische Lehrmittel-Katalog (reich illustr.) No. XVIII, steht auf Verlangen portofrei zur Verfügung.

Meteoriten, Mineralien und Petrefakten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im

Tausch übernommen.

Dr. F. Krantz, Rheinisches Mineralien-Kontor,

Fabrik und Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel.

Gegründet 1833. Bonn a. Rh. Gegründet 1833.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 30

Die

Einheit der NaturkräfteEin Beitrag zur Naturphilosophie
vonP. Angelo Secchi, S. J.
weil. Direktor der Sternwarte des
Collegium Romanum.Autorisierte Uebersetzung
vonProf. Dr. L. Rud. Schultze.
2. revidierte Auflage.

2 Bände mit 61 Holzschnitten.

Preis geheftet 12 Mk., gebunden 14 Mk.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Präzisions-Optik.

Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung
zur Fabrikation der**Geryk-Oel-Luftpumpen**

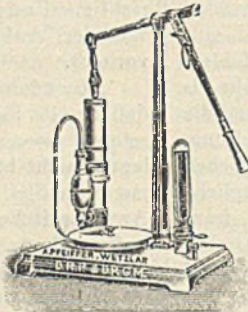
D. R.-P. in Deutschland.

Typen für Hand- und Kraftbetrieb.

Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. va-
Zweistiefelige " " 0,0002 " " " " cumm

Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

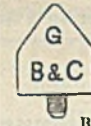
Viele gesetzlich geschützte Originalkonstruktionen.

Alle physikalischen u. chemisch. Apparate.
Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette,
phys. u. chem. Vorbereitungszimmer u. Hörsäle.

Nur Jahresaufträge.

Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.

Beginn jederzeit.

**Anatomische
Lehrmittel-Modelle**aus Hartmasse, fein koloriert und
zerlegbar, sowie natürl. Knochen-
präparate empfiehlt (Katal. gratis)**W. Förster**, Kunstanstalt,
Steglitz bei Berlin.**Projektions-Apparate
Heliostate usw.****Hans Heele**, Berlin O. 27.**Präz. Werkst. für Optik u. Mechanik**v. **Peter Schüll**, Frankfurt a. M.
Astronomische u. terr. Fernrohre,
Okulare, Prismen.Spez.: dünne Planparallel- und
Hohlspiegel f. elektr. magn. Mess-
instrum. — Photogr. Objektive.**Physikal. Apparate**u. chemische Gerätschaften,
sowie sämtl. Schullehrmittel
fertigen u. liefern in bekannter tadel-
loser Ausführung zu mässigen Preisen.**Schultze & Leppert**Physikalisch-mechanische u. elektro-
techn. Werkstätten, Cöthen in Anh.**Spektralapparate**Kathetometer, optische Bänke
usw.**Hans Heele**, Berlin O. 27.**Physik. Baukasten**für Lehrzwecke nach
Wilh. Volkmann.Projektionseinrichtungen
elektr. Messinstrumente**Georg Beck & Co.**

Berlin NO. 43, Georgenkirchstr. 41

Hartmann & Braun A.-G.

Frankfurt a. M.

Spezial-Fabrik aller Arten

Elektr. u. magnet. Mess-Instrumente
für Wissenschaft und Praxis.
Kataloge stehen zu Diensten.**Projektions-Photogramme**

für den

Naturwissensch. Unterrichtin zweckdienlichster Ausarbeitung
Prospekt und Verzeichnisse kostenlos
Otto Wigand, Zeitz. 2.**Hartmann & Braun A.-G.**

Frankfurt a. M.

empfehlen ihr

Elektr. Instrumentarium
für Lehrzwecke
welches allgem. Anerkennung findet.
Spezialkatalog zu Diensten.**Klapptafel**n. Prof. Rühlmann, mit Zu-
behör, z. Darstellung aller
Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen,
sowie die in Aufgaben vorkommenden
Bewegungen. Prospekt frei. Dynamos,
Dampfmaschinen, Wasserturbinen.**Rob. Schulze**, Halle a. S.
Elektrotechn. u. mechan. Werkstätten.**Neu! Biologische Neu!**Entwicklungspräparate, Injektions-,
Nerven-, Situs-Präparate, biologische
u. system. Zusammenstellungen usw.
— Katalog 1907 gratis und franko. —
Zoologisches Institut**Wilh. Haferlandt & Co.**
Berlin SW. 48, Friedrichstrasse 6.**Paul Gebhardt Söhne, Berlin C 54.**

Spezialität:

physik. Apparate, Luftpumpen
mit Cabinet bezw. Grassmannschem
Hahn.Einr. phys. u. chem. Experimentier-Räume.
Grand Prix u. gold. Medaille St. Louis.
Preisr. 16 u. 17 mit ca. 5000 Num. grat.**Devonische Petrefakten**Kollektion 25 versch. Spezies, Mk. 3.50,
50 ders. Mk. 8.50, 75 ders. 15. — u. 100 ders.
Mk. 24.50. (Alles richtig bestimmt.)
Eruptivgesteinsarten und vollständige
Reihe vulkanischer Auswurfs-Produkte
(Asche, Sand, Bomben, Kugeln usw.)**Max Hopmann**, Gerolstein i. Eifel.**Trigonometrie-
Demonstrationsapparat**nach Dr. Lampart, neueste, voll-
kommenste Art, gesetzlich geschützt,
1 bzw. 2 qm ganze Größe, Preis Mk. 47.—
Viele Referenzen. — Beschreibung auf
Verlangen. — Allein. Lieferant:
Hans Hilgers, Naturw. Apparate, Bonn.Optische Werkstätte
Paul Waechter
Friedenau.**Mikroskope**Photogr. Objektive D. R. P.
Kataloge gratis und franko.

Technologie in der Schule!

Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's technolo-
gischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiert! Katalog gratis!



Achromatische
Schul - Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
— Berlin SW. 11. —
Preislisten kostenlos.

W. Apel, Universitäts-Mechanikus

F. Apels Nachf., Göttingen.
Physikalische und Chemische Apparate.
Apparat zur Bestimmung
der Dielektrizitätskonstante nach Nerst
Modelle von Dach- und Brückenkonstr.
nach Schülke.
Totalreflektometer nach Kohlrausch.
Kristallmodelle aus Holz- u. Glasaufeln

Keiser & Schmidt

Berlin N., Johannisstr. 20/21
Elektrische Messinstrumente
zu wissenschaftlichen und technischen
Zwecken.
Demonstrations- und Schul-Apparate.

Elektrizitäts - Gesellschaft
Gebr. Ruhstrat, Göttingen 3.

**Schalttafeln, Messinstrumente
und Laboratoriums-Widerstände**
für Lehr- und Projektionszwecke.
Man verlange Preisliste Nr. 12 u. 12a.

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.

Größtes Etablissement auf dem Kon-
tinent für die Herstellung von
::: **Physikalischen Apparaten** und :::
::: **chemischen Gerätschaften** :::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen
mit allen dazu erforderlich Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog
und Kostenanschläge.

Neuartige vielseitige
Projektions - Apparate

für alle Zwecke.

Gebr. Mittelstrass
Magdeburg 23.

Gülcher's Thermosäulen

mit Gashelzung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente.
— Konstante elektromotorische Kraft.
Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt.
Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine
Polarisation, daher keine Erschöpfung.
Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Alleinige Fabrikanten: **Jul. Pintsch**,
Akt.-Ges., Berlin O., Andreasstr. 71/73.

R. Jung, Heidelberg.

Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier - Instrumente.
Ophthalmologische u. physiologische
Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie - Unterricht.
— Einrichtung —
chemischer Laboratorien.

TELLURIEN,

Horizontalen, Armillarsphären, Fern-
rohre usw., zerleg- u. verstellbar, als
„beste und billigste“ allgemein aner-
kannt, in über 6000 Schulen bewährt.
Adolf Mang,
Geographisch - Astro-
nomischer Verlag,
Stuttgart, Reinsburgstr. 16.

G. Lorenz, Chemnitz.

Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

R. Brendel

Fabrikant botanischer Modelle
Grunewald b. Berlin
Bismarckallee 37.
Preisverzeichnisse werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.

— Basel —
**Induktorien mit Präzisions-
Spiral - Staffelwicklung**
Patent Klingelfuss.

Naturw. Lehrmittel - Institut

Wilh. Schlüter
Halle a. S.
Erzeugung und Vertrieb naturwissensch.
Präparate, Sammlungen und Modelle in
anerkannt erstklassiger Ausführung
zu massigen Preisen. — Kataloge
kostenlos.

Otto Himmler
Optisch - mechanische Werkstätte
Mikroskope

Berlin N 24.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen - Ruhr, Kaupenstraße 40-48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und
Apparate für strahl. Wärme
nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller - Uri,

Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
**Physikalische und chemische
Vorlesungs - Apparate.**
Spezialitäten: Elektro - physikalische
und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.

— Darmstadt. —
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz * Wetzlar

Optische Werke
Mikroskope, Mikrotome,
Mikrophotogr. u. Projektions-
Apparate
Photographische Objektive

Physikal. Apparate

Vollständige Einrichtung
von physikal. Kabinetten
Ferdinand Ernecke
Berlin-Tempelhof

Aquarien

Terrarien, Froschhäuser, Grotten,
sämtl. Aquarienbehelfe usw.
inkl. Gratis-Liste, liefert billigst
A. Glaschker, Leipzig M. N. 25
Lieferant vieler Schulen u. Anstalten.

Warmbrunn, Quilitz & Co.

Berlin NW. 40, Hallesche Straße 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Meiser & Mertig

Dresden-N. 6. Z
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
♦ Chemische Apparate ♦
Preisverzeichnis kostenlos



Man verlange gratis u.
franko Prospekt Mech

VON: **CARL ZEISS**
JENA

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 30

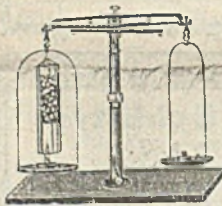
Methodik
des
Botanischen Unterrichts

von
Dr. Felix Kienitz-Gerloff
Professor a. d. Landwirtschaftsschule
zu Weilburg a. L.

Mit 114 zum Teil farbigen Abbildungen

Preis Mk. 6.50.

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeu-
gnisse, chemische u. physikalische
Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstraße 19
liefert auch



sämtliche
Apparate
nach dem
methodischen
Lehrbuch der
Chemie und
Mineralogie v.
Prof. Dr. Wilh.
Levin — genau

nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 30

In meinem Verlage erschienen:

Lehr- und Übungsbuch
der
Geometrie

für die Unter- und Mittelstufe
mit Anhang (Trigonometrie und An-
fangsgründe der Stereometrie)

von

Dr. Fritz Walther

Oberlehrer am Französ. Gymnasium
in Berlin.

Preis Mk. 2.20.

Im Anschluss an die Forderungen be-
deutender Fachmänner und der Unterrichts-
Kommission der Meraner Naturforscher-
Versammlung berücksichtigt der Verf.
erheblich stärker, als dies bisher geschieht,
die Anschaulichkeit und den empirisch-
induktiven Ursprung der geometrischen Er-
kenntnisse, die Beweglichkeit der Raum-
gebilde u. ihren funktionalen Zusammenhang.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

siehe der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht
an höheren Lehranstalten von Professor Dr. Hugo Fenkner in
Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. W. Krumme, Direktor
der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie.
5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M.
Dritter Teil: Ebene Trigonometrie. M. 1.60.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren
Lehranstalten. Von Oskar Lesser, Oberlehrer an der Klinger-Ober-
realschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Walther: **Lehr- und Übungsbuch der Geometrie** für die Unter-
und Mittelstufe mit Anhang (Trigonometrie und Anfangsgründe
der Stereometrie). Von Dr. Fritz Walther, Oberlehrer am Französ.
Gymnasium in Berlin. Preis Mk. 2.20 mit Anhang.

Arithmetik

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung
von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie,
Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. Hugo Fenkner
in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der
Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der
Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). 2. Aufl.
Preis M. 2.60. — Ausgabe B (für 4stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. —
Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10.

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. J. Heussi. 16. voll. umgearb. Aufl.
Mit 199 Holzschnitten. Bearb. von Prof. Dr. E. Götting. Preis 1 M. 50 Pf.
— Mit Anhang „Elemente der Chemie.“ Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-
Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. Heussi. 7. verb.
Aufl. Mit 487 Holzschn. Bearb. von Prof. Dr. E. Götting. Preis 5 M.

Chemie.

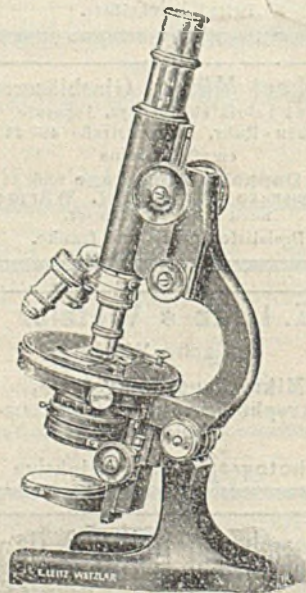
Levin: **Meth. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie**
unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Professor Dr. Wilh. Levin
5. Aufl. Mit 112 Abbildungen. Preis 2 M.

Levin: **Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Real-
gymnasien und Ober-Realschulen.** Von Prof. Dr. Wilh. Levin.
Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Unter-Sekunda der Ober-
Realschule). Mit 72 Abbild. Preis Mk. 1.40. Teil II: Oberstufe (Pensum der
Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 M. 40 Pf. Teil III:
Organische Chemie. Mit 37 Abbild. Preis M. 1.65.

E. Leitz,
Optische Werke
Wetzlar.

Zweiggeschäfte:

Berlin NW., Luisenstraße 45, Frank-
furt a.M., Neue Mainzerstraße 24, London
St. Petersburg, New-York, Chicago,



Mikroskope,
Mikrotome,
Mikrophotographische Apparate.
Projektions-Apparate.
Photographische Objektive.

Man verlange kostenfrei

Katalog Nr. 42 d.

Hierzu Beilagen der Firmen G. Braunsche Hofbuchdruckerei und Verlag in Karlsruhe I. B. (2 Stück),
Konrad Grethlein's Verlag in Leipzig, Bernhard Telchmann in Erfurt, B. G. Teubner, Verlag in Leipzig,
M. Wolf, Weingutsbesitzer in Stadecken, Friedrich von Zeschwitz, Verlag in Gera, welche geneigter Be-
achtung empfohlen werden.