Jahrgang XIV. 1908. No. 3.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 30.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermässigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Ueber mathematische Laboratorien.

Von Gymn.-Prof. Dr. Karl Goldziher (Budapest).

Die Annäherung der abstrakten Kapitel an das praktische Leben bildet einen wichtigen Gesichtspunkt der heutigen Reformbestrebungen im Gebiete des mathematischen Unterrichts. Es handelt sich dabei nicht bloß um eine rein utilitarische Forderung, sondern um die Lösung jener Aufgaben, die von Seite der exakten Forschungsarbeit an den Unterricht gestellt werden. Der Zweck ist, der stufenweisen Entwickelung des exakten Denkvermögens der Schüler gerecht zu werden; also natürliche Ausgangspunkte, reale Probleme zu wählen und die Prozesse der Approximation und der Präzision in gleicher Weise zu berücksichtigen. Die methodische Wichtigkeit dieser Postulate besteht darin, daß neben der Deduktion das Sammeln und die weitere Verwertung von Erfahrungen selbständig in den Vordergrund treten. Der Unterricht sei auf die wirklichen Verhältnisse des Lebens gegründet, die speziellen Methoden sollen aus den Anforderungen größerer, einheitlicher Sachgebiete entwickelt werden, so daß der Schüler schon auf der höheren Schule den realen Wert und die wirkliche Anwendung abstrakter Gedankenreihen zu erfassen lerne.

Bei der praktischen Lösung dieser Frage werden wir auf die Notwendigkeit solcher Uebungen geführt, die den theoretischen Unterricht von Anfang an begleiten. Schon in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ist es John Perry in England gelungen, den mechanischen und den mathematischen Unterricht an technischen Mittelschulen (besonders am Finsbury Technical College und am Royal College of Science in London) auf wirkliche Experimentarbeit zu gründen.[1]) Diese Richtung hat neuerdings in Amerika viel Anhänger erworben. Besonders seitdem der Chicagoer Professor E. H. Moore in einer Presidential Address vor der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft (1903) die Wichtigkeit des Laboratory-Method hervorgehoben hat.[2]) Moore gründet seine Forderungen auf die Vereinigung des mathematischen und physikalischen Unterrichtes; in dieser Weise könnte nämlich der doppelte Charakter des exakten Forschens in

[1]) S. hierüber R. Fricke: Ueber Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England (Jahresberichte der D. M. V. XIII [1904]).

[2]) E. H. Moore: On the foundations of Mathematics (Science, new series XVII [1903] und Bulletin of the Am. Math. Soc. 2. series, IX [1903]).

gleichwertiger Art klar hervortreten: einerseits die experimentelle Erwerbung konkreter Tatsachen und andererseits die auf die systematische Verarbeitung derselben folgende strenge Deduktion von präzisen Gesetzmäßigkeiten. Diese Gedanken weisen nun in ihrer Ausführung auf die Notwendigkeit von Laboratorien hin, in welchen das Material für die Ausgangspunkte des mathematischen Unterrichtes durch selbständige Arbeiten der Schüler verschafft werden könnte. In dem jüngst erschienenen Buche von J. W. A. Young: The teaching of Mathematics in the elementary and the secondary school (Am. Teachers Series, New-York; Longmans, Green and Co. 1907) handelt das VI. Kapitel ausführlich über diese Frage[3]); weiterhin kann eine Arbeit von Myers hervorgehoben werden[4]) (1903), in der die näheren Angaben zur Ausrüstung eines solchen Laboratoriums zusammengestellt sind. In Frankreich wies É. Borel in einem Vortrag, den er in der Conférence-Reihe des Musée Pédagogique im Jahre 1904 hielt, auf die Wichtigkeit der mit dem mathematischen Unterricht zusammenhängenden praktischen Arbeiten hin.[5]) Der Vortrag Borels gibt die allgemeinen Gesichtspunkte und die administrativen Einzelheiten an, die bei der Verwirklichung des mathematischen Laboratoriums zu berücksichtigen wären.

Die Einseitigkeit der amerikanischen Versuche besteht darin, daß hauptsächlich nur die physikalischen Beziehungen des mathematischen Unterrichtes betont werden. Die Annäherung des Unterrichtes an alle quantitativen Verhältnisse des praktischen Lebens führt jedoch zur Forderung, daß das mathematische Laboratorium womöglich vielseitig sei und alle praktischen Beziehungen der Mathematik berücksichtige. Wir weisen nur auf die Aufgabensammlung von A. Schülke (Leipzig und Berlin, Teubner I. II.) hin, um zu zeigen, daß für den algebraischen Unterricht eine ganze Reihe anderer Kreise der angewandten Mathematik noch heranzuziehen sind.[6]) Besonders in dem Rechenunterricht der unteren Klassen gelingt es, die praktische Betätigung der Schüler durch wertvolle Sachgebiete zu unterstützen. Wir versuchen im Folgenden einige Bemerkungen darüber mitzuteilen, wie man durch das mathematische Laboratorium die Vielseitigkeit und den methodischen Fortgang der praktischen Uebungen verwirklichen könnte. (Mehrere der anzugebenden Versuche wurden im Laufe der beiden letzten Schuljahre am staatlichen Obergymnasium des III. Bezirkes in Budapest durchgeführt).

1. Vor allem heben wir hervor, daß die Uebungen von der untersten Klasse angefangen den ganzen Gang des Unterrichtes zu begleiten hätten. Der von konkreten Kenntnissen ausgehende Unterricht der unteren Stufe kann auf diesem Wege in wirklich methodischer Weise auf selbständig entwickelte Sachgebiete aufgebaut werden.

2. Das mathematische Laboratorium soll unabhängig vom physikalischen und chemischen alle Prototype und Apparate enthalten, die beim Unterricht der Maßsysteme notwendig sind. In vielen Fällen können dieselben durch die selbständige Arbeit der Schüler verschafft werden. Auch größere Einheiten (wie z. B. 1 m^3, 1 *hl*) sind anzufertigen; es wird nämlich mit denselben operiert, ohne daß die Schüler einen anschauungsmäßigen Begriff von diesen Maßen hätten. Die Apparate mögen zu pünktlichen Messungen und Maßaichungsübungen verwendbar sein. Das Laboratorium möge weiterhin solche Apparate enthalten, welche die Ausführung einfacher Feldmessungsarbeiten (untere Klassen) und weiterer geodätischer, besonders Triangulierungsarbeiten (höhere Klassen) möglich machen.[7])

---

[3]) Die älteste Arbeit über unseren Gegenstand scheint die von A. R. Hornbrook zu sein: Laboratory-Method of teaching Mathematics (New-York 1895). Siehe weiterhin: J. W. A. Young: What is Laboratory-Method? (School Science and Mathematics 1903).

[4]) Myers: The Laboratory-Method in the secondary school (School Review 1903). S. noch das Buch von Myers: Observational and experimental Astronomy (Chicago 1902).

[5]) É. Borel: Les exercices pratiques de Mathématiques dans l'enseignement secondaire. Conférences du Musée Pédag. 1904 und Revue générale des Sciences 1904).

[6]) Als Beispiel für die Anwendung der Methode auf den geometrischen Unterricht dient das Werk von P. Martin und O. Schmidt: Raumlehre für Mittelschulen, Bürgerschulen und verwandte Anstalten; 3 Hefte. (Berlin, Gerdes & Hödel). — In der neueren englischen und amerikanischen Lehrbuchliteratur ist eine ganze Reihe von Werken erschienen, die den konkreten Charakter des ersten geometrischen Unterrichtes hervortreten lassen und den Fortgang durch Meßarbeiten (measuration) fördern. (Experimental, observational, practical, measuring, concrete, inventional, intuitional Geometry). Diese Werke knüpfen an die antieuklidische Richtung der Perryschen Schule an, die neuerdings auch in Frankreich mehrere Vertreter gefunden hat (s. die Enquête über den geometrischen Unterricht der „La Revue de l'Enseignement des Sciences“). Von den bezüglichen englischen und amerikanischen Lehrbüchern verweisen wir auf die Werke von Campbell, Hailmann, Hill, Hornbrook, Lambert, Murray, Spencer (Amerika); Baker and Bourne, Baxandall and Harrison, Budden, Eggar, Hall and Stevens, Harris, Marshall and Tuckey, Morris and Husband, Moore, Morgan, Playne and Fawdry, Stevens (England).

[7]) S. hierüber A. Schwarz: Der geodätische Kursus der Oberrealschule an der Waitzstraße zu Kiel im Sommerhalbjahr 1906 (Jahresbericht 1907).

3. In Verbindung mit dem Rechenunterricht sollen statistische Aufnahmearbeiten und größere Berechnungen ausgeführt werden; das nötige Tabellenmaterial müssen die Schüler selbst entwerfen. Die statistischen, zusammenhängenden Aufgaben erschließen für den geographischen, kulturellen und wirtschaftlichen Unterricht besonders wertvolle Kenntnisse; sie bieten weiterhin für den Rechenunterricht ein ausgiebiges und vielseitiges Sachgebiet, das von methodischer Seite mit einem der wichtigsten Prozesse angewandter Arbeiten in Verbindung tritt, den wir kurz mit dem Worte „Tabellieren“ bezeichnen wollen. — Für die mit dem Rechenunterricht verbundenen kaufmännischen, gewerblichen, wirtschaftlichen, finanziellen und versicherungstechnischen Sachkreise soll im Laboratorium eine womöglich vollständige und zugängliche Sammlung der im praktischen Leben verwendeten Schriftstücke, Dokumente und sonstigen rechnerischen Hilfsquellen sein. Die Demonstration dieser Gegenstände soll auch zu selbständigen Arbeiten mit denselben hinführen. Die praktische Tätigkeit der Schüler kann durch einfache Uebungen in der Buchführung vervollständigt werden, da ja der größte Teil der Schüler sich diese fürs Leben so wichtigen Kenntnisse sonst nicht — oder später nur mit großer Mühe — aneignen kann.

4. Im Interesse des Unterrichtes in den höheren Klassen muß dafür gesorgt sein, daß der Stoff des rechnerischen Teiles auf Grund selbständiger mechanischer, physikalischer, chemischer, meteorologischer, geodätischer und astronomischer Messungen und Beobachtungen zur Verfügung stehe. (In kleineren Provinzschulen oder in Schulen, deren Sitz dafür geeignet ist, könnte man an zuständiger Stelle beantragen, daß die offiziellen Beobachtungsstationen in der Schule errichtet werden; astronomische Observatorien sind schon an mehreren Schulen errichtet worden.) Die systematische Bearbeitung des großen, vielseitigen und auch an sich wertvollen Beobachtungsmaterials wäre Aufgabe des mathematischen Laboratoriums. Das Material könnte eventuell auch in den anderen Laboratorien durch dieselben Schüler verschafft werden, da die Hauptaufgabe der mathematischen Uebungsstelle auf die präzise Bearbeitung nach den Methoden der angewandten Mathematik gerichtet wäre. Wir führen einige wichtige Aufgaben an, auf die im mathematischen Laboratorium besonderes Gewicht zu legen ist: Systematische Zusammenstellung und Tabellieren der Beobachtungswerte, Aufsuchung und rechnerische Korrektion der Fehlerquellen nicht präziser Instrumente, rechnerische Korrektion und Ausgleichung der Beobachtungsresultate, die technisch richtige Konstruktion von Tabellen und dergl. mehr. Das mathematische Laboratorium wäre also die Betriebsstätte der praktischen Mathematik, wie sie von der Schule Perry's gefordert wird.[8]) Die Handhabung der modernen Hilfsmittel der angewandten Mathematik (Logarithmenstab, Millimeterpapier, Rechenmaschinen, graphisches Rechnen usw.) muß besonders betont werden. Der theoretische Unterricht kann diese wichtigen Kenntnisse nur oberflächlich vermitteln. Von Seite des Hochschulunterrichtes — ja sogar auch von Seite der technischen Hochschulen — hören wir die Klage, daß die Hörer diese wichtigen Hilfsmittel erst im Laufe höherer Studien kennen lernen müssen, was oft dazu führt, daß sie ins Leben nur eine spärliche praktische Grundlage mitnehmen können. Schüler, die im Laufe ihrer weiteren Studien gar nicht Gelegenheit haben, sich diese modernen Methoden anzueignen, werden diese ihr ganzes Leben lang entbehren, wenn die höhere Schule ihnen die nötige Einführung nicht geboten hat.

5. Die genaue Konstruktion von Graphika wäre eine wichtige Aufgabe des mathematischen Laboratoriums. Die graphische Arbeit kann schon in den unteren Klassen beginnen und in methodischer Folge den ganzen mathematischen und physikalischen Unterricht begleiten. Die größeren Wandtafeln, die quantitative Beziehungen veranschaulichen (geographische, statistische, wirtschaftliche, meteorologische Tafeln), weiterhin die Wandtabellen für den physikalischen und chemischen Unterricht könnten durch die Schüler selbst im Laboratorium verfertigt werden; die Schule käme hierdurch in den Besitz einer Sammlung, die schon deshalb einen großen Wert besitzt, weil sie der selbständigen Arbeit der Schüler entstammt. Die zur graphischen Arbeit notwendigen Berechnungen müssen teils im Laboratorium, teils in den Klassen ausgeführt werden.

6. Wichtig ist die Verfertigung geometrischer Modelle. Schon auf der unteren Stufe könnte man mit dem Modellieren in Ton und Holz beginnen. In Verbindung mit dem mathematischen Laboratorium der Gymnasien sollte auch ein Zeichensaal vorhanden sein, um die Konstruktionen des höheren geometrischen Unterrichtes genau und zeichnerisch perfekt durchzuarbeiten.

7. Bei der Zusammenstellung der Lehrerbibliotheken muß auf die Literatur der angewandten Mathematik größeres Gewicht gelegt werden. Die systematische Sammlung

[8]) In der englischen und amerikanischen Lehrbuchliteratur finden wir eine Reihe von Werken, die nähere Angaben über diesen Gegenstand enthalten. Wir verweisen besonders auf die Lehrbücher über Practical Mathematics von Perry, Castle, Stern and Topham, dann auf die Werke von Saxelby, Cracknell, Murray, Consterdimes and Barnes, Duncan, Macfarlane.

offizieller tabellarischer Ausweise, die Anschaffung größerer Tabellenwerke und Handbücher über alle Fragen der angewandten Mathematik und Physik, weiterhin die Anschaffung der wichtigsten ausländischen Lehrbücher würde für die Leitung und für die Arbeiten des mathematischen Laboratoriums von besonderem Werte sein.

Rationale Lösungen der Gleichung $x^n = y^n + z^n$.

Von F. Pietzker.

Die Gleichung $x^2 = y^2 + z^2$ läßt sich bekanntlich durch rationale Zahlenwerte, die sogenannten pythagoreischen Zahlen, befriedigen. Alle Versuche, für die verallgemeinerte Form $x^n = y^n + z^n$ rationale Lösungen aufzustellen, sind seinerzeit von Fermat durch einen berühmten Satz als aussichtslos bezeichnet worden. Fermat hat diesen Satz, nach dem also die genannte Gleichung nur für den Fall $n = 2$ rationale, bezw. ganzzahlige Lösungen besitzen soll, ohne Beweis hingestellt; innerhalb gewisser Zahlengebiete ist seitdem die Richtigkeit seines Ausspruches streng nachgewiesen worden, ein allgemeiner Beweis des Satzes steht noch aus.

Im Nachstehenden wird für die Fermatsche Behauptung eine Beweisführung gegeben, die sich nicht auf zahlentheoretische, sondern auf algebraische und analytische Erwägungen stützt, wodurch von vornherein die Allgemeinheit ihrer Schlußfolgerungen gesichert wird.

I.

Die Aufgabe, die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ durch rationale Werte zu lösen, fordert die Herstellung rationaler algebraischer Ausdrücke, durch welche die Größen x, y, z als Funktionen einer Reihe von beliebig veränderlichen Grundgrößen dargestellt werden. Daß diese Grundgrößen beliebig veränderlich sein müssen, ergibt sich aus der unendlichen Zahl der möglichen Lösungen. Hat nämlich die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ für einen bestimmten Wert von n die drei Lösungswerte $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, so sind offenbar auch die Werte ξf, ηf, ζf Lösungen der Gleichung, unter f einen ganz beliebigen rationalen Faktor verstanden.

Für den Fall $n = 1$ ermangelt die Aufgabe der erforderlichen Bestimmtheit, in diesem Falle kann man offenbar für je zwei der Größen x, y, z ganz willkürliche rationale Ausdrücke setzen, um sofort für die dritte Größe ebenfalls einen rationalen Ausdruck zu erhalten. Diese Möglichkeit hört auf, sobald der Exponent n den Wert Eins übersteigt, also für alle Exponentenwerte von $n = 2$ aufwärts. Dann ist die Gestalt der rationalen Ausdrücke, die für x, y, z in die Gleichung einzusetzen wären, offenbar an gewisse Bedingungen gebunden, und die Ermittlung dieser Bedingungen bildet den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung, die dann bei der ihr notwendig zu gebenden Allgemeinheit auch den Fall $n = 1$ in sich einbegreifen würde.

Dabei ist jedenfalls daran festzuhalten, daß die in Rede stehende Gleichung durch die Einsetzung der für x, y, z zu gewinnenden Funktionsausdrücke identisch erfüllt sein muß, daraus folgt, daß es für die anzustellende Untersuchung nicht auf die Rationalität der Werte dieser Grundgrößen, sondern ganz allein auf die rationale Beschaffenheit der Funktionsausdrücke ankommt, durch welche die Größen x, y, z von jenen Grundgrößen abhängig gemacht werden. Erst für den praktischen Endzweck, die zahlenmäßige Auswertung der Größen x, y, z würde es nötig sein, den vorerwähnten Grundgrößen rationale Zahlenwerte beizulegen.

Die Zahl dieser Grundgrößen steht vorläufig noch ganz dahin. Wie groß sie auch sein mag, so besteht jedenfalls kein Hindernis, die Größen x, y, z zunächst als Funktionen einer dieser Grundgrößen anzusehen. Nennt man diese Grundgröße v, so hätte man die Gleichungen

(1) $\qquad x = \Phi_1(v) \qquad y = \Phi_2(v) \qquad z = \Phi_3(v),$

indem die Buchstaben $\Phi_1\ \Phi_2\ \Phi_3$ rationale algebraische Funktionen bezeichnen; die in diesen Funktionen auftretenden Koeffizienten der einzelnen Potenzen von v würden dann von den außer v etwa noch vorhandenen Grundgrößen abhängen. Natürlich müßte auch diese Abhängigkeit von rationaler Art sein, für die Abhängigkeit der Größen x, y, z von v aber käme die Abhängigkeit gegen die sonst noch mitspielenden Grundgrößen nicht in Frage; unter rationaler Abhängigkeit von v wird demgemäß im folgenden immer auch nur eine solche verstanden werden, bei der ganze positive, durch die algebraischen Grundoperationen miteinander verknüpfte Potenzen von v auftreten, ohne Rücksicht auf die Art der mit diesen Potenzen verbundenen Koeffizienten.

II.

Um auf der vorstehend skizzierten Grundlage der Frage nach den Bedingungen näherzutreten, unter denen die ganze Gleichung überhaupt lösbar ist, bedarf man einer Form, die die Aufstellung von Beziehungen ermöglicht, d. h. einer Formulierung der Aufgabe, bei der ein inhaltlich gleicher Sachverhalt in verschiedener Gestalt zum Ausdruck kommt. Die inhaltliche Gleichheit bei Verschiedenheit der äußeren Form ist dann die Quelle der eine weitere Erkenntnis erschließenden Beziehungen.

In ihrer ursprünglichen Form ist die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ nicht geeignet, dieser Forderung zu genügen, und zwar ist dies eine Folge ihrer symmetrischen Bildung. Aber es läßt sich ihr leicht eine andere, dieser Forderung besser entsprechende Gestalt geben, wenn man sie schreibt

(2) $\qquad x^n - y^n = z^n,$

sie erhält dadurch eine Gestalt, bei der die Größen x und y in zwar ähnlicher, aber doch nicht völlig gleicher Weise auftreten. Multipliziert man diese Gleichung mit (-1) und versteht unter α die n^{te} Wurzel aus (-1), so daß also $\alpha^n = -1$ ist, so erhält man die neue, der Gleichung (2) inhaltgleiche Gleichung

(3) $\qquad y^n - x^n = -z^n = (\alpha z)^n = \zeta^n,$

indem zugleich $\alpha z = \zeta$ gesetzt worden ist.

Die Gleichung (3) weist dieselbe Form auf, wie die Gleichung (2), von der sie im einzelnen sich dadurch unterscheidet, daß y an die Stelle von x, x an die Stelle von y, $\alpha z = \zeta$ an die Stelle von z getreten ist. Demgemäß müssen die Lösungen der Gleichung (3) auch dieselbe Form haben, wie die Lösungen der Gleichung (2), d. i. wie die Werte (1), es müssen die Gleichungen gelten

(4) $\qquad y = \Phi_1(w) \qquad x = \Phi_2(w) \qquad \alpha z = \zeta = \Phi_3(w),$

wenn unter w ein neuer Wert der in den Formeln (1) durch den Wert v repräsentierten Grundgröße verstanden wird.

Dieser Wert w hängt dabei natürlich von dem Werte von v ab, er ist eine Funktion des letzteren

(5) $$w = \vartheta(v);$$

durch die Einsetzung dieses Funktionsausdruckes nehmen die Gleichungen (4) die Gestalt an:

(6) $$y = \Phi_1(\vartheta(v)) \quad x = \Phi_2(\vartheta(v)) \quad az = \zeta = \Phi_3(\vartheta(v)).$$

Da aber andererseits die Gleichung (3) nur eine andere Form der Schreibweise für die Gleichung (2) darstellt, so müssen die in den Lösungen beider Gleichungen, d. i. den Formeln (1) und (6) auftretenden Größen x, y, z die gleiche Bedeutung haben. Man darf also die in diesen Formeln auftretenden zwei Ausdrücke für x und ebenso die für y und die für z unter sich gleichsetzen, das gibt die Formeln

(7) $$y = \Phi_1(\vartheta(v)) = \Phi_2(v) \quad x = \Phi_2(\vartheta(v)) = \Phi_1(v)$$
$$\zeta = az = \Phi_3(\vartheta(v)) = a\,\Phi_3(v),$$

die einige Schlüsse über die Natur der Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 und ϑ ermöglichen.

Zunächst ergibt die wiederholte Anwendung der dritten Gleichung (7), wenn

$$\vartheta(\vartheta(v)) = \vartheta_2(v); \; \vartheta(\vartheta(\vartheta(v))) = \vartheta_3(v); \cdots$$

(8) $$\overset{\nu}{\vartheta}(\overset{\nu-1}{\widetilde{\vartheta}(\cdots\vartheta(v)})) = \vartheta_\nu(v)$$

gesetzt wird, wobei insbesondere

(9) $$\vartheta_0(v) = v$$

ist, die Gleichung

(10) $$\Phi_3(\vartheta_\nu(v)) = a^\nu\,\Phi_3(v).$$

Nun ist für jeden Wert von ν, der ein Vielfaches von $2n$ ist, $a^\nu = 1$, daraus folgt, daß der Ausdruck $\Phi_3(V)$ für die Werte

(11) $$V_0 = \vartheta_0(v) = v; \; V_1 = \vartheta_{2n}(v); \cdots$$
$$V_k = \vartheta_{2kn}(v)\cdots, \; k = 0, 1 \cdots \infty$$

den Wert $\Phi_3(v)$ annimmt. Dabei ist durchweg

(12) $$V_p = \vartheta_{2n}(V_{p-1}).$$

Die Zahl der Werte (11) ist unendlich groß, die Zahl der Werte von V, für die der rationale algebraische Ausdruck $\Phi_3(V)$ den gleichen Wert $\Phi_3(v)$ annimmt, aber notwendig endlich, infolgedessen ist es unmöglich, daß die Werte (11) sämtlich voneinander verschieden sind, vielmehr müssen diese Werte sich von irgend einer Stelle an wiederholen und zwar vermöge der für das Verhältnis zweier Nachbarwerte maßgebenden Gleichung (12) in immer derselben Folge, es muß einen bestimmten ganzzahligen Wert m geben, für den die Beziehung besteht

(13) $$V_{m+p} = V_p; \text{ also } \vartheta_{2mn}(V_p) = V_p,$$

oder, wenn man die mit v veränderliche Größe $V_p = W$ setzt

(14) $$\vartheta_{2mn}(W) = W,$$

d. h. durch $2mn$-malige sukzessive Ausführung der Operation ϑ an der beliebigen Größe W wird diese Größe selbst wieder gewonnen, was nur möglich ist, wenn

(15) $\vartheta(W) = \beta \cdot W$ für $\beta^{2mn} = 1 = a^{2n}$, also $\beta^m = a$

ist. Die dritte Gleichung (7) nimmt dann die Form an

(16) $$\Phi_3(\beta v) = a\,\Phi_3(v),$$

die nur durch die Annahme

(17) $$\Phi_3(v) = c\,v^m$$

zu befriedigen ist. Setzt man noch $v\sqrt[m]{c} = u$, so hat man

(18) $$z = \Phi_3(v) = u^m$$

als einzig mögliche Form der Abhängigkeit, in der z von der Grundgröße u stehen kann.

Zugleich hängt $v = \dfrac{u}{\sqrt[m]{c}}$ von u auf rationale Art ab, es müssen demzufolge die von v rational abhängenden Größen $x = \Phi_1(v)$, $y = \Phi_2(v)$ auch zugleich rationale Funktionen von u sein.

Stellt man diese rationalen Funktionen als Quotienten ganzer Funktionen dar, so ergeben sich schließlich als notwendige Formen der Abhängigkeit der Größen x, y, z von einer willkürlichen Grundgröße u die Formeln

(19) $$x = \frac{A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots A_\lambda u^\lambda}{B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots B_\mu u^\mu}$$
$$y = \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \cdots C_\lambda u^\lambda}{D_0 + D_1 u + D_2 u^2 + \cdots D_\mu u^\mu}$$
$$z = u^m.$$

Dabei durfte, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu schädigen, den Zählern wie den Nennern der beiden für x und y aufgestellten Bruchausdrücke der gleiche Grad (λ bezw. μ) zugeschrieben werden.

III.

Nachdem durch die Formeln (19) nunmehr die allgemeine Form der die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in rationaler Weise befriedigenden Funktionsausdrücke festgelegt worden ist, würde weiter die Frage zu untersuchen sein, ob sich für die in diesen Ausdrücken auftretenden Koeffizienten eine Bestimmung ermöglichen läßt.

Die Basis dieser Untersuchung wird durch erneute Anwendung des Gedankens gewonnen, der für die in Abschnitt II angestellte Erörterung maßgebend gewesen war.

Sind die unter (19) angegebenen Ausdrücke für x, y, z die Lösungen der Gleichung

(20) $$x^n - y^n = z^n = u^{mn},$$

so müssen die Lösungen der Gleichung

(21) $$y^n - x^n = -u^{mn} = (\varepsilon u)^{mn}, \qquad \varepsilon = \sqrt[mn]{-1}$$

dieselbe Form aufweisen, wie die Ausdrücke (19). Nun unterscheidet sich Gleichung (21) von (20) nur dadurch, daß x und y ihre Rollen vertauscht haben und εu an die Stelle von u getreten ist. Demnach muß y ebenso von εu abhängen, wie x von u abhing, und x dieselbe Funktion von εu sein, wie y von u; so erhält man die Gleichungen

(22) $$y = \frac{A_0 + A_1 \varepsilon u + A_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}{B_0 + B_1 \varepsilon u + B_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}$$
$$x = \frac{C_0 + C_1 \varepsilon u + C_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}{D_0 + D_1 \varepsilon u + D_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}$$

Andererseits liegt auch hier die Sache so, daß die Gleichung (21) nur eine andere Form der Schreibweise für die Gleichung (20) darstellt, daß folglich die zu demselben Werte von u gehörenden Werte von x in den Formeln (19) und (22) unter sich übereinstimmen müssen, ebenso wie die Werte von y in diesen Formeln. Es müssen also die Gleichungen gelten

(23 a)
$$\frac{A_0 + A_1 \varepsilon u + A_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}{B_0 + B_1 \varepsilon u + B_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots} = \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \cdots}{D_0 + D_1 u + D_2 u^2 + \cdots}$$
$$\frac{C_0 + C_1 \varepsilon u + C_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots}{D_0 + D_1 \varepsilon u + D_2 \varepsilon^2 u^2 + \cdots} = \frac{A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots}{B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots}$$

oder (23 b)

$$\left(A_0 + A_1 \varepsilon u + \cdots A_\lambda \varepsilon^\lambda u^\lambda\right)\left(D_0 + D_1 u + \cdots D_\mu u^\mu\right)$$
$$= \left(B_0 + B_1 \varepsilon u + \cdots B_\mu \varepsilon^\mu u^\mu\right)\left(C_0 + C_1 u + \cdots C_\lambda u^\lambda\right)$$

$$\left(C_0 + C_1 \varepsilon u + \cdots C_\lambda \varepsilon^\lambda u^\lambda\right)\left(B_0 + B_1 u + \cdots + B_\mu u^\mu\right) = \left(D_0 + D_1 \varepsilon u + \cdots + D_\mu \varepsilon^\mu u^\mu\right)\left(A_0 + A_1 u \cdots + A_\lambda u^\lambda\right)$$

und zwar für jeden Wert von u.

Da λ und μ endliche Werte haben, können nach einem bekannten algebraischen Prinzip die Gleichungen (23b) nur bestehen, wenn beide Seiten einer jeden Gleichung identisch gleich sind, also die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u auf beiden Seiten jeder Gleichung dieselben Werte besitzen.

Das gibt für jede der beiden Gleichungen (23b) $(\lambda + \mu + 1)$ lineare Koeffizientengleichungen, welche vermöge ihrer Form es gestatten, die Verhältnisse der $(\lambda + \mu + 2)$ Größen A_0, $A_1 \varepsilon, \cdots A_\lambda \varepsilon^\lambda$, B_0, $B_1 \varepsilon \cdots$, $B_\mu \varepsilon^\mu$, die auf der linken Seite der ersten Gleichung (23a) auftraten, mittels der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Größen $C_0 \cdots C_\lambda$, $D_0 \cdots D_\mu$ auszudrücken und ebenso die Verhältnisse der in der zweiten Gleichung (23a) vorkommenden Größen C_0, $C_1 \varepsilon \cdots C_\lambda \varepsilon^\lambda$, $D_0 \cdots D_\mu \varepsilon^\mu$ mittels der Größen A_0, $A_1 \cdots A_\lambda$, $B_0 \cdots B_\mu$.

Da diese Bestimmung eindeutig ist, während die Gleichungen (23a) offenbar dadurch befriedigt werden, daß man die Koeffizienten der linken Seite jeder dieser Gleichungen den entsprechenden Koeffizienten der rechten Seite proportional setzt, so gibt diese Proportionalität gerade die zwischen den genannten Größen bestehende Beziehung. Es muß also, wenn man $\frac{A_0}{C_0} = f$, $\frac{C_0}{A_0} = \frac{1}{f}$ setzt, sein

$$\text{(24a)} \quad \begin{aligned} A_0 &= C_0 f \cdots A_k \varepsilon^k = C_k f \cdots A_\lambda \varepsilon^\lambda = C_\lambda f \\ B_0 &= D_0 f \cdots B_k \varepsilon^k = D_k \cdot f \cdots B_\mu \varepsilon^\mu = D_\mu \cdot f \end{aligned}$$

$$\text{(24b)} \quad \begin{aligned} C_0 &= A_0 \cdot \frac{1}{f} \cdots C_k \varepsilon^k = A_k \frac{1}{f} \cdots C_\lambda \varepsilon^\lambda = A_\lambda \frac{1}{f} \\ D_0 &= B_0 \frac{1}{f} \cdots D_k \varepsilon^k = B_k \cdot \frac{1}{f} \cdots D_\mu \varepsilon^\mu = B_\mu \cdot \frac{1}{f} \end{aligned}$$

indem die erste dieser Gleichungsgruppen aus der ersten, die zweite aus der zweiten der Gleichungen (23a) resultiert.

Multipliziert man nun jede Gleichung des Systems (24a) mit der ihr entsprechenden des Systems (24b), so erhält man die Beziehungen

$$\text{(25)} \quad \begin{matrix} A_k C_k \varepsilon^{2k} = C_k A_k & B_k D_k \varepsilon^{2k} = D_k B_k \\ k = 0, 1 \cdots \lambda & k = 0, 1 \cdots \mu. \end{matrix}$$

Da $\varepsilon^{mn} = -1$, also $\varepsilon^{2mn} = 1$ ist, so sind diese Formeln für jeden Wert von k, der ein Vielfaches von mn ist, identisch erfüllt, für alle anderen Werte von k können sie nur unter der Voraussetzung bestehen, daß $A_k C_k = 0$ und $B_k D_k = 0$ ist; die Gleichungen (24a) und (24b) zeigen, daß dann auch die Größen A_k, C_k, B_k, D_k für sich verschwinden müssen.

Es fallen folglich in den Funktionsausdrücken (19) alle Glieder bis auf die fort, für die k ein Vielfaches von mn ist, für die verbleibenden Glieder bestehen die Beziehungen

$$\text{(26)} \quad C_{rmn} = (-1)^r \cdot A_{rmn} \cdot \frac{1}{f}; \quad D_{rmn} = (-1)^r \cdot B_{rmn} \cdot \frac{1}{f}$$

und die Gleichungen (9) nehmen nunmehr die Gestalt an

$$\text{(27)} \quad \begin{aligned} x &= \frac{A_0 + A_{mn} u^{mn} + \cdots A_{rmn} u^{rmn} \cdots + A_{pmn} u^{pmn}}{B_0 + B_{mn} u^{mn} + \cdots B_{rmn} u^{rmn} \cdots + B_{qmn} u^{qmn}}, \\ y &= \frac{A_0 \cdots + (-1)^r A_{rmn} u^{rmn} \cdots + (-1)^p A_{pmn} u^{pmn}}{B_0 \cdots + (-1)^r B_{rmn} u^{rmn} \cdots + (-1)^q B_{qmn} u^{qmn}}, \\ z &= u^m, \end{aligned}$$

oder, wenn man $u^{mn} = t$, $A_{rmn} = G_r$, $B_{rmn} = H_r$ setzt und — ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der ganzen Herleitung — dem Koeffizienten H_q des höchsten Gliedes im Nenner den Zahlenwert Eins beilegt,

$$\text{(28)} \quad \begin{aligned} x &= \frac{G_0 + G_1 t + \cdots G_k t^k \cdots + G_p t^p}{H_0 + H_1 t + \cdots + H_k t^k \cdots + H_{q-1} t^{q-1} + t^q}, \\ y &= \frac{G_0 \cdots + (-1)^k G_k t^k \cdots + (-1)^p G_p t^p}{H_0 \cdots + (-1)^k H_k t^k \cdots + (-1)^q t^q}, \\ z &= \sqrt[n]{t}. \end{aligned}$$

Da $t = z^n$ ist, so sind die von t rational abhängenden Größen x und y rationale Funktionen der Größe z, die also die eigentliche Grundgröße ist, von der alle anderen hier auftretenden Größen rational abhängen. Die weiteren Betrachtungen knüpfen sich gleichwohl zweckmäßigerweise an die Größe $t = z^n$, zu der x und y zunächst in Beziehung stehen.

Die Gleichung (20) erscheint nunmehr in der Form

$$\text{(29)} \quad \cdots \left(\frac{G_0 + G_1 t + \cdots + G_p t^p}{H_0 + H_1 t \cdots + t^q}\right)^n - \left(\frac{G_0 - G_1 t \cdots + (-1)^p G_p t^p}{H_0 - H_1 t \cdots + (-1)^q t^q}\right)^n = t$$

oder

$$\text{(30)} \quad \begin{aligned} &(G_0 + G_1 t \cdots + G_p t^p)^n \cdot (H_0 - H_1 t \cdots + (-1)^q t^q)^n \\ &- (G_0 - G_1 t \cdots + (-1)^p G_p t^p)^n (H_0 + \cdots t^q)^n \\ &= (H_0 + H_1 t \cdots + t^q)(H_0 \cdots + (-1)^q t^q) \cdot t. \end{aligned}$$

Auf diese, für jeden Wert von t geltende Gleichung ist nunmehr das bereits vorher auf die Gleichung (23) angewendete Prinzip anzuwenden, nach dem beide Seiten der Gleichung identisch gleich sein, also die gleich hohen Potenzen der Größe t gleiche Koeffizienten aufweisen müssen.

Hieraus lassen sich dann nach doppelter Richtung bedeutsame Schlußfolgerungen ziehen.

IV.

Die eine dieser Folgerungen betrifft den Wert des höchsten in der Gleichung (30) überhaupt auftretenden Exponenten. Die höchste auf der rechten Seite dieser Gleichung vorhandene Potenz von t ist t^{2nq+1}, der Koeffizient dieser Potenz hat den von Null verschiedenen Wert $(-1)^{nq}$, infolgedessen kann das Glied nur dann verschwinden, wenn $t = 0$ ist. Solange t von Null verschieden ist, muß also auch auf der linken Seite der Gleichung die Potenz t^{2nq+1} vertreten sein. Nun ist die höchste links erscheinende Potenz von t die Potenz $t^{n(p+q)}$; solange t von Null verschieden ist, darf also $n(p+q)$ nicht kleiner als $2nq + 1$ sein, was zur Folge hat, daß unter dieser Voraussetzung $p > q$ sein muß. Wohl aber ist es möglich, daß $n(p+q) > 2nq + 1$ ist, weil die Koeffizienten aller auf der linken Seite der Gleichung auftretenden Potenzen von t in der Form von wenigstens zweigliedrigen Aggregaten erscheinen, die es erlauben, daß diese Koeffizienten eventuell den Wert Null annehmen.

Eine zweite wichtige Folgerung entspringt aus der Vergleichung der Zahl der zu bestimmenden Größen mit der Zahl der hierfür verfügbaren Gleichungen.

Setzt man

$G_0 + \cdots G_p t^p = K + Lt$, $G_0 - G_1 t \cdots + (-1)^p G_p t^p = K - Lt$, indem die Buchstaben K und L gerade Funktionen von t bezeichnen, entsprechend ferner $H_0 \cdots + t^q = M + Nt$, $H_0 - H_1 t \cdots + (-1)^q t^q = M - Nt$, auch hier unter M und N gerade Funktionen von t verstanden, so nimmt die Gleichung (30) die Form an

$$(K + Lt)^n (M - Nt)^n - (K - Lt)^n (M + Nt)^n = (M + Nt)^n \cdot (M - Nt)^n \cdot t$$

wofür man auch

$$(U + Vt)^n - (U - Vt)^n = (M^2 - N^2 t^2) \cdot t$$

schreiben kann, wenn unter $U = KM - LNt^2$ und $V = LM - KN$ wieder gerade Funktionen von t verstanden werden.

Die Ausführung der Potenzierung links führt zu dem Ergebnis

$$2\binom{n}{1} U^{n-1} Vt + 2\binom{n}{3} U^{n-3} V^3 t^3 + \cdots = (M^2 - N^2 t^2) \cdot t, \tag{31}$$

d. h. zu einer Gleichung, auf deren beiden Seiten nur ungerade Potenzen von t stehen. Die Koeffizienten der geraden Potenzen von t auf beiden Seiten der Gleichung sind identisch verschwunden.

Demnach bleiben für die Koeffizientenvergleichung nur die Glieder ungeraden Grades übrig.

Der höchste links auftretende Exponent, d. i., wie schon bemerkt, der höchste überhaupt in der Gleichung auftretende Exponent, hatte den Wert $n(p+q)$. Ist diese Zahl gerade, so verteilen sich die im ganzen vorhandenen $n(p+q)+1$ Glieder derart, daß $\left(\frac{n(p+q)}{2} + 1\right)$ Glieder mit geraden Potenzen von t behaftet sind, $\frac{n(p+q)}{2}$ mit ungeraden. Nur für die letzteren Glieder lassen sich Koeffizientengleichungen aufstellen, deren Zahl mithin in diesem Falle $\frac{n(p+q)}{2}$ beträgt. Ist $n(p+q)$ ungerade, so sind die Glieder ungeraden und die geraden Grades in gleicher Anzahl vorhanden, nämlich in der Zahl $\frac{n(p+q)+1}{2}$, in diesem Falle gibt es also $\frac{n(p+q)+1}{2}$ Koeffizientengleichungen.

Die zu bestimmenden Größen sind die $(p+1)$ Koeffizienten $G_0 G_1 \cdots G_p$ und die q Koeffizienten $H_0 H_1 \cdots H_{q-1}$, die Zahl dieser Größen stellt sich mithin stets auf $(p+q+1)$.

Eine widerspruchslose Bestimmung dieser Größen ist nur möglich, wenn ihre Zahl nicht kleiner, als die der zu ihrer Bestimmung dienenden Gleichungen ist. Bleibt die Zahl der Gleichungen hinter der der zu bestimmenden Größen zurück, so müssen die Lösungen der Gleichungen mit unbestimmten, willkürlich veränderlichen Elementen behaftet sein, deren Zahl sich nach dem Maße richtet, in dem die Zahl der zu bestimmenden Größen die Zahl der vorhandenen Gleichungen übertrifft. Im vorliegenden Falle bedeutet das, daß dann zu der einen Grundgröße, von der die drei Größen x, y, z bereits abhängig gemacht worden sind, noch weitere Grundgrößen hinzutreten würden.

Sind gerade soviel Gleichungen vorhanden, als es Größen zu bestimmen gibt, so erfährt die Zahl der Grundgrößen durch die Lösung der in Rede stehenden Gleichungen keinerlei Vermehrung, sie würde also den Wert behalten, den sie von vornherein gehabt hat, d. i. der Wert Eins.

Unter allen Umständen muß eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein

Für ungerade Werte von $n(p+q)$:

$$\frac{n(p+q)+1}{2} \leq (p+q)+1 \tag{32}$$

Für gerade Werte von $n(p+q)$:

$$\frac{n(p+q)}{2} \leq (p+q)+1. \tag{33}$$

Nach diesen Vorbemerkungen sollen die hier möglichen Fälle einzeln untersucht werden.

V.

A. Zunächst werde angenommen, daß $n(p+q)$ ungerade ist. Dann muß von den beiden Größen np und nq eine gerade, die andere ungerade sein.

In Gleichung (30) links hat dann $t^{n(p+q)}$ den nicht verschwindenden Koeffizienten $[(-1)^{nq} - (-1)^{np}]\, G_p{}^n$, der Exponent $n(p+q)$ ist der links auftretende höchste Exponent, der dem rechts auftretenden höchsten Exponenten $(2nq+1)$ notwendig gleich sein muß, d. h. es muß sein

$$n(p+q) = 2nq + 1, \tag{34}$$

also

$$n(p-q) = 1,$$

eine Gleichung, die nur dadurch zu befriedigen ist, daß $n = 1$, $p - q = 1$ ist.

Für die Vergleichung der Zahl der zu bestimmenden Größen mit der Zahl der vorhandenen Bestimmungsgleichungen tritt hier die Beziehung (32) in Kraft, die, da bereits für n der Wert Eins ermittelt ist, nunmehr die Gestalt annimmt

$$\frac{(p+q)+1}{2} \leq (p+q)+1. \tag{35}$$

Diese Bedingung ist offenbar unter allen Umständen erfüllt, da die Größe auf der linken Seite die Hälfte des Wertes der rechts stehenden Größe besitzt. Ueber die Größe von $(p+q)$ ist dabei gar nichts gesagt, der Wert dieser Größe ist vielleicht an die Bedingung gebunden, ungerade zu sein, im übrigen aber völlig willkürlich; je größer er ist, um so größer wird auch die ebenfalls den Wert $\frac{(p+q)+1}{2}$ besitzende Zahl, um welche die Zahl der zu bestimmenden Größen die Zahl der Bestimmungsgleichungen übertrifft und damit die Zahl der in den Lösungen auftretenden willkürlichen Elemente.

B. Zweitens sei $n(p+q)$ gerade, dann hat die Potenz $t^{n(p+q)}$ auf der linken Seite der Gleichung einen identisch verschwindenden Koeffizienten, die Koeffizienten der niedrigeren Potenzen von t setzen sich aus den Größen G und H derart zusammen, daß über ihre etwaige Annullierung von vornherein keinerlei Aussagen zu machen sind, demgemäß führt die Vergleichung der auf beiden Seiten der Gleichung (30) auftretenden höchsten Exponenten hier zu keinem Ergebnis.

Wohl aber gewinnt man ein solches durch die Vergleichung der Zahl der Bestimmungsgleichungen mit der der zu bestimmenden Größen, diese ergibt hier die Beziehung

$$\frac{n(p+q)}{2} \leq p+q+1, \tag{36}$$

oder

$$n(p+q) \leq 2(p+q)+2,$$

also

$$(n-2)(p+q) \leq 2. \tag{37}$$

Diese Bedingung würde für jeden Wert von n erfüllt sein, sobald $(p+q) = 0$ ist, was zur Folge haben würde, daß die Größen p und q einzeln verschwinden. Dabei würden p und q gleichen Wert (Null) aufweisen, was — wie bereits früher bemerkt — zur Voraussetzung haben würde, daß $t = 0$ ist. Diese Folgerung ergäbe sich hier aber auch ohnehin, denn wenn $p = 0$, $q = 0$ ist, so ist $G_p = G_0$, $H_q = H_0 = 1$ und die beiden Ausdrücke für x und y nehmen denselben Wert G_0 an, für $t = z^n = x^n - y^n$ findet sich dann der Wert Null, es tritt die selbstverständliche Sachlage ein, daß die Gleichung $x^n = y^n$ durch jeden beliebigen für x und y gleichzeitig geltenden Größenwert befriedigt wird.

Sieht man von der Möglichkeit $p+q=0$ ab, so ist die Beziehung (36) durch ganzzahlige Werte für n, p und q nur unter der Bedingung zu befriedigen, daß n nicht über den Wert 4 hinausgeht. Es können dann für n nur die vier Werte 1, 2, 3, 4 in Frage kommen, die nun einzeln auf ihre Zulässigkeit zu prüfen sind.

C. Zunächst werde die Möglichkeit $n=1$ in Betracht gezogen, bei der, damit $n(p+q)$ gerade sei, vorauszusetzen sein würde, daß $(p+q)$ gerade ist. Die Annahme $n=1$ ist also nicht an die Bedingung gebunden, daß $(p+q)$ ungerade ist, vielmehr bei jedem Werte von $(p+q)$ möglich. Dadurch entfällt der unter A. noch gemachte Vorbehalt, nach dem $(p+q)$ einen ungeraden Wert haben müßte, alle anderen unter A. für die Annahme $n=1$ aufgestellten Schlußfolgerungen bleiben bestehen, die hier in Kraft tretende Beziehung (33) nimmt die Form an

$$\frac{(p+q)}{2} < (p+q)+1 \tag{38}$$

und ist offenbar für alle Werte von $(p+q)$ immer von selbst erfüllt, während der sich hier auf $\frac{p+q}{2}+1$ beziffernde Ueberschuß der Zahl der zu bestimmenden Größen über die vorhandenen Bestimmungsgleichungen ebenfalls mit wachsendem Wert von $(p+q)$ zunimmt. Im Fall $n=1$ verliert mithin die Aufgabe jede Art von Bestimmtheit, im Einklang mit den eingangs der Abhandlung über diesen Fall gemachten Bemerkungen.

D. Ist zweitens $n=4$, also $n-2=2$, so bringt die Beziehung (37) es mit sich, daß dann zugleich $(p+q)=1$, und da stets $p>q$ ist, $p=1$, $q=0$ sein muß.

Die Zahl der Bestimmungsgleichungen stellt sich dann auf

$$\frac{n(p+q)}{2} = \frac{4(p+q)}{2} = 2(p+q) = 2(1+0) = 2,$$

die Zahl der zu bestimmenden Größen auf $p+q+1 = 1+0+1 = 2$, beide Zahlen sind gleich, so daß durch die Lösung der Gleichung die Zahl der auf die Werte von x und y Einfluß habenden Grundgrößen keine Vermehrung erfahren würde.

Man hätte nunmehr zu setzen

$$x = \frac{G_0 + G_1 t}{H_0} = \frac{G_0 + G_1 t}{1}, \quad y = \frac{G_0 - G_1 t}{1}, \quad z = \sqrt[4]{t}$$

indem hier, wo als höchster Wert von q die Zahl Null erscheint, $H_0 = H_q = 1$ zu setzen wäre.

Es handelte sich nunmehr um die Lösung der Gleichung $$x^4 - y^4 = z^4,$$
also

$$(G_0 + G_1 t)^4 - (G_0 - G_1 t)^4 = t \tag{39}$$

oder

$$8\, G_0 G_1 (G_0^2 + G_1^2 t^2)\, t = t \tag{40}$$

d. h. einer Gleichung, die offenbar nur durch die Annahme $t=0$ zu befriedigen ist. Dann würden x und y den gleichen im übrigen beliebigen Wert G_0 annehmen, d. h. von e i n e r willkürlichen Größe abhängen, die an Stelle der hier fortfallenden Grundgröße $z = \sqrt[n]{t}$ treten würde, so daß die Zahl der Grundgrößen in der Tat keine Veränderung erführe. Es tritt hierbei auch für den Wert $n=4$ ganz von selbst der Zustand in Kraft, dessen Vorhandensein unter B. für jeden beliebigen Wert von n nachgewiesen ist, sobald $p+q=0$ angenommen wird.

E. Ist drittens $n=3$, so muß, damit $n(p+q)$ eine gerade Zahl sei, $(p+q)$ einen geraden Wert haben. In diesem Falle führt die Beziehung (37) zu dem Ergebnis

$$(p+q) \leqq 2 \tag{41}$$

Soll $(p+q)$ gerade und dabei von Null verschieden sein, während zugleich $p>q$ ist, so ist $p=2$, $q=0$ zu setzen. Die Zahl der Bestimmungsgleichungen stellt sich dann auf $\frac{3(p+q)}{2} = \frac{3(2+0)}{2} = 3$, die Zahl der zu bestimmenden Größen auf $p+q+1 = 2+0+1 = 3$, also sind wieder beide Zahlen gleich, die Zahl der maßgebenden Grundgrößen muß den Wert Eins behalten.

Es wäre dann

$$x = G_0 + G_1 t + G_2 t^2, \quad y = G_0 - G_1 t + G_2 t^2, \quad z = \sqrt[3]{t}$$

zu setzen und die Gleichung

$$(G_0 + G_1 t + G_2 t^2)^3 - (G_0 - G_1 t + G_2 t^2)^3 = t \tag{42}$$

zu untersuchen, die sich leicht in die Gestalt

$$2\, G_1 t\, (3\,(G_0 + G_2 t^2)^2 + G_1^2 t^2) = t \tag{43}$$

bringen läßt. Wie man sofort sieht, ist sie nur für $t=0$ zu befriedigen, es greifen dann ganz dieselben Folgerungen Platz, die für den Fall $n=4$ gezogen worden waren.

F. So bleibt als letzte Möglichkeit nur die übrig, daß $n=2$ ist.

Dann nimmt die Beziehung (36) die Gestalt

$$(p+q) < (p+q)+1 \tag{44}$$

an, in der sie für jeden Wert von $(p+q)$ erfüllt ist.

Zugleich ist hier $(p+q)$ die Zahl der Bestimmungsgleichungen, die also für jeden Wert von $p+q$ gerade um Eins hinter der Zahl der zu bestimmenden Größen zurückbleibt. Das bedeutet, daß zu der einen Grundgröße $z = \sqrt[n]{t}$, von der x, y und z bereits abhängig waren, noch eine zweite willkürlich veränderliche Grundgröße hinzutritt.

Die niedrigsten für p und q möglichen Werte sind $p=1$ und $q=0$. Dann ist $G_p = G_1$, $H_0 = H_q = 1$ zu setzen, für x und y finden sich die Werte

$$x_1 = G_0 + G_1 t \qquad y = G_0 - G_1 t \qquad z = \sqrt{t}$$

und die Gleichung $x^2 - y^2 = z^2$ nimmt die Gestalt an

$$(G_0 + G_1 t)^2 - (G_0 - G_1 t)^2 = t,$$

woraus sofort folgt

$$4\, G_0 G_1 t = t, \text{ also } G_1 = \frac{1}{4\, G_0} \tag{45}$$

und mithin

$$x = G_0 + \frac{t}{4\, G_0}, \quad y = G_0 - \frac{t}{4\, G_0}, \quad z = \sqrt{t}. \tag{46}$$

Setzt man hier $G_0 = \varrho^2$ und führt die Größe σ durch die Definitionsgleichung $\sigma^2 = \frac{t}{4\varrho^2}$, also $\sigma = \frac{z}{2\varrho}$, ein, so erhält man

$$x = \varrho^2 + \sigma^2 \qquad y = \varrho^2 - \sigma^2 \qquad z = 2\varrho \cdot \sigma; \tag{47}$$

das sind die bekannten Ausdrücke für die Bildung der pythagoreischen Zahlen.

Außer diesen Ausdrücken gibt es noch unzählige andere, die aber sämtlich von zwei willkürlich veränderlichen Grundgrößen abhängen und auf die pythagoreischen Zahlen reduzierbar sein müssen.

Das Gesamtergebnis ist demnach dieses: Sieht man von dem Falle $n=1$ und der speziellen Gleichungsform $x^n - y^n = 0$ ab, so existiert eine rationale (und insbesondere also auch eine ganzzahlige) Lösung der Gleichung $x^n = y^n + z^n$ nur für den Fall $n=2$.

Ueber Funktionalgleichungen in der Elementarmathematik.

Von Dr. A. Wendler (München).

Bei der herkömmlichen Behandlungsweise der elementaren Geometrie hat man, von der Goniometrie abgesehen, im allgemeinen nichts mit Funktionalgleichungen (in der wissenschaftlichen Bedeutung des Wortes) zu tun. Sobald man aber, wie es jetzt immer mehr Mode wird, den Funktionsbegriff überhaupt in die geometrischen Betrachtungen hineinverwebt, wird man in diesem Zusammenhang auch den Funktionalgleichungen einiges Interesse zuwenden dürfen, wenn man auch diesen im allgemeinen kein Heimatrecht im Schulunterricht erteilen kann, da die einschlägigen Betrachtungen, meist weniger anschaulich als die üblichen Methoden, nicht immer dem Verständnis der Schüler entsprechen und weil die fraglichen Funktionalgleichungen ohne Anwendung höherer den Schülern verschlossenen Hilfsmittel nicht immer vollständig behandelt werden können.

Für den Lehrer aber dürfte es nicht uninteressant sein, an einigen Beispielen zu untersuchen, was sich in jenem Grenzgebiet zwischen Elementarmathematik und Funktionentheorie mit möglichst elementaren Mitteln etwa erreichen läßt.

Unter diesem Gesichtspunkt möge der nachfolgende kleine Beitrag aufgenommen werden.

I. Die goniometrischen Grundformeln.*)

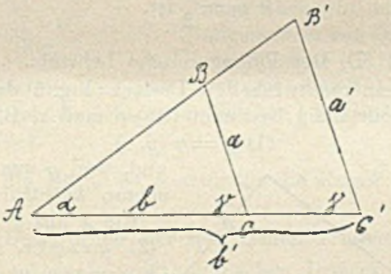


Fig. 1.

Dreiecke, welche in einem Winkel (γ) und dem Verhältnis der einschließenden Seiten ($a:b=a':b'=k$) übereinstimmen, sind ähnlich und haben alle Winkel bezüglich gleich. Es ist somit

$$a=F(k,\gamma) \text{ oder für } \gamma=90^0: a=f(k),$$

also umgekehrt

$$k=\frac{a}{b}=\chi^{(\alpha)}.$$

Eine analoge Betrachtung für die anderen Seiten liefert

$$\frac{a}{c}=\varphi^{(\alpha)},\quad \frac{b}{c}=\psi^{(\alpha)},$$

wobei aus

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c} \text{ und } a^2+b^2=c^2$$

die beiden bekannten Funktionalgleichungen

$$\chi^{(\alpha)}=\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} \text{ und } \varphi^2(\alpha)+\psi^2(\alpha)=1$$

folgen. Daß man diesen wichtigen Funktionen die besonderen Namen Sinus, Cosinus, Tangens gegeben hat, ist hier von untergeordneter Bedeutung. Das Wesentliche sind die beiden charakteristischen Funktionalgleichungen selbst, durch welche, geometrisch oder auch rein analytisch, die Eigenschaften der drei Funktionen mehr oder weniger vollständig erschlossen werden können.

*) A. Wendler, „Funktion und Invariante im mathematischen Unterricht." Blätter für das Gymnasialschulwesen, München 1906, pag. 589.

Es ist mit Rücksicht auf das Folgende bemerkenswert, daß sich die Theorie dieser drei Funktionen schon seit langem in den Schulunterricht eingebürgert hat, obwohl sie bei ihren bekannten Eigenschaften (Periodizität usw.) nicht zu den einfachsten analytischen Gebilden gehören.

II. Einige prinzipielle Betrachtungen.

„Eine veränderliche Größe heißt in einem bestimmten Gebiet eine Funktion von einer (oder mehreren) Variablen, wenn eine Vorschrift gegeben ist, wonach in jenem Gebiet zu einem beliebigen Wert (Wertsystem) der unabhängigen Größen jedesmal ein bestimmter Wert der abhängigen Größe zugeordnet ist."

Solche Zuordnungen werden z. B. bei geometrischen Konstruktionen in dem durch die Determination abgegrenzten Gebiet zwischen Strecken, Winkeln usw. ausgeführt und es kann dabei zunächst noch fraglich sein, wie sich ein jener Zeichenoperation adäquater geschlossener algebraischer Ausdruck finden läßt, durch den das betreffende Abhängigkeitsverhältnis zahlenmäßig verfolgt werden kann. Sobald man also z. B. erkannt hat, daß im allgemeinen ein Dreieck aus drei Seiten eindeutig konstruiert werden kann, kann man den Flächeninhalt des Dreiecks als Funktion der drei Seiten ansprechen, auch wenn man die heronische Formel noch nicht kennt. Es muß übrigens bei dieser Gelegenheit daran erinnert werden, daß „Ausdruck" und „Funktion" auch bei der algebraischen Zuordnung nicht das Gleiche zu bedeuten brauchen, wie man an dem Beispiel $y=1+x+x^2+\cdots x^{n-1}$ und $y=\frac{x^n-1}{x-1}$ sieht, in welchem verschiedene Ausdrücke angesetzt sind, welche aber, wie die Algebra lehrt, den gleichen Verlauf zusammengehöriger Werte, also die gleiche Funktion repräsentieren. Soll ein solcher dem Wertverlauf adäquater Ausdruck bestimmt werden, so deuten wir ihn durch $f(x)$ usw. allgemein an und suchen f aus einer Funktionalgleichung zu bestimmen. In den in der Elementarmathematik auftretenden Fällen wird oft die Annahme gerechtfertigt erscheinen, daß f eine algebraische (ganze) Funktion ist, so daß man zur Bestimmung von f mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten arbeiten kann.

Beispiele mögen dies erläutern.

III. Beispiele.

A) Der Flächeninhalt des Rechtecks.

Indem der Flächeninhalt R eines Rechtecks durch die zwei Seiten x und y bestimmt ist, kann man setzen:

$$R=f(x,y).$$

Zur Bestimmung der Natur von f kann man sofort die beiden Funktionalgleichungen

$$(1)\quad f(nx,ny)=n^2f(x,y) \text{ und}$$

$$(2)\quad f(x+z,y)=f(x,y)+f(z,y)$$

angeben, welche sich geometrisch aus der Betrachtung von gewissen aus R abgeleiteten Rechtecken ergeben.

Die Gleichung (1) verlangt einen homogenen Ausdruck 2. Grades, würde also z. B. durch

$$ax^2+bxy+cy^2 \text{ oder } \frac{px^3+qx^2y+rxy^2+sy^3}{x+y}$$

$$\text{oder } \sqrt[m]{ux^{2m}+vx^my^m+wy^{2m}}$$

usw. erfüllt. Im 1. Ausdruck müßte noch $a=0, c=0$ sein, da für $y=0$ und $x=0$ R für jedes beliebige x bezw. y selbst 0 wird. $R=bxy$ erfüllt nun auch, wie es sein muß, die Gleichung (2). Indem $R=1$ werden soll für $x=1$, $y=1$, hat man $b=1$ anzunehmen und erhält schließlich

$$R=xy.$$

Die Kontinuität im funktionalen Zusammenhang verlangt, daß diese Gleichung gilt, ob x und y zu einander in rationalem Verhältnis stehen oder nicht, nachdem sich die Richtigkeit der Gleichung für „ganzzahlige" x und y in bekannter Weise durch Zerlegung in Feldquadrate prüfen läßt.*)

B) Der Proportionallehrsatz.

Bei unverändertem α und β hat man zu setzen: $y=f(x)$, $y'=f(x')$ usw. Nun ist, wie sich aus Kongruenzbetrachtungen erweisen läßt, $f(nx)=nf(x)$, woraus man $f(x)=\lambda x$ schließt.**) (λ hängt offenbar irgendwie von α und β ab.) Somit ist $y:y'=x:x'$, wenn man auch hier wieder die Kontinuität von f voraussetzt.

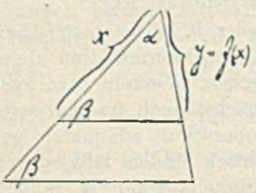


Fig. 2.

C) Abzählende Geometrie.***)

1. Die Anzahl der Diagonalen in einem n-eck von einer Ecke aus ist offenbar $f(n)$, also im $(n+1)$-eck infolgedessen $f(n+1)$. Es muß nun sein:

$$f(n+1)=1+f(n).$$

Gelingt es ganz allgemein, eine diese Gleichung befriedigende Funktion zu finden, so ist sie für ganzzahlige n natürlich von selbst erfüllt.

Es ist nun $f(x)=x+k$. Um k zu bestimmen, nehmen wir einen kanonischen Fall, z. B. $n=3$, wofür $f(n)=0$ wird. Alsdann ist $k=-3$.

Allgemein ist also $f(n)=n-3$.

2. Die Anzahl der Schnittpunkte von n beliebigen Geraden, von denen nie drei durch einen Punkt gehen, ist sicher $f(n)$, von $n+1$ solchen Geraden also $f(n+1)$ und es ist

$$f(n+1)=f(n)+n.$$

Wir bestimmen diese Funktion für eine kontinuierliche Variable x. Setzt man $f(x)=ax+b$, so wird man auf einen Widerspruch geführt. Wir setzen daher weiter $f(x)=ax^2+bx+c$ und finden:

$$x=\frac{a+b}{1-2a}=\frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

und somit

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2-x)+c.$$

Da $x=2$, $f(x)=1$ zur Folge hat, ist $c=0$.

Somit $f(n)=\frac{1}{2}(n^2-n)=\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Unter der Annahme, daß die Winkelsumme W eines Polygons nur von der Eckenzahl abhängig sei, läßt sich $\varphi(n)=W$ ganz allgemein folgendermaßen bestimmen:†)

Für $n=2m+1$ läßt sich ein m-teiliger Querschnitt mit $(m-1)$ Knicken konstruieren (Fig. 3) und es ist

$$W=W_1+W_2-(m-1)4R-2R$$

oder

$$\varphi(n)=(2m-1)2R=(n-2)2R, \text{ indem } n=2m+1 \text{ ist.}$$

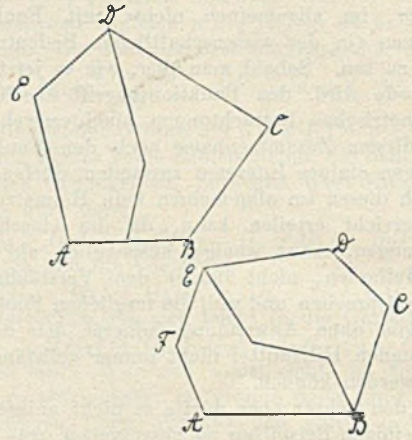


Fig. 3 und 4.

Für $n=2m$ läßt sich ebenfalls ein m-teiliger Querschnitt mit $(m-1)$ Knicken konstruieren (Fig. 4), wobei

$$W=W_1+W_2-(m-1)4R, \text{ somit}$$

$$\varphi(n)=(m-1)4R=(n-2)2R \text{ ist, da } n=2m,$$

$$m=\frac{n}{2} \text{ ist.}$$

D) Der Pythagoreische Lehrsatz.

Da ein rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 5) durch zwei Seiten vollständig bestimmt ist, so muß z. B.

(1) $x=\varphi(y,z)$

und, weil y aus x und z ebenso konstruiert wird, wie x aus y und z,

(2) $y=\varphi(x,z)$ sein.

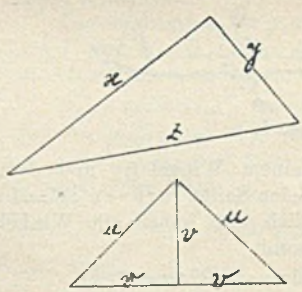


Fig. 5 und 6.

(3) $z=\sigma(x,y)$ ist somit eine symmetrische Funktion der Argumente. Da die linken Seiten dieser drei Gleichungen Strecken bedeuten, so müssen die Funktionalausdrücke von φ und σ von der 1. Dimension sein,*) also z. B.

$$\varphi(x,z)=ax+bz,\quad \sigma(x,y)=m(x+y).$$

Eine solche Beziehung ist unmöglich, da $y=0$, $z=x$, also $m=1$ zur Folge hat. $z=x+y$ widerspricht aber dem bekannten Satz, daß in einem Dreieck eine Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Setzen wir daher weiter

$$z=\sigma(x,y)=\sqrt{p(x^2+y^2)+qxy},$$

so folgt daraus wegen $y=0$, $z=0$, daß $p=1$ ist. Bedenkt man nun, daß $x=y=u$, $z=2v$ die beiden Gleichungen $u=\sqrt{2v^2+qv^2}=v\sqrt{q+2}$ und

$$2v=\sqrt{2u^2+qu^2}=u\sqrt{q+2}$$

nach sich zieht, so findet man $2v=v(q+2)$; q muß also 0 sein.

*) n ist in (1) freilich zunächst ganzzahlig. $R=xy$ erfüllt aber Gl. (1) auch für beliebige n!

**) Vergl. die Anmerkung in A)

***) Im Schulunterricht wird man die einfache und anschauliche bisher übliche Ableitung dieser Sätze selbstverständlich beibehalten.

†) A. Wendler, „Elementare Plan- und Kugelgeometrie im Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie". Bl. f. d. Gymnasial-Schulwesen. München 1903. 1/2 Heft, pag 72.

*) Homogene Funktionen 1. Grades, falls man überhaupt algebraische Funktionen voraussetzt. Uebrigens gilt auch wieder $\varphi(nx, nz)=n\varphi(x,z)$ usw., was sich mit Dreieckskongruenz beweisen läßt.

Die restierende Gleichung ist also der bekannte Pythagoreische Lehrsatz

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

E) Das Parallelogramm der Kräfte.

Eine zu unseren Betrachtungen gehörige Funktionalgleichung ist die von d'Alembert für das Problem der Zusammensetzung der Kräfte angegebene Gleichung

$$\varphi(x+a) + \varphi(x-a) = 2\,\varphi(x)\cdot\varphi(a).$$

Das Nötige hierüber findet man in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, Heft 6, pag. 789 und Bd. IV, pag. 44/45 (Grundlagen der Mechanik).

F) Winkelsummensätze.

Wir untersuchen die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks unter der Annahme, daß dieselbe nur eine Funktion des Flächeninhaltes sei. Alsdann ist

$$\alpha + \beta + \varphi = f(\Delta_1)$$
$$\gamma + \delta + \psi = f(\Delta_2), \text{ somit}$$
$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) = f(\Delta_1 + \Delta_2) + 2R.$$

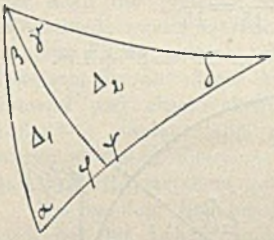


Fig. 7.

Diese Funktionalgleichung wird durch $f(\Delta) = 2R + q\Delta$ erfüllt. Da q eine Konstante ist, so hätten also auf einer solchen Fläche alle geodätischen Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt auch gleiche Winkelsumme ohne Rücksicht auf die im allgemeinen von Ort zu Ort verschiedene Krümmung. Tatsächlich gilt aber jene auch aus dem Gaußschen Satz fließende Beziehung für Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Für die Ebene ist $q = 0$, für die Kugel $q = \frac{2R}{r^2\pi}$.

G) Die Grundformel der sphärischen Trigonometrie.*)

Im rechtwinkeligen sphärischen Dreieck (Fig. 8) ändert sich die Größe des Winkels α gleichzeitig mit a und c, ist also eine Funktion von a und c. Jeder Ausdruck von α, z. B. auch die Winkelfunktion sin α ist dann ebenfalls eine Funktion von a und c. Man setzt also

$$\sin\alpha = f(a, c).$$

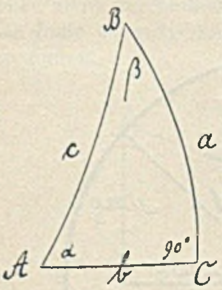


Fig. 8.

Rückt A näher an C heran, so wächst α, um im Augenblick des Zusammenfallens von A und C in 90^0 überzugehen.

Für $c = a$ ist also $\sin 90 = 1 = f(a, a)$. Die Funktion f hat also die charakteristische Eigenschaft, den Wert 1 anzunehmen, sobald die beiden Argumente einander gleich werden. Dies würde durch

$$(1) \quad \sin\alpha = \frac{\varphi(a)}{\varphi(c)}$$

erreicht werden, eine Annahme, welche wegen der Analogie $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ mit der ebenen Trigonometrie besonders nahe liegt. Die Rechtfertigung dieser Annahme erfolgt dadurch, daß es gelingt, φ aus (1) wirklich zu bestimmen.

*) S. die Anm. zu C) 3.

Ein beliebiges sphärisches Dreieck (Fig. 9) wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dann ist:

$$\sin\beta = \frac{\varphi(h)}{\varphi(c)},\quad \sin\gamma = \frac{\varphi(h)}{\varphi(b)},\ \text{also:}$$

$\sin\beta : \sin\gamma = \varphi(b) : \varphi(c)$ und $\sin\alpha : \sin\beta = \varphi(a) : \varphi(b)$; somit ist $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \varphi(a) : \varphi(b) : \varphi(c)$.

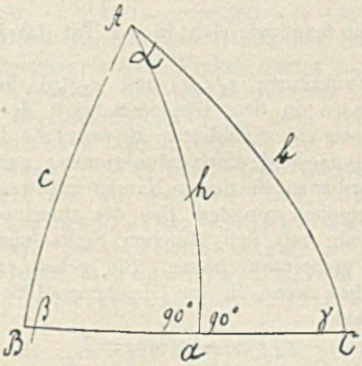


Fig. 9.

Indem diese Formel für alle sphärischen Dreiecke gilt, gilt sie auch für $\beta = \gamma = 90^0$, $b = c = 90^0$. Dann wird:

$$\sin\alpha : 1 : 1 = \varphi(a) : \varphi(90) : \varphi(90) \text{ oder es ist:}$$
$$\varphi(a) = C\cdot\sin(a).$$

Da aber in diesem Grenzfall sin α mit sin a identisch ist, hat man $\varphi(a) = C\cdot\sin a$.

(1) wird also

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Aus dieser einen Formel kann man dann, auch wieder ohne Zuhilfenahme des Dreiecks, sämtliche Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten.*)

Ein neuer Leitfaden zur Auffindung pythagoreischer Dreieckszahlen.

Von Paul Richert (Berlin).

In den §§ 61 ff meiner Programmbeilage 1907 habe ich gezeigt, wie man die beiden Exponentialreihen zweiten Grades

$$e_2'(\varrho) = \varrho + \frac{\varrho^3}{3!} + \frac{\varrho^5}{5!} + \cdots$$
$$e_2''(\varrho) = 1 + \frac{\varrho^2}{2!} + \frac{\varrho^4}{4!} + \cdots$$

zur analytischen Auflösung der quadratischen Gleichung mit demselben Nutzen verwenden kann, mit welchem man die üblichen trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\operatorname{tg} x$ zu brauchen pflegt. Man muß dann allerdings die gegebene Gleichung zunächst so umformen, daß das x-freie Glied derselben zu 1 wird. Heißt die Gleichung

$$x^2 - 2a_1x + a_2 = 0,$$

so muß man $x = \sqrt{a_2}\,x_0$ setzen, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Man braucht dabei nicht zu befürchten, daß man auf irrationale Lösungen kommt, da sich für den Fall rationaler Wurzeln das Irrationale forthebt. In der Gleichung

$$x^2 - 18x + 77 = 0$$

z. B., welche die rationalen Wurzeln 7 und 11 hat, setze man $x = \sqrt{77}\,x_0$, so wird sie zu

*) S. auch Frischauf-Elemente der absoluten Geometrie. pag. 56 und 137.

$$x_0^2 - 2 \cdot \frac{9}{\sqrt{77}} x_0 + 1 = 0$$

und daraus folgen zwar für x_0 die Werte

$$x_0 = \frac{9}{\sqrt{77}} \mp \sqrt{\frac{81}{77} - 1} = \frac{9 \mp 2}{\sqrt{77}}.$$

Setzt man aber rückwärts

$$x = \sqrt{77}\, x_0 = \sqrt{77} \cdot \frac{9 \mp 2}{\sqrt{77}}$$

ein, so sieht man, wie sich in der Tat das Irrationale forthebt.

Die Funktionen $e_2'(\varrho)$ und $e_2''(\varrho)$ hat bereits Gudermann in den Bänden 6 bis 9 des Crelleschen Journals näher studiert. Er nennt sie dort hyperbolische Sinus- und Cosinusfunktionen: nach meiner Ansicht verdienen sie diesen Namen mit wenig Recht, da sie, abgesehen von dem Bau der einzelnen Reihenglieder, wenig mit den üblichen Sinus- und Cosinusfunktionen gemeinsam haben. Sie gehen erst in die letzteren über, wenn in der Gleichung (126) der Programmbeilage

1) $$e_2''^2(\varrho) - e_2'^2(\varrho) = 1$$

ϱ durch ϱi ersetzt wird.

Die Haupteigenschaften unserer bekannten Sinus- und Cosinusfunktion sind doch die, daß die Summe ihrer Quadrate gleich 1 ist, daß also die Gleichung

2) $$\sin^2 \varrho + \cos^2 \varrho = 1$$

gilt. Dividiert man nun aber die Gleichung 1) durch $e_2''^2(\varrho)$, so wird sie zu

$$1 - \left(\frac{e_2'}{e_2''}\right)^2 = \frac{1}{e_2''^2} \quad \text{oder zu} \quad \left(\frac{e_2'}{e_2''}\right)^2 + \frac{1}{e_2''^2} = 1$$

und hier haben wir ebenfalls ein Paar Funktionen vor uns, die ebenso jene Eigenschaft besitzen, wie die Funktionen $\sin \varrho$ und $\cos \varrho$. Denn für ein reelles ϱ wird weder $\frac{e_2'(\varrho)}{e_2''(\varrho)}$ noch $\frac{1}{e_2''(\varrho)}$ jemals größer als 1.

Jede quadratische Gleichung von der Form

$$x_0^2 - 2\, a_0 x_0 + 1 = 0$$

muß Wurzeln von der Form k und $\frac{1}{k}$ haben. Da dann aber $2\, a_0 = k + \frac{1}{k}$, also $a_0 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ sein muß, so ist die halbe Wurzeldifferenz $b_0 = \sqrt{a_0^2 - 1} =$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}\right) - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 2 + \frac{1}{k^2} - 4} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)$$

stets eine rationale Größe, wenn nur k selber rational ist. Daraus folgt, daß man stets zwei zum gleichen Argumente ϱ gehörige Funktionswerte von $e_2'(\varrho)$ und $e_2''(\varrho)$ derart finden kann, daß beide Funktionen rational werden. Denn da ja $e_2' = \sqrt{e_2''^2 - 1}$ ist, so wird für $e_2'' = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ auch $e_2'(\varrho)$ rational. Dies liefert eine bequeme Methode zur Auffindung irgendwelcher pythagoreischer Dreieckszahlen. Bildet man z. B. aus den Wurzeln $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ die quadratische Gl.

$$x^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)x + 1 = 0,$$

so ist nach § 63 der Programmbeilage

$$e_2''(\varrho) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{2 \cdot 6} = \frac{13}{12}$$

und daher

$$e_2'(\varrho) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}.$$

Sie erfüllen tatsächlich die Gleichung

$$\left(\frac{13}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 1.$$

Dividiert man nun diese Gleichung durch $\left(\frac{13}{12}\right)^2$, so wird sie zu

$$1 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2.$$

Multipliziert man sie aber mit 13^2, so wird sie zu

$$13^2 = 5^2 + 12^2.$$

Am bequemsten werden die Zahlen, wenn in beiden Brüchen Zähler und Nenner ungerade Zahlen sind. Dann ist der Zähler der Summe sowohl wie der Differenz beider reziproken Brüche eine gerade Zahl, also durch 2 teilbar. Wählt man z. B. als Wurzeln der quadratischen Gleichung $\frac{5}{3}$ und $\frac{3}{5}$, so ist

$$e_2''(\varrho) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{15} = \frac{17}{15} \text{ und}$$

$$e_2'(\varrho) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15},$$

$$\text{also } \left(\frac{17}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1 \text{ oder } 17^2 = 8^2 + 15^2.$$

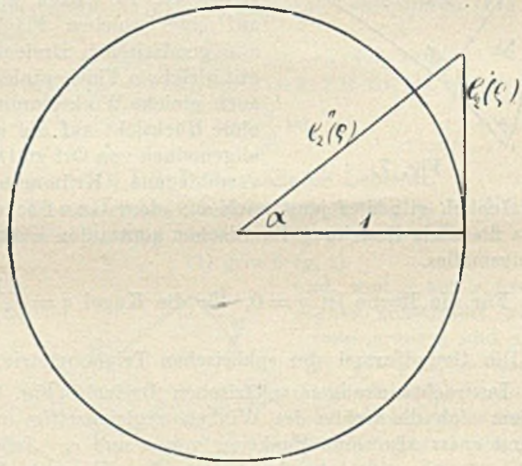


Fig. 1.

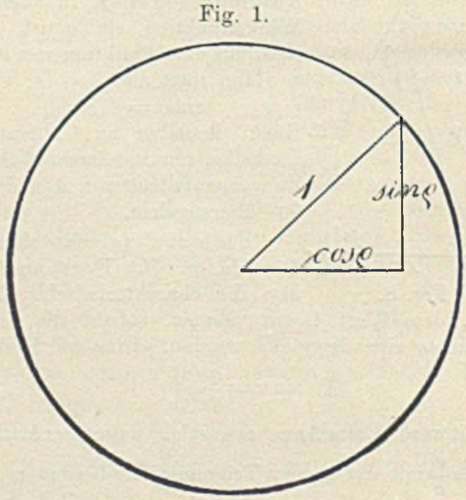


Fig. 2.

Weder der Name „Sinus- und Cosinusfunktion“ ist gerechtfertigt bei den Funktionen $e_2'(\varrho)$ und $e_2''(\varrho)$ noch das Adjektiv „hyperbolisch.“ Denn auch die Funktionen $e_2'(\varrho)$ und $e_2''(\varrho)$ sind Kreisfunktionen, ebenso wie die Funktionen $\sin \varrho$ und $\cos \varrho$. Sie unterscheiden sich nur dadurch, daß bei jenen die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks gleich 1 ist, während bei diesen die Hypotenuse gleich 1 ist. Vergl. Fig. 1 und 2, von denen die erstere die Einheit als Kathete, die letztere als Hypotenuse hat.

Man könnte sie höchstens dadurch voneinander unterscheiden, daß man jene „Außenkreisfunktionen“, diese „Innenkreisfunktionen“ nennt.

Neue Behandlung der Parallelenlehre.

Von Chr. Nielsen (Varel a. d. Jade).

Die Beweisführung ist bei der Lehre von den Parallelen in den Lehrbüchern recht mannigfaltig. Ob man aber mit Euklid von der Kongruenz und dem Außenwinkel am Dreieck, oder von dem Wallisschen Grundsatze, oder der Winkelsumme im Dreieck ausgeht, oder die eine Seite der gleiche Wechselwinkel enthaltenden Figur mit der andern zur Deckung bringt, oder auch die gleichen Gegenwinkel als Richtungsunterschiede zweier Geraden mit einer dritten ansieht: in allen Fällen entsteht ein wahrer Rattenkönig von Beweisen, der auf dieser Anfangsstufe geradezu geistlähmend und abschreckend auf den Schüler wirkt. Außerdem werden dabei zum Teil zu hohe Anforderungen an das geometrische Vorstellungsvermögen eines Durchschnittsquartaners gestellt.

Wo es dem Schüler jedoch zu schwer gemacht wird, hat der Lehrer auch seine Last; kein Wunder daher, daß immer wieder neue Versuche gemacht werden, die Parallelenlehre zu vereinfachen.

Wenn man nun ferner bedenkt, daß bei dieser Lehre ein lückenloser Beweis nach vorausgeschickten Lehrsätzen überhaupt nicht geführt werden kann, und man sich irgendwo in der Herleitung wohl oder übel auf die Erfahrung, d. h. auf einen Grundsatz, stützen muß, dann sollte man sich doch lieber entschließen, vollständig empirisch zu Werke zu gehen. Was mir von einer derartigen Behandlung des Gegenstandes bekannt geworden ist, schien mir zwar nicht ausreichend oder nicht anschaulich und einfach genug zu sein, aber ich halte es wohl für möglich, einen gangbaren Weg zu finden.

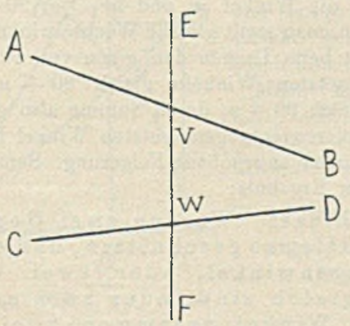


Fig. 1.

Man müßte meines Erachtens den von Euklid vorangestellten Grundsatz als Ausgangspunkt wählen. Wenn man alsdann aus ihm unter Zuhilfenahme der Drehbarkeit der Geraden die letzte Konsequenz zöge, würde sich die Sache so einfach gestalten, als man nur wünschen könnte. Wie ich mir die nähere Entwicklung der Lehre hierbei denke, sollen die nachfolgenden Erläuterungen dartun.

Die beiden inneren entgegengesetzten Winkel v und w (Fig. 1) mögen zusammen kleiner als $2R$ sein, wobei $\angle v$ etwa spitz ist, während w ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel sein kann. Die beiden anderen inneren entgegengesetzten Winkel sind dann zusammen größer als $2R$, da ihre Summe

$$180 - v + 180 - w = 360 - (v + w)$$

beträgt. Diese verschiedene Größe der Summe der inneren entgegengesetzten Winkel deutet auf ein verschiedenes Verhalten der beiden Geraden rechts und links von der Schnittlinie hin; nach rechts konvergieren und nach links divergieren sie:

Grundsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß zwei innere entgegengesetzte Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen diese beiden Geraden, genugsam verlängert, an der Seite zusammen, wo die Winkel liegen.

Lassen wir nun die Winkel v und w anwachsen, so muß deren Summe zunächst gleich und weiterhin auch größer als 180^0 werden, wobei die Geraden aus der Konvergenz nach rechts in die Divergenz übergehen. Der Uebergang findet da statt, wo $v + w$ nicht mehr kleiner, jedoch auch noch nicht größer als 180^0 ist, d. h. wo $v + w$ gerade 180^0 beträgt. An dieser Stelle sind also die Geraden weder konvergent noch divergent, und sie müssen hier demnach parallel sein.

Folgerung: Wenn zwei innere entgegengesetzte Winkel zusammen $2R$ betragen, sind die Geraden parallel.

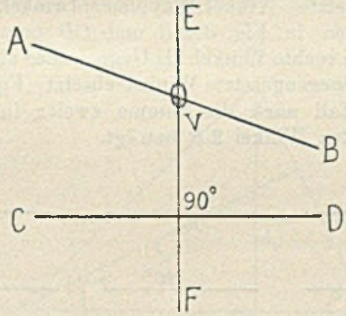


Fig. 2.

Beim Drehen der Geraden möge $\angle w = 90^0$ geworden sein, während $\angle v$ noch spitz ist, dann findet nach rechts noch Konvergenz statt (Fig. 2). Drehen wir jetzt AB allein weiter, so wird der Zeitpunkt bald eintreten, wo auch $\angle v$ 90^0 beträgt (Fig. 3). In diesem Fall wären v und w zusammen gleich $2R$ und die Geraden also parallel. Würde man AB weiter nach oben drehen, so wären v und w zusammen größer als $2R$ und die Geraden nach rechts divergent. Es gibt demnach für die um O allein gedrehte AB nur eine Lage, in der sie zu CD parallel ist, womit festgestellt wäre:

1. Lehrsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich immer nur eine Parallele zu der Geraden ziehen.

Da hiernach durch einen Punkt nicht zwei Gerade gehen können, die einer dritten parallel sind, so ergeben sich aus dem Lehrsatze weiter die beiden

Zusätze: a) wenn eine Gerade die eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie auch die andere; sowie b) zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind einander parallel.

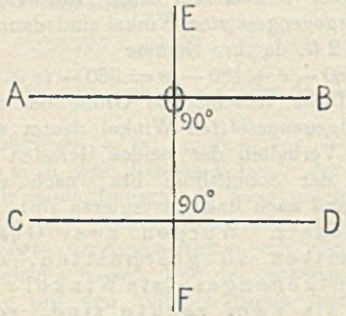


Fig. 3.

Jene Betrachtung, bei der Fig. 2 in Fig. 3 überging, liefert uns ferner:

2. Lehrsatz. Wenn die eine von zwei Parallelen auf einer Geraden senkrecht steht, so tut es auch die andere.

Und wenn wir uns irgend eine dritte Senkrechte auf *EF* hinzudenken, dann müßte sie sowohl zu *AB*, als auch zu *CD* parallel sein:

3. Lehrsatz. Alle Senkrechten auf einer Geraden sind parallel.

In Fig. 3 sind als Neben- oder Scheitelwinkel zu den mit 90° bezeichneten beiden Winkeln alle übrigen sechs Winkel ebenfalls Rechte und somit auch je zwei Gegen- und Wechselwinkel gleich und je zwei entgegengesetzte Winkel Supplementwinkel. Umgekehrt werden in Fig. 3 *AB* und *CD* parallel, wenn man je zwei rechte Winkel als Gegen- oder als Wechsel- oder als entgegengesetzte Winkel absetzt (Fig. 4), weil in jedem Fall auch die Summe zweier inneren entgegengesetzten Winkel $2R$ beträgt.

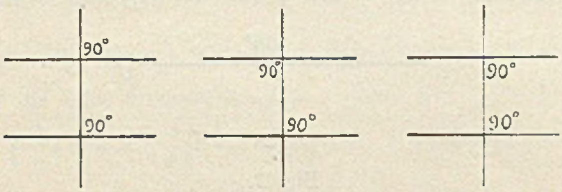


Fig. 4.

Wenn wir jetzt *CD* um den spitzen Winkel u nach oben drehen, wird sie zu *AB* wirder konvergent (Fig. 5). Drehen wir aber *AB* ebenfalls um den $\angle u$

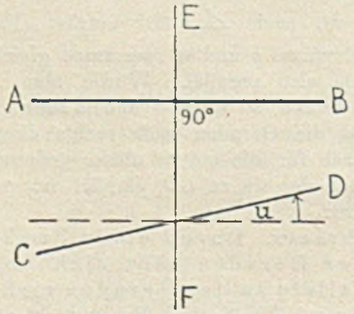


Fig. 5.

nach oben, so findet $v + w = 90 + u + 90 - u = 180^0$ statt, und *AB* muß wieder parallel *CD* sein (Fig. 6).

Von den acht rechten Winkeln in Fig. 3 haben hierbei vier um den $\angle u$ ab- und die übrigen vier um den $\angle u$ zugenommen; die neuen Gegen- und Wechselwinkel in Fig. 6 betragen also je $90 - u$ oder $90 + u$ und irgend zwei entgegengesetzte Winkel zusammen $90 - u + 90 + u = 180^0$. Damit wäre gefunden:

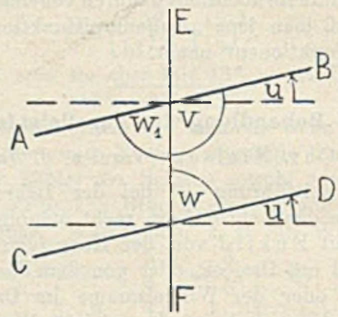


Fig. 6.

4. Lehrsatz. Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so sind je zwei Gegen- und Wechselwinkel einander gleich und je zwei entgegengesetzte Winkel Supplementwinkel.

Um ferner *AB* und *CD* in Fig. 6 als Parallelen zu erhalten, könnte man an *EF* rechte Winkel absetzen und dann die beiden Geraden um den Winkel u drehen. In dieselbe Lage als Parallelen würden *AB* und *CD* aber auch gelangen, wenn man wie folgt verführe: man läßt sie zunächst mit *EF* zusammenfallen und dreht sie alsdann von *EF* weg um je $90 + u^0$ oder um je $90 - u^0$, d. h. man schafft gleiche Gegenwinkel (Fig. 7); oder man beachtet bei der Drehung,

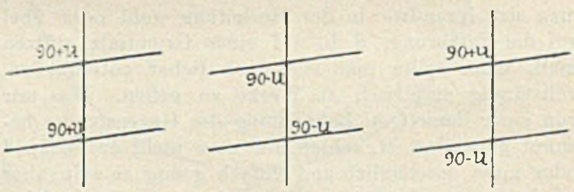


Fig. 7.

daß z. B. die Winkel w und w_1 je $90 - u^0$ groß werden, d. h. man stellt gleiche Wechselwinkel her; oder man macht beim Drehen den einen von zwei äußeren entgegengesetzten Winkeln gleich $90 + u$ und den anderen gleich $90 - u$, deren Summe also gleich 180^0. Auf die inneren entgegengesetzten Winkel bezieht sich schon die oben angegebene Folgerung. Somit kommen wir zu dem Ergebnis:

5. Lehrsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel, oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, dann sind die Geraden parallel.

Hiernach wird man erkennen, daß eine folgerichtige und anschauliche Herleitung sämtlicher Sätze zwanglos zustande kommt, wenn man, wie es auch an anderen Stellen geschieht, die Euklidische Starrheit der Gebilde ganz aufgibt.

Kleinere Mitteilungen.

Nochmals die kubische Gleichung[1]. Die von E. Milarch angegebene Behandlung der kubischen Gleichung, durch welche sie auf die Form $z^2 \pm 3z = 2m$ gebracht und durch die weitere Annahme $z = u \pm \frac{1}{u}$ auf die für u^3 quadratische Gleichung $u^3 \pm \frac{1}{u^3} = 2m$ zurückgeführt wird, findet sich — wie Herrn Milarch und der Redaktion erst nachträglich bekannt geworden ist — bereits auch in der Programmabhandlung: Die ganzen rationalen Funktionen der ersten drei Grade und ihre Kurven. Exponentialreihen höherer Grade von Prof. Dr. Paul Richert, Wissenschaftl. Beilage zum Jahresbericht der dritten Realschule zu Berlin, Ostern 1907 (Progr.-Nr. 138), s. daselbst besonders die §§ 37 und 44.

* * *

Nochmals die Teilung eines Trapezes durch eine Parallele zur Grundlinie[2]. Die vorstehend genannte, im vorigen Heft von Chr. Nielsen behandelte Aufgabe läßt sich einfacher durch ein Verfahren lösen, das im dritten Absatz des betr. Artikels angedeutet, aber als „umständlich“ abgelehnt wird.

Wird nämlich das Trapez zu einem Dreieck ergänzt, so entstehen im ganzen drei ähnliche Dreiecke, deren Flächen sich verhalten wie die Quadrate der Grundlinien, also wie $c^2 : x^2 : a^2$. Folglich ist

$$\frac{x^2 - c^2}{a^2 - x^2} = \frac{m}{n}$$

und daraus

$$x^2 = \frac{a^2 m + c^2 n}{m + n}.$$

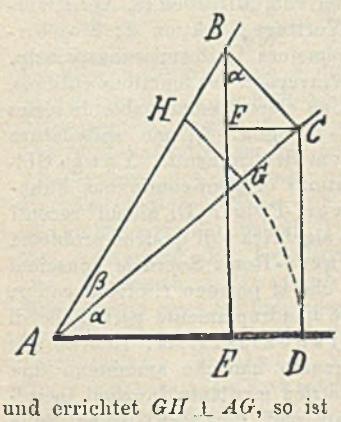
G. Junge (Berlin W. 15.)

* * *

Nochmals die geometrische Ableitung der Additionsformel für die Tangensfunktion[3].

I.

Die Formel für $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ läßt sich außer in der von Herrn Prof. Pietzker im letzten Hefte dieser Blätter veröffentlichten Weise auch in folgender Art,



die mit einer kleinen Aenderung vollständig der üblichen Entwicklung für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ entspricht, rein geometrisch ableiten.

Macht man $BE \perp AE$, $BC \perp AC$, $CD \perp AD$ und $CF \perp BE$, so ist

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CD + BF}{AD - CF}$$

trägt man nun $AG = AD$ auf AC ab und errichtet $GH \perp AG$, so ist

$$GH : BC = AG : AC;$$

da aber auch $\sphericalangle FBC = \alpha$ und folglich $\Delta FBC \sim \Delta DAC$ ist, so ist

$$BF : BC = AD : AC;$$

also ist $BF = GH = AD \cdot \operatorname{tg}\beta$ und $CF = BF \cdot \operatorname{tg}\alpha = AD \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ und demnach

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{AD \operatorname{tg}\alpha + AD \cdot \operatorname{tg}\beta}{AD - AD \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Ganz in derselben Weise läßt sich die Gleichung für $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ entwickeln.

Dr. M. Zwerger (Würzburg.)

II.

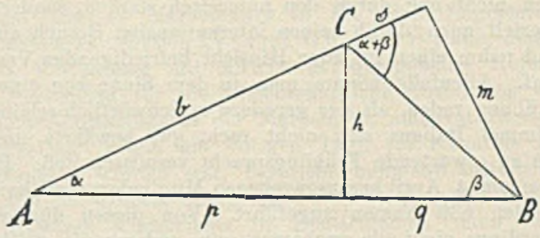


Fig. 1.

Im Dreieck ABC seien h und m Lote, so ist

$$b(b + s) = p(p + q) = p^2 + pq$$
$$= b^2 - h^2 + pq$$
$$bs = pq - h^2.$$

Also auch $$\frac{h(p+q)}{bs} = \frac{h(p+q)}{pq - h^2}.$$ Nun ist

$$h(p + q) = m\,b.$$

Daher $$\frac{m\,b}{b\,s} = \frac{h(p+q)}{pq - h^2}$$ oder

$$\frac{m}{s} = \frac{\frac{h}{p} + \frac{h}{q}}{1 - \frac{h}{p} \cdot \frac{h}{q}}$$ also

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Oder

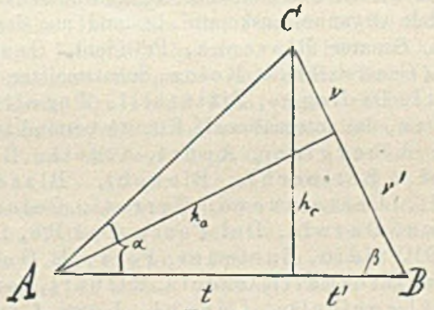


Fig. 2.

h_a und h_c seien Lote, so $t^2 + h_c^2 = (v + v')^2$. Ferner ist

$$t^2 + t \cdot t' = (v')^2 + v\,v'$$
$$tt' - h_c^2 = -v(v + v').$$

Also auch $$\frac{(t + t')\,h_c}{tt' - h_c^2} = -\frac{a \cdot h_a}{v \cdot a}.$$

Daher $$\frac{\frac{h_c}{t'} + \frac{h_c}{t}}{1 - \frac{h_c}{t} \cdot \frac{h_c}{t'}} = -\frac{h_a}{v},$$ d. h.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

B. Habenicht (Hannover-Linden.)

---

[1] S. Unt.-Bl. XIV, S. 30.

[2] S. Unt.-Bl. XIV, S. 35.

[3] S. Unt.-Bl. XIV, S. 36.

Vereine und Versammlungen.

Der IV. internationale Mathematikerkongress in Rom.

Der in Heft 1 dieser Zeitschrift angekündigte IV. internationale Mathematikerkongreß in Rom zeichnete sich nicht nur durch den numerisch starken, sondern speziell auch durch seinen internationalen Besuch aus und nahm einen in jeder Hinsicht befriedigenden Verlauf. Allenfalls könnte man in dem Sinne von einer Trübung reden, als der geradezu sprichwörtlich schöne Himmel Italiens sich nicht recht gut bewährte und die zu erwartende Frühlingspracht vermissen ließ. In dem am 4. April herausgegebenen Mitgliederverzeichnis werden 636 Namen angeführt. Von diesen dürften allerdings nicht alle erschienen sein, andererseits stellte sich noch eine größere Anzahl von Teilnehmern erst im Laufe der Woche ein und war daher bei der Zusammenstellung der Liste nicht bekannt. Unter den Fachmännern ist Italien mit etwa 160, Deutschland mit 120, Oesterreich-Ungarn mit 42, Frankreich mit über 60, die englische Sprache (Engländer und Amerikaner zusammengenommen) mit 36, Rußland mit 16, Schweden und Norwegen, sowie auch Rumänien mit 6, Belgien, Spanien und Griechenland mit 3, außerdem auch noch Japan, Holland, Bulgarien und Serbien durch einzelne Fachleute vertreten.

Am Sonntag abends fand die erste offizielle Versammlung in den Bibliotheksräumen der Universität statt und am Montag wurde der Kongreß im Saale der Horazier und Curiatier auf dem Kapitol in Anwesenheit Sr. M. des Königs eröffnet, wobei Volterra-Rom seinen Vortrag über die Entwickelung der Mathematik in Italien in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hielt. Das lokale Organisationskomité bestand aus den Mitgliedern Senator Blaserna, Präsident, Castelnuovo, Generalsekretär, Reina, Schatzmeister, ferner Cerruti, Di Legge, Pittarelli, Tonelli und Volterra, das internationale Komité bestand aus den Herren: Albeggiani, Appel, Arzelà, Bazin, Bertini, Bettocchi, Bianchi, Blaserna, Capelli, Castelnuovo, Cerruti, Colombo, Darboux, Darwin, Del Pezzo, Del Re, Dick, Dini, D'Ovidio, Enriques, Forsyth, Gebbia, Gordan, Greenhill, Guccia, Hilbert, Jordan, Klein, Lauricella, Léauté, Levi-Civita, Lorentz, Loria, Maggi, Mittag-Leffler, Morera, Newcomb, Noether, Ovazza, Painlevè, Pascal, Peano, Picard, Pincherle, Pizzetti, Poincarè, Reye, Ricci, Segre, Somigliana, Strutt (Lord Rayleigh), Tonelli, Torelli, Venturi, Veronese, Voigt, Volterra, van der Waals, H. Weber, Weingarten und Zeuthen.

Bei der nachmittägigen Vollversammlung teilte Prof. Segre auch im Namen seiner Kollegen Noether und Poincarè mit, daß die von Prof. Guccia gestiftete Medaille keiner von den eingelaufenen 3 Arbeiten zuerkannt werden konnte und daher Prof. F. Severi verliehen wurde, der innerhalb des Ausschreibungstermines auf dem bezeichneten Gebiet die hervorragendsten Leistungen aufzuweisen hat. Hierauf hielt Prof. Mittag-Leffler seinen Vortrag: Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe und Prof. Forsyth: On the present condition of partial differential equations of the second order as regards formal integration.

Am Dienstag, 7. April begannen die Sektionssitzungen und zwar fanden in der Sektion I (Arithmetik, Algebra, Analysis) die Vorträge statt: Gordan-Erlangen: Die Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten Grades. Zermelo-Montreux: Ueber die Grundlagen der Arithmetik und Analysis. Borel-Paris: Sur les principes de la théorie des ensembles. Riesz-Budapest: Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre und Frizell-Göttingen: Die Mächtigkeit des Kontinuums. Sektion II (Geometrie): Andrade-Besançon: Le théorème d'Ampère-Stokes et le postulatum d'Euclide. Varicak-Agram: Beitrag zur nichteuklidischen analytischen Geometrie. Zeuthen-Kopenhagen: Un exemple d'une correspondence sans „Wertigkeit". Montesano-Neapel: Sui complessi bilineari di coniche nello spazio. Sektion III A (Mechanik) G. H. Darwin-Cambridge: The rigidity of the Earth. Lamo-Manchester, The flexure of narrow Beams. Lauricalla-Catania: Sull' equazione $\triangle 2^n V=0$ e su alcune estensioni delle equazioni dell' elasticita. Sektion III B (Angewandte Mathematik): Toja-Florenz: Alcune considerazioni sui rapporti tra le matematiche e la scienza Attuariale. Quiquet-Paris: Sur une nouvelle application des Jacobiens aux probabilités viagères. Poussin-Paris. Sur l'application du graphicisme aux calculs d'assurances Elderton: A comparison of some curves used for graduating. Sektion IV (Unterricht) Hessenberg-Bonn: Zahlen und Anschauung. Boutroux-Paris: Sur la relation de l'Algèbre à l'Analyse mathématique. Itelson-Berlin: Logik und Mathematik und derselbe: Deduktion, Induktion und Perduktion. Simon-Straßburg: Du continu, point et ligne droite, remarques historiques. Bernstein-Göttingen: Nachweis, daß unter allen Beweisen des phythagoreischen Lehrsatzes der Beweis des An-Nairizi (900 n. Chr.) der axiomatisch einfachste ist. Pastore-Aosta: Sopra la natura extra-logica delle leggi di tautologia e di assorbimento. Nachmittags fand der Vortrag von Darboux: Les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitesimale, statt und dann sprach Prof. v. Dick: Ueber die mathematische Enzyklopädie.

Die Sektionssitzungen vom Mittwoch (8. April) vormittags umfaßten die Vorträge: Sektion I: Koebe-Berlin: Ueber ein allgemeines Uniformierungsprinzip. Boutroux-Paris: Sur l'inversion des fonctions entières. Petrovich-Belgrad: Une classe remarquable de séries entières. Pincherle-Bologna: Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. Yung-Göttingen: On some applications of semi-continuous Functions. Sektion II: Severi-Padua: Di alcuni recenti resultati nella geometria algebrica e di qualche problema ad esso collegato. Bagnera-Rom: Sopra le equazioni algebriche $f(xyz)=0$, che si possono risolvere con x, y, z funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri. De Franchis-Parma: Intorno alle superficie regolari di genere uno che ammetono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argumenti und Bianchi-Pisa: Sulle transformazioni di Darboux delle superficie d'area minima. Sektion III A Somigliana-Turin: Sulle deformazioni elastiche non regolari. Abraham-Berlin: Zur Theorie der Wirbelstrombremsen. Andrade-Besançon: Sur une nouvelle méthode de mesure des frottements. Korn-München: Ueber die universellen Schwingungen der Materie mit Anwendungen auf die Theorie der Gravitation und der intramolekularen Kräfte. Levi-Civita-Padua: Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati. Rados-Budapest: Wendetangentenebenen der Raumkurven. Sektion IIIB: Bohlmann-Berlin: Ueber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung. Borel-Paris: Sur les applications du calcul des probabilités aux sciences biologiques. March-Paris: Une nouvelle statistique internationale de la population, Observation sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques. De Helguero-Asti: Sulla rappresentazione analitica di alcune statistiche. Lembourg-Brüssel: L'actuaire, sa fonction et les deux aspects de celle-ci. Gini: La regolarità dei fenomeni rari. Dawson-New-York: Necessary cautions in Dealing with Actuarial Problems. Castelli-Rom: Sull' insegnamento della matematica attuariale e finanziaria nelle scuole professionali inferiori, medie e superiori. Sektion IV: Loria-Genua: Le tradizioni matematiche dell' Italia. Zeuthen-Kopenhagen: Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la Géométrie. Smith-New-York: The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarye. Duhem-Bordeaux: Sur la découverte de la loi de la chute des graves. Giacomelli-Rom: I resultati di alcune richerche sull' opera meccanica di Galileo. Pittarelli-Rom: Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de Franceschi? Nachmittags fanden die Vorträge statt: Newcomb: La théorie du mouvement de la lune; son histoire et son état actuel und Lorentz: Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.

Donnerstag vormittags: Sektion I: Hadamard-Paris: Sur l'application d'une méthode de calcul des variations. Schlesinger-Kolozswar: Sur quelques problèmes paramétriques de la théorie des équations différentielles linéaires. Rémoundos-Athen: Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles. Pick-Prag: Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion. Saltykow-Kharkow: Sur l'existence des intégrales complètes de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations partielles. Lalesco-Bukarest: Sur les solutions analytiques de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

Volterra-Rom: Sopra il metodo delle imagini nelle equazioni del tipo iperbolico. Zervos-Athen: Sur la correspondance entre les théories d'intégrations des équations aux dérivées partielle du premier ordre et d'intégration des systèmes de Monge. Sektion II: Pannelli-Rom: Sopra un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni. Dingeldey-Darmstadt: Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin. Finsterbusch-Zwickau: Ueber Erweiterung eines Schließungsproblems von I. Steiner und ihre Beziehung zur Gaußschen Theorie zentrierter Linsensysteme. Gallucci-Neapel: Su la configurazione armonica. Brückner-Bautzen: Bemerkungen zur Morphologie der außergewöhnlichen Polyeder, erläutert durch die Sechsflache. Brouwer-Amsterdam: Une théorie des Groupes finis et continus indépendante des axiomes de Lie. Sektion IIIA: Garbasso-Genua: Sulla luce bianca. Greenhill: Geometry of Motion of a spinning Top. Boggio-Turin: Sopra alcuni teoremi di fisica matematica. Boccardi-Turin: Sur une nouvelle équation dans les observations des passages. Andrade-Besançon: La synchronisation par le fer doux. Sektion IIIB: Luiggi-Rom: Considérations sur les rapports entre les sciences mathématiques et l'art de bâtir. Canevazzi-Bologna: La matematica e l' arte del costruttore in Italia. D'Ocagne-Paris: La technique du calcul dans la science de l'ingénieur, und: Sur la rectification approchée des arcs de cercle. Claxton-Fidler: On the Application of Mathematics to the Theory of Construction. Swain: The teaching and use of Mathematics in the civil Engineering profession. Sektion IV: Prof. Gutzmer-Halle, dessen in Verbindung mit Klein herausgegebenes Referat „Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften" schon am vorigen Tage zur Kenntnis genommen worden war, bespricht nunmehr ausführlich „Die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts in Deutschland", dann folgt Borel-Paris: Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en France. Godfrey-London: The teaching of Mathematics in English public Schools for boys. Smith-New-York: The teaching of secondary Mathematics in the United States. Suppantschitsch-Wien: L'Application des idées modernes à l'enseignement secondaire des Mathématiques en Autriche. Beke-Budapest: Ueber den mathematischen Unterricht in Ungarn. Vailati-Rom: Su alcuni caratteri degli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle Scuole secondarie.

Nachmittags fand über Einladung des Unterrichtsministers Ravà ein Ausflug der Kongreßteilnehmer nach den Kaiserpalästen auf dem Palatin statt, wobei der Archäologe Prof. Vaglieri die Führung der deutschen Gruppe übernahm.

Freitag, 10. April, Sektion I: Moore-Boston: On a form of general Analysis, with application to differential and integral Equations. Fredholm-Stockholm: Les intégrales de Fourier et la théorie des équations intégrales linéaires. Adhemar-Lille: Sur les équations intégrales des MM. Fredholm et Volterra. Orlando-Rom: Sulla risoluzione delle equazioni integrali. Pascal-Neapel: Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque. Stephanos-Athen: Sur une extension de la théorie des covariants et invariants des formes binaires. Montessus-Lille: Sur les relations de recurrence à trois termes. Pucciano-S.Demetrio-Corace: Contributo alla critica di alcune questioni, che si riattaccano all' equazione differenziale di Laplace. Sektion II: Tzitzeika-Bukarest: Sur une nouvelle classe de surfaces. Pfeifer-Kiew: Du développement des fonctions algébriques de deux variables indépendantes en séries entières des variables indépendantes. Sektion IIIA: Genese-Aberystwyth: The Method of reciprocal Polars applied to forces in Space. Macfarlane-Chatam: On the square of Hamilton's delta. Tedone-Genua: Sopra il problema di Lame. Bryan-Wales: Notes on the steering of automobiles and on the balancing of Ships. Sektion IV: Marcolongo-Neapel: Di un trattato di Meccanica inedito anteriore alla Mécanique analytique di Lagrange. Fehr-Genf: Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse. Stephanos-Athen: Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Grèce. Archenhold-Berlin: Ueber die Bedeutung des mathematischen Unterrichts im Freien in Verbindung mit Reformvorschlägen für den Lehrgang. Andrade-Besançon: Quelques observations psychologiques recueillies dans les enseignements scientifiques d'initiation. Conti-Bologna:

Sulla iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri elementari in Italia. De Galdeano-Zaragoza: Quelques mots sur l'enseignement mathématique en Espagne. In der nachmittägigen Vollversammlung verlas Darboux die Abhandlung von Poincaré: L'aveuir des mathématiques, und hierauf fand der Vortrag Picards statt: L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique. Abends hielt im Saale des Vereins der Ingenieure und Architekten Prof. Störmer-Kristiania einen von Projektionsbildern unterstützten Vortrag: Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans le champ d'un aimant élémentaire, avec application aux aurores boréales.

Auf Samstag, den 11. April, entfielen die Vorträge: Sektion I: Capelli-Neapel: Sopra i coefficienti degli sviluppi delle funzioni algebriche. Nicoletti-Pisa: Riduzione a forma conica di un fascio di forme bilineari o quadratiche. Fubini-Genua: Sulla teoria dei gruppi discontinui. Dickson: On the last theorem of Fermat. Levi-Cagliari: Sopra la equazione indeterminata del 3. grado. Frattini-Rom: La nozione d'indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi. Severini-Catania: Sulle successioni infinite di funzioni analitiche. Zarembo-Krakau: Sur le principe de Dirichlet. Boggio-Turin: Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche, che si presentano nella matematica finanziaria ed attuariale. Autonne-Chateauroux: Sur les fonctions homogènes d'une variable hypercomplexe. Sektion IIIA: Kolosoff-Jurserff: Sur le problème plan dans la théorie d'élasticité. Marcolongo-Neapel: Per l'unificazione delle notazioni vettoriali. Pizzetti-Pisa: Sulla riduzione delle latitudini e delle longitudini al livello del mare. Casazza-Mailand: Nuove deduzioni dalla teoria della composizione dei moti. Beljankin-Kiew: Exemple d'une force centrale telle qu'un point matériel peut décrire une courbe du 2. ordre. Sektion IV: Gallucci-Neapel: La questione logica e gnoseologica nei fondamenti della matematica. Broggi-Rom: Sui fondamenti del calcolo delle probabilità. Emch-Solothurn: Der Rechenkünstler Winkler und seine Methoden. Loria-Genua: Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques. Amodeo-Neapel: Appunti su Biagio Pelacani, Pittarelli-Rom: Due Lettere inedite di Lagrange all'Abate di Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti. Amodeo-Neapel: Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche. De Amicis: L'equivalenza in planimetria indipendentemente dalle proporzioni e dal circolo. Brouwer-Amsterdam: Die möglichen Mächtigkeiten. Delitala-Sassari: La tetragonometria piana nelle scuole secondarie.

Hierauf wurden die Sektionssitzungen geschlossen, aber behufs Abfassung einer Resolution unter dem Vorsitz Castelnuovos wieder eröffnet und diese lautete: In der Erkenntnis der Wichtigkeit einer vergleichenden Prüfung der Lehrpläne und Unterrichtsmethoden der Mathematik in den Mittelschulen der verschiedenen Nationen betraut die 4. Sektion die Prof. Klein, Greenhill und Fehr mit der Bildung eines internationalen Komités, welches sich mit der Erörterung dieser Frage befassen und dem nächsten Kongreß darüber berichten soll. Die Sektion erbittet sich für diesen Vorschlag die Zustimmung der Vollversammlung.

Samstag nachmittags fand die Schlußversammlung statt. Der für dieselbe angesetzte Vortrag von Veronese: „Ueber nichteuklidische Geometrie" unterblieb infolge einer Unpäßlichkeit des Autors, er wird aber in den Akten des Kongresses veröffentlicht.

Der oben angeführte Vorschlag der Sektion IV wird mit lebhaftester Zustimmung angenommen. Prof. Hadamard legt die Resolution vor: Die Sektion III (Mechanik) hat nach wechselseitiger Vergleichung die Wichtigkeit der Einführung einer einheitlichen Bezeichnung für die Vektorgrößen erkannt und empfiehlt die Einsetzung eines internationalen Komités zur Regelung dieser Frage. Prof. Conti bringt die Resolution in Vorschlag: Der Kongreß wünscht, daß die Gründung eines internationalen Mathematikervereines auf die Tagesordnung des nächsten Kongresses gesetzt werde. Prof. D'Ocagne bringt in Vorschlag: Das Ergebnis der Verhandlungen der Sektion IIIB läßt es im höchsten Grade wünschenswert erscheinen, einen engeren Zusammenschluß derjenigen Fachmänner vorzubereiten, die sich mit der Vervollkommnung der mathematischen Methoden befassen und dieselben praktisch anzuwenden gezwungen sind. Zu diesem Zwecke empfiehlt die Sektion, daß der angewandten Mathematik der Ingenieure beim nächsten Kongreß eine selbständige Sektion zugewiesen werde. Diese Sektion schlägt ferner vor, daß eine internationale Kommission mit den für diese neue Sektion bestimmten Vorarbeiten betraut werde. Die Bildung derselben hat das Bureau des IV. Kongresses zu besorgen. Auf Vorschlag der Sektion IV spricht sich dann der Kongreß für die Herstellung einer vollständigen Ausgabe der Werke Eulers aus. Der Vorsitzende verspricht, sich mit der internationalen Vereinigung der Akademien zu diesem Zwecke in Verbindung zu setzen. Die Herausgabe der Kongreßakten übernimmt, da sich bei ihrer Veröffentlichung in Palermo Schwierigkeiten ergeben haben, das Kongreßkomité in Rom.

In der Sektion IV gab Prof. Amodeo auch dem Wunsche Ausdruck, daß Italien gegen einen seiner größten Söhne eine Ehrenschuld einlösen möge, indem es eine vollständige Ausgabe der Werke des Bonaventura Cavalieri besorgt.

Als Sitz des V. internationalen Mathematikerkongresses schlägt Prof. Forsyth die Stadt Cambridge und als Zeitpunkt das Jahr 1912 (August) vor, was unter allgemeinem Beifall angenommen wurde. Prof. Hadamard spricht sich dafür aus, daß auch die Physik in diese internationalen Kongresse einbezogen werden möge. Darboux spricht zum Schlusse allen mit der Durchführung der Kongreßarbeiten Beteiligten im Namen aller Teilnehmer den wohlverdienten Dank aus. Am Sonntag, den 12. April fand der wenigstens vormittag vom schönsten Wetter begünstigte Ausflug nach Villa Hadriana und Tivoli (Villa d'Este) statt.

Die aufmerksame Verfolgung der einzelnen Themen gibt somit ein getreues Bild, in welchen Bahnen sich die Fortentwicklung der verschiedenen Disziplinen der Mathematik jetzt bewegt und zeigt frisches wissenschaftliches Leben bei den verschiedensten Nationen. Die Diskussionen gestalteten sich manchmal recht lebhaft.

Jedenfalls sind alle Beteiligten in der Ueberzeugung bestärkt worden, daß das freie Wort und der persönliche Verkehr für die wissenschaftliche Förderung in vieler Hinsicht wirksamer, ökonomischer und daher wertvoller ist, als das erschöpfende Studium der kaum mehr absehbaren Literatur, und man konnte auch deutlich erkennen, daß im Gegensatz zu einer in Laienkreisen vielfach verbreiteten Ansicht, die Mathematik sei eine in sich abgeschlossene Wissenschaft, sich allenthalben frische Keime zeigen, die zu ihrer Entwicklung und Pflege des Fleißes der Besten würdig sind.

Schulrat Dr. A. Lanner (Innsbruck).

* * *

Preisausschreiben des Keplerbundes. Das Kuratorium des „Keplerbundes", der seine Zentrale nach Godesberg, Lessingstraße 11 p. verlegt hat, setzt einen Preis von 1000 M aus für die Lösung der Aufgabe:

„Die ältesten (vorsilurischen) Funde „von Lebewesen sollen nach ihrer Be„deutung für die Entwickelungslehre „neu untersucht und allgemein ver„ständlich dargestellt werden."

Die in deutscher Sprache abzufassenden Arbeiten sind bis zum 31. Dezember 1909 mit Motto und Namen in verschlossenem Umschlag an den wissenschaftlichen Direktor des Bundes, Dr. E. Dennert in Godesberg, einzusenden.

Das Preisrichteramt haben außer Dr. Dennert noch übernommen: Geh. Bergrat Prof. Dr. Beyschlag (Berlin), Geh. Bergrat Prof. Dr. v. Branca (Berlin), Prof. Dr. Jaeckel (Greifswald), Prof. Dr. v. Koken (Tübingen).

Bücher-Besprechungen.

Bennecke, F., Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. (Festschrift des Königl. Viktoria-Gymnasiums zu Potsdam zur 300jährigen Jubelfeier des Königl. Joachimsthalschen Gymnasiums zu Berlin). Berlin 1907, Kommissionsverlag von O. Salle. Preis 2 Mk.

Eine höchst interessante Schrift, die in Fachkreisen verdiente Aufmerksamkeit erregen wird. Der Verfasser will die zeitraubende Rechnung mit komplexen Zahlen durch ein graphisches Verfahren abkürzen; zu dem Zwecke untersucht er den komplexen Logarithmus von $x+iy$ und findet, daß dieser sich durch den Schnittpunkt von zwei den Werten $x =$ const. und $y =$ const. entsprechenden Kurven darstellen läßt, diese Kurven gehören zwei Scharen von einander kongruenten, durch Parallelverschiebung in der x-Richtung und der y-Richtung ineinander übergehenden Kurven an. Dieser Umstand ermöglichte es, mittels eines Kurvenlineals eine Fläche mit zwei Systemen solcher einander senkrecht schneidender Kurven zu überziehen. Diese Kurven sind am Rande mit den ihnen zukommenden Werten von x und y bezeichnet, beide Kurvensysteme überdecken ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem dann die Koordinaten des Schnittpunktes den reellen und den imaginären Bestandteil des Logarithmus von $(x+iy)$ unmittelbar darstellen. Wie sich dabei die logarithmische Ausführung der verschiedenen Rechnungsoperationen gestaltet, liegt auf der Hand.

Die nähere Ausführung zeigt, daß ein Viertelkreisring von den Radien ϱ und r logarithmisch durch ein Rechteck von der Breite $(\log r - \log \varrho)$ aus und der Höhe $\frac{\pi}{2} \log e$ dargestellt wird, wenn r und ϱ die absoluten Beträge der komplexen Grenzwerte sind. Durch eine einzige solche Darstellung lassen sich alle einfachen Rechnungen bequem ausführen, sobald man zur Darstellung das Briggsche System benutzt, weil alle denkbaren Zahlen durch einfache Multiplikation und Division, also logarithmisch durch Addition und Subtraktion in diesen Bereich hineingebracht werden können. Beigegeben sind zehn Tafeln, die von der Firma Meisenbach, Riffarth & Co. in Berlin hergestellt sind, sie bringen den Zahlenbereich von $\varrho = 100$ bis $r = 1000$ zur logarithmischen Darstellung, die erste Tafel das gesamte Gebiet in kleinerem Maßstabe, die neun anderen Tafeln geben je ein Neuntel der ersten Tafel in größerem Maßstabe; dabei dienen die Parallelen des benutzten Quadratmillimeterpapiers gleich zur Darstellung des rechtwinkligen Koordinatensystems.

Der beigefügte Text bringt neben der Erklärung der Tafel noch ein kurzes Verzeichnis der für die graphische Ausführung von Rechnungen in Betracht kommenden Literatur, eine Skizzierung der Fehlergrenzen bei dem hier empfohlenen Verfahren und eine durch einige Beispiele erläuterte Uebersicht über verschiedene Anwendungen, bei der die Berechnung der Wurzeln einer kubischen Gleichung aus der Cardanischen Formel, wenn alle reell sind, besonders hervorgehoben sei (auf diese Anwendungsmöglichkeit ist der Verfasser durch Herrn H. A. Schwarz aufmerksam gemacht worden).

Die Arbeit verdient die höchste Beachtung, das vom Verfasser empfohlene Verfahren würde sich vielleicht noch schneller einbürgern, wenn die beiden einander überdeckenden Koordinatensysteme durch die Farbe gegeneinander noch mehr abgehoben würden, als in den hier vorliegenden Tafeln, wo dieser Zweck nur durch dunklere Zeichnung der oben genannten Kurven auf dem heller gehaltenen Liniensystem des Koordinatenpapiers erreicht wird. P.

* * *

K. Kraepelin, Leitfaden für den biologischen Unterricht. Leipzig 1907. Teubner. Preis geb. 4 Mk.

Das Werk gibt in der dem Verfasser eigenen geistvollen Darstellungsweise eine Zusammenstellung aller biologischen Tatsachen, welche Gegenstand des Schulunterrichtes sein können. Bei der Auswahl des Stoffes ist es dem Verfasser geglückt, ohne sich in Einzelheiten zu verlieren, doch eine solche Vollständigkeit zu erzielen, daß vor dem Leser ein Gesamtbild des organischen Lebens entworfen wird. Das reiche Material ist sehr übersichtlich gegliedert. Zuerst wird für die Pflanze, dann für das Tier die Abhängigkeit von physikalischen Bedingungen (Wärme, Licht, umgebende Medien) behandelt, dann die Beziehungen der Lebewesen zueinander. Die hierher gehörigen Abschnitte Synökie und Kommensalismus, Parasitismus, Symbiose und Mutualismus seien besonders hervorgehoben, da sie den neuesten Forschungen auf diesen Gebieten gerecht werden. Der zweite Teil des Buches hat den Bau und die Lebenstätigkeiten der organischen Wesen zum Gegenstand; der Schlußteil zeigt den Menschen als Gegenstand der Naturbetrachtung. Originell ist dabei die Behandlung der Menschenrassen, welche von Grund aus mit den veralteten Anschauungen bricht, z. B. an Stelle des Gesichtswinkels die Schädelform als unterscheidendes Merkmal setzt. Endlich wird auch das Wichtigste über den prähistorischen Menschen mitgeteilt, und zwar nur Tatsächliches ohne willkürliche Konstruktionen. Dem Lehrer der Oberklassen wird mithin das Buch eine treffliche Unterstützung beim biologischen Unterricht sein können, während es für die Hand der Schüler weniger geeignet scheint. Erwin Reinhold (Karlsruhe).

* * *

Lampert, Prof. Dr. Kurt, Großschmetterlinge und Raupen Mitteleuropas mit besonderer Berücksichtigung der biologischen Verhältnisse. 95 in feinstem Farbendruck ausgeführte Bildertafeln mit über 2000 Abbildungen und 200 Seiten Text mit 65 Abbildungen. 30 Lieferungen à 75 Pfg. München und Eßlingen. J. F. Schreiber.

Der bekannte Verfasser von „Das Leben der Binnengewässer“ hat sich in vorliegendem Werk die Aufgabe gestellt, den Schmetterlingssammlern ein Handbuch zu geben, das nicht nur eine kahle Systematik sein soll, sondern auch das beliebteste aller Sammlungsobjekte nach anderen Gesichtspunkten betrachtet. So bringt die auf fast neun Lieferungen ausgedehnte Einleitung in gut populärer und den modernen wissenschaftlichen Standpunkt wahrenden Art die Anatomie und Oekologie der Schmetterlinge, sie spricht von ihrer Abstammung, ihrer geographischen Verbreitung und ihren Feinden, sie berücksichtigt beispielsweise die experimentellen Ergebnisse über den Einfluß der Temperatur auf die Puppen u. s. f. Andererseits wird nicht versäumt, eine treffliche und recht praktische Anleitung zu geben über die Anlage von Sammlungen, die Ausrüstung des Sammlers, die Präparation von Schmetterlingen und Raupen und die Aufzucht der letzteren.

Der systematische Teil enthält mehrfach eingehende biologische Winke; die Diagnosen sind kurz und bestimmt und werden wesentlich unterstützt durch die geradezu meisterhafte Wiedergabe der Objekte in Gestalt und Farbe. Gleichviel ob es sich um die Abbildung von Einzelwesen oder von Schmetterling und Raupe nebst Umgebung (Freßspur, Nester, Eiablage) handelt, man hat den Eindruck, daß hier das vollendetste technische Können in Anwendung gekommen ist.

Man kann das Werk, in welchem sich Text und Illustration so harmonisch verbinden, den Schulbibliotheken zur Anschaffung bestens empfehlen.

Bastian Schmid (Zwickau).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Ehrig, G., Arithmetik und Algebra, ein Lehr- und Uebungsbuch der Gleichungslehre für Baugewerkenschulen und verwandte technische und gewerbliche Lehranstalten. Mit über 1000 Uebungsaufgaben und 29 Fig. im Text. Leipzig 1907, Leineweber. Mk. 3.60.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale, dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la collaboration de A. Buhl. IXme Année, Nr. 5/6. Xme Année, Nr. 1,2. Paris 1907, Gauthier-Villars et Genève, Georg & Cie.

Eversheim, P., Elektrizität als Licht- und Kraftquelle. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. geb. Mk. 1.25.

Fack, M., Zur didaktischen Darstellung von Stoffen aus der niedern und höhern Mathematik. Gotha 1907, Thienemann. Mk. 1.40.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie für den Unterricht an höheren Lehranstalten. In 3 Teilen. III. Teil: Ebene Trigonometrie. Nebst einer Aufgabensammlung. Berlin 1908, Salle. Mk. 1.60.

Frick's, J., Physikalische Technik, 7. völlig umgearbeitete und stark vermehrte Aufl. von O. Lehmann. 2. Band, 1. Abteilung. Braunschweig 1907, Vieweg & Sohn. Mk. 20.—.

Girndt, M., Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterricht an technischen Lehranstalten. I, 3. Leipzig 1907, Teubner. Mk. 1.60.

Gläser, F., Simon Newcombs Astronomie für jedermann. Mit 2 Tafeln und 68 Textabb. Jena 1907, Fischer. Mk. 4.—.

Glinzer, E., Leitfaden der Festigkeitslehre. Mit 64 Fig. Leipzig 1907, Degener. geb. Mk. 1.50.

Gnau, E., Astronomie in der Schule. Teil I. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. Mk. —.80.

Haas, A., Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz. Die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bremerhaven 1906, Vangerow. Mk. 8.—.

Harbordt u. Fischer, Machs Grundriss der Physik für die höheren Schulen des Deutschen Reiches. II. Teil: Ausführlicher Lehrgang. Mit 537 Abb. 2. Aufl. Leipzig 1908, Freytag. geb. Mk. 4.—.

Hartmann, O., Astronomische Erdkunde. 2. Aufl. Mit 30 Textfig., 1 Sternkarte und 99 Uebungsaufgaben. Stuttgart 1907, Grub. geb. Mk. 1.20.

Hemmelmayr-Brunner, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für die 4. Klasse der Realschulen. 3. Aufl. Mit 76 Abb. Wien 1906, Tempsky.

Hentschel u. Höltzsch, Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. 17. Aufl. 1. Teil: a) Allgemeine Methodik; Theorie, Geschichte und Praxis. b) Das Rechnen mit ganzen Zahlen. 2. Teil: Die Bruchrechnung und die bürgerlichen Rechnungen. Leipzig 1907, Merseburger. Mk. 5.40.

Hoch, J., Projektionslehre. 3. Aufl. 155 Abb. im Text. Leipzig 1907, Weber.

Imhäuser, L., Methodik des naturkundlichen Unterrichts, unter Berücksichtigung der Volks-, Mittel- und höheren Mädchenschulen für Seminaristen und Lehrer. Breslau 1907, Hirt. Mk. 2.25.

Karabasz, W., Ueber das Wesen und Wirken der Materie. Grundlegung zur wissenschaftlichen Erkenntnis der Natur. Allenstein 1907, Mrzyk.

Kielhauser, A., Die Stimmgabel, ihre Schwingungsgesetze und Anwendungen in der Physik. Eine auf fremden Untersuchungen fußende Monographie. Mit 94 Fig. im Text. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 6.—.

Kleiber-Scheffler, Elementarphysik mit Chemie für die Unterstufe der Gymnasien. III. Aufl. Mit ca. 250 Fig. München 1907, Oldenbourg. Mk. 2.—.

Klein u. Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. Teubner. geb. Mk. 5.

Kohlrausch, F., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2. Aufl. Ebenda. geb. M 4.—.

Kuhnert, W., Farbige Tierbilder, 50 farbige Reproduktionen nach Originalen von W. Kuhnert, mit begleit. Text von O. Grammann u. Einleit. von F. H. Meißner. Berlin 1907, Oldenbourg. Preis der Lieferung zu 5 Bildern Mk. 2.— resp. Mk. 2.50.

Lange, J., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. 3. Aufl. besorgt von Dr. P. Zühlke. Mit 55 Fig. im Text. Berlin 1908, Müller. geb. Mk. 1.50.

Lassar-Cohn, Einführung in die Chemie. 3. Aufl. Hamburg 1907, Voß. Mk. 3.—.

Levin, W., Methodisches Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Oberrealschulen. Teil III: Organische Chemie. Mit 37 Abb. Berlin 1907, Salle. Mk. 1.65.

Mamlock, L., Stereochemie. Die Lehre von der räumlichen Anordnung der Atome im Molekül. Mit 58 Fig. im Text. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 3.—.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen d. math.-naturw. Vereins in Württemberg, herausgeg. v. A. Schmidt, R. Lang, E. Wölffing. Zweite Serie, Band IX, Heft 2. Stuttgart 1907, Metzler.

Matzdorff, C., Tierkunde für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Ausgabe für Realanstalten in 6 Teilen. (Lehrstoff f. VI, V, IV, UIII, OIII, UII.) Mk. 0.60, 0.80, 1.25, 1.50, 1.50, 1.30. Breslau 1903, Ferd. Hirt.

—„— Tierkunde für den Unterricht an höheren Lehranstalten. Ausgabe für Gymnasialanstalten, 5 Teile in 3 Bänden. I. Band (Lehrstoff d. Sexta u. Quinta) Mk. 2.20, II. Band (Lehrstoff d. Quarta u. Unter-Tertia) Mk. 2.80, III. Band (Lehrstoff d. Ober-Tertia) Mk. 1.50. Ebenda.

Mendel, G., Mikroplastbilder, herausgeg. mit Text, in 12 monatlichen Folgen. Jahrg. 1, Folge 1—5. Berlin 1907, Naturwissenschaftlich-stereographischer Verlag.

Michaelis, C., Die Stadt Berlin und das Reformgymnasium, Vortrag in der Versammlung der Vereinigung der Freunde des humanistischen Gymnasiums in Berlin und der Provinz Brandenburg. 2. Aufl. Leipzig 1907, Dürr. Mk. —.50.

Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. (58. Bdch. Aus Natur und Geisteswelt.) 2. Aufl. Mit 27 Fig. im Text. Leipzig 1907, Teubner. geb. Mk. 1.25.

Miehe, H., Die Bakterien und ihre Bedeutung im praktischen Leben. Leipzig 1907, Quelle & Meyer. geb. Mk. 1.25.

Newest, Th., Einige Weltprobleme. 6. Teil: Vom Zweck zum Ursprung des organischen Lebens. Wien 1908, Konegen. Mk. 3.—.

Pahde-Lindemann, Leitfaden der Erdkunde für höhere Lehranstalten. III. Heft: Mittelstufe, 2. Stück. Mit 6 Abb. im Text. Glogau 1907, Flemming.

Pfannenschmidt, P., Ch. M. Tidy, Das Feuerzeug. Mit 40 Fig. im Text. Leipzig 1907, Teubner. Mk. 2.—.

Reidt, F., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. 5. Aufl. Ebenda. geb. Mk. 4.80. Auflösungen dazu Mk. 1.80.

La Revue de l'Enseignement des Sciences, 1e Année Nr. 8, 9, 10. Paris 1907, Le Soudier.

Die Erde

und die Erscheinungen ihrer Oberfläche.

Nach E. Reclus von Dr. **Otto Ule.**
Zweite umgearbeit. Auflage von Dr. Willi Ule, Privatdocent an der Universität Halle.
Mit 15 Buntdruckkarten, 5 Vollbildern und 157 Textabbildungen.
Preis geh. 10 Mk., eleg. geb. 12 Mk.

F. G. Gauß, Logarithmentafeln.

Vierstellige log. u. trigon. Tafeln. **Schulausgabe.**
3. Auflage. In braun Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Kleine** Ausgabe.
21. bis 24. Auflage. In grau Leinen gebunden 1,60 M.

Fünfstellige log. u. trigon. Tafeln. **Vollständige** Ausgabe.
92. bis 95. Auflage. In blau Leinen gebunden 2,50 M.

Prüfungsexemplare stehen gern zur Verfügung.

Eugen Strien, Verlagsbuchhändler in **Halle=Saale.**

Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit.

Mineralien aller Länder.
Direkte Importe a. Amerika, Australien, England, Frankreich, Italien, Japan, Norwegen, Schweden, Schweiz, Tirol usw. **Sammlungen jeder Art.** Sammler-Utensilien usw. Spezialität:
Mineralien, Petrefakten u. Gesteine des Harzgeb.
Katalog H kostenlos.
Harzer Mineralien-Kontor, Goslar
C. Armbster.

Höllein & Reinhardt
Neuhaus/Rennweg
Thermometer aller Art
Glasinstrumente und Apparate, Geißler- und Röntgen-Röhren, Glas-Meßgeräte, Glasbläserei-Artikel, Glas-Lehrmittel.
Katalog zu Diensten.

Sammlung
zerlegbarer und zusammenklappbarer Körper
für den Unterricht in der Geometrie in verschiedenen Dimensionen rücksichtlich Anzahl und Größe.
Selbstverlag von **Otto Küster,**
Hauptlehrer a. D. in **Wermelskirchen.**

Anatomische
Lehrmittel=Modelle
aus Hartmasse, fein koloriert und zerlegbar, sowie natürl. Knochenpräparate empfiehlt (Katal. gratis)
W. Förster, Kunstanstalt,
Steglitz bei Berlin.

Projektions-Apparate
Heliostate usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

L. Hormuth, Inh. W. Vetter
Heidelberg
liefert alle Apparate für
chem. u. physikal. Unterricht.
Eigene Werkstätte.

Physikal. Apparate
u. **chemische Gerätschaften,** sowie sämtl. **Schullehrmittel**
fertigen u. liefern in bekannter tadelloser Ausführung zu mässigen Preisen.
Schultze & Leppert
Physikalisch-mechanische u. elektrotechn. Werkstätten, **Cöthen** in Anh.

Spektralapparate
Kathetometer, optische Bänke usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

Physik. Baukasten
für Lehrzwecke nach **Wilh. Volkmann.**
Projektionseinrichtungen
elektr. Messinstrumente
G B&C
Georg Beck & Co.
Berlin NO.43, Georgenkirchstr.61

Empfehlen
Elektr. Instrumentarium
für Lehrzwecke
welches allgem. Anerkennung findet.
Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt am Main.
Spezialkatalog zu Diensten.

Projektions-Photogramme
für den
Naturwissensch. Unterricht
in zweckdienlichster Ausarbeitung
Prospekt und Verzeichnisse kostenlos
Otto Wigand, Zeitz. 2.

Spezial-Fabrik aller Arten
Elektrischer und magnetischer Mess-Instrumente
für Wissenschaft und Praxis.
Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt am Main.
Kataloge stehen zu Diensten.

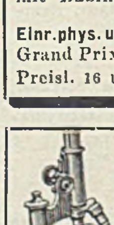
Klapptafel n. Prof. Rühlmann, mit Zubehör, z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie die in Aufgaben vorkommenden Bewegungen. Prospekt frei. Dynamos, Dampfmaschinen, Wasserturbinen.
Rob. Schulze, Halle a. S.
Elektrotechn. u. mechan. Werkstätten.

Neu! Biologische Neu!
Entwickelungspräparate, Injektions-, Nerven-, Situs-Präparate, biologische u. system. Zusammenstellungen usw.
— Katalog 1907 gratis und franko. —
Zoologisches Institut
Wilh. Haferlandt & Co.
Berlin SW. 48, Friedrichstrasse 6.

Paul Gebhardt Söhne, Berlin C 54.
Spezialität:
physik. Apparate, Luftpumpen
mit Babinet bezw. Grassmannschem Hahn.
Einr. phys. u. chem. Experimentier-Räume.
Grand Prix u. gold. Medaille St. Louis.
Preisl. 16 u. 17 mit ca. 5000 Num. grat.

Devonische Petrefakten
Kollektion 25 versch. Spezies, Mk. 3.50, 50 ders. Mk. 8.50, 75 ders. 15.— u. 100 ders. Mk. 24.50. (Alles richtig bestimmt.)
Eruptivgesteinsarten und vollständige Reihe **vulkanischer Auswurfs-Produkte** (Asche, Sand, Bomben, Kugeln usw.)
Max Hopmann, Gerolstein i. Eifel.

Trigonometrie-Demonstrationsapparat
nach Dr. Lampart, neueste, vollkommenste Art, gesetzlich geschützt, 1 bezw. 2 qm ganze Größe, Preis Mk. 47.— Viele Referenzen. — Beschreibung auf Verlangen. — Allein. Lieferant:
Hans Hilgers, Naturw. Apparate, **Bonn.**



Optische Werkstätte
Paul Waechter
Friedenau.
Mikroskope
Photogr. Objektive D. R. P.
Kataloge gratis und franko.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's u. unseren technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie chem.-techn. Wagen von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeek & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Laboratoriums-Apparate
Demonstrations-Apparate
für Chemie, Physik usw.
Dr. Rob. Muencke
Berlin N. W. 6, Luisenstr. 58.

Apparate für elektr. Stromspannungs- und Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektr. Meßapparate
Gans & Goldschmidt, Berlin N. 65

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und :::
:::: chemischen Gerätschaften ::::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen
mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

Projektions-Apparate
neuartiger, vollkommener Bauart
Gebr. Mittelstrass
Hoflieferanten, Magdeburg 40.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O. 27, Andreasstr. 71—73.

R. Jung, Heidelberg.
Werkstätte für
wissenschaftliche Instrumente.
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente.
Ophtalmologische u. physiologische Apparate.

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

Optisch-mechan. Werkstätten
Ed. Liesegang, Düsseldorf
Einzige Spezialität:
Projektions-Apparate

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Botanische Modelle
in eigener Werkstatt hergestellt
liefert und empfiehlt
R. Brendel, Grunewald-Berlin.
Preisverzeichnisse
werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
Patent Klingelfuss.

Naturw. Lehrmittel-Institut
Wilh. Schlüter
Halle a. S.
Erzeugung und Vertrieb naturwissensch. Präparate, Sammlungen und Modelle in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mässigen Preisen. — Kataloge kostenlos.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und Apparate für strahl. Wärme nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz * Wetzlar
Optische Werke
Mikroskope, Mikrotome, Mikrophotogr. u. Projektions-Apparate
Photographische Objektive

Physikal. Apparate
Vollständige Einrichtung
von physikal. Kabinetten
Ferdinand Ernecke
Berlin-Tempelhof

Aquarien
Terrarien, Froschhäuser, Grotten, sämtl. Aquarienbehelfe usw.
inkl. Gratis-Liste, liefert billigst
A. Glaschker, Leipzig M. N. 25
Lieferant vieler Schulen u. Anstalten.

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Heidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Meiser & Mertig
Dresden-N. 6. Z
Werkstätten für Präzisionsmechanik
Physikalische Apparate
◆ Chemische Apparate ◆
Preisverzeichnis kostenlos

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.