Jahrgang XIV. 1908. No. 2.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Tagesordnung der XVII. Hauptversammlung zu Göttingen, Pfingsten 1908.

Montag, 8. Juni, abends 8 Uhr: Begrüßungszusammenkunft im Blauen Saale des Englischen Hofes.

Dienstag, 9. Juni, vormittags 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung.

Eröffnung und Begrüßung. — Geschäftliche Mitteilungen.
Vortrag von Bastian Schmid (Zwickau): „Lehrerbildung und Persönlichkeit des Lehrers".
Referate über die Frage der Hochschulbildung für die künftigen Lehrer der Mineralogie und Geologie:
a) Hauptbericht von J. Pompeckj (Göttingen);
b) Mitbericht von K. Fricke (Bremen).
Diskussion über die in diesen Referaten behandelte Frage.

Während dieser Sitzung wird eine Frühstückspause stattfinden, Frühstück wird im Hause selbst bereit gehalten.

Nachmittags 3 Uhr bis 6 Uhr: Abteilungssitzungen, resp. Besichtigungen.

Abends 6 Uhr: Festmahl (mit Damen) im Blauen Saale des Englischen Hofes. (Preis des trockenen Gedecks 3 M.)

Mittwoch, 10. Juni, vormittags 9 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Vortrag von R. v. Hanstein (Berlin): „Ueber das teleologische Prinzip im biologischen Unterricht".
Diskussion über die Frage: Wie ist der Stoff des physikalischen Unterrichts zu beschränken, um eine intensivere Schulung im physikalischen Denken zu ermöglichen? Berichterstatter: F. Bohnert (Hamburg).

12 Uhr: Frühstückspause.

$12\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Uhr: Abteilungssitzungen.

$2\frac{1}{2}$ Uhr: Gemeinsames Mittagessen im Hotel zur Krone.

Nachmittags 4 Uhr: Besichtigungen.

Donnerstag, 11. Juni, vormittags 9 Uhr: Dritte allgemeine Sitzung.

Fortsetzung der Diskussion über Abgrenzung des physikalischen Unterrichtsstoffes. Dabei Besprechung der Ergebnisse der von der Unterrichtskommission der Naturforschergesellschaft veranlaßten Umfrage über den tatsächlichen Stand des Physikunterrichts.

$10\frac{1}{2}$ Uhr: Frühstückspause.

11 Uhr: Geschäftliche Sitzung: Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Presler, Schotten und Thaer. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Diskussion über eine Geschäftsordnung für den Vereinsausschuß.*) — Antrag des Vorstandes auf Erhebung eines Versammlungsbeitrages für die Zukunft. – Sonstige geschäftliche Anträge.

Mittags $2\frac{1}{2}$ Uhr: Gemeinschaftliches Mittagessen im Hotel zur Krone.

Nachmittags: Gemeinsamer Spaziergang — mit Damen — nach dem Rohns.

Besichtigung des in der Nähe gelegenen Geophysikalischen Instituts (s. weiterhin).

An Abteilungsvorträgen sind bisher angemeldet worden:

1. E. Wiechert (Göttingen): Ueber einige ausgewählte Punkte der geophysikalischen Forschung (anschließend daran die Einrichtungen und Apparate des Geophysikalischen Instituts.)
2. L. Krätzschmar (Göttingen): Ueber mikrochemische Reaktionen.

Für die Besichtigungen, denen jedesmal eine kurze Ansprache des Institutsdirektors vorausgeht, ist eine Teilung in zwei Gruppen in Aussicht genommen. Es sollen gleichzeitig besichtigt werden:

am ersten Tage das Institut für angewandte Elektrizität und das Chemische Institut,
am zweiten Tage das Institut für technische Mechanik und der Botanische Garten,
am dritten Tage das Geophysikalische Institut und das Zoologisch-geologische Landesmuseum.

Alle Sitzungen finden in den Räumen der Oberrealschule (Lotzestraße 16—18) statt, die Hauptsitzungen im Zeichensaal, die Abteilungssitzungen in den Unterrichtszimmern für Physik und Chemie (eventuell auch im kleinen Hörsaal des in nächster Nähe befindlichen Physikalischen Universitätsinstituts). Als Frühstücksraum dient die mit den vorgenannten Räumen im selben Hause vereinigte Turnhalle.

Sternwarte und Mathematisches Lesezimmer werden nur auf besonderen Wunsch gezeigt.
In der Turnhalle der Oberrealschule wird eine Ausstellung der Göttinger Mechaniker stattfinden.

Das — durch Plakate kenntlich gemachte — Empfangsbureau wird am Montag Nachmittag auf dem Bahnhof, am Abend dieses Tages im Englischen Hof, an den folgenden Tagen im Gebäude der Oberrealschule aufgeschlagen sein.

Wohnungen nach Wunsch besorgt der Wohnungsausschuß, der um möglichst frühzeitige Anmeldungen zu Händen des Herrn Oberlehrers Freise (Bergstraße) bittet. Als Hotels werden empfohlen: Hotel zur Krone (Weenderstraße), Gebhardts Hotel (Alleestraße), Hotel Royal (Barfüßerstraße); ferner (billiger) Englischer Hof (Jüdenstraße), Deutscher Hof (Weenderstraße), Central-Hotel (Jüdenstraße). Eine möglichst zahlreiche Beteiligung von Damen ist auch in diesem Jahre höchst willkommen.

Wie alljährlich wird der Vereinsvorstand sich auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der Staaten, in denen die Pfingstwoche nur teilweise schulfrei ist, mit der Bitte wenden, daß die Leitungen der einzelnen Anstalten zu wohlwollender Berücksichtigung der behufs Teilnahme an der Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche angewiesen werden. Nach den bisherigen Erfahrungen darf auf die Gewährung solcher Gesuche überall mit Sicherheit gerechnet werden.

Der Hauptvorstand.
Pietzker.

Der Ortsausschuss.
Götting.

*) Den vom Vereinsvorstand vorgelegten Entwurf einer Geschäftsordnung siehe diese Nummer, S. 36.

Nochmals über den Gewichtsbegriff.

Von M. Grübler (Dresden).*)

Die Darlegungen des Herrn Prof. Pietzker in Nr. 1, S. 15 des laufenden Jahrganges der „Unterrichtsblätter („Gewicht und Wägungsergebnis") lassen erkennen, daß meine Ausführungen „Ueber den Gewichtsbegriff" (Unterrichtsblätter 1907, S. 127) doch nicht so aufgefaßt worden sind, wie mir dies im Interesse der Sache erwünscht ist. Das geht schon daraus hervor, daß Herr Pietzker zwischen den Darlegungen des Herrn Prof. Dr. Erdmann über „Gewicht und Masse" (Unterrichtsblätter 1908, S. 14) und den meinigen einen Gegensatz findet, während es mir ganz unmöglich ist, einen solchen zu entdecken.

Wohl aber zeigen sich wesentliche Gegensätze zwischen den Anschauungen des Herrn Pietzker und den meinigen. Herr Pietzker sagt: „Gewicht ist also nicht eigentlich eine Kraft, sondern vielmehr die dem mit Gewicht behafteten Körper eigentümliche Fähigkeit, gegebenenfalls eine Kraftwirkung auszuüben".

*) Mit diesen Ausführungen ist die durch den Dresdener Vortrag des Herrn Staatsrats Grübler hervorgerufene Diskussion für uns abgeschlossen.
Die Redaktion der „Unterrichtsblätter".

Ich dagegen bekämpfe nicht diese Definition, sondern die bekannte physikalische: Gewicht ist der Druck des Körpers auf die Unterlage,*) oder kürzer: Gewicht = Schwere des Körpers.

Herr Pietzker sagt ferner, daß ich die vermittelnde Rolle, welche die Schwerkraft bei der Wage und der Wägung spielt, nicht genügend berücksichtige. Ich bin der entgegengesetzten Meinung, nämlich, daß man ihr in der physikalischen Terminologie einen zu großen Einfluß gewährt. Denn die übliche Hebelwage, auch in ihrer feinsten Ausführungsform, ist bekanntlich kein Kraftmesser, wie z. B. die Federwage; man ist also sachlich gar nicht einmal berechtigt, das Messungsergebnis der Hebelwage als eine Kraftgröße hinzustellen. Auch möchte ich daran erinnern, daß wir z. B. Zeiten durch Winkel, Kräfte durch Federdehnungen, also durch Längen, Temperaturen durch Längenverhältnisse messen, daß es aber keinem Physiker einfällt, die Vermittlerrolle der Winkel, Längen, Längenverhältnisse u. s. f. dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß er Zeiten als Winkelgrößen, Kräfte als Längen, Temperaturen als Längenverhältnisse auffaßt.

Herr Pietzker betont endlich, daß die Gleichheit der Wägungsergebnisse auf der Hebelwage an verschiedenen Orten der Erde gar nichts gegen die Auffassung des Gewichts als „eines von der Schwerkraft abhängenden oder zu ihr in Beziehung stehenden Begriffs" beweise. Gewiß ist das richtig, soweit es sich nur um den Zusammenhang zwischen Gewicht und Schwere handelt. Jeder Laie weiß, daß ein Körper um so schwerer ist, ein je höheres Gewicht er hat. Aber darauf kommt es hier gar nicht an, sondern auf das folgende:

1. Das Gewicht eines Körpers ist der Druck auf die Unterlage (physikalische Definition);
2. der Druck eines Körpers auf seine Unterlage ist von Ort zu Ort verschieden (Erfahrungstatsache);
3. das Gewicht eines Körpers wird durch Wägung auf der Hebelwage ermittelt (Tatsache);
4. das Wägungsergebnis ist überall das gleiche (Erfahrungstatsache).

Aus 1 und 2 folgt, daß das Gewicht eines Körpers von Ort zu Ort verschieden ist, aus 3 und 4, daß es überall das gleiche ist. Ueber diesen Widerspruch, der aus der doppelten Auslegung des Wortes „Gewicht" mit Notwendigkeit sich ergibt, helfen auch die Ausführungen des Herrn Pietzker nicht hinweg.

Daß sich diese Doppeldeutigkeit des Wortes „Gewicht" in Physikerkreisen vorfindet, dafür nur einen Beleg. In dem bekannten trefflichen „Lehrbuch der praktischen Physik" von Kohlrausch, 9. Aufl., heißt es auf Seite 45: „Die Wägung ermittelt die Masse eines Körpers"; dagegen wird auf Seite 49, Zeile 2 von unten, das Wägungsergebnis das „Gewicht" des Körpers genannt. Hierbei versteht Kohlrausch unter „Gewicht" ausdrücklich eine Kraft (vergl. hierzu S. 541 oder die Unterscheidung zwischen spezif. Masse und spezif. Gewicht auf S. 58).

Daß diese doppelsinnige Verwendung des Wortes „Gewicht", die in weitesten physikalischen und technischen Kreisen zu finden ist, für den Unterricht große Nachteile hat, wird wohl von keiner Seite bezweifelt; um so mehr erscheint es verwunderlich, daß an der höchstens 250 Jahre alten physikalischen Auslegung noch mit solcher Zähigkeit festgehalten wird. „Weil's der Gebrauch verfügt", sagt Shakespeare im Coriolan; doch fährt er an jener Stelle fort:

„Doch wenn sich alles nach Gebräuchen fügt,
Wird nie der Staub des Alters abgestreift,
Und bergehoher Irrtum aufgehäuft,
Daß Wahrheit ihn nicht überragt".

Die Wahrheit ist hier auf Seite der volkstümlichen Auslegung des Wortes „Gewicht", der Irrtum auf Seite der Physiker; letzterer Pflicht ist es, den Irrtum baldigst zu beseitigen.

Das wäre aber, wie vorgeschlagen wurde, nicht dadurch möglich, daß man das Wägungsergebnis als „Masse" des Körpers bezeichnet, und nach wie vor unter Gewicht die Schwere des Körpers versteht. Denn die Umgangssprache verwendete von jeher „Gewicht" im Sinne von Wägungsergebnis, also Masse im heutigen Sinne, und wird an dieser Benutzung des Wortes zweifellos festhalten, wozu sie ja auch sachlich ganz berechtigt ist. Der Doppelsinn des Wortes würde also durch eine solche Maßnahme nicht beseitigt.

Es bleibt daher nur ein Weg, und dieser ist natürlich und durchführbar, nämlich der, daß die Physiker ihre Definition des Gewichtes als des Druckes auf die Unterlage, bezw. als Schwerkraft fallen lassen und mit „Gewicht" eines Körpers zunächst nur das Ergebnis seiner Wägung auf der Hebelwage bezeichnen, also dasselbe wie in der Umgangssprache. Die Eigenschaft der Hebelwage, ein Massen-Messer zu sein, führt dann von selbst dazu, das Wägungsergebnis als Masse aufzufassen und folglich unter dem Gewicht eines Körpers seine Masse zu verstehen.

Ganz abgesehen von dem didaktischen Vorteile, an einen der Umgangssprache entlehnten und daher leichtverständlichen Begriff anknüpfen zu können, ergibt sich u. a. noch der, mit der Maß- und Gewichtsordnung des Deutschen Reiches dann in Einklang zu sein. Der Artikel 1 dieses Gesetzes in seiner bisherigen Fassung läßt keinen Zweifel darüber, daß Gewicht und Masse dasselbe ausdrücken sollen. Hoffentlich bleibt uns diese ebenso streng sachliche, wie klare Fassung erhalten, trotz der überaus bedauerlichen Erklärung, welche das Comité International des Poids et Mesures in seiner jetzigen Zusammensetzung im Oktober 1901 erlassen hat: „Le terme poids désigne une grandeur de la même nature qu'une force", durch die es sich in Gegensatz zu der entsprechenden Erklärung vom Oktober 1889 stellt.

Zum Glück sind die einzelnen in der Konvention befindlichen Staaten in den Formulierungen ihrer bezüglichen Gesetze an jene Erklärungen nicht gebunden, sonst könnte z. B. die Schweiz in ihrem Bundesgesetz vom 9. Juni 1906, Artikel 23 nicht erklären: „Die Einheit der Masse ist das Kilogramm u. s. f. Die im Verkehrsleben zur Bestimmung dienenden Maßgrößen werden als Gewichte bezeichnet".

Orientierung über wichtige Abhandlungen zur Kant-Laplaceschen Theorie.

Von G. Holzmüller (Hagen i. Westf.)

Vor mir liegt das Buch: Dr. Emden: Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmische und meteorologische Probleme (24 Fig., 12 Diagramme, 5 Taf.

*) Vergl. z. B. das „Handbuch der Physik" von Winkelmann, 2. Aufl. Bd. 1, S. 44: „Gewicht nennt man den Druck, den eine Masse an einem bestimmten Orte auf ihre Unterlage ausübt".

im Texte. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1907. Preis 13 M.)

Ein bedeutungsvolles Werk, welches berechtigtes Aufsehen erregen wird, da es sich in hochwissenschaftlicher Weise gegen die Grundlagen der üblichen Weltanschauung wendet, wobei der Verfasser vorsichtig genug war, die Korrektur durch einen Mitarbeiter wie Prof. Dr. Schwarzschild (Göttingen) mitbesorgen zu lassen. Es schließt sich an die etwa unter gleichlautendem Titel in Wiedemanns Annalen schrittweise veröffentlichten Abhandlungen des Geheimrats A. Ritter an, die gleichfalls ungeheueres Aufsehen erregten, da sie den allgemein anerkannten Theorien von Kant und Laplace so energisch widersprachen, daß sie vielleicht gerade aus diesem Grunde von der Wissenschaft so gut wie abgelehnt wurden. Ritter fand sich sogar genötigt, bei Rümpler (Hannover) einen Auszug aus den Aufsätzen in sechs Abhandlungen zu veröffentlichen, um in bescheidener Form weitere Kreise zu interessieren. Dem Aachener Forscher, der an der dortigen Hochschule wirkte, wird gewissermaßen ein Denkmal gesetzt, dessen er sich hoffentlich noch im Ruhestande freuen kann. Denn es gehörte wahrlich besonderer Mut dazu, sich mit dem Verfasser der „Mécanique céleste“ in Widerspruch zu setzen, der allerdings nur durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung sich hatte verleiten lassen, sich mit den eigenen Werken in Widerspruch zu setzen, was bekanntlich Carl Friedrich Gauß in dem Briefwechsel mit Schumacher bereits gerügt hat. A. Ritter benutzte die Grundlagen der kinetischen Gastheorie zu seiner Widerlegung, der Lehre also, auf welcher bereits die Forschungen über die Größe der Moleküle und Atome und die mittlere Weglänge und Geschwindigkeit beruhen, mit der sich die wissenschaftliche Welt stark beschäftigt hat.

Ritters Berechnungen beruhen auf dem Meyer-Helmholtzschen Energieprinzip und dem von Clausius aufgestellten Entropieprinzip. Unter Entropie einer Gasmasse versteht man bekanntlich die Summe aller Einzelenergien. Da bekanntlich ein immerwährender Ausgleich der Energien durch die Zusammenstöße erfolgt, ist eine wichtige Konsequenz dieses Prinzips das endliche Aufhören aller Wärmeunterschiede, welches als ein ewiger Tod vorausgesagt wird, der allerdings bei unendlich zahlreichen Atomen erst nach unendlicher Zeit zu erwarten ist. Kurz, die Entropie des Weltalls strebt asymptotisch einem Endwerte zu, wie die Wissenschaft behauptet.

Bekanntlich beruht die kinetische Gastheorie auf einer Zustandsgleichung $pv = HT$, wo p die Spannung, v das Volumen, H die sogen. Regnaultsche Konstante und T die vom absoluten Nullpunkte (-273^0) aus gerechnete absolute Temperatur bedeutet, so daß man aus je drei dieser Größen die vierte leicht berechnen kann. Unter einem vollkommenen Gase versteht man ein solches, welches sich dieser Zustandsgleichung vollständig unterordnet. Von Kondensation und Uebergang in einen anders gearteten Aggregatzustand überhaupt wird dabei abgesehen.

Ritter begann mit der Aufgabe, die Höhe der Atmosphäre zu berechnen, die ein fast kugelförmig gestalteter Weltkörper dauernd an sich fesseln kann. Zu diesem Zwecke nahm er einen indifferenten Gleichgewichtszustand an, der etwa folgendermaßen charakterisiert war. Wurde der Zustand irgendwie gestört, also ein Luftquantum zum Aufsteigen oder Niedersinken veranlaßt, was mit Temperatur- und Spannungsumänderungen verbunden war, so wurde angenommen, es gelangte stets in eine Luftumgebung von derselben Beschaffenheit, in die es nach der obigen Zustandsgleichung versetzt wurde. Der Vorgang also war nicht mit Wärmeaustausch verbunden, war also ein adiabatischer, und bedeutete einen indifferenten Gleichgewichtszustand. Die bei der Hebung zu leistende Arbeit konnte nur durch das Produkt aus dem auf den Radius projizierten Schwerpunktsweg und dem Gewicht des Gasquantums charakterisiert sein. So ergab sich unter der Voraussetzung einer Temperatur von $t_0 = 0^0$ C oder absolut $T_0 = 273^0$ die Höhe der Erdatmosphäre als $H = \frac{c_p\, T_0}{A}$, wobei für den Fall der atmosphärischen Luft Cp, d. h. die Wärmekapazität für konstante Spannung, gleich 0,2375 war, A dagegen der reziproke Wert des mechanischen Wärmeäqualents gleich $\frac{1}{424}$, so daß sich für diesen Fall $H = 0{,}2375 \cdot 273 \cdot 424 = 27\,491$ m ergab. Dagegen wurde der höhere Wert 348952 m für eine Atmosphäre aus reinem Wasserdampf gefunden.

Interessant war noch folgendes Ergebnis: Dachte sich Ritter die Atmosphäre durch einen Schacht mit dem Mittelpunkte der Erde verbunden, so ergab sich unter den entsprechenden Annahmen für den ersten Fall für die dortige Temperatur der Wert $T_0 = 31\,902^0$, die Spannung $p_0 = 12\,965\,000$ Atmosphären und die Dichte im Verhältnis zum Wasser) 143,5, ein für die Geologie wichtiges Resultat.

Es sei gleich an dieser Stelle vorausgeschickt, daß Dr. Emden in absolutem Maße für verschiedene Luftarten folgende Tabelle aufstellte:

	Dichte ϱ (gramm·cent^{-3})	Volumen v (cent^3 gramm^{-1})	Regnaultsche Konstante H (cent^2 sek^{-2}
Luft	0,001276	783,7	$2{,}8705.10^6$
Wasserstoff (H_2) .	0,00008831	11325,0	$4{,}1481.10^7$
Dissozierter Wasserstoff (H_1) .	0,00004416	22650,0	$8{,}2962.10^7$
Kohlensäure (CO_2)	0,001951	512,5	$1{,}8764.10^6$
Dreiatomiges Gas vom Molekulargewicht18 (z.B. H_2O)	0,0007948	1258,3	$4{,}6090.10^6$

Die Höhe der Erdatmosphäre ergab sich für die mittlere Breite, also für $g = 980{,}6$, entsprechend als

$$H_0 = 7{,}9916.10^5,\ 1{,}1548.10^7,\ 2{,}3096{,}10^7,\ 5{,}2239.10^5,\ 1{,}2831.10^6.$$

Ritter nahm an, daß die Höhe der Atmosphäre in dem Falle erreicht war, wo $T = 0$ und $v = 0$ war, und daß längs des Radius der Zustand durch eine sogen. polytropische Kurve dargestellt wurde. Die ganze Fruchtbarkeit seines Gedankens erwies sich bei der Untersuchung eines Weltkörpers, der, wie etwa die Sonne, als glühender Gasball zu betrachten war. Denn für einen solchen Körper ergab sich der wichtige Satz: Das Produkt aus dem Halbmesser und der Mittelpunktstemperatur ist konstant, wenn man annimmt, daß er sich infolge der Gravitation zusammenzieht.

Das war ein Resultat, welches, wie oben gesagt wurde, der Laplaceschen Theorie den Todesstoß gab, denn es ergab sich, daß ein Körper, wie der der Sonne, einer fortdauernden Erhitzung (statt der Abkühlung) unterlag. Waren nämlich die Hauptprojektionen jener polytropischen Kurve auf die Koordinaten durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$pv^k = \text{Const}', \quad Tv^{k-1} = \text{Const}'', \quad \frac{T^k}{p^{k-1}} = \text{Const}'''$$

so waren sie in jedem Punkte, nach geschehener Zusammenziehung

$$pv^k = \frac{\text{Const}'}{n^{3k-4}}, \quad Tv^{k-1} = \frac{\text{Const}''}{n^{3k-4}}, \quad \frac{T^k}{p^{k-1}} = \frac{\text{Const}'''}{n^{3k-4}}$$

d. h. die Konstanten waren sämtlich im Verhältnis $n^{0,23}:1$ kleiner geworden. Für den Fall der atmosphärischen Luft z. B., für den $\frac{c_p}{c_v} = 1,41$ war, wo c_v die Kapazität bei konstantem Volumen bedeutet, ergab sich

$$pv^{\frac{4}{3}} = \text{Const}, \quad Tv^{\frac{1}{3}} = \text{Const}, \quad \frac{T^4}{p} = \text{Const}.$$

Die Kurve, welche den Weg, den jedes Massenteilchen zurücklegte, bedeutete, war also wieder eine polytropische, die zur ursprünglichen in einfachem Zusammenhange stand. Diese Kurve, welche gewissermaßen den zeitlichen Vorgang der Zusammenziehung charakterisierte, wurde von Ritter als Kosmogonide bezeichnet. Für den Fall der atmosphärischen Luft ergab sich die spezifische Wärme, als konstante Größe bei konstantem Druck vorausgesetzt, als

$$\lambda = \frac{c_p - \varepsilon c_v}{1 - \varepsilon} = \frac{c_p}{k} \cdot \frac{k - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = -0,16312 \cdot c_p,$$

d. h. als eine nach Raum und Zeit konstante negative Größe, und daraus folgte im Anschluß an Tyndalls Versuche, nach denen die Ausstrahlung für hohe Temperaturen noch schneller als das Quadrat der Temperatur wuchs, daß rund 18,7% der Gravitationswärme auf die Ausstrahlung, 81,3% auf die Erwärmung zu rechnen war.

In neuerer Zeit wurde die Tyndallsche Berechnung durch das Stefansche Gesetz ersetzt, nach dem die Ausstrahlung proportional der 4. Potenz der Temperatur sein sollte. Dadurch wurde der Abstand zwischen Helmholtz und Ritter allerdings vermindert, aber doch nur in einem gewissen Grade geschwächt. Helmholtz hatte nämlich stillschweigend angenommen, die Sonne sei in Abkühlung begriffen, und es ließe sich berechnen, auf wie viele Jahre hinaus der Wärmevorrat ausreichen könnte, was durch entsprechende Berechnungen von Tyndall und Lord Kelvin bestätigt wurde. Ritter hingegen wies nach, daß die Ausstrahlung mindestens fünfmal so groß sein müßte, wenn diese Rechnungen richtig wären.

Daß für den Fall, daß die Zustandskurve nur für einen gewissen Exponenten $n < 5$ auf endliche Atmosphären führen würde, für größere aber auf unendliche, darauf wies Ritter gleichfalls hin.

Es steht natürlich jedem Mathematiker frei, sich für Helmholtz oder für Ritter zu entscheiden, denn das Verhältnis zwischen Ausstrahlung und Temperatur ist weit davon entfernt, uns einigermaßen bekannt zu sein, obwohl das betreffende Gesetz in neuerer Zeit scharf umworben wird, aber jedenfalls ist es von höchstem Interesse, zu sehen, wie Ritter auf die Kant-Laplacesche Theorie durch seine Berechnungen, also auf eine wichtige Hypothese, ein helles Licht geworfen hat.

Ungefähr ein Jahr vor dem Erscheinen des Emdenschen Buches ließ ich im gleichen Verlage, B. G. Teubner in Leipzig, ein Büchlein erscheinen: „Elementare Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte". In demselben sind leider einige Druckfehler stehen geblieben, die sich auf dem ersten Bogen befinden, die aber jedem Kenner ohne weiteres als solche auffallen. In diesem nahm ich willkürlich einen Mittelzustand zwischen Ritter und Helmholtz an, der natürlich den Laplaceschen Standpunkt über die sukzessive Abschleuderung der Planeten als illusorisch hinstellte. In der Hauptsache wird mein Standpunkt durch die nur ein Jahr später erfolgte hochwissenschaftliche Darstellung des Dr. Emden vollständig bestätigt. Man wird jetzt das Büchlein hoffentlich in höherem Grade berücksichtigen, als es bisher der Fall war oder gewesen zu sein scheint. Denn es wurde meines Erachtens nur in geringer Weise besprochen, etwa das „Berliner Tageblatt" ausgenommen, in dem die Bedeutung für die naturwissenschaftliche Grundhypothese der neueren Zeit als eine höchst wichtige Frage von fachkundiger Hand dargestellt wurde.

Ueber die Hypothese der Eiszeit hat sich bereits Ritter in der obigen Veröffentlichung klar ausgesprochen. Sie folgt aus der Idee der zunehmenden Erhitzung der Sonne unmittelbar, die frühere Wärme des Erdkörpers wird jedoch durch den einfachen Gedanken einer dünneren Erdkruste selbstverständlich gemacht. Ob das sich so oder anders zugetragen hat, wird sich durch weitere Forschungen ergeben.

Ueber die Idee der kosmischen Staubmassen, die ich im Schlußkapitel ebenfalls skizziere, die aber durch Emdens Werk als wirklich vorhanden dargestellt wurden und über die Laplacesche Hypothese selbst sagt Emden auf Seite 240 und 241 etwa folgendes:

„Dazu drängt noch ein anderer Gedankengang. Es kann wohl nicht geleugnet werden, daß die Lehre der Entwicklung unseres Planetensystems nach Kant-Laplace sehr in Mißkredit gekommen ist, und in letzter Zeit kaum durch mehr gestützt wird, als durch den Glanz der Namen ihrer Urheber und den Umstand, daß lange Zeit nichts Besseres oder auch nur Gleichwertiges vorhanden war, was das in den meisten Stücken übereinstimmende Verhalten der Glieder unseres Planetensystems scheinbar mühelos erklärte. In neuerer Zeit gewinnt immer mehr eine Ansicht an Boden, die an Stelle des Kant-Laplaceschen Nebelballes eine kosmische Staubmasse setzt, und die man etwa folgendermaßen skizzieren kann". . . . .

„Danach hat die Sonne nicht in fortwährendem Kontraktionsvorgange die Planeten sukzessive abgesetzt, sondern Sonne, Planeten und Monde sind im wesentlichen gleichaltrige Gebilde". . . . .

„Die Existenz kosmischer Staubwolken dürfte sicher stehen, ob aber jener sagenhafte Nebelball vollständig dissozierter Materie, von welchem die „gründlichsten" Verfechter der Nebelhypothese ausgehen, vorhanden oder auch nur möglich war, ist metaphysische Spekulation und entzieht sich jeder physikalischen Behandlungsweise".

Daß diese kosmischen Staubmassen dem Sonnensystem auf seinem Wege begegnen und teilweise zu seiner Massenvermehrung beitragen, wie sich aus entsprechenden Sternschnuppenfällen ergibt, ist selbstverständlich. Nur gegen den großen „einzigen" Nebelball wird Front gemacht.

Von besonderem Interesse ist Kapitel 17, wo die Atmosphäre der Erde mit Anmerkungen über Zöllner Thiesen, Hertz, Neuhoff, Reye, v. Helmholtz, Bergholtz, Hann vom Standpunkte der Wärmemechanik aus beleuchtet wird, hervorragend jedoch ist Kapitel 18 behandelt, wo die neuesten Forschungen von Pringsheim, v. Bezold, Brückner, Schmidt, Newcomb-Engelmann, Jewell, Strutt, Lockyer, Schwarzschild, Oppolzer, Julius, Ebert, Lord Kelvin, Perry, Heaviside, Penk, Arrhenius, Brillouin, Wilczinsky, Wilson usw. zur Sprache kommen, so daß man über die neuesten Versuche, Klarheit zu schaffen, informiert wird. Das Schlußkapitel ist ein historisch-kritischer Anhang, in dem der Schmidtsche Versuch, die Angelegenheit durch eine Brechungsbetrachtung zu erledigen, zurückgewiesen wird, die englischen Forscher ebenfalls auf die Unzulänglichkeit ihrer Betrachtungen hingewiesen werden und von den Ritterschen Untersuchungen gesagt wird: „Die umfangreichsten und eingehendsten Studien über das Verhalten gasförmiger Gebilde verdanken wir A. Ritter. . . . . Seinen Arbeiten sind noch lange nicht genügende Beachtung und hinreichend vertieftes Studium zuteil geworden, sie enthalten noch manche Schätze, die gehoben werden können".

Kurz, es handelt sich bei Dr. Emdens Werk um ein zeitgemäßes Buch voll von Anregungen, um ein wirkliches Denkmal des Geheimrats A. Ritter.

Die kubische Gleichung.

Von E. Milarch in Bonn.

Hat man die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx = c$$

durch Multiplikation mit 27 und Einführung der Größe

$$y = 3x + a$$

auf die reduzierte Form

$$y^3 \mp 3py = 2q \tag{1}$$

gebracht, bei der $3b - a^2 = \mp p$, $27c + 9ab - 2a^3 = 2q$ gesetzt und p als positiv angenommen ist, so führt die weitere Substitution

$$y = z\sqrt{p} \tag{2}$$

zu der Gleichungsform

$$z^3 \mp 3z = \frac{2q}{p\sqrt{p}} = 2m \tag{3}$$

deren Lösung leicht auf die einer quadratischen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Man hat nur nötig

$$z = u \pm \frac{1}{u} \tag{4}$$

zu setzen, um sofort die für u^3 quadratische Gleichung

$$u^3 \pm \frac{1}{u^3} = 2m \tag{5}$$

zu erhalten. Behufs Lösung dieser letzteren Gleichung definiere man noch die Größe t durch die Gleichung

$$u^3 \mp \frac{1}{u^3} = 2t \tag{6}$$

so hat man

$$u = \sqrt[3]{m + t} \qquad \frac{1}{u} = \pm\sqrt[3]{m - t} \tag{7}$$

und demgemäß

$$1 = u \cdot \frac{1}{u} = \pm\sqrt[3]{m^2 - t^2}, \text{ also } t = \sqrt[3]{m^2 \mp 1}. \tag{8}$$

Die erste Wurzel der Gleichung (3) erhält damit den Wert

$$z_1 = \alpha = \sqrt[3]{m + t} \pm \sqrt[3]{m - t}. \tag{9}$$

Die beiden anderen Wurzeln finden sich durch die quadratische Gleichung

$$z^2 + \alpha z + \frac{2m}{\alpha} = 0 \tag{10}$$

mit den Werten

$$z_2 = \frac{-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 8m\alpha}}{2\alpha} \qquad z_3 = \frac{-\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 - 8m\alpha}}{2\alpha}. \tag{11}$$

Ist in den Gleichungen (1) oder (3) das Glied ersten Grades negativ, während zugleich $m < 1$ ist, so wird der Wert (8) der Größe t imaginär, man hat dann den irreduziblen Fall, dessen Behandlung durch die Gleichungsform (3) aber auch sehr vereinfacht wird.

Setzt man dann

$$m = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\sin\varphi \tag{12}$$

so findet sich

$$z^3 - 3z = 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi$$

$$z^3 - 8\cos^3\varphi = 3z - 6\cos\varphi$$

$$(z - 2\cos\varphi)(z^2 + 2z\cos\varphi + 4\cos^2\varphi) = 3(z - 2\cos\varphi) \tag{13}$$

und also entweder

$$z - 2\cos\varphi = 0 \tag{14}$$

oder

$$z^2 + 2z\cos\varphi + 4\cos^2\varphi = 3. \tag{15}$$

Die Gleichung (14) liefert den Wert von z_1, die Gleichung (15) die Werte von z_2 und z_3 und zwar ist

$$z_1 = 2\cos\varphi$$

$$z_2 = -\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi = -2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right) = -2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \tag{16}$$

$$z_3 = -\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi = -2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right) = -2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

Aus den Werten von z ergeben sich die für y und x von selbst.

Eine spezielle Frage der Schul-Infinitesimalrechnung.

Von Dr. Rud. Schimmack (Göttingen).

Die neuerdings erschienenen Leitfäden der elementaren Infinitesimalrechnung gewinnen den Differentialquotienten der Funktionen $y = a^x$ und $y = \arcsin x$ zumeist formal aus dem Differentialquotienten der umgekehrten Funktionen $x = {}^a\log y$ und $x = \sin y$, indem sie dabei die Formel

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

unbewiesen benutzen*); sie setzen also die Erlaubnis, mit den Differentialen wie mit wirklichen Zahlen zu multiplizieren und dividieren, stillschweigend voraus. Obgleich ein einwandfreier Nachweis für die Richtigkeit jener Formel auch auf formalem Wege nicht eben schwierig ist, dürfte sich indes für den Schüler eine geometrisch anschauliche Behandlung der bezeichneten Frage empfehlen — eine Behandlung, die sich fast von selbst versteht, wenn man die Infinitesimalrechnung im Schulunterricht aus dem häufigen Gebrauch graphischer Darstellungen heraus entwickelt.

Hierbei erscheint es nämlich ebenso wichtig als einfach, schon den Tertianer an Beispielen mit dem Gedanken vertraut zu machen, daß die Umkehrung einer Funktion in der Spiegelung ihres graphischen Bildes an der Geraden $y = x$ besteht; der Schüler lernt wohl am raschesten das Ergebnis einer solchen Spiegelung übersehen, indem er mit dem Zeichenblatt

---

*) Man vergleiche: H. Müller, Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig (Teubner) 1907, Seite 8; R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differential-rechnung und Integralrechnung, ebenda 1905, Seite 16 und 19; L. Tesar, Elemente der Differential- und Integralrechnung, ebenda 1906, Seite 11.

um die Gerade $y = x$ als Achse eine Drehung von 180^0 ausführt und die Rückseite des Papiers im durchscheinenden Lichte betrachtet. Andrerseits kann dem Primaner der Differentialquotient als Maß der Steigung einer Kurve bereits geläufig sein. Alsdann aber ist es nicht mehr schwer, klarzumachen, daß für eine Funktion $y = f(x)$ und ihre Umkehrung $x = F(y)$ die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$, an spiegelbildlich korrespondierenden Stellen genommen, die trigonometrischen Tangenten zweier Komplementwinkel sind, und daß darum ihr Produkt $= 1$ ist.

Es sei gestattet, das angedeutete Verfahren im folgenden für den Fall der Logarithmusfunktion kurz auszuführen. Wir setzen also voraus, die Ableitung der Funktion ${}^a\log x$ sei bereits gefunden $= \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e$; es soll die Ableitung der Funktion a^x bestimmt werden.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Kurve $y = a^x$ und ihre Tangente in einem beliebigen Punkte (x_0, y_0); der Neigungswinkel dieser Tangente gegen die x-Achse sei α. Spiegeln wir die so erhaltene Figur an der

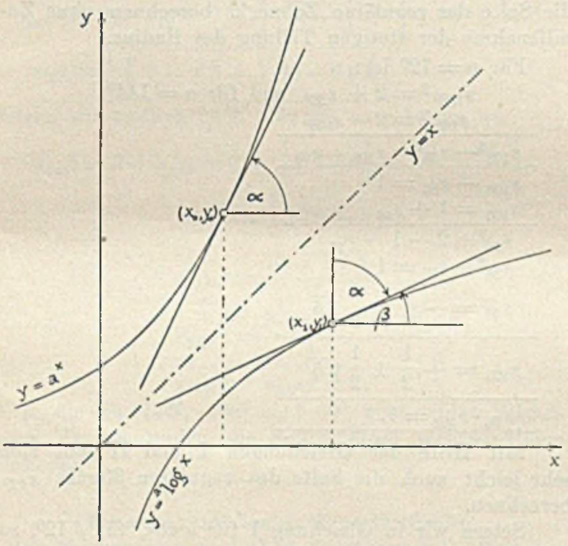


Fig. für $a = 2$.

Geraden $y = x$, so entsteht die Kurve $x = a^y$, d. h. $y = {}^a\log x$, sowie die Tangente an sie im Punkte (x_1, y_1), wobei ersichtlich $x_1 = y_0$, $y_1 = x_0$ ist; und der Neigungswinkel der ursprünglichen Tangente gegen die x-Achse geht in den Neigungswinkel der neuen Tangente gegen die y-Achse über. Daraus ergibt sich, daß der Neigungswinkel der neuen Tangente gegen die x-Achse — er heiße β — Komplementwinkel zu α ist.

Nunmehr ist die gesuchte Ableitung der Funktion a^x an der Stelle $x = x_0$:

$$\left(\frac{da^x}{dx}\right)_{x = x_0} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ also} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Andrerseits setzten wir aber als bekannt voraus, daß die Ableitung der Funktion ${}^a\log x$, die eben $\operatorname{tg} \beta$ darstellt, an der Stelle $x = x_1$ gleich $\frac{1}{x_1} \cdot {}^a\log e$ sei. Wir finden daher:

$$\left(\frac{da^x}{dx}\right)_{x = x_0} = \frac{x_1}{{}^a\log e},$$

oder da, wie oben bemerkt, $x_1 = y_0$ und dieses $= a^{x_0}$ ist:

$$\left(\frac{da^x}{dx}\right)_{x = x_0} = \frac{a^{x_0}}{{}^a\log e}.$$

Die Ableitung der Funktion a^x ist somit für jede beliebige Stelle $x = x_0$ bestimmt.

Allgemeine Beziehungen zwischen den Sehnen eines Kreises.

Von O. Schneider (Dortmund).

Ist α ein beliebiger Zentriwinkel eines Kreises, so findet zwischen den Sehnen die folgende Gleichung statt:

$$s_{120^0 + \alpha} - s_{120^0 - \alpha} = s_\alpha.$$

Der Beweis ergibt sich aus der nebenstehenden Figur.

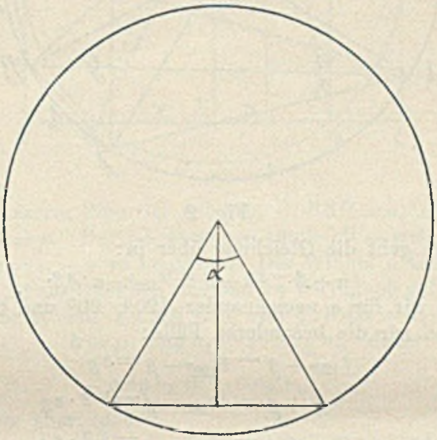


Fig. 1

$$AC = s_{120^0 + \alpha}$$
$$AD = s_{120^0 - \alpha}$$
$$\overline{AC - AD = FC = s_{120 + \alpha} - s_{120 - \alpha}}$$

$\triangle AFD$ gleichschenklig, mithin

$$AB \perp FD \text{ und } FG = GD$$
$$\overline{BD = BF = s_\alpha}.$$

Da auch $BC = s_\alpha$ und $\sphericalangle FCB = 60^0$, so ist $\triangle FCB$ gleichseitig und

$$FC = s_\alpha.$$

Der Beweis läßt sich auch leicht trigonometrisch führen und die obige Gleichung auf die allgemeinere Form bringen: $r\,(s_{\alpha+\beta} - s_{\alpha-\beta}) = s_{180^0 - \alpha} \cdot s_\beta$, die für den Einheitskreis $(r = 1)$ die Gestalt annimmt:

$$s_{\alpha+\beta} - s_{\alpha-\beta} = s_{180^0 - \alpha} \cdot s_\beta.$$

Eine bekannte trigonometrische Formel lautet:

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Setzen wir

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ und } \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ so erhalten wir:}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$
$$= 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{180^0 - \alpha}{2} \quad \text{oder}$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 4 \sin \frac{180^0 - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Da aber, wie aus der nebenstehenden Figur leicht ersichtlich, die zu α gehörende Sehne

$$s_\alpha = 2\,r \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \sin\frac{\alpha}{2}$$

ist und ebenso die zu $\alpha + \beta$ gehörende Sehne

$$s_{\alpha+\beta} = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

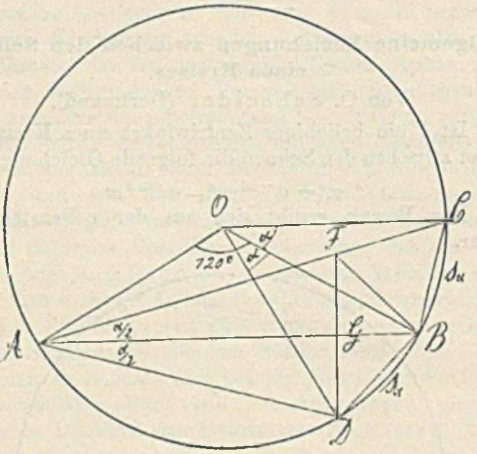


Fig. 2

usw., so geht die Gleichung über in:

I. $$s_{\alpha+\beta} - s_{\alpha-\beta} = s_{180^0-\alpha} \cdot s_\beta.$$

Setzen wir für α nacheinander 120^0, 90^0 und 60^0, so erhalten wir die besonderen Fälle:

$$s_{120^0+\beta} - s_{120^0-\beta} = s_\beta$$

$$s_{90^0+\beta} - s_{90^0-\beta} = \sqrt{2} \cdot s_\beta$$

$$s_{60^0+\beta} - s_{60^0-\beta} = \sqrt{3} \cdot s_\beta$$

oder allgemein:

II. $$s_{120^0+\alpha} - s_{120^0-\alpha} = s_\alpha$$

III. $$s_{90^0+\alpha} - s_{90^0-\alpha} = \sqrt{2} \cdot s_\alpha$$

IV. $$s_{60^0+\alpha} - s_{60^0-\alpha} = \sqrt{3} \cdot s_\alpha.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen sind wir in der Lage, zwischen einzelnen Sehnen interessante Beziehungen zu ermitteln und zahlreiche Sehnen in einfacher Weise zu berechnen. Namentlich Gleichung II, deren Richtigkeit wir auch planimetrisch nachgewiesen haben, ist interessant; sie ermöglicht uns, jede Sehne sofort durch die Differenz oder Summe zweier anderer Sehnen auszudrücken.

So ist für $\alpha = 20^0$:

$$s_{140^0} - s_{100^0} = s_{20^0}$$

für $\alpha = 35^0$:

$$s_{155^0} - s_{85^0} = s_{35^0}$$

für $\alpha = 40^0$:

$$s_{160^0} - s_{80^0} = s_{40^0}$$

usw.

Ist in Gleichung I $\alpha = \beta$, so erhalten wir die bekannte planimetrische Gleichung

$$s_{2\alpha} = s_\alpha \cdot s_{180^0-\alpha} = s_\alpha \sqrt{4 - s_\alpha^{\,2}}.$$

Ist $\beta = 180^0 - \alpha$, so erhalten wir:

$$s_{180^0} - s_{2\alpha-180^0} = (s_{180^0-\alpha})^2$$

oder

$$(s_{180^0-\alpha})^2 = 2 - s_{2\alpha-180^0}.$$

Die letzte Gleichung eignet sich besonders zur Berechnung einzelner Sehnen. So ist

für $\alpha = 150^0$:

$$s_{30} = \sqrt{2 - s_{120^0}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

für $\alpha = 30^0$:

$$s_{150} = \sqrt{2 + s_{120^0}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$s_{150^0} \cdot s_{30^0} = 1$$

$$s_{150^0} - s_{30^0} = \sqrt{2} \text{ (Gleich. II für } \alpha = 30^0)$$

für $\alpha = 45^0$:

$$s_{135^0} = \sqrt{2 + s_{90}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

für $\alpha = 135^0$:

$$s_{45^0} = \sqrt{2 - s_{90}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

für $\alpha = 105^0$:

$$s_{75^0} = \sqrt{2 - s_{30}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

für $\alpha = 75^0$:

$$s_{105^0} = \sqrt{2 + s_{30}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

für $\alpha = 165^0$:

$$s_{15^0} = \sqrt{2 - s_{150}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

für $\alpha = 15^0$:

$$s_{165^0} = \sqrt{2 + s_{150}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

usw.

Es läßt sich sogar mit Hilfe der Formel

$$(s_{180^0-\alpha})^2 = 2 - s_{2\alpha-180^0}$$

die Seite des regulären Zehnecks berechnen ohne Zuhilfenahme der stetigen Teilung des Radius.

Für $\alpha = 72^0$ ist:

$$s_{108^0}{}^2 = 2 + s_{36^0} \quad \text{und für } \alpha = 144^0\text{:}$$

$$s_{36^0}{}^2 = 2 - s_{108^0}$$

$$s_{108}^2 - s_{36}^2 = s_{108} + s_{36}$$

$$s_{108} - s_{36} = 1$$

$$s_{108} = 1 + s_{36}$$

$$s_{36}^2 = 2 - 1 - s_{36}$$

$$s_{36}^2 + s_{36} = 1$$

$$s_{36} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$s_{108} = +\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$s_{36} \cdot s_{108} = 1.$$

Mit Hilfe der Gleichungen I und II läßt sich sehr leicht auch die Seite des regulären 30ecks s_{12^0} berechnen.

Setzen wir in Gleichung I für α 48^0, für β 12^0, so erhalten wir:

$$s_{60^0} - s_{36^0} = s_{132^0} \cdot s_{12^0}.$$

Nach Gleichung II ist aber

für $\alpha = 12^0$: $s_{132^0} = s_{108^0} + s_{12^0}$.

Mithin

$$1 - s_{36} = (s_{108} + s_{12})\, s_{12}$$

$$1 - s_{36} = s_{108} \cdot s_{12} + s_{12}^2$$

$$s_{12}^2 + s_{108} \cdot s_{12} = 1 - s_{36}$$

$$s_{12} = -\frac{s_{108}}{2} \pm \sqrt{\frac{s_{108}^2 + 4 - 4\,s_{36}}{4}}$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} + 4 - 2\sqrt{5} + 2}$$

$$= -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \pm \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}+24-8\sqrt{5}}$$

$$s_{12} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \pm \frac{1}{4}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$

$$s_{12} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$$

$$s_{132^0} = s_{108^0} + s_{12^0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right).$$

Die Seite des regulären 15ecks s_{24^0} berechnen wir unter Benutzung der Gleichung I

für $\alpha = 84^0$ und $\beta = 24^0$.

$$s_{108} - s_{60} = s_{96} \cdot s_{24}$$

s_{96} ist aber $= s_{24} + s_{36}\sqrt{3}$ (Gleich. IV für $\alpha = 36^0$) usw.

$$s_{24^0} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

In ähnlicher Weise lassen sich noch berechnen:

$$s_{156^0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$$

$$s_{81} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} + 1 + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right)$$

s_{96} usw.

s_{24^0} und s_{96^0} lassen sich aber auch aus der Formel $(s_{180^0 - \alpha})^2 = 2 - s_{2\alpha - 180^0}$ unter Benutzung der gefundenen Werte für s_{132^0} und s_{12^0} berechnen.

Für $\alpha = 156^0$ ist

$$s_{24^0}{}^2 = 2 - s_{132} = 2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right)$$

$$s_{24} = \frac{1}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

Für $\alpha = 84^0$ ist

$$s_{96^0}{}^2 = 2 + s_{12} = 2 - \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}$$

$$s_{96^0} = \frac{1}{2}\sqrt{7 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

Setzen wir endlich noch $\alpha = 36^0$, so erhalten wir

$$s_{144}{}^2 = 2 + s_{108} = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$s_{144^0} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

$$s_{144^0}{}^2 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$s_{108^0}{}^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

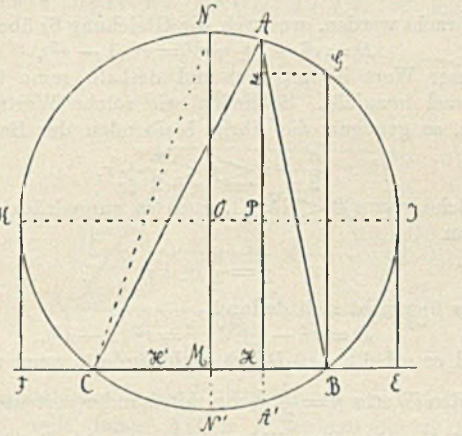
$$s_{144^0}{}^2 - s_{108^0}{}^2 = 1,$$

d. h. die zu 144^0, 108^0 und 60^0 gehörenden Sehnen eines Kreises bilden die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Eine geometrische Grundaufgabe der Untertertia und ihre Ergänzung in Prima.

Von Jul. Braun (Trier).

Wenn in der Klasse Untertertia die Grundaufgabe durchgenommen wird: „Ein Dreieck zu zeichnen aus der Grundlinie a, der zugehörigen Höhe h_a und dem Winkel α an der Spitze", so tut man gut, auf der Grundlinie $BC = a$ in M das Mittellot zu errichten, welches den Kreis in N schneiden möge. Für die Möglichkeit der Lösung ergibt sich dann die Bedingung $h_a \leqq MN$ aus der Anschauung und führt weiterhin zu der Unterscheidung besonderer Fälle. Sobald die Grundbegriffe der Trigonometrie bekannt sind, ist die Bedingung der Möglichkeit durch die gegebenen Stücke auszudrücken: $h_a \leqq \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Das Maximum $h^{(m)} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ weckt aber bei einem Primaner das Verlangen nach einem algebraisch-geometrischen Ausdruck der Höhe h_a, nach einer Funktion, welcher dieses Maximum eigentümlich ist. Außer der zu untersuchenden Höhe sind unter den gegebenen Stücken nur noch a und α vertreten; durch diese allein läßt sich die Höhe nicht ausdrücken. Es muß also ein viertes Stück in die Aufgabe hineingezogen werden, welches mit a und α zusammengenommen das Dreieck bestimmt. Als solches ist die Projektion p der Seite b auf a geeignet. Wir stehen demnach vor der Aufgabe, die Höhe h_a, oder einfach h durch a, α und p darzustellen.



In unserer Figur ist $BC = a$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AH = h$ und $CH = p$. Der Kürze wegen empfiehlt es sich, auch $BH = q = a - p$ zu benutzen. Der Winkel α sei spitz, wenn nicht ausdrücklich eine andere Verfügung getroffen wird. Setzt man $\sphericalangle CAH = \alpha_1$ und $\sphericalangle BAH = \alpha_2$, so ist

1) $\qquad h = p \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1 = q \cdot \operatorname{cotg} \alpha_2$, daher

2) $$\operatorname{cotg} \alpha_2 = \frac{p}{q} \operatorname{cotg} \alpha_1,$$

außerdem aber auch

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha_1 \operatorname{cotg} \alpha_2 - 1}{\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \alpha_2},$$

und wenn man für $\operatorname{cotg} \alpha_2$ den Wert 2) einsetzt

$$\operatorname{cotg} \alpha \left(\operatorname{cotg} \alpha_1 + \frac{p}{q} \operatorname{cotg} \alpha_1\right) = \operatorname{cotg} \alpha_1 \cdot \frac{p}{q} \operatorname{cotg} \alpha_1 - 1,$$

$\operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1 (q + p) = p \operatorname{cotg}^2 \alpha_1 - q$, wo $q + p = a$.

Daher $\qquad p \operatorname{cotg}^2 \alpha_1 - a \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha_1 = q$,

3) $$\operatorname{cotg}^2 \alpha_1 - \frac{a}{p} \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{q}{p},$$

4) $$\begin{cases} \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha + pq}\right) = \operatorname{tg} \gamma \\ \text{und nach 2)} \\ \operatorname{cotg} \alpha_2 = \frac{1}{q}\left(\frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha + pq}\right) = \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$$

Durch Verbindung dieser Werte mit 1) entsteht

5) $$h = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha + pq} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{D},$$

wo

6) $$D = \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha + \left[p(a - p) - \frac{a^2}{4}\right] + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(p - \frac{a}{2}\right)^2 = r^2 - \left(p - \frac{a}{2}\right)^2, \text{ und } r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

den Radius des umbeschriebenen Kreises bedeutet.

Fällt man $OP \perp AH$, so wird $OP = MH = p - \frac{a}{2}$, daher

7) $$AP^2 = AO^2 - OP^2 = r^2 - \left(p - \frac{a}{2}\right)^2 = D.$$

Nun wird

$$D = 0, \text{ wenn } p - \frac{a}{2} = \pm r \text{ oder } p = \frac{a}{2} \pm r,$$

d. h. wenn der Fußpunkt H der Höhe h nach E oder F rückt; die Höhe selbst wird zur Tangente

$$EJ = FK = MO = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Wenn die Projektion p von den besonderen Werten $\frac{a}{2} \pm r$ verschieden ist, so liegt sie entweder zwischen ihnen oder nicht. Im letzteren Falle kann sie mit Hilfe einer Größe $\varkappa > 1$ in die Form $p = \frac{a}{2} \pm \varkappa r$ gebracht werden, wodurch die Gleichung 6) übergeht in $D = r^2 - (\pm \varkappa r)^2 = r^2 (1 - \varkappa^2)$. Dieser Wert ist negativ, und deshalb seine Quadratwurzel imaginär. Schließen wir solche Werte von p aus, so genügen die übrig bleibenden der Bedingung

8) $$\frac{a}{2} - r \leqq p \leqq \frac{a}{2} + r,$$

welche, wenn $0 \leqq \lambda \leqq 1$, auch so ausgedrückt werden kann

9) $$p = \frac{a}{2} \pm \lambda r.$$

Aus 6) ergibt sich dadurch

10) $$D = r^2 - (\pm \lambda r)^2 = r^2 (1 - \lambda^2),$$

und es erhellt, daß D sich nicht ändert, wenn man die beiden Werte $p = \frac{a}{2} \pm \lambda r$ miteinander vertauscht. Gemäß 5) geht diese Eigenschaft von der Größe D auf die Höhe h über. Der Fußpunkt H rückt dabei auf die entgegengesetzte Seite von M nach H', so daß $H'M = HM$ wird. Aus 9) ergibt sich übrigens

11) $$\pm \lambda r = p - \frac{a}{2} = p - \frac{p+q}{2} = \frac{p-q}{2} = HM,$$

wobei mit λ das positive oder negative Vorzeichen zu verbinden ist, je nachdem $p \gtrless q$.

Da nach 10) die Größe $D > 0$, so ist auch $\sqrt{D} > 0$ und deshalb nach 5) die Höhe h reell. Es erhebt sich nun die Frage nach der geometrischen Bedeutung des doppelten Vorzeichens von

12) $$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha + p\,q}.$$

Hierbei sei D von Null verschieden, also bei 8) die Gleichheit ausgeschlossen. Das Produkt $p\,q = p\,(a - p)$ ist nur dann positiv, wenn $0 < p < a$, d. h. wenn der Punkt H zwischen C und B liegt, und dann wird

$$D > \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha,$$

oder, wenn man aus beiden Seiten die positive Wurzel zieht, $\sqrt{D} > \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha$. Hierdurch erhalten wir nach 5) für h einen positiven Wert

13) $$h_1 = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha + \sqrt{D}$$

und einen negativen

$$h_2 = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha - \sqrt{D}.$$

Nach 7) ist ersterer in unserer Figur die Höhe

$$AH = OM + AP,$$

und daher der andere gleich

$$OM - AP = PH - PA' = - A'H.$$

Die beiden Werte h_1 und h_2 bestimmen also die in H auf BC errichteten und bis zum Durchschnitt mit dem Kreis gemessenen Lote nach Länge und Richtung; dabei gehört $(-h_2)$ als Höhe dem Dreieck $A'BC$ an, welches zwar die gegebene Grundlinie a und die Projektion p, statt des Winkels α aber den Supplementwinkel $\alpha' = 180^0 - \alpha$ enthält, eine Eigentümlichkeit vieler Aufgaben. Im Gegensatz zu dem richtigen Dreieck ABC kann $A'BC$ als verkehrtes Dreieck bezeichnet werden; es bildet mit seiner Höhe $(-h_2)$ eine uneigentliche Lösung unserer Aufgabe, die neben der eigentlichen Lösung auftritt.

Die Aufgabe kann aber auch zwei verschiedene eigentliche Lösungen, zwei verschiedene positive Werte von h aufweisen, da bei 12) das Produkt $p \cdot q = p\,(a - p)$ negativ wird, wenn entweder $p < 0$ oder $p > a$ ist. Die Verbindung dieser Ungleichungen mit denjenigen von 8) ergibt

einerseits $\frac{a}{2} - r < p < 0$, anderseits $a < p < \frac{a}{2} + r$,

denen zufolge der Fußpunkt H entweder zwischen C und F oder zwischen B und E liegt. In diesen Fällen ist nach 12)

$$D < \frac{a^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha, \quad \text{oder} \quad \sqrt{D} < \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

In der Tat erhält man jetzt zwei verschiedene Dreiecke ABC und $A'BC$, die als voll- und gleichberechtigte Lösungen zu betrachten sind; aus der Figur wurden sie weggelassen, um diese nicht zu überladen.

Die Größe $D = AP^2$ erlangt nach 6) für feste Werte von a und α ihren größten Wert, wenn das abzuziehende Quadrat $\left(p - \frac{a}{2}\right)^2$ verschwindet, wenn also $p = \frac{a}{2}$ wird, wobei der Punkt H nach M rückt. Sie geht dann über in $D^{(m)} = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} = r^2$, und wir erhalten aus 13)

14) $$\begin{cases} h_1^{(m)} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha + \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \\ h_2^{(m)} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha - \frac{a}{2 \sin \alpha} = - \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

das ist im algebraischen Sinne für h_1 das Maximum, für h_2 das Minimum.

Bei 9) und 10) kamen solche Werte von p zur Sprache, die auf entgegengesetzten Seiten von dem Werte $p = \frac{a}{2}$ gleichweit abstehen und der Höhe h_1 denselben Wert verleihen, ebenso der Höhe h_2. Zwei besondere Werte dieser Art sind

15) $$p = 0 \text{ und } p = a,$$

für welche das Produkt $p\,q = p\,(a - p)$ verschwindet. Hierbei geht 12) über in $\sqrt{D} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha$ und 13) in

16) $$h_1 = a \operatorname{cotg} \alpha, \; h_2 = 0.$$

Der zugehörige Fußpunkt H liegt in C bezw. in B; durchschreitet er diese bemerkenswerten Stellen, so wechselt die Höhe h_2 das Vorzeichen und geht aus dem einen Segment in das andere über. Hatte sie aber in dem einen Segmente ihre volle Berechtigung, so muß sie infolge der Stetigkeit ihres Wechsels ein Abbild ihrer Bedeutung in das andere Segment mit hinübernehmen.

Lassen wir nun im Hinblick auf 8) die Projektion p stetig wachsen von $\frac{a}{2} - r$ bis $\frac{a}{2} + r$, so beschreibt die Spitze A der Höhe h_1 den Halbkreis von K über N nach J und gehört immer einem richtigen Dreieck an, während die Spitze A' der Höhe h_2 von K über C, N', B nach J wandert. In den Punkten K und J fällt sie mit der Spitze A zusammen; zwischen K und C, sowie zwischen B und J liefert sie ein richtiges, zwischen C und B aber ein verkehrtes, in den Durchgangspunkten C und B endlich kein Dreieck.

Bisher wurde unter a ein spitzer Winkel verstanden. Auch wenn

$$a \gtreqless 90^0,$$

geht die Wanderung der Punkte A und A' von K nach J auf entgegengesetzten Wegen vor sich, während p wachsend die zulässigen Werte durchläuft; jedoch hat diese Wanderung eine andere Bedeutung. Für $\alpha = 90^0$ wird $\operatorname{cotg} \alpha = 0$, $0M = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha = 0$, $a = 2r \sin \alpha = 2r$; dadurch geht 8) über in $0 \leqq p \leqq 2r$, und statt 12) und 13) erhält man $h_1 = +\sqrt{pq}$ $h_2 = -\sqrt{pq}$. Die Punkte B und J, sowie C und K fallen zusammen, weshalb die Spitzen A und A' in J und K kein Dreieck liefern. Im übrigen gehört zu jedem zulässigen Werte von p ein richtiges und ein verkehrtes Dreieck; doch sind diese beiden Dreiecke kongruent und darum gleichberechtigt. Wenn $\alpha > 90^0$, so wird $\operatorname{cotg} \alpha < 0$ und $0M = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \alpha < 0$; der Radius

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

empfängt denselben Wert, als wenn für α der spitze Supplementwinkel gesetzt würde, und daher besteht die Beschränkung 8) ungeändert fort. Gemäß 13) wird die Höhe h_2 für jeden zulässigen Wert von p negativ, ohne irgendwo zu verschwinden und gehört daher nur verkehrten Dreiecken an. Aber auch h_1 empfängt negative Werte, wenn $pq < 0$, und liefert dann verkehrte Dreiecke. Es wird $h_1 = 0$, wenn $p = \frac{a}{2} \mp \frac{a}{2}$; nur in den Fällen $0 < p < a$, welche einer Wanderung des Punktes A von C über N nach B entsprechen, wird $pq > 0$ und deshalb $h_1 > 0$, so daß richtige Dreiecke entstehen.

Multipliziert man die Gleichung 3) auf beiden Seiten mit p^2 und ersetzt dann gemäß 1) das Produkt $p \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1$ durch h, so entsteht

17) $$h^2 - h\, a \operatorname{cotg} \alpha = p\, q,$$

woraus man inbetreff der Wurzeln sofort erkennt, daß

18) $$h_1 + h_2 = a \operatorname{cotg} \alpha \quad \text{und} \quad h_1 \cdot h_2 = -p\, q,$$

und woraus über die Vorzeichen das Besprochene abgeleitet werden kann. Weiterhin sagt die erste Gleichung 18) aus, daß die Abschnitte aller Sehnen, welche BC innerlich senkrecht schneiden, eine von p unabhängige, konstante Differenz haben, und daß diese gleich $BG = 2\, M\, 0$ sei, also gleich dem doppelten Abstande der Sehne BC vom Mittelpunkte. Wird die Sehne BC äußerlich geschnitten, etwa zwischen B und E, so bedeutet $h_1 + h_2$ die Summe der von BC bis zur Kreislinie gemessenen Abschnitte.

Die zweite Gleichung 18) enthält den Sehnen- bezw. Sekantensatz, freilich hier nur für den Fall eines rechtwinkligen Durchschnitts. Nun hätte man umgekehrt auch aus der Figur die Gleichungen ableiten können:

19) $$\begin{cases} AH - A'H = AH - AL = BG = BC \cdot \operatorname{cotg} a \text{ und} \\ AH \cdot A'H = BH \cdot CH. \end{cases}$$

Durch Elimination von $A'H$ entsteht aus diesen:

20) $$AH \cdot (AH - BC \operatorname{cotg} a) = BH \cdot CH,$$

das ist die Gleichung 17).

Hiermit ist angedeutet, wie sich die ganze Entwicklung in etwa vereinfachen und abkürzen läßt. Es ist nichts darin enthalten, was den Lehrplan des Gymnasiums übersteigt; wer nicht Zeit genug findet, alles dieses zu bieten, der dürfte doch das eine oder andere willkommen heißen. Anderseits wird eine solche Erörterung auch für eine obere Realklasse nicht unehrenhaft erscheinen.

Ueber die Teilung des Trapezes durch eine Parallele zu den Grundlinien.

Von Chr. Nielsen (Varel a. d. Jade).

Soll das Trapez $ABCD$ (Fig. 1) durch EF parallel zu AB so geteilt werden, daß zwischen den beiden Teilflächen das Verhältnis besteht $EFCD : ABFE = m : n$, so

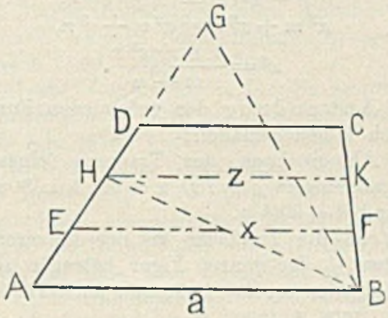


Fig. 1.

verwandelt man $ABCD$ zunächst etwa in das Dreieck ABG, teilt darauf AG in H so, daß sich $GH : HA = m : n$ verhält, zieht durch H die Parallele z zu AB und bestimmt x als mittlere Proportionale zwischen a und z, was zuletzt auf die Verwandlung des Dreiecks ABH in das Trapez $ABFE$ abzielt.

Liegen Maßzahlen vor, dann läßt sich die Aufgabe auf die angedeutete Weise auch durch Rechnung oder durch Rechnung, verbunden mit Konstruktion, lösen.

Eine andere Art der Lösung beruht darauf, daß man das Trapez zu einem Dreieck ergänzt, indem man AD und BC bis zum Schnitt verlängert, darauf die Maße und Größe des Ergänzungsdreiecks feststellt und endlich den Satz vom Verhältnis der Flächen ähnlicher Dreiecke in Anwendung bringt, um die Lage oder Länge der Teilungslinie zu ermitteln.

Wie man nun aber auch zu Werke geht, das Verfahren bleibt immer ziemlich umständlich. Einfacher, und für praktische Rechnungen brauchbar, gestaltet sich die Lösung, wenn man unmittelbar aus den Eigenschaften der Figur selber Formeln ableitet, die zur Auffindung der Teilungslinien dienen können, wie im folgenden gezeigt wird.

Zunächst hat man nach der Bedingung, daß die Teilfläche an der kürzeren Grundlinie

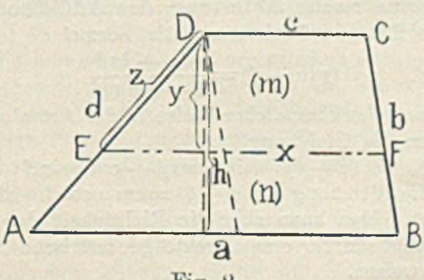


Fig. 2.

sich zu derjenigen an der längeren wie $m : n$ verhalten soll (Fig. 2):

1) $$\frac{x + c}{2}\, y : \frac{a + x}{2}\,(h - y) = m : n,$$

ferner aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

2) $$y : h = (x - c) : (a - c) \text{ und}$$

3) $$z : d = (x - c) : (a - c).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

I. $y = h\frac{x-c}{a-c}$ und II. $z = d\frac{x-c}{a-c}$.

Damit bilden wir dann aus (1):

$$\frac{a+x}{2}\left(h - h\frac{x-c}{a-c}\right)m = \frac{x+c}{2}\,h\,\frac{x-c}{a-c}\,n \text{ und}$$

daraus weiter

$$(a+x)(a-c-x+c)\,m = (x+c)(x-c)\,n,$$
$$(a^2-x^2)\,m = (x^2-c^2)\,n,$$
$$x^2 m + x^2 n = a^2 m + c^2 n,$$

III. $$x^2 = \frac{a^2 m + c^2 n}{m+n}.$$

Die Anwendung der gefundenen Formeln gestaltet sich folgendermaßen:

Die Abmessungen des Trapezes (eines Grundstückes) mögen sein $a = 150$, $c = 90$, $h = 80\,m$, ferner $b = 82$ und $d = 90{,}4\,m$.

1. Wenn die Teilfläche an der kürzeren Grundlinie c etwa $1/3$ der ganzen Figur betragen soll, dann verhält sich hier $m : n = 1 : 2$, und nach III ist

$$x^2 = \frac{150^2 \cdot 1 + 90^2 \cdot 2}{3} = 12\,900,\; x = 113{,}58\,m.$$

Aus I folgt weiter $y = 80 \cdot \frac{23{,}58}{60} = 31{,}44\,m$.

Hiermit könnte man sich schon zufrieden geben; unter Umständen wünscht man jedoch auch die Länge der nicht parallelen Seiten der Teilflächen zu kennen:

Aus II erhält man $z = 90{,}4\,\frac{23{,}58}{60} = 35{,}53\,m$

und gegenüber $z_1 = 82\,\frac{23{,}58}{60} = 32{,}23\,m$.

2. Soll die Teilfläche an a etwa 45 a betragen, während die ganze Figur 96 a groß ist, ergibt sich zunächst $m : n = 51 : 45 = 17 : 15$ und weiter

$$x^2 = \frac{150^2 \cdot 17 + 90^2 \cdot 15}{32} = 15\,750,\; x = 125{,}5\,m,$$

sowie $y = 80\,\frac{35{,}5}{60} = 47{,}33\,m$.

Falls nicht die Flächenteile, sondern die Längenteile ($ED : AE$ und $CF : FB$) sich wie $m : n$ verhalten, nimmt der Wert für x eine III entsprechende Form an:

IV. $$x = \frac{a\,m + c\,n}{m+n}.$$

Kleinere Mitteilungen.

Geometrische Ableitung der Additionsformel für die Tangensfunktion. Die Formel

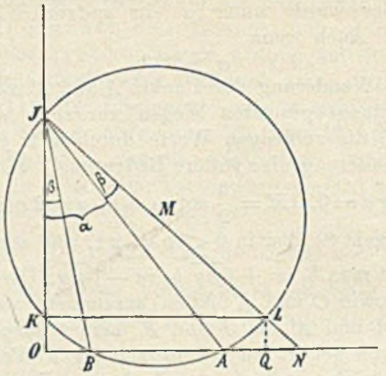
$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta}$$

pflegt man herkömmlicher Weise in der Art abzuleiten, daß man die Gleichung

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

durch die Gleichung $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ dividiert. Man kann aber die Richtigkeit der Formel auch leicht durch eine direkte geometrische Betrachtung erweisen.

Ist $ON \perp OJ$, $\sphericalangle\, OJA = \alpha$, $OJB = \beta$, JL ein Durchmesser des durch die drei Punkte A, B, J gelegten Kreises, so ist $\sphericalangle\, JKL$ ein Rechter, also $KL // ON$ und wie leicht zu sehen, Bogen $AL = BK$, also $\sphericalangle\, AJL = \beta$ und $\sphericalangle\, KJL = \alpha + \beta$, ferner, wenn $LQ // OJ$ gezogen wird, $AQ = OB$ und $KL = OQ = OA + OB$. Außerdem hat man (auf Grund des Sekantensatzes) die Gleichung $OJ \cdot OK = OA \cdot OB$, also $OK = \frac{OA \cdot OB}{OJ}$.



Und nun ergibt sich leicht

$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{KL}{JK} = \frac{OA+OB}{OJ-OK} = \frac{OA+OB}{OJ - \frac{OA \cdot OB}{OJ}} =$$

$$\frac{\frac{OA}{OJ} + \frac{OB}{OJ}}{1 - \frac{OA}{OJ} \cdot \frac{OB}{OJ}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}, \text{ w. z. b. w.}$$

F. Pietzker.

Geschäftsordnung für den Vereinsausschuss.*)

(Entwurf).

1.

Zur Herstellung einer engeren Fühlung zwischen den Vereinsmitgliedern und dem Vorstand wird ein Ausschuß gebildet, der als Vermittler der im Verein herrschenden Strömungen und Wünsche dem Vorstand bei seiner Geschäftsführung beratend zur Seite steht.

2.

Dieser Ausschuß setzt sich zusammen aus zehn freigewählten Mitgliedern und den Vertretern der einzelnen Ortsgruppen, bezw. Landes- und Bezirks-Verbände. Jede der letztgenannten Körperschaften entsendet in den Ausschuß ein Mitglied.

3.

Die Amtsdauer der freigewählten Mitglieder beträgt fünf Jahre, die Wahl erfolgt auf der Hauptversammlung mittels Stimmzettel, nach absoluter Mehrheit der abgegebenen Stimmen. Alle drei resp. zwei Jahre wird der Ausschuß zur Hälfte erneuert. Die Namen der zum ersten Male (im Jahre 1910) ausscheidenden Mitglieder bestimmt das Los. Wiederwahl ist zulässig.

Ueber die Amtsdauer der von den Ortsgruppen und sonstigen Verbänden zu entsendenden Mitglieder entscheiden diese Körperschaften selbständig.

4.

Der Vorstand hat von allen wichtigen, seiner Entscheidung unterliegenden Fragen den Ausschußmitgliedern Kenntnis zu geben und deren Meinung in einer von ihm zu bezeichnenden Frist einzuholen.

5.

Zu den hiernach dem Ausschuß vorzulegenden Beratungsgegenständen gehören insbesondere die der jedesmaligen Hauptversammlung von seiten des Vorstandes vorzulegenden Anträge, sowie die Feststellung

*) Einige, von einzelnen Ausschußmitgliedern ausgegangene Aenderungsvorschläge werden bei der Beratung des Entwurfs zur Kenntnis der Versammlung gebracht werden, s. d. Tagesordnung der Göttinger Versammlung, S. 26.

der Tagesordnung für die Hauptversammlung, ferner etwaige Kundgebungen nach außen, zu denen der Vorstand veranlaßt wird, ohne daß die Möglichkeit vorliegt, vorher einen Beschluß der Hauptversammlung herbeizuführen.

Im übrigen bleibt es dem Ermessen des Vorstandes überlassen, welche Fragen im Sinne des § 4 als wichtig gelten sollen.

6.

Die endgültige Entscheidung ist Sache des Vereinsvorstandes, der indessen bei der Veröffentlichung der von ihm gefaßten Beschlüsse auch die Stellungnahme des Ausschusses zu diesen Beschlüssen bekannt zu geben hat.

7.

Anregungen und Vorschläge, die dem Vorstand von einzelnen Ausschußmitgliedern zugehen, sind zur Kenntnis der übrigen Ausschußmitglieder zu bringen und, falls sie von der Mehrheit der Ausschußmitglieder unterstützt werden, zum Gegenstand eines Vorstandsbeschlusses zu machen.

8.

Der Verkehr zwischen dem Ausschuß und dem Vorstand erfolgt in der Regel schriftlich durch Briefwechsel zwischen den einzelnen Ausschußmitgliedern und dem Vorsitzenden des Vereins.

9.

Alljährlich findet eine ordentliche gemeinsame Sitzung des Vorstandes und Ausschusses statt und zwar an dem Orte der jedesmaligen Hauptversammlung am Vorabend der Eröffnung. An diese Sitzung schließt sich eine weitere, auf die Versammlung selbst bezügliche Sitzung an, zu der der für diese Versammlung gewählte Ortsausschuß hinzuzuziehen ist.

10.

Außerordentliche gemeinsame Sitzungen des Ausschusses und Vorstandes beruft der letztere, soweit er es für erforderlich hält. Zur Anberaumung solcher Sitzungen ist er verpflichtet, wenn mehr als die Hälfte der Ausschußmitglieder es verlangt.

Vereine und Versammlungen.

80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte zu Cöln, 20. bis 26. September 1908.

Geschäftsführer der Versammlung sind die Herren Prof. Dr. Tilmann, Stadtverordneter Chemiker Theodor Kyll. An Vorträgen für die beiden allgemeinen Sitzungen (21. und 26. September) sind bis jetzt in Aussicht genommen von den Herren Heim (Zürich) — Deckenbau der Alpen; v. Parseval (Berlin) — Motorballons; Stadler (München) — Albertus Magnus als Naturforscher; Rubner (Berlin) — Thema noch unbestimmt; Hassert (Cöln) — Kamerun.

In der Gesamtsitzung beider wissenschaftlicher Hauptgruppen (24. September, vormittags) werden sprechen Wiener (Leipzig) über farbige Photographien und Doflein (München) über Trypanosomen.

Vortragsanmeldungen für die Abteilung für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht werden bis zum 10. Mai erbeten, sie sind an Direktor Prof. Dr. Wilh. Thomé, Cöln, Spiesergasse, zu richten.

Lehrmittel-Besprechungen.

Dr. R. Tümpel, Die Geradflügler Mitteleuropas. Gotha, F. E. Perthes. Neue billige Lieferungsausgabe. Preis jeder Lieferung 0.75 M. Preis des vollständigen Werkes für Abnehmer der Lieferungsausgabe 15 M.

Die erste Ausgabe des Werkes ist von der Fachwelt mit großer Anerkennung begrüßt worden. Diese neue billige Lieferungsausgabe ist für weitere Kreise bestimmt; sie weicht nach den Angaben des Verlags in nichts von der ersten Ausgabe ab, soll diese vielmehr noch durch Hinzufügen eines Anhanges übertreffen, der die neuesten Beobachtungen bringen wird, mir aber noch nicht vorgelegen hat.

Die Aufgabe, weitere Kreise für die besprochenen Tiere zu interessieren, wird in hervorragender Weise gelöst. Die sehr klare, gemeinverständliche und doch wissenschaftlich durchaus einwandfreie, wohl völlig erschöpfende Darstellung wird durch 263 zeichnerisch und lithographisch ausgezeichnete farbige Bilder aus allen Gruppen der Geradflügler sowie durch 3 schwarze Tafeln (darunter eine über Libellenlarven) und sehr zahlreiche zweckmäßig ausgewählte und leicht verständliche Textabbildungen, die zum Teil Originale sind (z. B. die Mundwerkzeuge einer Libelle und die von Locusta viridissima), vortrefflich unterstützt. — An der Hand der Abbildungen und der systematischen Tafeln wird das Bestimmen eines Geradflüglers auch dem Laien ohne Schwierigkeit gelingen; noch mehr erleichtert würde ihm die Arbeit, wenn hinter jeder Familie, Unterfamilie und Gattung die Seitenzahl der weiteren systematischen Behandlung angegeben wäre; dasselbe Verfahren scheint mir auch bei den einzelnen Arten für den Ort ihrer zusammenhängenden Beschreibung empfehlenswert. Sehr dankbar wird dem Verfasser der Fachmann, vor allem aber der Laie für die überall angegebene Etymologie der wissenschaftlichen Namen sein. — Die Lebensweise wird gebührend hervorgehoben; sie wird wohl überall, wo es möglich ist, in besonnener Weise zur Morphologie in wechselseitige Beziehung gesetzt. — Ausführungen über den Fang und die Aufzucht der Larven und über den Fang und das Präparieren der Vollkerfe finden sich teils in besonderen zusammenhängenden Abschnitten, teils bei der Beschreibung der einzelnen Arten; sie dürfen wohl den Anspruch erheben, das darüber Bekannte zu erschöpfen. — Von den überaus zahlreichen, auch dem Fachmann interessanten Bemerkungen hebe ich nur hervor: den Abschnitt über den Flugmechanismus der Libellen, den Bericht eines Augenzeugen über den großen Königsberger Libellenschwarm, die Abschnitte über die Turbanaugen der Eintagsfliegen, die Darmtätigkeit der Maulwurfsgrille und den Fang der eigentlichen Geradflügler. Mit Freuden zu begrüßen sind auch die Hinweise auf noch zu lösende Fragen, über die verhältnismäßig leicht selbständige Beobachtungen angestellt werden können. — Die Literatur des Gebietes ist in sehr ausgiebiger Weise angegeben.

Mit freudigstem Interesse habe ich das vorliegende Werk studiert und vielerlei daraus für den Unterricht nutzbar machen können. Sollte die Biologie in die oberen Klassen unserer höheren Lehranstalten Eingang finden: hier ist ein Werk, das man getrost besonders interessierten Schülern zur teilweisen Berichterstattung in der Schule in die Hand geben kann. Möge das ausgezeichnete Werk die weiteste Verbreitung finden. Den naturwissenschaftlichen Bibliotheken unserer Schulen sei es besonders warm zur Anschaffung empfohlen.

A. Pfister (Nordhausen).

Bücher-Besprechungen.

Prof. Dr. A. Schülke, Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik. Erster Teil für die mittleren Klassen höherer Schulen. Leipzig und Berlin 1906. B. G. Teubner. M. 2.20.

Die vorliegende Aufgabensammlung bildet die Unterstufe (Tertia bis Untersekunda) zu der 1902 erschienenen Aufgabensammlung desselben Verfassers für die Oberklassen. Beide Teile zusammen umfassen alle Teile der Schulmathematik, in denen gerechnet wird.

Der erste Teil gliedert sich in folgende Abschnitte: 1. die Grundrechnungen, 2. Gleichungen, 3. Anwendungen. Im ersten Abschnitt wird Wert darauf gelegt, daß niemals mehrere Schwierigkeiten gleichzeitig auftreten. Auf die Behandlung eingliedriger Größen folgen die Grundrechnungen mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten und erst dann Aufgaben mit negativen Zahlen.

Die Gleichungen sind so geordnet, daß sie sowohl gesondert als auch mit den Grundrechnungen verbunden, behandelt werden können. Es wird scharf unterschieden zwischen identischen, Bestimmungs- und Funktionsgleichungen. Zum ersten Mal erscheint hier der Funktionsbegriff, auf dessen Einführung mit Recht so viel Wert gelegt wird, organisch mit den übrigen Teilen der Mathematik verknüpft. Die Funktionen werden benutzt zur graphischen Darstellung algebraischer Ausdrücke, von Gleichungen mit zwei Unbekannten und zur Auflösung von Gleichungen; ferner werden sie angewandt auf Interpolationen, auf die Geometrie und auf Verhältnisse in den verschiedensten Gebieten (Physik, Meteorologie, Geographie, Technik, Statistik). Zeit für die Berücksichtigung dieser Dinge wird gewonnen durch die Fortlassung gekünstelter Aufgaben und durch die Benutzung vierstelliger Logarithmen.

Besonders reichhaltig sind die Anwendungen. Sie erstrecken sich auf Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, aus der Geometrie und der Physik. Dabei sind nicht nur die Verhältnisse des Kleinkaufmanns berücksichtigt, sondern es werden auch Aufgaben aus dem Staatshaushalt und der Volkswirtschaftslehre herangezogen, die auch von nationalem Standpunkte aus Interesse verdienen.

Als Nachteil könnte es empfunden werden, daß viele Aufgaben in den Anwendungen rechnerisch wenig Arbeit verlangen; aber bei der großen Auswahl können diese leicht ausgeschaltet werden, wenn man nicht schon darin ihren hohen bildenden Wert erblickt, daß der Schüler an ihnen die allgemeinen Verhältnisse in mathematische Form kleiden lernt.

Bemerken möchte ich noch, daß die Aufgabensammlung von Ostern 1908 ab am hiesigen Kaiser-Friedrich-Gymnasium und am Lessing-Gymnasium eingeführt wird. Flechsenhaar (Frankfurt a. M.)

* * *

Prof. Dr. A. Schülke, Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Beilage zum Jahresbericht 1907 der Königlichen Oberrealschule auf der Burg in Königsberg i. Pr. B. G. Teubner. M. 1.

Die Aufgabensammlung für die Oberklassen der höheren Schulen von Schülke, die sich durch starke Betonung des Funktionsbegriffs auszeichnet, enthält schon den Begriff des Differentialquotienten und Anwendungen desselben. Da jedoch bei ihrer Herausgabe (1902) noch keine Aussicht bestand, daß die Differentialrechnung Eingang in die höheren Schulen finde, ist dort die Bezeichnung „Differentialquotient“ vermieden, auch sind verschiedene Anwendungsgebiete nur gestreift oder ganz fortgelassen. Jetzt, nachdem sich die Verhältnisse geändert haben, hat Schülke in der vorliegenden Arbeit eine Ergänzung zur Aufgabensammlung herausgegeben, die bei einer Neuauflage in das Buch aufgenommen werden soll. Sie soll kein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung für die Schule sein; hieran fehlt es ja auch nicht (vergl. z. B. in erster Linie Lesser, Die Infinitesimalrechnung in der Prima). Sie soll nur Aufgaben bieten, die sich leicht organisch in die Aufgabensammlung und das dort eingeschlagene Verfahren einreihen lassen. So erscheint die Differential- und Integralrechnung nicht als Aufbau auf das seitherige System, sondern innerlich mit den übrigen Teilen der Mathematik verbunden. Dabei ist die Auswahl von Aufgaben, denen kurze Erläuterungen beigefügt sind, so reichlich bemessen, daß sie für Realanstalten durchaus ausreicht. Aber auch für Gymnasien läßt sich vieles verwenden. So habe ich z. B. im vergangenen Schuljahre in der Prima des Lessing-Gymnasiums Aufgaben über Tangenten und Maxima und Minima aus der Arbeit durchgenommen und bin recht befriedigt davon. Sicherlich sind auch manche anderen Teile für das Gymnasium brauchbar (Grenzwert, Wendepunkte, Fehlerbestimmungen). Mit der vorliegenden Abhandlung hat die Aufgabensammlung einen Abschluß erreicht und nimmt wohl die erste Stelle ein unter den Aufgabensammlungen, die nach den neueren Bestrebungen den mathematischen Unterricht mehr für die allgemeine Bildung fruchtbar machen wollen. Flechsenhaar (Frankfurt a. M.)

* * *

Oskar Lesser, Obl. a. d. Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M. Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Mit 30 Fig. im Text. 8°. VI u. 121 S. Berlin 1906. Otto Salle. M 1.60.

Die durch F. Klein angeregten Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts haben den Verfasser veranlaßt, Versuche mit der Einführung der Differential- und Integralrechnung im Unterrichte zu machen. Das Resultat ist das vorliegende Buch, das einen Beitrag zur Lösung der Reformfrage geben soll. Aus dem Unterricht in der Oberrealschule hervorgegangen, ist es wohl nur für die Prima dieser Anstalten bestimmt, Gymnasien würden aus dem gebotenen Stoff stark auswählen müssen.

Der erste Abschnitt, enthaltend „die Funktion und ihre Darstellung“ und die „näherungsweise Lösung numerischer Gleichungen“ gehört schon in die früheren Klassen; er muß dort den ganzen mathematischen Unterricht durchdringen und beleben und in der Prima schon sicherer Besitz geworden sein. Der zweite Abschnitt enthält die Differenziation und den Taylorschen Satz, der dritte die Integralrechnung. Im Unterricht darf man das wohl nicht so scharf trennen, sondern wird an den einfachsten Funktionen möglichst alle die Begriffe entwickeln, bevor man zu den schwierigeren Gebieten der einzelnen Abschnitte übergeht. Für den Schüler ist allerdings eine mehr systematische Zusammenstellung erwünscht zur Repetition, und von diesem Gesichtspunkte aus ist das vorliegende Buch nach Umfang, Stoffauswahl und Methode, von Einzelheiten abgesehen, zweckmäßig und ansprechend.

Der Verfasser geht überall von der Anschauung aus und macht so die Bildung der Differenzialquotienten leicht verständlich. Das kann man aber nicht von den Differenzialen sagen. Wenn (Seite 16) das Differenzial als „Grenzwert 0“ definiert wird, so hat eine Gleichung zwischen Differenzialen für den Schüler immer nur den Sinn, daß $0 = 0$ ist. Ihre anschauliche Bedeutung würden diese Gleichungen als „näherungsweise“ richtig erst erhalten, wenn man dx als sehr kleine Größe betrachtet. Unterscheidet man dann noch kleine Größen von verschiedener Ordnung, so wird die Taylorsche Reihe und das Integral als Summe verständlich. Diese Unterscheidung ist aber hier nicht gemacht. Das Integral wird nur durch Umkehrung des Differenzierens gewonnen, nicht als Grenzwert einer Summe — das wird nur an einer Stelle nebenbei erwähnt —; für die Anwendung ist das letztere aber doch von der größten Bedeutung. Es würde sich so auch anschaulich die graphische Auswertung eines durch Formeln nicht zu bestimmenden Integrals ergeben, was mir wichtiger scheint, als schwierigere Integrationsmethoden, wie die Seite 92 u. f. behandelte partielle Integration. Die Taylorsche Reihe wird durch die Entwicklung einer ganzen rationalen Funktion mit dem binomischen Lehrsatz gewonnen und dann ohne weiteres — es wird nur die Konvergenz verlangt — auf beliebige Funktionen ausgedehnt. Sollen das die Schüler glauben? Die Herleitung der Anfangsglieder der Taylorschen Entwicklung aus der Anschauung und ihre graphische Darstellung ist theoretisch wie praktisch wertvoller. Sie wird aber hier nicht gegeben. Durch Unterscheidung von kleinen Größen verschiedener Ordnung würden auch die Untersuchung der Maxima und Minima (Seite 60) wesentlich vereinfacht, die in der Darstellung des Buches die Kenntnis aller Ableitungen einer Funktionen an einer Stelle erfordert.

Die Infinitesimalrechnung soll, wie im Vorwort betont wird, die Möglichkeit einer einheitlichen Ausgestaltung und einfacheren Durcharbeitung der Elementarmathematik geben. Dann ist es wohl nicht zweckmäßig, für sie die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes oder des Grenzwertes von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oder gar von e^x vorauszusetzen.

Die ersten Versuche, ein neues Gebiet zu erschließen, werden immer an Mängeln leiden, die erst durch die Erfahrung verbessert werden können. Die obige Kritik bezog sich auf Einzelheiten, die aber z. T. prinzipielle Bedeutung haben. Sie soll die Aufmerksamkeit derer, die das Buch beim Unterricht benutzen wollen, auf diese Punkte lenken, um sie zu verbessern, sie soll aber nicht das Verdienst der Arbeit des Verfassers schmälern, der mit seinem Buche einen wertvollen Beitrag zu der Reformfrage geliefert hat.

Druck und Figuren sind sehr gut. In Figur 17 ist die Wendetangente besser nicht parallel der Achse zu legen, in Figur 23 muß die Spitze der Evolute deutlicher sein. Götting (Göttingen).

* * *

Dr. Alois Lanner, Prof. a. d. Staatsoberrealschule in Innsbruck. Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik im Bereiche der Mittelschule. gr. 8°. VIII u. 192 S. Berlin 1907. Otto Salle. M 3.—.

Der Titel des Buches bezeichnet nicht ganz seinen Inhalt. Es enthält nicht Probleme, sondern eine Darstellung des gesamten arithmetischen Lehrstoffes der „Mittelschulen“, unserer „höheren“ Schulen. Diese Darstellung baut sich auf den neueren wissenschaftlichen Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik auf und soll von ihnen aus in breiterer Erörterung der arithmetischen Begriffsbildung zum vollen Verständnis des Zusammenhangs der Rechenoperationen führen. Weiter soll aber auch „die funktionelle Zuordnung, ihre Gesetzmäßigkeiten und Darstellungsformen eine zeitgemäße Behandlung finden“.

Die Darstellung beginnt mit einer ausführlichen Behandlung der Begriffe der Gleichheit und Größe, gründet dann den Begriff der natürlichen Zahl auf die Mengenlehre und entwickelt hieraus die elementaren Rechenoperationen, die Multiplikation z. B. zunächst unabhängig von der Addition. Man erkennt, daß das Buch kein Schulbuch ist, und doch ist es für Schüler bestimmt und geeignet, allerdings erst für Schüler der oberen Klassen, die dadurch eine klare Einsicht in die Grundlagen, die Begriffsbildung und den Aufbau der Arithmetik erhalten sollen. Es ist dafür geeignet, weil die Darstellung auch für den reiferen Schüler leicht verständlich ist, weil besondere Sorgfalt auf präzise und klare Fassung der Lehrsätze und Resultate verwendet ist und die Darstellung durch die Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung lebendig und anregend wirkt. Bei den geschichtlichen Notizen wäre allerdings noch manches zu verbessern; was bedeutet es z. B., wenn unter den Männern, die um die Erweiterung des Zahlbegriffs sich verdient gemacht haben, erwähnt wird: Weierstraß 1897?

Von dem weiteren Inhalt des Buches, das den ganzen arithmetischen Lehrstoff der Mittelschulen ausführlich und vielfach eigenartig behandelt, ist als besonders bemerkenswert hervorzuheben der Abschnitt über das Rechnen mit unvollständigen Zahlen und die Abschätzung der Genauigkeit und der Fehlergrenze, besonders aber die Differenziation und Integration unmittelbar im Anschluß an die elementaren Rechnungsarten. Die funktionelle Abhängigkeit bildet von da an das einheitliche Band aller folgenden Teile. Im Unterricht kann man an dieser Stelle natürlich noch nicht differenzieren. Aber es ist für die Reform des mathematischen Unterrichts wesentlich, daß so früh wie möglich Funktionen eingeführt werden, wie das auch hier geschieht, methodisch allerdings anders, nämlich mit unmittelbarer Anlehnung an die geometrische Darstellung. Der Verfasser hat bei seiner Darstellung die arithmetische Begriffsbildung möglichst rein entwickeln wollen; deshalb verschmäht er die geometrische Veranschaulichung (das Buch enthält nicht eine einzige Figur). Das ist schade, denn sie hätte, ohne den Hauptzweck zu schädigen, doch vieles anschaulicher gemacht. Auch die Methode der Ableitung des Differenzialquotienten und des Integrals gestattet manche Einwendungen. Nachdem eben der Begriff des Differenzialquotienten gegeben ist, werden partielle Differenzialquotienten kaum verständlich werden; die Bestimmung des „wahren“ Wertes unbestimmter Ausdrücke ist in der Form nicht korrekt; das Integral als Grenzwert einer Summe ist nicht klar genug gemacht. Das ändert aber nichts an dem Eindruck, daß der Verfasser mit dem vorliegenden Buche den Zweck durchaus erreichen wird, den er am Schlusse nochmal angibt: „Die Grundprobleme der reinen Mathematik in dem Umfang und in einer solchen Form vorzulegen, daß der damit vertraute Schüler für den Gesichtskreis des wissenschaftlich Gebildeten im allgemeinen ausreicht, ohne Fachmann zu sein, und daß er als angehender Fachmann darauf weiterbauen kann, ohne eine Revision der Grundlagen vornehmen zu müssen".

Druck und Ausstattung sind gut, aber ein Inhaltsverzeichnis wäre erwünscht. Götting (Göttingen).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Müller, H., u. Pietzker, F., Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Ausg. C der 3. Aufl. Heft 1, 2, 3. Ebenda.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik u. Meteorologie in vier Bänden. 10. umgearb. u. vermehrte Aufl., herausg. von Leop. Pfaundler. 2. Band, Erste Abteilung, 3. Buch (O. Lummer, die Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. Mk. 15.—.

Periodische Blätter f. Realienunterricht u. Lehrmittelwesen, herausg. v. J. Kraus, J. Fischer und R. Neumann. Jhg. XII, Heft 1—6; XIII, Heft 1. Wien 1907/08, Akademischer Verlag.

Pohlig, H., Eiszeit und Urgeschichte des Menschen (Wissenschaft und Bildung). Leipzig 1907, Quelle & Meyer. geb. Mk. 1.25.

La Revue de l'Enseignement des Sciences (Rédakteur F. Marotte). 1re Année, Nr. 1—10, IIme Année, Nr. 11, 12. Paris 1907, Le Soudier.

Richert, P., Die ganzen rationalen Funktionen der ersten drei Grade und ihre Kurven. Berlin 1907, Weidmann. Mk 1.—.

Richter, O., Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Leipzig 1907, Teubner. Mk. —.20.

Righi, A., u. Dessau, B., Die Telegraphie ohne Draht. 2. Aufl. Mit 312 Abb. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn Mk. 15.—.

Ruska, J., Die Wirbeltiere. 2. Aufl. Leipzig 1907, Nägele.

Schacht, Joh., Zur Energielehre im physikalischen Unterricht. Mit 2 Tafeln. Berlin 1907, Weidmann. Mk. 1.—.

Schafheitlin, P., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 62 Textfiguren. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 1.80.

Scheele, F., Ueber die Dandelinschen Kugeln. Mit 2 Fig.-Tafeln. Berlin 1907, Weidmann. Mk. 1.—.

Schmeil, Naturgeschichte für landwirtschaftliche Schulen. Bearb. von Dr. H. Biedenkopf. Mit 16 Tafeln. Ebenda.

Schmid, B., Zeitgemässe Aufgaben und Ziele f. höhere Schulen, Sonderabdruck aus „Lehrproben u. Lehrgänge a. d. Praxis d. Gymnasien u. Realschulen". Heft 3. Halle a. S. 1907, Buchhandlung des Waisenhauses.

Schubert, H., und Schumpelick, A., Arithmetik für Gymnasien und ausgewählte Resultate. I. Heft. Leipzig 1907, Göschen.

Schülke, A., Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik. 1. Teil. Mit 7 Textfig. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 2.20.

Schwering, K., Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Mit 17 Figuren. 3. Aufl. Freiburg 1907, Herder. Mk. —.90.

Seydlitz, v. E., Geographie, Ausgabe G in fünf Heften. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von A. Rohrmann. 3. Heft. Breslau 1907, Ferd. Hirt.

Simroth, H., Abriß der Biologie der Tiere. (Sammlung Göschen). 2. Aufl. Leipzig 1907, Göschen. geb. Mk. —.80.

Steinmann, G., Der Unterricht in Geologie und verwandten Fächern auf Schule und Universität. (Sonderabdruck aus Natur und Schule. Leipzig 1907, Teubner. Mk. 1.—.

Stephan, P., Die technische Mechanik. Mit 200 Fig. 2. Teil. Leipzig 1906, Teubner. geb. Mk. 7.—.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. 1. Teil: Die Unterstufe. Mit 108 Fig. 3. Aufl. Leipzig 1907, G. Freytag. geb. Mk. 1.60. — 2. Teil: Die Oberstufe. Mit 64 Figuren. 2. Aufl. Wien 1907, Tempsky. Mk. 1.60.

Thomé-Migula, Kryptogamen-Flora (Thomés Flora von Deutschland, V. bis VII. Band). Lief. 27—29. Gera (Reuß) 1907, Fr. Zezschwitz. Subskriptionspreis der Lieferung Mk. 1.—.

Treutlein, P., Mathematische Aufgaben. Teil I. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 2.80.

Tümpel, R., Die Geradflügler Mitteleuropas. Mit 20 farbigen, 3 schwarzen Tafeln und 92 Textabb. 20 Lief. à Mk. —.75. Gotha 1907, Perthes. — Heft 1—19.

Ulrich, G., Der Begriff des Raumes. Berlin 1907, Weidmann. Mk. 1.—.

Unger und Treschor, A., Gewerbliches Rechnen in zwei Heften. Leipzig 1907, Klinkhardt.

Vater, R., Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen. Mit 34 Abb. 2. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt 21). Ebenda. geb. Mk. 1.25.

Verhandlungen des dritten allgemeinen Tages für deutsche Erziehung, Weimar 1906. Birkenwerder bei Berlin 1906, Verlag der Blätter f. deutsche Erziehung. Mk. 1.20.

Verworn, M., Die Erforschung des Lebens. (Abdruck aus der Naturwissenschaftl. Wochenschrift). Jena 1907, Fischer. Mk. —.80.

Volk, K. G., Die Elemente der neueren Geometrie. Mit 93 Textfiguren. Leipzig 1907, Teubner. kart. Mk. 2.—.

Wagner, P., Lehrbuch der Geologie und Mineralogie. Mit 222 Abb. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 2.40.

Walther, F., Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie für Unter- und Mittelstufe mit Anhang (für Realanstalten): I. Ebene Trigonometrie, II. Abbildung und Berechnung einfacher Körper. Berlin 1907, Salle. Mk. 2.20.

Wangerin, A., Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer. 1 Textfigur. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. Mk. 5.50.

Weber, H., Wellstein, J., und Weber, R., Angewandte Elementarmathematik. Mit 358 Textfiguren. Ebenda. geb. Mk. 14.—.

Weighardt, E., Leitfaden für den geographischen Unterricht. Weinheim 1907, Ackermann. Mk —.50.

Weinschenk, E., Allgemeine Gesteinskunde als Grundlage der Geologie. 2. Aufl. Mit 100 Fig. und 6 Tafeln. Freiburg 1906, Herder. Mk. 5.40.

— „ — Die gesteinbildenden Mineralien. 2. Aufl. Mit 204 Textfig. und 21 Tafeln. Freiburg 1907, Herder. geb. Mk. 9.—.

— „ — Petrographisches Vademekum. Ein Hilfsbuch für Geologen. Mit einer Tafel u. 98 Abb. Freiburg 1907, Herder. geb. Mk. 3.—.

Weinstein, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Ebenda. geb. Mk. 9.—.

Weitbrecht, W., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 15 Fig. u. 2 Tafeln. (Samml. Göschen 302). Leipzig 1906, Göschen. Mk. —.80.

Wilser, L., Menschwerdung, ein Blatt aus der Schöpfungsgeschichte. Stuttgart 1907, Strecker & Schröder. geb. Mk. 1.80.

Wirtz, C. W., Leitsätze zur mathematischen Geographie. Ein Anhang zu Roeson, Lehrbuch der Physik. Leipzig 1906. Leiner. Mk. —.50.

Zacharias, O., Das Süßwasser-Plankton (Aus Natur und Geisteswelt). Mit 49 Abb. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. v. Franz Frisch. Jahrg. III, Nr. 3, 6. 8—10. Wien 1907, Pichlers Wwe. & Sohn.

Ziehm, J., Aus der Werkstatt der Schule. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. Mk. 4.—.

Züblke, P., Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Mit 55 Fig. Leipzig 1906, Teubner. Mk. 1.—.

Zuschneid, Hugo, Freiburger Taschenliederbuch. 6. Aufl. Freiburg i. Br. 1907, Herder. Mk. 1.50.

Zwerger, M., Rechenbuch für die unteren Klassen der höh. Lehranstalten. 1. Teil: Lehraufgabe der 1. und 2. Klasse. 2. Teil: Lehraufgabe der 3. und 4. Klasse. Mit Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers. Leipzig 1907, Teubner. kart. à Mk. 1.60.

Ahrens, F. B., Lebensfragen. Die Vorgänge des Stoffwechsels. Mit 8 Abb. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. geb. Mk. 1.25.

Ahrens, W., Mathematische Spiele (170. Bdch. Aus Natur und Geisteswelt.) Mit 1 Titelbild und 69 Fig. im Text. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Bachmann, P., Grundlehren der neueren Zahlentheorie. (Sammlung Schubert L. III.) Mit 10 Fig. Leipzig 1907, Göschen. geb. Mk. 6.50.

Bennecke, F., Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. Mit 10 Lichtdrucktafeln. Berlin 1907, Otto Salle. Mk. 2.—.

Bieler, A., Lehrbuch der Geometrie für Knaben-Mittelschulen. Nach Prof. H. Müllers Unterrichtswerk. Leipzig 1907, Teubner. geb Mk. 1.20.

Blochmann, R., Luft, Wasser, Licht und Wärme. (5. Bdch. Aus Natur und Geisteswelt.) 3. Aufl. Mit vielen Abb. Ebenda. geb. Mk. 1.25.

Bojko, J. u. Wendling, E., Neues System zum technischen Kopfrechnen. 1. Heft. Die Quadratbildung der Zahlen 1—1250. Zürich 1907, Speidel. Mk. —.50.

Börnstein, R., Die Lehre von der Wärme. (172. Bdch. Aus Natur und Geisteswelt.) Mit 33 Abb. im Text. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Bronzin, V., Theorie der Prämiengeschäfte. Wien 1908, Deuticke. Mk. 2.50.

Bruno, K., Die Grundlehren der Integral- und Differentialrechnung. Wien 1908, Hölder. Mk. 1.25.

Brunswig, H., Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge. Mit 6 Abb. und 12 Tabellen. (Sammlung Göschen 333) Leipzig 1907, Göschen. geb. Mk. —.80.

Burckhardt, R., Geschichte der Zoologie. (Sammlung Göschen 357.) Ebenda. geb. Mk. —.80.

Bürklen, O., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit Beispielen und 289 Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit 40 Fig. Stuttgart 1907, Kohlhammer. geb. Mk. 1.50.

Dannemann, F., Der naturwissenschaftliche Unterricht auf praktisch-heuristischer Grundlage. Hannover 1907, Hahn. Mk. 6.—.

Dippe, A., Naturphilosophie. München 1907, Beck. Mk. 5.—

PROJEKTIONS-APPARATE FÜR SCHULZWECKE

Man verlange gratis u. franko Prospekt Msch von: CARL ZEISS JENA

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Physikalische Freihandversuche

Unter Benutzung des Nachlasses von

Prof. Dr. Bernhard Schwalbe

weil. Geh. Reg.-Rat und Direktor des Dorotheenstädt. Realgymn. zu Berlin.

Zusammengestellt und bearbeitet von

Hermann Hahn,

Professor am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin.

I. Teil:

Nützliche Winke. Mass u. Messen. Mechanik der festen Körper.

Mit 269 Figuren im Text.
Preis geh. 3 Mk., gebd. Mk. 3.75.

II. Teil:

Eigenschaften d. Flüssigkeiten u. Gase

Mit 509 Figuren im Text.
Preis geh. 5 Mk., gebd. 6 Mk.

Verlag von Otto Salle in Berlin.

Es erschien:

Die Infinitesimalrechnung

im Unterricht der Prima.

In Uebereinstimmung mit den Meraner Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte bearbeitet von

Oskar Lesser,

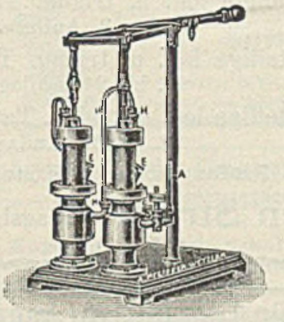
Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M.

Mk. 1.60 geh., Mk. 2.— geb.

Bei der hohen Bedeutsamkeit der augenblicklich zur Diskussion stehenden Frage, ob es möglich oder wünschenswert sei, dem ohnehin sehr umfangreichen mathematischen Lehrpensum unserer höheren Schulen noch die Elemente der Differenzial- und Integralrechnung einzugliedern, wird manchem das Büchlein, das aus dem Unterricht heraus entstanden und bereits von anderer Seite auf seine Brauchbarkeit geprüft ist, als ein Ratgeber und Wegweiser gewiss willkommen sein. Das $7^1/_2$ Bogen starke Werkchen zerfällt in drei Teile, deren erster im Kleinschen Sinn den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung behandelt und Anleitung zur Auswertung numerischer Gleichungen auf graphischem Wege und nach der Regula falsi gibt. Der zweite Teil bietet in einfachster, doch ausreichender, und vor allem die Anschauung betonender Darstellung die Elemente der Differenzialrechnung, während der dritte der Behandlung der Integralrechnung gewidmet ist. Indem der Algorithmus zugunsten der Anwendung überall zurücktritt, erfährt der Unterricht durch die stete Betrachtung der Funktionsbilder eine nicht unwesentliche Belebung; zugleich gewährt die neue Behandlung erhebliche Erleichterungen in der Durcharbeitung einzelner Pensen und bereichert den Unterricht an allgemeinbildenden Momenten.— Die Heranziehung und Lösung physikalischer Aufgaben soll die Brauchbarkeit des Büchleins erhöhen.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik u. Präzisions-Optik. Gegr. 1891.



Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung

zur Fabrikation der

Geryk-Oel-Luftpumpen

D. R.-P. in Deutschland.

Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. } Vakuum
Zweistiefelige „ „ 0,0002 „ „ }

Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

Neuheit! Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

eigen. Konstrukt.; höchste Verdünnung in kürzest. Zeit!
D. R.-P. angemeld. Unzerbrechl.: ohne Glas u. Porzellan!

Alle physikal. u. chemischen Apparate.

Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette, phys. u. chem. Vorbereitungszimmer u. Hörsäle.

Mineralien, Mineralpräparate, geschliffene Edelsteine, Edelsteinmodelle, Meteoriten, Metallsammlungen, mineralogische Apparate und Utensilien.

Gesteine, Dünnschliffe von Gesteinen, Verwitterungsfolgen von Gesteinen, Bodenarten, Bodenkarten natürlicher Gesteine nach Prof. A. Geistbeck, geologische Hämmer.

Petrefakten, Gipsmodelle seltener Fossilien, Geotektonische Modelle. Sammlungen für allgemeine Geologie. Erdbeben-Serien. Exkursions-Ausrüstungen.

Krystallmodelle aus Holz, Glas und Pappe. Krystalloptische Modelle.

Diapositive für den geologischen und petrographischen Unterricht und physikalische Geographie.

Der allgemeine mineralogisch-geologische Lehrmittel-Katalog (reich illustr.) No. XVIII, steht auf Verlangen portofrei zur Verfügung.

Meteoriten, Mineralien und Petrefakten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen.

Dr. F. Krantz, Rheinisches Mineralien-Kontor,

Fabrik und Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel.

Gegründet 1833. Bonn a. Rh. Gegründet 1833.

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.

Soeben sind erschienen und können durch alle Buchhandlungen bezogen werden:

Baumhauer, Dr. **H.,** Professor an der Universität zu Freiburg in der Schweiz, **Leitfaden der Chemie,** insbesondere zum Gebrauch an landwirtschaftlichen Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8⁰.

I. Teil: Anorganische Chemie. Fünfte Auflage. Mit 34 in den Text gedruckten Abbildungen. gr. 8⁰ (VIII u. 172) M 2.20; geb. M 2.70. — Früher ist erschienen:

II: Organische Chemie: mit besonderer Berücksichtigung der landwirtschaftlich-technischen Nebengewerbe. Dritte Auflage. Mit 16 in den Text gedruckten Abbildungen. (VIII u. 88) M 1.—; geb. M 1.35.

Krass, Dr. **M.,** und Dr. **H. Landois, Lehrbuch für den Unterricht in der Mineralogie.** Für Gymnasien, Realgymnasien und andere höhere Lehranstalten bearbeitet. Mit 134 eingedruckten Abbildungen, einer geologischen Karte in Farbendruck und 3 Tafeln Kristallformennetze. Dritte, verbesserte Auflage. (Lehrbuch für den Unterricht in der Naturbeschreibung, 3. Teil). gr. 8⁰ (XII u. 156) M 2.20; geb. in Halbleder M 2.70.

Lorscheid, Dr. **J., Kurzer Grundriß der organischen Chemie** für höhere Lehranstalten, insbesondere für Oberrealschulen und Realgymnasien. Zweite Auflage, vollständig neu bearbeitet von Professor **P. Kunkel.** Mit 28 Figuren. 8⁰ (VIII u. 124) M 2.—; geb. in Halbleder M 2.50.

Früher ist erschienen:

— **Lehrbuch der anorganischen Chemie.** Mit 154 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spektraltafel in Farbendruck. Siebzehnte Auflage von Dr. F. Lehmann. gr. 8⁰ (VIII u. 330; mit 2 Tabellen). M 3.60; geb. in Halbleder M 4.20.

Die Erde

und die Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Nach E. Reclus von Dr. **Otto Ule.**
Zweite umgearbeit. Auflage von Dr. **Willi Ule,** Privatdocent an der Universität Halle.
Mit 15 Buntdruckkarten, 5 Vollbildern und 157 Textabbildungen.
Preis geh. 10 Mk., eleg. geb. 12 Mk.

F. G. Gauß, Logarithmentafeln.

Vierstellige log. u. trigon. Tafeln. **Schulausgabe.**
3. Auflage. In braun Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Kleine** Ausgabe.
21. bis 24. Auflage. In grau Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Vollständige** Ausgabe.
92. bis 95. Auflage. In blau Leinen gebunden 2,50 M.

Prüfungsexemplare stehen gern zur Verfügung.

Eugen Strien, Verlagsbuchhändler in Halle=Saale.

Nur Jahresaufträge.

Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.

Beginn jederzeit.

Mineralien aller Länder.
Direkte Importe a. Amerika, Australien, England, Frankreich, Italien, Japan. Norwegen, Schweden, Schweiz, Tirol usw. Sammlungen jeder Art. Sammler-Utensilien usw. Spezialität:
Mineralien, Petrefakten u. Gesteine des Harzgeb.
Katalog H kostenlos.
Harzer Mineralien-Kontor, Goslar
C. Armbster.

Höllein & Reinhardt
Neuhaus/Rennweg
Thermometer aller Art
Glasinstrumente und Apparate,
Geißler- und Röntgen-Röhren, Glas-Meßgeräte, Glasbläserei-Artikel, Glas-Lehrmittel.
Katalog zu Diensten.

Sammlung
zerlegbarer und zusammenklappbarer Körper
für den Unterricht in der Geometrie in verschiedenen Dimensionen rücksichtlich Anzahl und Größe.
Selbstverlag von **Otto Küster,**
Hauptlehrer a. D. in **Wermelskirchen.**

Anatomische
Lehrmittel=Modelle
aus Hartmasse, fein koloriert und zerlegbar, sowie natürl. Knochenpräparate empfiehlt (Katal. gratis)
W. Förster, Kunstanstalt,
Steglitz bei Berlin.

Projektions-Apparate
Heliostate usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

L. Hormuth, Inh. W. Vetter
Heidelberg
liefert alle Apparate für
chem. u. physikal. Unterricht.
Eigene Werkstätte.

Physikal. Apparate
u. **chemische Gerätschaften,**
sowie sämtl. **Schullehrmittel**
fertigen u. liefern in bekannter tadelloser Ausführung zu mässigen Preisen.
Schultze & Leppert
Physikalisch-mechanische u. elektrotechn. Werkstätten, **Cöthen** in Anh.

Spektralapparate
Kathetometer, optische Bänke usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

Physik. Baukasten
für Lehrzwecke nach **Wilh. Volkmann.**
Projektionseinrichtungen
elektr. Messinstrumente
G B&C
Georg Beck & Co,
Berlin NO. 43, Georgenkirchstr. 64

Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt a. M.
Spezial-Fabrik aller Arten
Elektr. u. magnet. Mess-Instrumente
für Wissenschaft und Praxis.
Kataloge stehen zu Diensten.

Projektions-Photogramme
für den
Naturwissensch. Unterricht
in zweckdienlichster Ausarbeitung
Prospekt und Verzeichnisse kostenlos
Otto Wigand, Zeitz. 2.

Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt a. M.
empfehlen ihr
Elektr. Instrumentarium
für Lehrzwecke
welches allgem. Anerkennung findet.
Spezialkatalog zu Diensten.

Klapptafel n. Prof. Rühlmann, mit Zubehör, z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie die in Aufgaben vorkommenden Bewegungen. Prospekt frei. Dynamos, Dampfmaschinen, Wasserturbinen.
Rob. Schulze, Halle a. S.
Elektrotechn. u. mechan. Werkstätten.

Neu! Biologische Neu!
Entwickelungspräparate, Injektions-, Nerven-, Situs-Präparate, biologische u. system. Zusammenstellungen usw. — Katalog 1907 gratis und franko. —
Zoologisches Institut
Wilh. Haferlandt & Co.
Berlin SW. 48, Friedrichstrasse 6.

Paul Gebhardt Söhne, Berlin C 54.
Spezialität:
physik. Apparate, Luftpumpen
mit Babinet bezw. Grassmannschem Hahn.
Einr. phys. u. chem. Experimentier-Räume.
Grand Prix u. gold. Medaille St. Louis.
Preisl. 16 u. 17 mit ca. 5000 Num. grat.

Devonische Petrefakten
Kollektion 25 versch. Spezies, Mk. 3.50, 50 ders. Mk. 8.50, 75 ders. 15.— u. 100 ders. Mk. 24.50. (Alles richtig bestimmt.)
Eruptivgesteinsarten und vollständige Reihe **vulkanischer Auswurfs-Produkte** (Asche, Sand, Bomben, Kugeln usw.)
Max Hopmann, Gerolstein i. Eifel.

Trigonometrie-Demonstrationsapparat
nach Dr. Lampart, neueste, vollkommenste Art, gesetzlich geschützt, 1 bezw. 2 qm ganze Größe, Preis Mk. 47.— Viele Referenzen. — Beschreibung auf Verlangen. — Allein. Lieferant:
Hans Hilgers, Naturw. Apparate, **Bonn.**

Optische Werkstätte
Paul Waechter
Friedenau.
Mikroskope
Photogr. Objektive D. R. P.
Kataloge gratis und franko.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's u. unseren technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie chem.-techn. Wagen von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeek & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Laboratoriums-Apparate
Demonstrations-Apparate
für Chemie, Physik usw.
Dr. Rob. Muencke
Berlin N. W. 6, Luisenstr. 58.

Apparate für elektr. Stromspannungs- und Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektr. Meßapparate
Gans & Goldschmidt, Berlin N. 65

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und :::
:::: chemischen Gerätschaften ::::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen
mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

Projektions-Apparate
neuartiger, vollkommener Bauart
Gebr. Mittelstrass
Hoflieferanten, Magdeburg 40.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Alleinige Fabrikanten: Jul. Pintsch, Akt.-Ges., Berlin O., Andreasstr. 71/73.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

Optisch-mechan. Werkstätten
Ed. Liesegang, Düsseldorf
Einzige Spezialität:
Projektions-Apparate

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Botanische Modelle
in eigener Werkstatt hergestellt
liefert und empfiehlt
R. Brendel, Grunewald-Berlin.
Preisverzeichnisse
werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
Patent Klingelfuss.

Naturw. Lehrmittel-Institut
Wilh. Schlüter
Halle a. S.
Erzeugung und Vertrieb naturwissensch. Präparate, Sammlungen und Modelle in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mässigen Preisen. — Kataloge kostenlos.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und Apparate für strahl. Wärme
nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz * Wetzlar
Optische Werke
Mikroskope, Mikrotome,
Mikrophotogr. u. Projektions-Apparate
Photographische Objektive

Physikal. Apparate
Vollständige Einrichtung
von physikal. Kabinetten
Ferdinand Ernecke
Berlin-Tempelhof

Aquarien
Terrarien, Froschhäuser, Grotten,
sämtl. Aquarienbehelfe usw.
inkl. Gratis-Liste, liefert billigst
A. Glaschker, Leipzig M. N. 25
Lieferant vieler Schulen u. Anstalten.

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Heidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Meiser & Mertig
Dresden-N. 6. Z
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
◆ Chemische Apparate ◆
Preisverzeichnis kostenlos

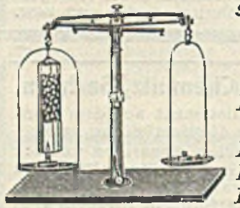
Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Richard Müller-Uri,

Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparat und Gerätschaften.

Braunschweig, Schleinitzstrasse 19

liefert auch



sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Kürzlich erschien:

Methodisches Lehrbuch

der

Chemie und Mineralogie

für

Realgymnasien und Oberrealschulen.

Von

Prof. Dr. Wilh. Levin.

Teil III: Organische Chemie.

Preis: Mk. 1.65.

Inhaltsverzeichnis:

I. Organische und anorganische Chemie.
II. Die Elementaranalyse.
III. Die Bestimmung der Dampfdichte.
IV. Die Grenzkohlenwasserstoffe oder Paraffine.
V. Die Halogensubstitutionsprodukte des Methans.
VI. Die einwertigen Alkohole der Grenzkohlenwasserstoffe. — Ester.
VII. Die Aether.
VIII. Die Oxydationsprodukte der einwertigen Alkohole (Aldehyde und Fettsäuren. — Ketone).
IX. Säuren anderer Reihen.
X. Fette und Seifen. — Glyzerin.
XI. Die Kohlehydrate.
XII. Die Benzolderivate oder aromatischen Verbindungen.
XIII. Die Alkaloide.
XIV. Die Eiweißstoffe.
XV. Die Verdauungstätigkeit des Menschen
XVI. Die Nahrungsmittel des Menschen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 30

In meinem Verlage erschien:

Lehr- und Übungsbuch

der

Geometrie

für die Unter- und Mittelstufe mit Anhang (Trigonometrie und Anfangsgründe der Stereometrie)

von

Dr. Fritz Walther

Oberlehrer am Französ. Gymnasium in Berlin.

Preis Mk. 2.20.

Im Anschluss an die Forderungen bedeutender Fachmänner und der Unterrichts-Kommission der Meraner Naturforscher-Versammlung berücksichtigt der Verf. erheblich stärker, als dies bisher geschieht, die **Anschaulichkeit** und den **empirisch-induktiven Ursprung** der geometrischen Erkenntnisse, die **Beweglichkeit** der Raumgebilde u. ihren **funktionalen Zusammenhang.**

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Bei Einführung neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen:

Geometrie.

Fenkner: **Lehrbuch der Geometrie** für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme,** Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M. Dritter Teil: Ebene Trigonometrie. M. 1.60.

Lesser: **Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht** an höheren Lehranstalten. Von **Oskar Lesser,** Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Walther: **Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie** für die Unter- und Mittelstufe mit Anhang (Trigonometrie und Anfangsgründe der Stereometrie). Von Dr. **Fritz Walther,** Oberlehrer am Französ. Gymnasium in Berlin. Preis Mk. 2.20 mit Anhang.

Arithmetik

Fenkner: **Arithmetische Aufgaben.** Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Professor Dr. **Hugo Fenkner** in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 5. Aufl. Preis 2 M. 20 Pf. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis M. 1.20. Teil IIb (Pensum der Prima). 2. Aufl. Preis M. 2.60. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittl. Lehranstalten): Mk. 1.10

Physik.

Heussi: **Leitfaden der Physik.** von Dr. **J. Heussi.** 16. völl. umgearb. Aufl. Mit 199 Holzschnitten. Bearb. von Prof. Dr. **E. Götting.** Preis 1 M. 50 Pf. — Mit Anhang „Elemente der Chemie.“ Preis 1 M. 80 Pf.

Heussi: **Lehrbuch der Physik** für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen u. and. höhere Bildungsanstalten. Von Dr. **J. Heussi.** 7. verb. Aufl. Mit 487 Holzschn. Bearb. von Prof. Dr. **E. Götting.** Preis 6 M.

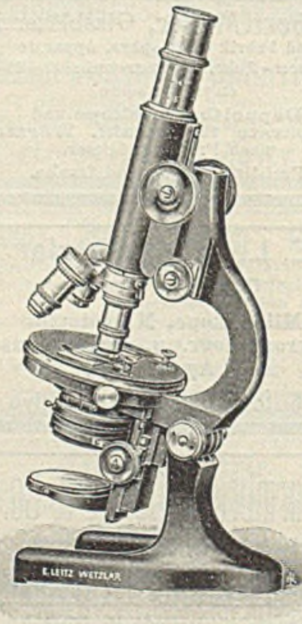
Im Fasse von 30 L. an bezogen p. Liter M 1.—. Fracht z. Lasten des Empfängers Für bessere und Auslese-Weine verlange man Preisliste. Vertretungen werden an gut empfohlene Herren vergeben.

Niersteiner Domthal

Gräfl. v. Schweinitz'sche Weinguts-Verwaltung

Nierstein am Rhein

Hervorragend preiswerte Weinmarke. Probekiste von 12 Flaschen M 15.— fko. jeder deutschen Eisenbahnstation geg. Nachnahme oder Voreinsendung des Betrages.



E. Leitz,

Optische Werke

Wetzlar.

Zweiggeschäfte:

Berlin NW., Luisenstraße 45, **Frankfurt a. M.,** Neue Mainzerstraße 24, **London St. Petersburg, New-York, Chicago,**

Mikroskope,

Mikrotome,

Mikrophotographische Apparate.

Projektions-Apparate.

Photographische Objektive.

Man verlange kostenfrei Katalog Nr. 42 d.

Hierzu je eine Beilage der Firmen **Carl Chun,** Geograph. Verlag in **Berlin.** ● Lehrmittelanstalt **J. Ehrhard & Cie.** in **Bensheim.** ● **Paul Parey,** Verlag in **Berlin.** ● **B. G. Teubner,** Verlag in **Leipzig,** welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.