Jahrgang XV. 1909. No. 1.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Für die in der Pfingstwoche d. J. zu Freiburg im Breisgau abzuhaltende 18. Hauptversammlung besteht, wie in den Vorjahren, die Absicht, die allgemeinen Sitzungen zum Teil durch Diskussionen, die an einleitende Berichte anknüpfen, über allgemein interessierende Unterrichtsfragen auszufüllen. Daneben sind aber auch selbständige Vorträge in diesen Sitzungen, ebenso wie in den Abteilungssitzungen sehr willkommen. Anmeldungen solcher Vorträge, sowie sonstige auf die Versammlung bezügliche Zuschriften nehmen der Vorsitzende des Ortsausschusses, Herr Prof. Dr. Grabendörfer in Freiburg (Br.), Glümerstraße 30, sowie der Vereins-Vorsitzende, Prof. Pietzker in Nordhausen, jederzeit entgegen. **Der Vereins-Vorstand.**

Die Darstellung und Besprechung mikroskopischer Kristalle im Unterricht.

Demonstrations-Vortrag auf der Hauptversammlung zu Göttingen*)

von L. Kraetzschmar und F. Boedecker (Göttingen).

Auf der letzten Hauptversammlung in Göttingen hatten wir Gelegenheit, uns über die Darstellung und Besprechung mikroskopischer Kristalle zu verbreiten. Der von uns behandelte Gegenstand erregte allgemeines Interesse und von verschiedenen Seiten wurde der Wunsch nach Veröffentlichung des Vortrages in den Unterrichtsblättern ausgesprochen. Indem wir diesem Wunsche gern nachkommen, geben wir den Vortrag im Auszuge wieder und lassen die genauen, für die experimentelle Behandlung der Frage wichtigen Vorschriften folgen.

*) S. Unt.-Bl. XIV, S. 84/85.

Kraetzschmar hatte den Vortrag übernommen und führte im wesentlichen folgendes aus: „M. H.! In Gemeinschaft mit Herrn Dr. Boedecker beschäftige ich mich seit längerer Zeit mit der Darstellung verschiedener strengflüssiger Metalle nach dem Goldschmidtschen Verfahren, wobei bekanntlich als Nebenprodukt eine wesentlich aus kristallisiertem Aluminiumoxyd bestehende Schlacke abfällt, die wir wegen ihrer Beziehung zu den natürlich vorkommenden Edelsteinen gleicher Zusammensetzung einer näheren Untersuchung unterzogen. Bei der Bereitung einer größeren Menge metallischen Chroms, insbesondere als wir für langsame Abkühlung der Schlacke Sorge trugen, erhielten wir eine große Zahl prachtvoll ausgebildeter Rubine, die allerdings sehr klein und nur der mikroskopischen Beobachtung zugänglich waren. Die betreffenden Präparate wurden in der Folge im kristallographischen Unterricht vorgelegt, wo sie das Interesse der Schüler im hohen Maße erweckten. Wir wurden nun von dem Gedanken angeregt, die Darstellung mikroskopischer Kristalle systematischer zu betreiben, um durch ihre Demonstration den kristallographischen Unterricht lebendiger zu gestalten. Der Unterricht in der Kristallographie wird ja vorwiegend an der Hand von Modellen erteilt, deren Wert erprobt ist und durchaus nicht herabgesetzt werden soll. Es liegt aber auf der Hand, daß der Schüler einen wirklichen Kristall mit ganz anderem Interesse betrachtet als ein mehr oder weniger gelungenes Modell. Die Natur liefert aus bekannten Gründen verhältnismäßig wenig allseitig gut ausgebildete Kristalle, und nur wenige Schulen sind in der Lage, sich eine Sammlung brauchbarer Stücke anzulegen und für den Unterricht zu verwerten. Allzu häufig ist man gezwungen, ausschließlich zum Modell seine Zuflucht zu nehmen, wodurch der Unterricht oft eintönig wird und die Aufmerksamkeit des Schülers sich nicht auf der wünschenswerten Höhe erhalten läßt. Angesichts dieser Tatsache halten wir es für erforderlich, Mittel und Wege ausfindig zu machen, wirkliche Kristalle in möglichst großem Umfange dem Schüler vorzuführen, um die mit der Einseitigkeit des Modellunterrichts verbundenen Mängel auszugleichen. Diesem Ziele nähern wir uns unseres Erachtens erfolgreich durch die Darstellung und Besprechung mikroskopischer Kristalle, mit der sich auch weitere Vorteile verbinden. Dem Schüler ist nicht nur Gelegenheit gegeben, an den meistens prachtvoll nach allen Richtungen des Raumes ausgebildeten und in allen möglichen Lagen sich darbietenden Individuen die Eigentümlichkeiten des betreffenden Systems mühelos zu studieren, er lernt auch augenscheinlich die Bedingungen kennen, unter denen Kristalle entstehen, und ist imstande, das Wachstum der Kristalle zu verfolgen sowie das Auftreten neuer Flächen und Zwillingsbildungen zu beobachten. Endlich verbindet das mikroskopische Bild mit dem Reize der Lebendigkeit eine Eleganz, die jeden erfreut und zu immer neuen Versuchen anregt, der sich mit der Darstellung mikroskopischer Kristalle beschäftigt.

Die Demonstration mikroskopischer Kristalle wird man aber nur dann als berechtigtes Hilfsmittel im Unterrichte anerkennen, wenn mit ihrer Darstellung irgendwelche erheblichen Schwierigkeiten nicht verknüpft sind. Diese würden die schulgemäße Behandlung des Gebiets auf jeden Fall ausschließen. Um derartige Bedenken auf ihre Berechtigung zu prüfen, wenden wir uns nun zur Beantwortung der Frage: Wie stellen wir mikroskopische Kristalle dar? Hierbei kommt es zunächst auf die richtige Auswahl gut kristallisierender Salze an. Im allgemeinen lassen sich nur die schwerer löslichen, beim Uebergang in den festen Zustand feinkristallinische Abscheidungen gebenden Salze vorteilhaft für unsere Zwecke verwerten. Doch läßt sich eine bestimmte Grenze der Löslichkeit naturgemäß nicht angeben. Auch leicht lösliche, unter normalen Verhältnissen in makrokristallinischer Form auftretende Salze lassen sich zu unseren Versuchen benutzen, wenn man durch geeignete Kunstgriffe ihre Löslichkeit genügend vermindert. Darüber weiter unten. Die sehr schwer löslichen Salze sind größtenteils weniger gut verwendbar, da sie bei der Darstellung zu feinkörnig ausfallen und oft Neigung zur Bildung von sog. Kristallskeletten zeigen. Weniger leicht als die Auswahl passender Salze ist häufig die Feststellung der Bedingungen, unter denen möglichst gute Kristalle entstehen. In gewissen Fällen ist die Ausführung einer Reihe zweckmäßig variierter Vorversuche notwendig, um zum Ziele zu gelangen. Im übrigen bietet die Darstellung mikroskopischer Kristalle keine Schwierigkeiten. Auch der im Experimentieren weniger Geübte kann in kürzester Zeit die schönsten Kristallisationen erzeugen, doch ist sauberes Arbeiten Vorbedingung, um ein gutes Resultat zu erhalten. Zum Verständnis der in Frage kommenden Erscheinungen ist die Kenntnis einiger Gesetze nötig, die sich auf das Verhalten übersättigter Lösungen im allgemeinen und auf die Löslichkeit der Salze in Wasser im besonderen beziehen. Wir können hierauf an dieser Stelle nicht näher eingehen, sondern müssen auf die einschlägigen Kapitel der Lehrbücher verweisen*). Der Kristallisation geht regelmäßig der Zustand der übersättigten Lösung des betreffenden Salzes voran, deren Konzentration wesentlich die Eigenschaften der sich abscheidenden Kristalle bedingt. Durch Reiben mit einem spitzen Glasstabe oder Impfen mit einer Spur festen Salzes kann man übersättigte Lösungen mehr oder weniger rasch zum Kristallisieren veranlassen, was zu beachten ist, da auch die Dauer der Kristallisation für die Güte der entstehenden Kristalle maßgebend zu sein pflegt. Uebersättigte Salzlösungen können wir leicht nach folgenden Methoden erhalten.

I. Durch Abkühlen gesättigter Lösungen.

II. Durch Vermehrung eines der Jonen eines in gesättigter oder konzentrierter Lösung befindlichen Salzes.

III. Durch Zusammenbringen geeigneter Jonen in solcher Konzentration, daß die Lösung in Bezug auf das entstehende schwerlösliche Salz übersättigt ist.

Methode I ist für unsere Zwecke nur in untergeordneter Weise brauchbar (Natriumnitrat). Methode II eignet sich sehr gut, um leichter lösliche Salze in mikrokristallinischer Form zur Abscheidung zu bringen (Kupfersulfat und Schwefelsäure, Natriumchlorid und Salzsäure). Methode III läßt vielseitige Anwendung zu. Sie nähert sich der mikrochemischen Arbeitsweise, insofern als auch die Mikrochemie für ihre Zwecke mit Vorliebe schwerer lösliche, gut kristallisierende Salze benutzt (Kaliumplatinchlorid). Eine Reihe mikrochemischer Reaktionen läßt sich erfolgreich für unsere Versuche verwerten, wenn sie entsprechend modifiziert werden**). Im übrigen hat die Mikrochemie mit dem hier behandelten Gebiete nichts zu tun. Dem Mikrochemiker kommt es vor allem auf eine scharfe und charakteristische Reaktion, uns lediglich auf die Erzielung gut ausgebildeter Kristalle an. Eine vorzügliche mikrochemische Reaktion auf Magnesium ist zum Beispiel das Auftreten der Kristallskelette von Magnesiumammoniumphosphat, das für unsere Zwecke gänzlich unbrauchbar ist. Andererseits ist beispielsweise Natriumchlorid, das in prachtvollen Mikrokristallen erhalten werden kann, für mikrochemische Reaktionen ungeeignet.

Zur Ausführug der im folgenden beschriebenen Versuche bedient man sich eines einfachen Mikroskops mit 60—120 facher Vergrößerung und möglichst weitem Objektabstand. Außerdem benötigt man eine Anzahl Objektträger aus widerstandsfähigem Glase, einige dünne in eine Spitze ausgezogene massive Glasstäbchen.

*) Ostwald, Grundlinien.
**) Behrens, Anleitung zur mikrochemischen Analyse

sowie einen Vorrat von Kapillarröhren, die man sich leicht in jeder Weite aus dünnen Glasröhren selbst ausziehen kann. Die zur Verwendung gelangenden Chemikalien müssen vollkommen chemisch rein sein und die aus ihnen bereiteten Lösungen auf alle Fälle filtriert werden. Wenn auch die Vorschriften möglichst bestimmt gefaßt sind, so geht doch jeder Versuch unter anderen Bedingungen vor sich, insofern die Mengen der in Reaktion gebrachten Stoffe variieren und infolgedessen wechselnde Konzentrationen erzeugt werden. Man tut daher gut, gleichzeitig mehrere Kristallisationen desselben Salzes zu erzeugen, was zweckmäßig auf dem gleichen Objektträger geschieht, und sucht die schönsten Individuen zur Demonstration aus.

I. Reguläres System.

Caesium-Aluminiumalaun.

Man stellt eine Lösung von 1 g Kaliumaluminiumalaun in 100 ccm Wasser her und setzt 2 Tropfen konz. Schwefelsäure unter Umschütteln hinzu. Mit Hilfe eines Kapillarröhrchens bringt man einen Tropfen dieser Lösung auf den Objektträger und versetzt ihn mit einem Körnchen Caesiumchlorid. Nachdem Lösung erfolgt ist, mischt man vorsichtig durch und reibt mit einem spitzen Glasstabe. Unmittelbar darauf erscheinen prachtvoll ausgebildete, farblose Oktaeder, die zusehends wachsen.

Kaliumplatinchlorid.

Ein Körnchen Kaliumchlorid von Stecknadelkopfgröße löst man auf dem Objektträger in einem kleinen Tropfen Wasser und setzt dicht daneben mittels der Kapillare einen Tropfen einer 10%igen Platinchlorwasserstoffsäure. Die Kristallisation erfolgt bald, nachdem man die Lösungen hat zusammenfließen lassen, und liefert goldglänzende Oktaeder.

Natriumchlorid.

Man bereitet eine gesättigte Kochsalzlösung und läßt in einen Tropfen derselben einen etwa halb so großen Tropfen einer Salzsäure fallen, die durch Vermischen von einem Volumen konz. Säure spez. Gew. 1,19 und einem Volumen Wasser hergestellt wurde. Darauf fährt man vorsichtig einmal mit einem spitzen Glasstabe durch den Tropfen mit dem Erfolge, daß sich alsbald prächtige Würfel abscheiden.

Natriumuranylacetat.

0,5 g Uranylacetat werden in 10 ccm Wasser unter Zusatz von 1 ccm Eisessig gelöst. Ein auf dem Objektträger befindlicher Tropfen dieser Lösung wird mit einem Tropfen einer 10%igen Lösung von Chlornatrium versetzt. Nach vorsichtigem Reiben mit einem Glasstabe erscheinen meist vorzüglich ausgebildete Tetraeder von gelber Farbe, sowie Kombinationen von Tetraeder und Gegentetraeder. Bisweilen treten auch Durchkreuzungszwillinge auf.

II. Hexagonales System.

Natriumnitrat.

Ein Tropfen einer bei gewöhnlicher Temperatur gesättigten Natriumnitratlösung wird mit einem Tropfen verdünnter Salpetersäure versetzt, die durch Vermischen von zwei Volumen Säure spez. Gew. 1,4 und ein Volumen Wasser erhalten wurde. Die Kristallisation wird durch Reiben mit einem spitzen Glasstabe angeregt und liefert außerordentlich scharf ausgebildete Rhomboeder.

III. Quadratisches System.

Strontiumoxalat.

Man löst 4 g Strontiumnitrat in 100 ccm Wasser unter Zusatz von 2 ccm Salpetersäure spez. Gew. 1,4 und läßt einen Tropfen dieser Flüssigkeit in einen Tropfen einer 5%igen Oxalsäurelösung fallen, ohne weiter durchzumischen. Durch dieses auch beim Natriumchlorid angewandte Verfahren erreicht man die Bildung verschiedener Konzentrationszonen. Wo Strontiumionen im Ueberschuß sind, pflegen die schönsten Kristalle zu entstehen. Man beobachtet Pyramiden, Kombinationen von Prisma und Pyramide und Kombinationen von Prisma und Basis (seltener).

IV. Rhombisches System.

Kaliumsulfat.

Einen Tropfen einer bei gewöhnlicher Temperatur gesättigten Kaliumsulfatlösung vermischt man mit einem Tropfen einer bei gewöhnlicher Temperatur gesättigten Lösung von Kaliumchlorid und regt durch Impfen sowie Reiben mit einem spitzen Glasstabe die Kristallisation an. Die langsam von statten gehende Kristallbildung liefert einfache Kombinationen der rhombisch-vollflächigen Klasse.

Calciumtartrat.

Neben einen Tropfen einer Calciumchloridlösung, die auf 400 ccm Wasser 1 g wasserfreies Chlorcalcium enthält, bringt man einen etwa gleich großen Tropfen Wasser, löst in letzterem einige Körnchen Seignettesalz auf und vereinigt dann beide Tropfen miteinander. Nach einiger Zeit entstehen prachtvoll ausgebildete Kristalle, die Kombinationen von Prisma und Sphenoiden darstellen.

V. Monoklines System.

Kalium-Berylliumoxalat.

Einen Tropfen einer Lösung von 2 g kristallisiertem Berylliumsulfat in 100 ccm Wasser versetzt man mit einem Tropfen einer 5%igen Lösung von neutralem Kaliumoxalat und führt durch Reiben und Impfen die Kristallisation herbei. Impfmaterial erhält man, indem man einen Tropfen der in der angegebenen Weise bereiteten Lösung von Kaliumberylliumoxalat in der Wärme auf dem Objektträger eindunsten läßt. Man beobachtet einfache und komplizierte Formen des monoklinen Systems, manchmal auch Zwillinge nach Art des Gypses.

VI. Triklines System.

Kupfervitriol.

Man bereitet eine bei gewöhnlicher Temperatur gesättigte Kupfersulfatlösung und eine verdünnte Schwefelsäure durch Vermischen von 1 Volumen konz. Schwefelsäure und drei Volumen Wasser. Einen Tropfen der verdünnten Schwefelsäure versetzt man mit einem 3—5 mal so kleinen Tropfen der Kupfersulfatlösung. Die alsbald auftretenden und zusehends wachsenden Kristalle stellen alle möglichen Uebergangsformen von den einfachsten bis zu den kompliziertesten Kombinationen des triklinen Systems dar.

Neue Lehrsätze zur elementaren Dreiecksgeometrie.

Von Dr. **Richard Schröder** (Groß-Lichterfelde).

Wenn ich die folgenden Sätze, die sich durch Einfachheit und Eleganz auszeichnen, „neu" nenne, so soll damit nur gesagt werden, daß es meinen Kollegen und mir nicht möglich war, sie in der uns zugänglichen Literatur aufzufinden. Sollte jemand sie schon anderswo gelesen haben, so bitte ich um freundliche Mitteilung.

Zu dem Dreieck ABC ($a > b > c$) seien konstruiert: der Inkreis (Zentrum O, Radius ϱ), die 3 Ankreise (an Seite a Zentrum O', Radius ϱ', an b O'' und ϱ'', an c O''' und ϱ''') und der Umkreis (Zentrum M, Radius r). Der Kürze halber sollen die Dreiecke $OO''O'''$, $OO'''O'$, $OO'O''$, $O'O''O'''$ mit E', E'', E''', E, die Dreiecke $MO''O'''$, $MO'''O'$, $MO'O''$ mit η', η'', η''', die Dreiecke MOO', MOO'', MOO''' mit ε', ε'', ε''' bezeichnet werden. Die Sätze lauten dann:

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned} E''+E''' &= 2(-\eta'+\eta''+\eta''') = 2(\eta''+\varepsilon'') = 2(\eta'''+\varepsilon''') \\ E'''+E' &= 2(\eta'-\eta''+\eta''') = 2(\eta'''-\varepsilon''') = 2(\eta'+\varepsilon') \\ E'+E'' &= 2(\eta'+\eta''-\eta''') = 2(\eta'-\varepsilon') = 2(\eta''-\varepsilon'') \end{aligned}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{aligned} E'''-E'' &= 4(\eta'''-\eta'') = 4\varepsilon' \\ E'-E''' &= 4(\eta'-\eta''') = -4\varepsilon'' \\ E''-E' &= 4(\eta''-\eta') = 4\varepsilon''' \end{aligned}\right.$$

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned} E+E' &= 4\eta' \\ E+E'' &= 4\eta'' \\ E+E''' &= 4\eta''' \end{aligned}\right. \qquad \text{IV.}\left\{\begin{aligned} \eta'''-\eta'' &= \varepsilon' \\ \eta'-\eta''' &= -\varepsilon'' \\ \eta''-\eta' &= \varepsilon''' \end{aligned}\right.$$

$$\text{V.}\ \varepsilon'-\varepsilon''+\varepsilon'''=0$$

$$\text{VI.}\left\{\begin{aligned} E &= \eta'+\eta''+\eta''' = 2r\,s \\ E' &= 3\eta'-(\eta''+\eta''') = 2r(s-a) \\ E'' &= 3\eta''-(\eta'''+\eta') = 2r(s-b) \\ E''' &= 3\eta'''-(\eta'+\eta'') = 2r(s-c) \end{aligned}\right.$$

Satz VI[1] spricht sich am kürzesten aus: „Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem Radius des Feuerbachschen Kreises und dem Umfang des Höhenfußpunktdreiecks". — Von den schönen Spezialisierungen will ich hier nur erwähnen, daß für rechtwinklige Dreiecke u. a. folgende Sätze gelten:

$$\text{VII.}\left\{\begin{aligned} \eta'' &= \frac{1}{8}\overline{O'''O'}^2 \\ \eta''' &= \frac{1}{8}\overline{O'O''}^2 \end{aligned}\right. \qquad \text{VIII.}\left\{\begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{1}{8}\overline{OO''}^2 \\ \varepsilon''' &= \frac{1}{8}\overline{OO'''}^2 \end{aligned}\right.$$

$$\text{IX.}\left\{\begin{aligned} \eta' &= \frac{a}{4}(b+c) \\ \eta'' &= \frac{a}{4}(c+a) \\ \eta''' &= \frac{a}{4}(a+b) \end{aligned}\right. \qquad \text{X.}\left\{\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{a}{4}(b-c) \\ -\varepsilon'' &= \frac{a}{4}(c-a) \\ \varepsilon''' &= \frac{a}{4}(a-b) \end{aligned}\right.$$

$$\text{XI.}\left\{\begin{aligned} E &= \frac{a}{2}(a+b+c) = 2r\varrho' \\ E' &= \frac{a}{2}(-a+b+c) = 2r\varrho \\ E'' &= \frac{a}{2}(a-b+c) = 2r\varrho''' \\ E''' &= \frac{a}{2}(a+b-c) = 2r\varrho'' \end{aligned}\right.$$

$$\text{XII.}\left\{\begin{aligned} E''+E''' &= a\,a \\ E'''+E' &= a\,b \\ E'+E'' &= a\,c \end{aligned}\right. \qquad \text{XIII.}\left\{\begin{aligned} E+E' &= a(b+c) \\ E+E'' &= a(c+a) \\ E+E''' &= a(a+b) \end{aligned}\right.$$

Zu Satz V. möchte ich bemerken, daß ich ihn zunächst für rechtwinklige Dreiecke fand; mein Kollege, Herr Dr. **Leick**, dem ich ihn mitteilte, erweiterte ihn sogleich für schiefwinklige Dreiecke und gab einen eleganteren Beweis, als der meinige war.

Zur Anwendung der Zinseszinsrechnung im mathematischen Unterricht.

Von R. **Gerhardt** (Potsdam).

Die Anregungen, den Schülern den trockenen Stoff der Mathematik dadurch möglichst schmackhaft zu machen, daß ihr Interesse durch seine praktische Verwendbarkeit erweckt wird, sind auf fruchtbaren Boden gefallen. Der darstellenden Geometrie sind besondere Stunden gewidmet, und wohl alle Lehrer haben mit den neueren Aufgabensammlungen bei der Wahl ihrer Aufgaben ihre Aufmerksamkeit auf technische Physik, Geodäsie, Nautik und Versicherungsmathematik gelenkt. Allen diesen praktischen Gebieten die Zeit zu widmen, die nötig wäre, um die Schüler in ihnen heimisch werden zu lassen, ist freilich nicht möglich. Jeder Lehrer darf nur nach sorgfältigster Auswahl diejenigen Aufgaben den Schülern bieten, die sich ohne zeitraubende Umwege oder Abwege seinen Lehrstunden einfügen. Sonst würde dieses Streben nach praktischer Verwendung leicht eine neue Quelle werden für die Klagen von Ueberladung des Gedächtnisses, von Zersplitterung des Interesses, von zuvielseitiger Anspannung. Natürlich wird der Lehrer seinen Neigungen nach dieser Richtung um so weiter und mit um so größerem Erfolg nachgehen können, je kleiner und je tüchtiger der Schülerjahrgang ist, mit dem er arbeitet. Die Regel ist eine volle Klasse mit mäßiger Begabung, die Regel ist also auch weiseste Beschränkung, will man alle Schüler mitnehmen. Auch wenn man eines der praktischen Gebiete bevorzugt, ist solche Beschränkung nötig. Denn hier die Schüler tief hineinzuführen, kann leicht den Vorwurf verfrühter Fachbildung erwecken, unter der die Vorbildung zur allgemeinen Berufstüchtigkeit leidet. Maßgebend ist hier wohl der Grundsatz: der Schüler soll in den Stand gesetzt werden, sich auf dem betreffenden Felde ohne Schwierigkeiten selbständig zurecht zu finden.

Dasjenige Gebiet nun, das am lautesten den Hinweis auf das praktische Leben fordert, ist die Zinseszinsrechnung. Nachdem man an die Grundformeln, besonders an die Sparformel, die einfachsten typischen Aufgaben angeschlossen hat, sollte man sofort zu Aufgaben übergehen, die aus dem politischen Leben herausgegriffen oder wenigstens geeignet sind, auf die Praxis ein klärendes Licht zu werfen. Aber was für künstliche Aufgaben findet man da in den Aufgabensammlungen! Aufgaben mit im Leben gar nicht vorkommenden Zinssätzen, Tilgungsaufgaben ohne Rücksichtnahme auf die im politischen Leben gebräuchlichen Rückzahlungsbedingungen, Aufgaben der Renten- und Lebensversicherung, die eigentlich nur unter Berücksichtigung der Sterblichkeit zu lösen sind, aber durch Einkleidung in eine falsche Form die Versicherungstechnik vermeiden.

Im folgenden soll versucht werden, die Verwendung der Zinseszinsrechnung den aufgestellten Forderungen besser anzupassen.

I.

Zur Tilgung von Anleihen.*)

In der Staats- und Kommunalverwaltung wie in der Industrie tritt die Aufgabe, den Tilgungsplan einer Anleihe zu entwerfen, in der Regel mit der Forderung

*) In der letzten Auflage der Aufgabensammlung von Müller und Kutnewsky (für reale Anstalten) sind bereits dem praktischen Leben entnommene Tilgungsaufgaben aufgenommen. Sie sollten auch in die Ausgabe für Gymnasien Aufnahme finden.

auf, Zinsen und Tilgungsraten sollen zusammen jährlich gleiche Summen ergeben, damit der jährliche Etat keinen erheblichen Schwankungen ausgesetzt wird. In dieser Form bietet die Aufgabe Anlaß zu einer anderen als der gewöhnlichen Lösung.

Die Anleihe K soll bei Berechnung von $p^0/_0$ durch n jährliche nachschüssige Raten k_1, k_2 usw. getilgt werden unter Festhaltung der oben erwähnten Bedingung. Die jährlich nachschüssig fälligen Zinsen sind

$$K \cdot \frac{p}{100},\ (K - k_1)\frac{p}{100},\ (K - k_1 - k_2)\frac{p}{100}$$

usw. Daher gilt erstens

$$K \cdot \frac{p}{100} + k_1 = (K - k_1)\frac{p}{100} + k_2;$$

hieraus folgt

$$k_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k_2,$$

$$k_2 = k_1 \cdot q.$$

Ferner gilt

$$K \cdot \frac{p}{100} + k_1 = (K - k_1 - k_2)\frac{p}{100} + k_3;$$

hieraus folgt:

$$k_1 \cdot q + k_2 \cdot \frac{p}{100} = k_3;$$

$$k_3 = k_2 \cdot q$$
$$= k_1 q^2; \text{ somit auch}$$
$$k_4 = k_1 q^3,$$
$$k_n = k_1 \cdot q^{n-1}.$$

Die jährlichen Tilgungsraten sind also aus der des ersten Jahres durch jährlichen Zinszuschlag zu gewinnen. Die erste Rate ergibt sich aus der Gleichung

$$K - (k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n) = 0;$$

denn nunmehr lautet sie

$$K - k_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 0 \text{ oder}$$

$$K - k_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0. \text{ Hieraus folgt}$$

$$k_1 = K \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Die Summe aus Zinsen und Tilgungsrate muß den bekannten durchschnittlichen Jahresbedarf a *) ergeben, der der Gleichung für die nachschüssige Rente a

$$K q^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

genügt. In der Tat ist

$$K \cdot \frac{p}{100} + k_1 = K(q - 1) + K \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$
$$= K\frac{q - 1}{q^n - 1} \cdot q^n$$
$$= a;$$

also $a = k_1 \cdot q^n$.

Diese Betrachtungsart hat auch den Vorteil, leichter übersehen zu können, wie lange eine Amortisation dauert bei in Prozenten des Kapitals gegebener erster Tilgungsrate. Wenn z. B. eine Stadt eine Anleihe K mit $4^0/_0$ verzinsen und mit $2^0/_0$ tilgen **) will, so wäre

$$k_1 = K\frac{q - 1}{q^n - 1} = \frac{2}{100}K, \text{ also}$$
$$(q - 1)\,100 = 2\,q^n - 2,$$
$$6 = 2\,q^n,$$
$$3 = q^n.$$

Hieraus folgt $n = 28$ J.

Allgemein bei $a^0/_0$ Tilgung und $p^0/_0$ Verzinsung ist:

$$p = a \cdot q^n - a$$
$$q^n = \frac{p + a}{a}.$$

Sind die Zahlungen an Zinsen und Tilgungsraten halbjährlich gefordert, so ändert sich die Berechnung nur insoweit als $q = 1 + \frac{1}{2}\frac{p}{100}$ und $n =$ der Zahl der Halbjahre zu setzen ist. Ein solches Beispiel aus der Praxis ist folgendes:

Eine Stadt will eine Anleihe von 600 000 M, die in Stücken zu 200, 300, 500 und 1000 M begeben ist, bei einer Verzinsung von $4^1/_2{}^0/_0$ innerhalb 20 Jahren in halbjährlichen Terminen tilgen. Der Tilgungsplan ist aufzustellen!

Als erste Rate ergibt sich

$$k_1 = 9406,$$

als halbjährlicher Bedarf

$$a = 22\,910 \text{ M}.$$

Mit der nach den Stückwerten nötigen Abrundung erhält man durch die aufgestellten Formeln folgenden

Tilgungsplan:

Nr.	Raten	Kapital-zinsen	Halbjährl. Bedarf	Kapitalrest
1.	9 400	13 500	22 900	590 600
2.	9 600	13 288.50	22 888.50	581 000
3.	9 800	13 072.50	22 872.50	571 200
4.	10 100	12 852	22 952	561 100
5.	10 300	12 624.75	22 924.75	550 800
6.	10 500	12 393	22 893	540 300
7.	10 700	12 156.75	22 856.75	529 600
8.	11 000	11 916	22 916	518 600
9.	11 300	11 668.50	22 969.50	507 300
10.	11 500	11 414.25	22 915.25	495 800
11.	11 700	11 155.50	22 856.50	484 100
12.	12 000	10 892.25	22 893.25	472 100
13.	12 300	10 622 25	22 923.25	459 800
14.	12 600	10 345.50	22 945.50	447 200
15.	12 800	10 062	22 862	434 400
16.	13 200	9 774	22 974	421 200
17.	13 500	9 477	22 977	407 700
18.	13 700	9 173.25	22 873.25	394 000
19.	14 000	8 865	22 865	380 000
20.	14 400	8 550	22 950	365 600
21.	14 700	8 226	22 926	350 900
22.	15 000	7 895.25	22 895.25	335 900
23.	15 300	7 557.75	22 857.75	320 600
24.	15 700	7 213.50	22 913.50	304 900
25.	16 000	6 860.25	22 860.25	288 900
26.	16 400	6 500.25	22 900.25	272 500
27.	16 800	6 131.25	22 931.25	255 700
28.	17 200	5 753.25	22 953.25	238 500
29.	17 500	5 366.25	22 866 25	221 000
30.	17 900	4 972.50	22 872.50	203 100
31.	18 300	4 569.75	22 869.75	184 800
32.	18 800	4 158	22 958	166 000
33.	19 200	3 735	22 935	146 800
34.	19 600	3 303	22 903	127 200
35.	20 000	2 862	22 862	107 200
36.	20 500	2 412	22 912	86 700
37.	21 000	1 950.75	22 950.75	65 700
38.	21 400	1 478.25	22 888.25	44 300
39.	21 900	996.75	22 906.75	22 400
40.	22 400	504	22 914	0
Sa.	600 000			

Bei Staats- und Kommunalanleihen werden gewöhnlich die Zinsen halbjährlich, die Tilgungsraten

*) Der noch immer fälschlich Tilgungsrate genannt wird.

**) Was freilich der gebräuchliche, aber wieder nicht korrekte Ausdruck ist, denn die Zinssummen fallen, die Tilgungsraten steigen, nur die erste Rate ist $2^0/_0$ des K.

jährlich nachschüssig gezahlt. Dem entspricht folgende Betrachtung:

Da Zinsen und Tilgungsrate wieder einen möglichst konstanten Jahresbedarf ergeben sollen, so haben wir für Ende des ersten und zweiten Jahres die Gleichung:

$$K \cdot \frac{1}{2}\frac{p}{100}\left(1+\frac{1}{2}\frac{p}{100}\right) + K \cdot \frac{1}{2}\frac{p}{100} + k_1 =$$
$$(K-k_1)\frac{1}{2}\frac{p}{100}\left(1+\frac{1}{2}\frac{p}{100}\right) + (K-k_1)\frac{1}{2}\frac{p}{100} + k_2$$

oder wenn wir $1+\frac{1}{2}\frac{p}{100} = q_1$ setzen:

$$K(q_1-1)\cdot q_1 + K(q_1-1) + k_1 =$$
$$(K-k_1)(q_1-1)q_1 + (K-k_1)(q_1-1) + k_2;$$

hieraus folgt:

$$K(q_1-1)(q_1+1) + k_1 = (K-k_1)(q_1-1)(q_1+1) + k_2,$$
$$k_1 = -k_1(q^2-1) + k_2,$$
$$k_1 q_1^2 = k_2.$$

Ferner gilt für Ende des ersten und dritten Jahres:

$$K(q_1-1)q_1 + K(q_1-1) + k_1 =$$
$$(K-k_1-k_2)(q_1-1)q_1 + (K-k_1-k_2)(q_1-1) + k_3.$$
$$K(q_1-1)(q_1+1) + k_1 =$$
$$(K-k_1-k_2)(q_1-1)(q_1+1) + k_3,$$
$$k_1 = -(k_1+k_2)(q_1^2-1) + k_3,$$
$$k_1 q_1^2 + k_2(q_1^2-1) = k_3 \quad \text{und da}$$
$$k_2 = k_1 q_1^2 \quad \text{ist:}$$
$$k_1 q_1^2 + k_1 q_1^2 (q_1^2-1) = k_3, \quad \text{also}$$
$$k_3 = k_1 q_1^4.$$

Mithin haben wir

$$k_4 = k_1 \cdot q_1^6,$$
$$\cdots\cdots$$
$$k_n = k_1 \cdot q_1^{2(n-1)};$$
$$K = k_1 + k_1 \cdot q_1^2 + k_1 \cdot q_1^4 + \ldots + k_1 \cdot q_1^{2(n-1)}$$
$$= k_1 \cdot \frac{q_1^{2n}-1}{q_1^2-1}; \quad \text{daher die erste Rate}$$
$$k_1 = K \cdot \frac{q_1^2-1}{q_1^{2n}-1}.$$

Der durchschnittliche Jahresbedarf ist also:

$$k_1 + K\frac{1}{2}\frac{p}{100} + K\frac{1}{2}\frac{p}{100}\cdot q^1 = K \cdot \frac{q_1^2-1}{q_1^{2n}-1} + K\frac{1}{2}\frac{p}{100}(1+q_1)$$
$$= K \cdot \frac{q_1^2-1}{q_1^{2n}-1} + K\cdot(q_1-1)(q_1+1)$$
$$= K \cdot \frac{q_1^2-1}{q_1^{2n}-1} \cdot (1+q_1^{2n}-1)$$
$$= K \cdot q_1^{2n} \cdot \frac{q_1^2-1}{q_1^{2n}-1}$$
$$= k_1 \cdot q_1^{2n}.$$

Eine entsprechende Aufgabe wäre folgende: Eine Stadt hat eine Anleihe von 2000000 M in Schuldscheinen von je 1000 M zu 4% aufgenommen und will sie in 10jährlichen nachschüssigen Raten tilgen; die Zinsen sind halbjährlich zu zahlen. Der Tilgungsplan ist aufzustellen!

Als erste Rate ergibt sich $k_1 = 166300$ M,
als Jahresbedarf . . . . $a = 247100$ „

Die sämtlichen Raten sind zunächst aus der ersten durch fortgesetzte Multiplikation mit $q_1^2 = 1{,}0404$ zu berechnen und dann zu ganzen Vielfachen von Tausend abzurunden. Dann ergibt sich folgender

Tilgungsplan:

Halbjahre	Tilgungsraten	Kapitalzinsen	Jahresbedarf, bezogen auf den Jahresschluß	Kapitalrest
1.		40 000		
2.	166 000	40 000	246 800	1 834 000
3.		36 680		
4.	173 000	36 680	247 094	1 661 000
5.		33 220		
6.	180 000	33 220	247 104	1 481 000
7.		29 620		
8.	187 000	29 620	246 832	1 294 000
9.		25 880		
10.	195 000	25 880	247 278	1 099 000
11.		21 980		
12.	203 000	21 980	247 400	896 000
13.		17 920		
14.	211 000	17 920	247 198	685 000
15.		13 700		
16.	219 000	13 700	246 674	466 000
17.		9 320		
18.	228 000	9 320	246 826	238 000
19.		4 760		
20.	238 000	4 760	247 615	0
Sa.	2 000 000			

Industrielle Aktiengesellschaften müssen oft, um eine Anleihe abschließen zu können, mehr Geld als die gewöhnlichen Zinsen aufwenden. Z. B. wurden von einer größeren Fabrik 600000 M in Obligationen von je 1000 M zu $4\frac{1}{2}$% aufgenommen mit der Verpflichtung, sie innerhalb 20 Jahren in jährlichen Raten mit einem Aufschlag von 5% zurückzuzahlen.

Setzen wir $1{,}05 = r$, $1{,}045 = q$, $1{,}0225 = q_1$, das Kapital $= K$, die Raten $= k_1$, k_2, k_3 usw., so gilt nach der Forderung des konstanten Jahresbedarfes für das Ende des ersten und zweiten Jahres

$$K(q_1-1)q_1 + K(q_1-1) + k_1 \cdot r =$$
$$(K-k_1)(q_1-1)q_1 + (K-k_1)(q_1-1) + k_2 r;$$

hieraus folgt:

$$k_1[r + (q_1-1)(q_1+1)] = k_2 \cdot r,$$
$$k_2 = k_1\left(1 + \frac{q_1^2-1}{r}\right).$$
$$= k_1 \cdot \sigma.$$

Für das Ende des ersten und dritten Jahres gilt:

$$(K-k_1-k_2)(q_1-1)q_1 + (K-k_1-k_2)(q_1-1) + k_3 \cdot r =$$
$$K(q_1-1)q_1 + K(q_1-1) + k_1 \cdot r.$$

Daher ist

$$k_3 \cdot r = k_1 \cdot r + k_1[(q_1-q)q_1 + q_1 - 1] + k_2[q_1(q-1) + q_1 - 1)$$
$$= k_1 r + k_1(q_1-1)(q+1) + k_1 \cdot \sigma \cdot (q_1-1)(q+1)$$
$$= k_1[r + q_1^2 - 1 + (q_1^2-1)\cdot\sigma];$$
$$k_3 = k_1\left[\sigma + \sigma\left(\frac{q_1^2-1}{r}\right)\right]$$
$$= k_1 \cdot \sigma^2.$$

Mithin ergibt sich:

$$k_{20} = k_1 \sigma^{19},$$
$$K = k_1(1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^{19})$$
$$= k_1 \cdot \frac{\sigma^{20}-1}{\sigma-1},$$
$$k_1 = K \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma^{20}-1};$$

der durchschnittliche Jahresbedarf ist

$$a = K(q_1-1)q_1 + K(q_1-1) + k_1 r$$
$$= K(q_1^2-1) + K\frac{\sigma-1}{\sigma^{20}-1}\cdot r$$

$$= K \cdot r\,(\sigma - 1) + K \frac{\sigma - 1}{\sigma^{20} - 1} \cdot r$$

$$= K(q-1)\,r\left(1 + \frac{1}{\sigma^{20} - 1}\right)$$

$$= K \frac{\sigma - 1}{\sigma^{20} - 1}\, r \cdot (\sigma^{20} - 1 + 1)$$

$$= K \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma^{20} - 1} \cdot \sigma^{20} \cdot r.$$

$$= k_1\, \sigma^{20} \cdot r.$$

Zur Berechnung sind fünfstellige Logarithmen hinreichend, da es sich bei den Raten nur um abgerundete Zahlen handelt, und man braucht für die Raten nur einen dreistelligen Numerus zu vermerken, um unter Berücksichtigung der Summe 600 und einer möglichst gleichmäßigen Steigerung die Zahl der jährlich auszulosenden Stücke zu bestimmen. So ergibt sich, da $k_1 = 19464$, $a = 47736$ M ist, folgender

Tilgungsplan:

Halbjahre	Zahl der auszulosenden Stücke (1 St. = 1000 M)	Tilgungsraten mit Aufschlag	Kapitalzinsen	Jahresbedarf, auf den Jahresschluß bewertet	Kapitalrest
1.			13 500		
2.	19	19 950	13 500	47 254	581 000
3.			13 072.50		
4.	20	21 000	13 072.50	47 439	561 000
5.			12 622.50		
6.	21	22 050	12 622.50	47 578	540 000
7.			12 150		
8.	22	23 100	12 150	47 947	518 000
9.			11 655		
10.	23	24 150	11 655	47 722	495 000
11.			11 137.50		
12.	24	25 200	11 137 50	47 726	471 000
13.			10 597.50		
14.	25	26 250	10 597 50	47 684	446 000
15.			10 035		
16.	26	27 300	10 035	47 596	420 000
17.			9 450		
18.	28	29 400	9 450	48 513	392 000
19.			8 820		
20.	29	30 450	8 820	48 288	363 000
21.			8 167.50		
22,	30	31 500	8 167.50	48 018	333 000
23			7 492.50		
24.	31	32 550	7 492 50	47 704	302 000
25.			6 795		
26.	32	33 600	6 795	47 343	270 000
27.			6 075		
28.	34	35 700	6 075	47 987	236 000
29.			5 310		
30.	35	36 750	5 310	47 489	201 000
31			4 522 50		
32.	37	38 850	4 522.50	47 996	164 000
33.			3 690		
34.	38	39 900	3 690	47 363	126 000
35.			2 835		
36.	40	42 000	2 835	47 734	86 000
37.			1 935		
38	42	44 100	1 935	48 014	44 000
39.			990		
40.	44	46 200	990	48 202	0

Wie aus dieser Tafel hervorgeht, kann bei solchen Anleihen, die nur in Stücken zu 1000 M und nicht auch in kleineren begeben sind, der durchschnittliche Jahresbedarf nur angenähert konstant bleiben. Es können auch größere Abweichungen als 500 M vorkommen. Jedenfalls verlegt man aber die etwa unnormalen Steigerungen der Durchschnittssumme besser auf die späteren Jahre, in denen doch nach sehr wahrscheinlicher Annahme die Aktiengesellschaft kapitalkräftiger ist als beim Beginn der Tilgung.

II.

Zur Rentenrechnung.

In den meisten Aufgabensammlungen finden sich Aufgaben wie diese:

„Jemand hinterläßt seiner Witwe eine jährliche Rente von a M; nach ihrem Tode soll die Tochter, solange sie lebt, eine Leibrente von b M erhalten. Welches Kapital mußte er zu diesem Zwecke deponieren, wenn für die Frau noch α, für die Tochter von jetzt an noch β Jahre Lebensdauer angenommen und 4% Zinsen jährlich gerechnet werden?"

Daß solche Aufgaben aus den Schulsammlungen verschwinden, dafür möchten diese Zeilen wirken. Leibrenten und ihre gegenwärtigen Werte sind nicht anders zu berechnen als mit Hilfe einer Sterblichkeitstafel, d. h. versicherungstechnisch. Wenn der Schüler diese Rechnungsart nicht kennen gelernt hat, wozu aber jetzt einige Aufgabenbücher Anleitung geben, so muß man ihn mit dieser Art Aufgaben verschonen. Die willkürliche Annahme der ferneren Lebensdauer von Frau und Tochter erweckt in dem Schüler falsche Ideen von der Möglichkeit, die Sterblichkeit in Rechnung zu ziehen. Ja selbst die aus einer Sterblichkeitstafel ableitbare Zahl der wahrscheinlichen Lebensdauer für ein bestimmtes Alter ist nicht in unseren gewöhnlichen Zinseszinsformeln zu verwenden. Es ist vielleicht angezeigt, dies hier noch einmal darzulegen. Die Anzahl der Lebenden vom Alter x sei λ_x, die Sterblichkeitstafel enthalte die letzten noch Lebenden im Alter von 99 Jahren, die Todesfälle mögen sich so auf ein Jahr verteilen, daß die Annahme, sie ereignen sich alle in der Mitte des Jahres, für die Rechnung brauchbar ist. Dann durchleben λ_x Personen im ganzen noch folgende Anzahl von Jahren:

$$\lambda_{x+1} + \frac{\lambda_x - \lambda_{x+1}}{2} + \lambda_{x+2} + \frac{\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2}}{2} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \lambda_{99} + \frac{\lambda_{98} - \lambda_{99}}{2} + \frac{\lambda_{99}}{2}$$

$$= \frac{\lambda_x}{2} + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \cdots\cdots\cdots + \lambda_{99}$$

$$= \frac{\lambda_x}{2} + \Sigma \lambda_{x+1}.$$

Die wahrscheinliche Lebensdauer für eine Person vom Alter x ist daher

$$\frac{\Sigma \lambda_{x+1} + \frac{\lambda_x}{2}}{\lambda_x} = \frac{\Sigma \lambda_{x+1}}{\lambda_x} + \frac{1}{2}.$$

Verfährt man nun in der Bestimmung des gegenwärtigen Wertes aller auszuzahlenden vorschüssigen Renten r nach der gewöhnlichen Weise, so erhält man als solchen, da die $(y+1)$ Rente noch gezahlt wird,

$$R_{1x} = \frac{r}{q^y} \cdot \frac{q^{y+1} - 1}{q - 1}$$

oder für $r = 1$ $\quad {}_1R_x = \frac{1}{q^y} \cdot \frac{q^{y+1} - 1}{q - 1},$

worin y die Ganzen jener Lebensdauerzahl bedeutet. Diese summarische Abzinsung ist falsch. Die Abzinsung der fälligen Leistungen muß für jedes Jahr besonders erfolgen gemäß der Absterbeordnung. Dann ergibt sich

$$R_x = \frac{1}{\lambda_x} \cdot \left[\lambda_x + \frac{\lambda_{x+1}}{q} + \frac{\lambda_{x+2}}{q^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\lambda_{99}}{q^{99-x}}\right]$$

$$= \frac{\Sigma v_x}{v_x}, \text{ worin}$$

$v_x = \frac{\lambda_x}{q^x}$ die sogenannte abgezinste Zahl der Lebenden bedeutet und

$$\Sigma v_x = v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \cdots\cdots + v_{99} \text{ ist.}$$

Ein paar Beispiele mögen zum Vergleich dienen:

(Tafel der 17 englischen Gesellschaften, $3^1/_2{}^0/_0$.)

Alter	$\frac{\Sigma\lambda_{x+1}}{\lambda_x} + \frac{1}{2}$	${}_1R_x$ für 100 M Rente	R_x für 100 M Rente
20	41,49	2260	2101
30	34 44	2070	1931
40	27,28	1829	1706
50	20,18	1521	1412
60	13,77	1130	1079

Für die gewöhnliche Rechnungsart brauchbar wird aber die angeführte Aufgabe, wenn sie in eine andere Form gegossen wird:

Jemand hatte testamentarisch bestimmt, daß aus seiner Hinterlassenschaft bei einer Versicherungsbank für seine Witwe eine jährliche vorschüssige Rente von a M, für seine Tochter eine solche von b M, zahlbar erst vom Tode der Witwe an, (Verbindungsrente und zwar sogenannte Ueberlebensrente) gekauft wurde. Die Bank hatte R M, abgesehen von den Unkosten, gefordert und zahlte später α Renten an die Witwe, β Renten an die Tochter. Zu berechnen ist der scheinbare Gewinn oder Verlust der Bank. (Scheinbar muß dieser im Einzelfall berechnete Gewinn oder Verlust genannt werden, weil ja die Bank mit der Sterblichkeitstafel rechnet, und weil dadurch im Rentenfall die Kosten des längeren Lebens des einen Rentners durch das kürzere des anderen im allgemeinen ausgeglichen wird.) So ist eine Sterblichkeitsberücksichtigung ausgeschaltet.

Der Zinsfuß der Versicherungstechnik ist im allgemeinen $3^1/_2{}^0/_0$, nur in Ausnahmefällen $4^0/_0$ oder $3^0/_0$.

Will man den Schülern Aufgaben vorlegen, die Rücksicht auf die Sterblichkeit verlangen, so muß man schon zu Sterblichkeitstafeln greifen und unter Hintansetzung anderer Gebiete praktischer Mathematik die Versicherungstechnik bevorzugen und wo möglich in der Ausdehnung einführen, wie sie die letzte bereits oben erwähnte Aufgabensammlung von Müller und Kutnewsky darbietet. Freilich müßte auch hier die Hand eines praktisch erfahrenen Lehrers leiten. Ob der Schüler dabei lernt, Aufgaben, wie sie die Versicherungstechnik so mannigfach bietet, selbständig zu lösen, erscheint zweifelhaft. Wohl nur ein äußerliches Hantieren, ein handwerksmäßiges Rechnen und Berechnen gegebener Formeln wird erreichbar sein. Aber der Schüler wird durch diese Einführung wenigstens mit der Tatsache vertraut gemacht, daß es möglich ist, Sterblichkeitsbeobachtungen mit der Mathematik in Rechnung zu ziehen und eins der wichtigsten sozialpolitischen Probleme einer brauchbaren Lösung zuzuführen. Erfahren muß er auch, daß zur Rentenberechnung ganz besondere Rentnersterbetafeln benutzt werden müssen. Es wird ihm auch leicht einleuchten, daß im allgemeinen nur solche Personen sich Renten kaufen, die sich leidlich gesund wissen, daß also diese Rentner eine wesentlich geringere Sterblichkeit haben als die anderen, selbst die ärztlich untersuchten versicherten Leben. Er wird ferner hören müssen, daß das weibliche Geschlecht eine geringere Sterblichkeit hat als das männliche, so daß die Rentenbanken gezwungen sind, Rentnerabsterbeordnungen sowohl für Männer als für Frauen gesondert in ihren Berechnungen zu benutzen. Darauf muß vor Benutzung irgend einer Sterbetafel in der Schule hingewiesen werden. Wie weit man nun in der Schule überhaupt auf diese Rechnungen eingehen kann, hängt wohl nicht nur von der Art der Schule, sondern auch von der Zahl der Schüler und ihrer Begabung ab. Möglich und wünschenswert ist wohl die Einführung der Versicherungstechnik bei den Realanstalten. In einem Gymnasium wird es, ohne andere Gebiete zu schädigen, nur möglich sein bei einer besonders gut veranlagten Generation von geringer Zahl. Wohl aber muß auch hier eine oder die andere Stunde benutzt werden, um eine einigermaßen hinreichende Aufklärung über Versicherungstechnik zu geben, und dies kann passend geschehen im Anschluß an Aufgaben, die mit Zahlen zu rechnen fordern, die aus der Versicherungstechnik stammen. Neben der Andeutung über die Berechnung dieser Zahlen, Renten oder Nettoprämien, muß auch der Bruttoprämie, dem wirklichen Kaufpreis der Rente, ein Wort gewidmet werden. Die Versicherungsbank muß sich durch einen nicht unbeträchtlichen Aufschlag auf die Nettoprämie für die allgemeinen Verwaltungskosten und die hohen Provisionen der werbenden Agenten Deckung verschaffen. Es gibt aber auch Rentenaufgaben, die ohne Rücksicht auf die Sterblichkeit lösbar sind. Wie schon bei der oben angeführten Aufgabe gesagt wurde, kommt es wesentlich auf ihre Form an. Viele Aufgaben kann man durch einen Schlußsatz, eine Art Testamentsklausel so wenden, daß die Sterblichkeit ausscheidet. Man könnte z. B. hinzufügen, daß im Falle des vorzeitig eintretenden Todes des Rentenempfängers seine Erben in den Genuß der Rente treten oder daß die Armenkasse den Kapitalrest erhalten soll.

Solche Aufgaben enthält die erste der folgenden Gruppen, Nr. 1 bis 7.

1. Jemand hat sich verpflichtet, für die Erziehung einer neunjährigen Weise bis zur Vollendung des 21. Lebensjahres zu sorgen. Die vorschüssig zu zahlenden jährlichen Erziehungskosten betragen 1200 Mark. Er will sich dieser Verpflichtung mit einer einmaligen Zahlung sofort entledigen. Wie viel hat er bei einer Anrechnung von $4^0/_0$ Zinsen zu zahlen?*)

2. Ein Rittergut hat für einen Bau 150 000 Mark zu zahlen. Die Summe soll in fünf gleichen nachschüssigen zweijährlichen Raten zur Zahlung gelangen. Wie groß ist jede Rate bei Anrechnung von $5^0/_0$ Zinsen?

3. Jemand hatte für seinen Neffen beim Beginn des Studiums auf einer Bank 10 000 Mark niedergelegt. Der Neffe ließ sich vierteljährlich vorschüssig bis zur Anstellung als Oberlehrer 400 Mark zahlen Wie lange hatte seine Ausbildung gedauert, wenn bei seiner Anstellung als Oberlehrer das Kapital bis auf 175 Mark aufgebraucht war und $4^0/_0$ Zinsen gerechnet wurden.

3 a. Ein Oberlehrer hatte bei seiner Anstellung das ihm zu seiner Ausbildung von einem Verwandten zur Verfügung gestellte Kapital bis auf 175 Mark ver-

*) Stirbt die Waise vor dem 21. Lebensjahre, so fällt das bleibende Kapital an die Erben der Waise.

braucht. Er hatte sich 7 Jahre lang vierteljährlich vorschüssig 400 Mark zahlen lassen. Wie groß war das Kapital, wenn die Bank 4% Zinsen anrechnete?

3b. Ein Oberlehrer hatte bis zur Anstellung ein ihm zu seiner Ausbildung bei einer Bank deponiertes Kapital von 10000 Mark innerhalb 7 Jahren bis auf 175 Mark verbraucht. Wie viel hatte er vierteljährlich vorschüssig sich zahlen lassen, wenn die Bank 4% Zinsen anrechnete?

4. Eine Fabrik kaufte ein Geschäftshaus im Zentrum einer Stadt auf Abzahlung. 20 Jahre lang sollten jährlich nachschüssig 22000 Mark gezahlt werden. Wie hoch war der Kaufpreis, wenn $5\frac{1}{2}$% Zinsen angerechnet wurden?*)

5. Der Kaufpreis eines Hauses betrug 100000 Mark. Aller 5 Jahre bedurfte es einer äußeren und inneren Erneuerung, deren Kosten sich auf durchschnittlich 3600 Mark beliefen.**) Wie hoch also waren Kaufpreis und Mietsertrag zu rechnen bei der Forderung einer Verzinsung von 6%?

6. Beim ersten Geburtstage eines Knaben schenkte ein Pate 1500 Mark, die auf einer Sparkasse mit $3\frac{1}{4}$% Verzinsung angelegt wurden, und fügte an den folgenden Geburtstagen bis zum Beginn des 19. Lebensjahres je eine gewisse Summe hinzu. Der Jüngling konnte nun nach Ableistung der Reifeprüfung, kurz nach seinem 18. Geburtstage, in den 8 Jahren seiner Ausbildung vierteljährlich vorschüssig 300 Mark abheben, bis das Kapital fast verbraucht war. Wie viel hatte der Pate ferner jährlich zugefügt?

7. Jemand hatte vom Anfang seines 46. Lebensjahres an bei der Sparkasse seiner Vaterstadt jährlich 1200 Mark eingezahlt, die mit $3\frac{1}{4}$% verzinst wurden. Er starb in seinem 80. Lebensjahre mit Hinterlassung der Bestimmung, daß die Sparkasse von der nächsten Wiederkehr seines Geburtstages an jährlich vorschüssig an drei eingeborene Studenten ein Stipendium von je 1000 Mark zahlen sollte. Ein etwa unvollständiger Rest sollte in die Armenkasse fließen. Wie viel Stipendien konnten verteilt werden und welcher Rest konnte der Armenkasse zugewiesen werden?

Die folgende Gruppe, Nr. 8 bis 18, enthält Beispiele für die Verwendung von Zahlen, die aus der Versicherungstechnik stammen, also unter Anwendung der Sterblichkeitsstatistik berechnet sind. Der Schüler erhält dadurch Anregung zum Vergleich seiner Zahlen mit diesen, zum Nachdenken über den Wert der Versicherung, und der Lehrer hat die Gelegenheit, seine Belehrungen über das Wichtigste und Interessanteste aus dem Versicherungsgebiet anzuknüpfen.

8. Nach der Deutschen Rentner-Sterbetafel für Männer (DRM) zahlte ein Rentner, als er mit 50 Jahren sich eine lebenslängliche nachschüssige Rente von 3000 Mark kaufte, eine Nettoprämie von 39798 Mark. Er starb im 70. Lebensjahre. Wieviel betrug der scheinbare Gewinn oder Verlust der Versicherungsbank, die ihren Berechnungen eine Verzinsung von $3\frac{1}{2}$% zu Grunde gelegt hatte?***)

*) Wenn eine Person so kauft, kommt Sterblichkeit in Frage, und der Käufer muß bei einer Versicherungsbank Prämien einzahlen, für die im Falle seines vorzeitigen Todes die Bank die weiteren Zahlungen übernimmt, oder seine Erben werden durch den Kaufkontrakt verpflichtet, die etwa fehlenden Zahlungen zu leisten.

**) sogenannte „ewige Rente".

***) Ein tatsächlicher Gewinn oder Verlust kann sich erst am Ende des Jahres infolge Uebersterblichkeit oder Untersterblichkeit ergeben, d. h. wenn mehr oder weniger Personen gestorben sind als nach der benutzten Sterblichkeitstafel zu erwarten waren.

9. Nach der Deutschen Rentner-Sterbetafel für Frauen (DRF) erhält eine 45jährige Frau für eine Einzahlung von 1000 Mark (ohne Aufschlag für Unkosten) lebenslänglich eine nachschüssige Rente von 60,84 Mark, wenn der Berechnung eine Verzinsung von $3\frac{1}{2}$% zu Grunde gelegt wird. Wie lange würde eine gewöhnliche Sparbank bei gleich hoher Verzinsung der Einzahlung diese Rente nur zahlen können? Wie groß wäre die letzte Zahlung?

10. Ein 55jähriger Mann hatte für seine lebenslängliche vorschüssige Leibrente von 10000 Mark gemäß der DRM (4%) 121290 Mark als Nettoprämie gezahlt. Er starb kurz vor Empfang der 11. Rente. Wie viel hätte er davon seinem erbberechtigten Neffen hinterlassen, wenn er sich jene Rente ohne Versicherung auf Lebenszeit von einer gewöhnlichen Bank hätte zahlen lassen, die dieselbe Einzahlung gleich hoch verzinste?

11. Eine 48 Jahre alte Jungfrau kaufte sich für 16526 Mark (DRF $3\frac{1}{2}$% ohne Berücksichtigung der Unkosten) eine vorschüssige lebenslängliche Rente von 1000 Mark. Sie starb im 89. Lebensjahre. Welchen Wert hatten zur Zeit des Kaufes die von ihr empfangenen Renten bei Annahme einer Verzinsung von $3\frac{1}{2}$%?

12. Ein Junggeselle erbte im Alter von 41 Jahren 10000 Mark. Er kaufte sich eine Rente, die ihm vom Ende seines 50. Lebensjahres an im Betrage von 1000 Mark vorschüssig gezahlt werden sollte, und zahlte, abgesehen von den Unkosten, nach der DRM ($3\frac{1}{2}$%) 9507 Mark. Er starb im Alter von 70 Jahren. Wie viel betrug der Wert der empfangenen Renten beim Abschluß des Vertrages?

13. Ein Vater kaufte für seine Tochter, als sie 35 Jahre alt war, bei einer Rentenbank eine Rente im Betrage von 900 Mark, die ihr von Vollendung des 45. Lebensjahres ab vorschüssig gezahlt werden sollte. Die Nettoprämie betrug (DRF $3\frac{1}{2}$%) 10521 Mark. Wie viel Renten hätte eine gewöhnliche Sparbank, die die Einzahlung gleich hoch verzinste, dafür versprochen? (Welcher Kapitalrest würde sich auf der Sparbank nach der letzten vollen Rentenzahlung ergeben?)

14. Ein kinderloses Ehepaar kaufte sich, der Mann im Alter von 45, die Frau im Alter von 40 Jahren, gleichzeitig je eine Rente von 1500 Mark, die 15 Jahre später vorschüssig gezahlt werden sollten. Sie zahlten dafür nach den DR-Sterbetafeln ($3\frac{1}{2}$%) eine jährliche vorschüssige Netto-Prämie von 685,88 bez. 979,86 Mark. Der Mann starb im Alter von 71, die Frau im Alter von 75 Jahren. Welches Kapital stellen die gezahlten Prämien und die empfangenen Renten beim Abschluß des Vertrages dar?

15. Ein Vater hatte seinem 25jährigen erwerbsunfähigen Sohne bei einer Rentenbank eine jährliche Rente von 900 Mark so gesichert, daß sie ihm von Vollendung des 40. Lebensjahres vorschüssig lebenslänglich gezahlt werden sollte. Dafür hatte er 15 Jahre lang eine jährliche Prämie von 753,20 Mark (abgesehen von den Unkosten) gezahlt (DRM $3\frac{1}{2}$%). Der Rentenempfänger starb im Alter von 57 Jahren. Welches Kapital stellten die Prämien und die empfangenen Renten zur Zeit der 1. Rentenzahlung dar?

16. Ein kinderloses Ehepaar, der Mann 60, die Frau 55 Jahre alt, kaufte sich mit der Hälfte seines Vermögens eine Verbindungsrente von 4500 Mark, nachschüssig zahlbar bis zum Tode des Zuletztsterbenden, für 65898 Mark ERM und F (englische Rentner-

tafel für Männer und Frauen ($3^1/_2$%) ohne Aufschlag für Unkosten). Der Mann starb im 76., die Frau im 81. Lebensjahre. Welchen Wert hatten die empfangenen Renten beim Abschluß des Vertrages? Welches Vermögen hätte das Paar hinterlassen, wenn es die Rente nicht kaufte und jährlich nur 6000 Mark verbrauchte? ($3^1/_2$%.)

17. Ein unverheirateter Beamter, 54 Jahre alt, nahm seine unverheiratete Schwester von 34 Jahren zu sich und kaufte mit dem gemeinsamen Vermögen eine Verbindungsrente von 1500 Mark, die bis zum Tode des Zuletztsterbenden nachschüssig gezahlt werden sollte, für 28973 Mark (ERM und F $3^1/_2$% ohne Aufschlag für Unkosten). Der Bruder starb im 67. Lebensjahre und die Schwester überlebte ihn um 30 Jahre. Welchen Wert stellten die empfangenen Renten zur Zeit des Rentenkaufes dar? Wie lange hätte das Vermögen gereicht, wenn ohne Versicherung zu Lebzeiten des Bruders jährlich 1200 Mark, und wenn von der Schwester dann jährlich 1500 Mark vom Vermögen verbraucht wurden?

18. Zwei unverheiratete Schwestern, die eine 50, die andere 40 Jahre alt, kauften sich mit dem ererbten Vermögen eine Verbindungsrente von 3600 Mark, die bis zum Tode des Zuletztsterbenden nachschüssig gezahlt werden sollte, für 68209 Mark (ERF $3^1/_2$% ohne Aufschlag für Unkosten). Die ältere starb mit 65, die jüngere mit 71 Jahren. Welchen Wert stellten die empfangenen Renten beim Einkauf dar? Wie lange hätte die eingezahlte Summe ohne Versicherung bei gleichem Zinsfuß eine solche jährliche Rente liefern können?

III.
Zur Lebensversicherung.

Was im Vorhergehenden zur Rentenrechnung bezüglich der Aufgaben in den Uebungsbüchern, der Berücksichtigung der Sterblichkeit, der Annahme von wahrscheinlicher Lebensdauer, der Renten und Rentenkaufpreise gesagt wurde, gilt in gleicher Weise von den Aufgaben zur Erlebensfall- und Todesfallversicherung. Natürlich gibt es hier gar keine Aufgaben, die von der Sterblichkeit absehen ließen. Also gilt es entweder zur Versicherungstechnik zu greifen oder Zahlen zu Hilfe zu nehmen, die auf der Grundlage der Sterblichkeitstafeln berechnet sind. Die Art, wie das Aufgabenbuch von Müller und Kutnewsky hier in die Versicherungstechnik einführt, ist ganz geschickt. Die Bezeichnungsweise der technischen Zahlen, der diskontierten Zahlen der Lebenden und der Toten u. a., sind vielleicht nicht so glücklich wie die Zillmers, („Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen", Berlin, Nicolaische Verlags-Buchhandlung), die auch Dr. Broecker in seinem weit verbreiteten „Sterbekassenwesen in Preußen" (Berlin, Verlag der Zeitschrift für Versicherungswesen) verwendet. Die Zillmerschen Bezeichnungen gestatten eine außerordentliche Vereinfachung, große Klarheit und Schönheit der Formeln. Ferner wäre zu erinnern, daß in der Lebensversicherung die jährliche Prämie bei weitem die Hauptrolle spielt, was in „Müller und Kutnewsky" noch nicht erreicht ist. Auch beherrscht das ganze Versicherungswesen die gemischte Versicherung, sogenannte abgekürzte Todesfallversicherung, mit jährlicher Prämienzahlung, die in diesem Aufgabenbuch fehlt. Schließlich dürfte die so außerordentlich wichtige Berechnung der Prämienreserve nicht übergangen werden. Eher wären Aufgaben zu streichen, die im politischen Leben gar nicht vorkommen.

Man kann aber auch, wie gesagt, Lebensversicherungsaufgaben behandeln, ohne die Schüler in die zeitraubende Versicherungstechnik einzuführen, wenn man die Zahlen zu Hilfe nimmt, die aus jener stammen. Freilich bedarf es hierbei mancher Erläuterung des Lehrers. Z. B. bedarf es einer scharfen Betonung des Unterschiedes zwischen Netto- und Bruttoprämie, der hier sehr groß ist. Der Aufschlag zur Nettoprämie muß nicht nur die allgemeinen Verwaltungskosten und die sehr hohen Provisionen der werbenden Agenten decken, sondern auch die Kosten der ärztlichen Untersuchung, den Zuschlag zur Sicherung gegen Sterblichkeitsabweichung von derjenigen der zur Berechnung benutzten Tafel und eine Erhöhung zur Steigerung einer lockenden Dividende. Die Dividende, die übrigens entweder in Prozenten der Prämie oder der Prämienreserve bestimmt wird, sollte freilich nur aus sparsamer Verwaltung, besserer Verzinsung der eingezahlten Gelder (d. h. besser als der der Berechnung der Prämien zu Grunde gelegte Zinsfuß annimmt) und aus der sogenannten Untersterblichkeit hervorgehen. Aber infolge der großen Konkurrenz glaubte man mit höherer Dividende besser zu locken als mit höherer Bruttoprämie abzuschrecken. Die nun folgende dritte Gruppe von Aufgaben enthält Beispiele der erwähnten Art.

19. Im Alter von 30 Jahren zahlt man nach der Sterblichkeitstafel für Deutschland*), der sogenannten Reichstafel, ($3^1/_2$%) für eine Sterbefall-Versicherung von 500 Mark als einmalige Nettoprämie 190,08 Mark. In welcher Zeit würde die versicherte Summe bei einer Sparkasse bei gleicher Verzinsung mit derselben Einzahlung erspart werden?

20. Im Alter von 35 Jahren zahlt man nach der Reichstafel ($3^1/_2$%), für eine Sterbefallversicherung von 600 Mark als einmalige Prämie (ohne Aufschlag für Unkosten) 251,98 Mark. Die versicherte Summe kommt im Erlebensfall erst mit Erreichung des 100. Lebensjahres zur Auszahlung. Wie viel also von der Einzahlung dient mit zur Bestreitung der durch vorzeitige Todesfälle gleichaltriger Mitglieder entstehenden Kosten?

21. Die Mitglieder einer Lehrer-Sterbekasse zahlten vom 21. Lebensjahre an für ein Sterbegeld von 400 Mark eine vorschüssige jährliche Prämie von 6,40 Mark**). Welchen Wert würden die Einzahlungen eines Mitgliedes erreichen, das 100 Jahre alt würde? (Reichstafel $3^1/_2$%).

22. Als Mitglied eines Kriegervereins zahlt jemand für ein Sterbegeld von 150 Mark (zahlbar beim Tode oder bei Erreichung des 100. Lebensjahres) vom vollendeten 25. bis zum vollendeten 70. Lebensjahre, eine vorschüssige jährliche Prämie von 2,91 Mark (Reichstafel, 3%)***). In welcher Zeit wäre die versicherte Summe bereits erspart, wenn nicht ein gewisser Teil der Einzahlungen auf die Deckung der Kosten vorzeitiger Todesfälle anzurechnen wäre?

*) Die der Berechnung zu Grunde gelegte Tafel ist diejenige für Männer. Sie wird auch für beide Geschlechter gebraucht.

**) Solche Sterbekassen werden von Mitgliedern verwaltet, haben also keine Unkosten.

***) Die Verzinsung der kleinen Summen solcher Sterbekassen schwankt zwischen 3 und 4%. Man rechnet hier vorsichtshalber mit 3%.

23. Ein Mitglied einer Kriegervereins-Sterbekasse, deren Statut ein Sterbegeld von 175 Mark versprach, hatte von seinem 30. bis zum 65. Lebensjahre nach der Reichstafel (3 %) eine vorschüssige jährliche Prämie von 4,11 Mark bezahlt und starb im Alter von 75 Jahren. Welchen Wert hatten jetzt die Teile seiner Beiträge, die mit zur Deckung der durch vorzeitige Todesfälle anderer Mitglieder entstehenden Unkosten dienen müssen?*).

24. Eine 35 jährige Person zahlte nach der Tafel der 17 englischen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) für eine Versicherung von 10000 Mark, die bei ihrem Tode oder mit Erreichung des 86. Lebensjahres zahlbar wurde, eine einmalige Nettoprämie von 3837,50 Mark. Sie starb im Alter von 73 Jahren. Welchen scheinbaren Verlust oder Gewinn hatte die Versicherungsbank?

25. Jemand zahlte, als er im Alter von 42 Jahren eine Erbschaft machte, einen Teil davon (6928,50 Mark, abgesehen von den Unkosten) als einmalige Prämie gemäß der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) für eine Todesfallversicherung von 15000 Mark, die im Erlebensfall bei Vollendung des 90. Lebensjahres fällig wurde. Er starb erst mit 93 Jahren.

a) Welche Summe hätte er bei einer gleiche Zinsen anrechnenden Sparbank nur einzuzahlen brauchen, um dadurch beim Tode ebenfalls 15000 Mark hinterlassen zu können?

b) Wie viel hätten die Erben mehr bekommen, wenn jene Prämie damals bei solcher Sparbank auf Zinseszins niedergelegt worden wäre?

26. Nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) zahlt eine 35 jährige Person für eine auf das 70. Lebensjahr abgekürzte Todesfallversicherung von 5000 Mark (also zahlbar beim Tode oder bei Vollendung des 70. Lebensjahres) als einmalige Nettoprämie 2142,65 Mark, eine 50 jährige 2995,50 Mark. Wie viel von der Einzahlung der 1. Person ist also zur Deckung der Kosten inzwischen eingetretener Todesfälle von gleichaltrigen, mit gleicher Summe Mitversicherten mitverwandt worden, als sie das 51. Lebensjahr erreichte?

27. Eine 30 jährige Person hatte für eine Todesfallversicherung von 10000 Mark, die spätestens mit Vollendung des 85. Lebensjahres zur Auszahlung kommen sollte, gemäß der Tafel der 17 englischen Gesellschaften 30 Jahre lang eine vorschüssige jährliche Nettoprämie von 206,90 Mark entrichtet und erreichte das 86. Lebensjahr.

a) Welchen Wert hatten jetzt die Teile seiner Beiträge, die nach der Tafel zur Deckung der durch vorzeitige Todesfälle gleichaltriger Mitversicherter nötig gewordenen Leistungen bestimmt sind?

b) Welche Spareinlage hätte in derselben Zahlungsweise bei einer Sparbank unter gleicher Verzinsung genügt, um jetzt dieselbe Summe zu ergeben?

c) Wie viel jener Nettoprämien hätten bei solcher Sparbank genügt, um jetzt dieselbe Summe zu ergeben?

*) Kriegervereine haben meist günstigere Sterblichkeit als die Reichstafel zeigt. Man benutzt daher oft bei den alle 5 Jahre stattfindenden versicherungstechnischen Prüfungen ihrer Sterbekassen die günstigere, also entsprechendere Tafel der 23 deutschen Gesellschaften, die nur ärztlich untersuchte Leben enthält, während die Reichstafel die ganze Bevölkerung trifft. Die bei den Prüfungen sich ergebenden Ueberschüsse dienen zur Erhöhung des Sterbegeldes.

28. Ein Kaufmann hatte sich im Alter von 35 Jahren mit 15000 Mark auf den Todesfall versichert, die ihm spätestens mit Vollendung des 85. Lebensjahres ausgezahlt werden sollten. Er sollte dafür gemäß der Tafel der 17 englischen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) eine vorschüssige jährliche Nettoprämie von 350,40 Mark bis zum vollendeten 65. Lebensjahre zahlen, starb aber bereits am Ende des 13. Versicherungsjahres. Wie groß war der Gewinn der Erben?

29. Ein Pastor versicherte, als er mit 27 Jahren zur Anstellung kam, sein Leben mit einer Summe von 5000 Mark, die ihm spätestens mit Vollendung des 60. Lebensjahres ausgezahlt werden sollte. Der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) entsprechend mußte er dafür bis zum 60. Lebensjahre eine vorschüssige jährliche Nettoprämie von 140,55 Mark zahlen. Er starb aber schon im Alter von 42 Jahren. Wie groß war der scheinbare Verlust der Versicherungsbank?*)

30. Jemand versicherte im Alter von 37 Jahren im Interesse seines Pathen sein Leben mit einer Summe von 6000 Mark, zahlbar spätestens nach 18 Jahren. Er zahlte dafür gemäß der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) 18 Jahre lang eine vorschüssige jährliche Nettoprämie von 281,23 Mark.

a) Welchen Wert hatten diese Einzahlungen am Tage des Kaufes der Police?

b) Welchen Wert erreichten sie am Tage der Auszahlung der Versicherungssumme?

c) Welche jährliche Sparsumme hätte bei einer Sparbank unter gleicher Verzinsung zu gleichem Zweck genügt?

31. Nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften ($3^1/_2$ %) zahlte jemand im Alter von 28 Jahren für eine auf das 65. Lebensjahr abgekürzte Todesfallversicherung von 3000 Mark eine vorschüssige jährliche Nettoprämie von 64,67 Mark. Sein gleichaltriger Freund, der sein Leben erst 10 Jahre später ebenso versicherte, zahlte jährlich netto 96,57 Mark. Beide erlebten die Zahlung der versicherten Summe. Welchen Wert etwa hatte zur Zeit des Kaufes der letzten Police der Betrag, den die Versicherungsbank für das größere Risiko der ersten Versicherung mehr erhalten hatte?

IV.
Einige Gruppen von Rentenwerten und Prämien (ohne Aufschlag für Unkosten).

Manchen der Herren Kollegen, die sich für die voraufgehende Art von Aufgaben interessieren, wird es willkommen sein, zur Bildung weiterer solcher Aufgaben andere Zahlen zur Hand zu haben. Darum sind hier einige Reihen von Rentenwerten und Prämien nach verschiedenen Sterblichkeitstafeln angefügt. Einige davon sind allgemein verbreitet, einige sind mir von dem bekannten Versicherungsmathematiker Herrn Dr. Schmerler, Direktor der Lebensversicherungsgesellschaft Janus in Hamburg, zur Verfügung gestellt worden, einige habe ich selbst berechnet.

*) Der zu berechnende Verlust ist um so mehr scheinbar, als ja die für diese Versicherung zurückgelegte Prämienreserve geringer ist als der Wert der aufgezinsten Nettoprämien, weil Teile davon zur Deckung der Unkosten dienen, die durch noch frühere Todesfälle gleichaltriger Mitversicherter entstehen. Siehe auch Seite 8, nur daß hier die Unkosten eines kürzeren durch die Beiträge eines längeren Lebens gedeckt werden müssen.

Einmalige Einzahlung für eine lebenslängliche jährliche nachschüssige Rente im Betrage von 1 M (ohne Aufschlag für Unkosten).

Alter	3 1/2 % DR	DRM	DRF	ERM	ERF	4 % DR	DRM	DRF	ERM	ERF
25	20.946	20.064	21.286	—	—	19.303	18.547	19.589	—	—
30	19.932	19.231	20.292	—	—	18.461	17.867	18.766	—	—
35	18.759	18.005	19.121	—	—	17.466	16.820	17.776	—	—
40	17.421	16.444	17.836	15.365	16.980	16.310	15.449	16.672	14.454	15.905
45	15.931	14.843	16.437	14.292	15.801	15.003	14.025	15.453	13.510	14.879
50	14.333	13.266	14.881	13.103	14.434	13.578	12.607	14.075	12.451	13.669
55	12.638	11.642	13.151	11.746	12.942	12.045	11.129	12.516	11.224	12.328
60	10.866	9.952	11.350	10.178	11.287	10.419	9.568	10.869	9.783	10.818
65	9.051	8.247	9.475	8.597	9.546	8.731	7.976	9.130	8.309	9.204
70	7.285	6.508	7.629	7.088	7.754	7.068	6.327	7.395	6.886	7.520
75	5.659	5.039	5.915	5.669	6.204	5.521	4.923	5.765	5.535	6.049
80	4.173	3.784	4.417	4.463	4.835	4.091	3.714	4.326	4.376	4.735

Jährlich nachschüssig zahlbare Rente für eine Einlage von 1000 M (ohne Aufschlag für Unkosten).

Alter	4 % DR	DRM	DRF	ERM	ERF	3 1/2 % DR	DRM	DRF	ERM	ERF
25	51.81	53.92	51.05	—	—	47.74	49.84	46.98	—	—
30	54.17	55.97	53.29	—	—	50.17	52.00	49.28	—	—
35	57.25	59.45	56.26	—	—	53.31	55.54	52.30	—	—
40	61.31	64.73	59.98	69.18	62.88	57.40	60.81	56.07	65.08	58.89
45	66.65	71.30	64.71	74.02	67.21	62.77	67.37	60.84	69.97	63.29
50	73.65	79.32	71.05	80.31	73.16	69.77	75.38	67.20	76.32	69.28
55	83.02	87.46	79.90	89.09	81.12	79.13	85.90	76.04	85.13	77.27
60	95.98	104.52	92.00	102.22	92.44	92.03	100.48	88.11	98.25	88.60
65	114.53	125.38	109.53	120.35	108.65	110.49	121.26	105.54	116.32	104.76
70	142.72	158.05	135.23	145.22	132.98	138.22	153.66	131.08	141.08	128.96
75	181.13	203.13	173.46	180.67	165.32	176.71	198.45	169.06	176.40	161.18
80	244.44	269.25	231.16	228.52	211.19	239.64	264.27	226.40	224.06	206.82

Einmalige Prämie (ohne Aufschlag für Unkosten) für eine um y Jahre aufgeschobene (vorschüssige) lebenslängliche Rente im Betrage von 100 M.

Alt.	y	3 1/2 % DRM	DRF	Alt.	y	DRM	DRF
30	10	1179.80	1281.50	33	7	1329.40	1435.00
35	10	1056.90	1169.00	38	7	1186.00	1313.40
40	10	913.10	1046.40	43	7	1033.40	1181.50
45	10	769.70	912.80	48	7	883.80	1036.10
50	10	629.10	766.90	53	7	733.40	875.70
55	10	488.80	611.60	58	7	579.60	708.50
31	9	1228.10	1330.70	34	6	1382.20	1490.60
36	9	1098.10	1214.90	39	6	1233.30	1366.20
41	9	950.70	1089.20	44	6	1078.80	1231.20
46	9	805.20	951.90	49	6	927.30	1081.60
51	9	661.40	801.10	54	6	773.50	916.80
56	9	516.60	641.60	59	6	615.80	745.80
32	8	1278.00	1381.70	35	5	1436.80	1548.80
37	8	1141.20	1263.00	40	5	1253.90	1421.70
42	8	990.70	1134.30	45	5	1127.40	1283.40
47	8	843.10	992.90	50	5	974.00	1129.50
52	8	696.10	837.30	55	5	816.50	960.70
57	8	546.70	673.80	60	5	655.60	786.10

Jährliche vorschüssige Prämie (ohne Aufschlag für Unkosten) für eine um y Jahre aufgeschobene (vorschüssige) lebenslängliche Rente im Betrage von 100 M.

Alt.	y	3 1/2 % DRM	DRF	Alt.	y	DRM	DRF
30	10	139.91	151.17	27	13	100.93	109.41
35	10	125.29	138.65	32	13	90.49	100.17
40	10	109.84	124.99	37	13	78.99	90.04
45	10	94.49	109.86	42	13	67.40	78.90
50	10	78.88	95.68	47	13	55.76	68.42
55	10	63.04	76.11	52	13	44.05	53.99
29	11	124.53	134.67	26	14	91.69	99.53
34	11	111.54	123.44	31	14	82.25	91.08
39	11	97.62	111.17	36	14	71.73	81.81
44	11	83.74	97.61	41	14	61.06	71.61
49	11	69.70	84.89	46	14	50.36	62.01
54	11	55.48	67.33	51	14	39.64	48.82
28	12	111.74	120.97	25	15	83.69	91.00
33	12	100.12	110.81	30	15	75.13	83.24
38	12	87.50	99.70	35	15	65.49	74.70
43	12	74.86	87.46	40	15	55.61	65.32
48	12	62.12	75.94	45	15	45.73	56.50
53	12	49.14	60.07	50	15	35.87	44.38

DR = Deutsche Rentner-Sterbetafel für Männer und Frauen (zum Vergleich vorangestellt.)
DRM = Deutsche Rentner-Sterbetafel für Männer.
DRF = Deutsche Rentner-Sterbetafel für Frauen.
ERM = Englische Rentner-Sterbetafel für Männer.
ERF = Englische Rentner-Sterbetafel für Frauen.

Einmalige Einzahlung (ohne Aufschlag für Unkosten) für eine nachschüssige Verbindungsrente im Betrage von 1 M. zahlbar bis zum Tode des zuletzt Sterbenden.

$3^1/_2\%$

A. Mann und Frau						B. 2 Frauen					
Alter des Mannes	Alter der Frau	ERM ERF	Alter des Mannes	Alter der Frau	ERM ERF	Alter der Frauen		ERF	Alter der Frauen		ERF
40	40	19.490	40	25	21.371	40	40	20.041	40	25	21.713
45	45	18.279	45	30	20.458	45	45	18.807	45	30	20.773
50	50	16.891	50	35	19.418	50	50	17.405	50	35	19.698
55	55	15.323	55	40	18.227	55	55	15.812	55	40	18.480
60	60	13.547	60	45	16.862	60	60	14.031	60	45	17.092
65	65	11.676	65	50	15.341	65	65	12.119	65	50	15.538
70	70	9.763	70	55	13.700	70	70	10.109	70	55	13.843
40	35	20.147	40	20	21.921	40	35	20.602	40	20	22.226
45	40	19.038	45	25	21.093	45	40	19.472	45	25	21.371
50	45	17.764	50	30	20.156	50	45	18.168	50	30	20.400
55	50	16.296	55	35	19.091	55	50	16.683	55	35	19.306
60	55	14.644	60	40	17.979	60	55	15.017	60	40	18.070
65	60	12.844	65	45	16.530	65	60	13.181	65	45	16.686
70	65	10.968	70	50	15.029	70	65	11.229	70	50	15.140
40	30	20.778				40	30	21.168			
45	35	19.770				45	35	20.135			
50	40	18.616				50	40	18.947			
55	45	17.287				55	45	17.594			
60	50	15.761				60	50	16.051			
65	55	14.103				65	55	14.357			
70	60	12.306				70	60	12.500			

Einmalige Prämien P_x^y (ohne Aufschlag für Unkosten) für eine Todesfallversicherung von 1000 M, die spätestens bei Erreichung des Alters y fällig wird.

$3^1/_2\%$

Alter x	nach der Tafel der 23 Deutschen Gesellschaften. M. u. F.				nach der Deutschen Sterbetafel (Reichstafel). M.			
	P_x^{90}	P_x^{70}	P_x^{65}	P_x^{60}	P_x^{100}	P_x^{85}	P_x^{70}	P_x^{60}
25	330.93	—	365.88	391.65	345.03	345.45	—	399.45
26	336.84	—	373.34	400.24	351.63	—	—	408.41
27	343.04	—	381.15	409.23	358.44	—	—	417.72
28	349.54	—	389.32	418.63	365.46	—	—	427.39
29	356.30	—	397.80	428.40	372.74	—	—	437.34
30	363.24	—	406.59	438.53	380.16	380.69	398.69	447.65
31	370.38	—	415.66	449.02	387.78	—	407.15	458.30
32	377.75	—	425.03	459.87	395.59	—	415.83	469.30
33	385.28	—	434.68	471.08	403.56	—	424.72	480.58
34	393.05	—	444.66	482.68	411.68	—	433.79	492.22
35	401.01	428.53	454.93	494.68	419.97	420.59	443.08	504.22
36	409.13	437.92	465.52	507.07	428.36	—	452.55	516.54
37	417.47	447.57	476.43	519.89	436.89	—	462.22	529.22
38	426.01	457.50	487.69	533.14	445.54	—	472.06	542.24
39	434.73	467.68	499.28	546.84	454.30	—	482.15	555.69
40	443.64	478.14	511.21	561.01	463.18	463.98	492.32	569.45
41	452.75	488.86	523.50	575.65	472.19	—	502.77	583.73
42	461.97	499.83	536.13	590.77	481.37	—	513.52	598.47
43	471.39	511.06	549.12	606.41	490.70	—	524.45	613.72
44	480.96	522.60	562.52	622.61	500.20	—	535.67	629.51
45	490.74	534.44	576.33	639.41	509.84	510.88	547.13	645.85
46	500.75	546.62	590.62	656.85	519.60	—	558.87	662.70
47	511.00	559.20	605.42	675.01	529.52	—	570.90	680.37
48	521.37	572.14	620.73	693.89	539.54	—	583.15	698.60
49	532.05	585.44	636.57	713.53	549.67	—	595.73	717.57
50	542.86	599.10	652.93	733.97	559.94	561.30	608.58	737.32
51	553.76	613.05	669.79	755.22	570.32	—	621.76	—
52	564.75	627.31	687.20	777.35	580.82	—	635.33	—
53	575.77	641.88	705.17	—	591.45	—	649.23	—
54	586.84	656.80	723.78	—	602.20	—	663.54	—
55	597.93	672.09	743.08	—	613.08	614.86	678.27	—

Jährliche vorschüssige Prämien $p_x{}^y$ für eine Todesfallversicherung von 1000 M, die spätestens bei Erreichung des Alters y fällig wird (ohne Aufschlag für Unkosten.)

$3\,^1/_2\%$

Alter x	nach der Tafel der 23 Deutschen Gesellschaften. M. u. F.				nach der Deutschen Sterbetafel (Reichstafel) M.			
	$p_x{}^{90}$	$p_x{}^{70}$	$p_x{}^{65}$	$p_x{}^{60}$	$p_x{}^{100}$	$p_x{}^{70}$	$p_x{}^{65}$	$p_x{}^{60}$
25	16.725	—	19.512	21.771	17.81	—	20.332	22.493
26	17.176	—	20.146	22.567	18.34	—	21.027	23.346
27	17.658	—	20.828	23.425	18.89	—	21.767	24.259
28	18.172	—	21.558	24.350	19.48	—	22.554	25.240
29	18.717	—	22.339	25.345	20.10	—	23.389	26.284
30	19.290	—	23.170	26.412	20.74	22.421	24.280	27.406
31	19.893	—	24.055	27.559	21.42	23.223	25.226	28.610
32	20.529	—	24.998	28.791	22.13	24.071	26.230	29.903
33	21.195	—	26.002	30.118	22.88	24.966	27.297	31.288
34	21.899	—	27.076	31.553	23.66	25.907	28.431	32.780
35	22.639	25.385	28.225	33.104	24.49	26.904	29.640	34.392
36	23.415	26.346	29.453	34.786	25.34	27.954	30.926	36.129
37	24.235	27.398	30.772	36.618	26.24	29.065	32.300	38.013
38	25.098	28.518	32.191	38.618	27.17	30.237	33.765	40.056
39	26.007	29.710	33.719	40.808	28.15	31.484	35.340	42.293
40	26.965	30.983	35.368	43.215	29.18	32.793	37.026	44.726
41	27.976	32.342	37.152	45.873	30.25	34.193	38.843	47.419
42	29.035	33.793	39.084	48.818	31.39	35.696	40.816	50.402
43	30.155	35.347	41.185	52.102	32.58	37.293	42.954	53.727
44	31.336	37.018	43.481	55.790	33.84	39.012	45.292	57.458
45	32.587	38.819	46.002	59.964	35.17	40.855	47.850	61.668
46	33.917	40.772	48.788	64.732	36.58	42.842	50.665	—
47	35.337	42.899	51.886	70.237	38.06	44.992	53.773	—
48	36.837	45.219	55.346	76.655	39.62	47.307	57.217	—
49	38.448	47.756	59.231	84.230	41.29	49.831	61.070	—
50	40.158	50.534	63.618	93.299	43.03	52.577	65.400	—
51	41.963	53.575	—	—	44.88	55.589	—	—
52	43.878	56.919	—	—	46.86	58.914	—	—
53	45.897	60.612	—	—	48.96	62.588	—	—
54	48.032	64.717	—	—	51.19	66.687	—	—
55	50.287	69.310	—	—	53.58	71.292	—	—

Jährliche vorschüssige Prämien ${}_yp_x{}^{85}$, die bis zum Alter y zu zahlen sind, für eine Todesfallversicherung von 1000 M, die spätestens bei Vollendung des 85. Lebensjahres fällig wird (ohne Aufschlag für Unkosten.)

$3\,^1/_2\%$

Alter x	nach der Deutschen Sterbetafel (Reichstafel). M.				nach der Tafel der 17 Englischen Gesellschaften. M. u. F.			
	${}_{50}p_x{}^{85}$	${}_{60}p_x{}^{85}$	${}_{65}p_x{}^{85}$	${}_{70}p_x{}^{85}$	${}_{50}p_x{}^{85}$	${}_{60}p_x{}^{85}$	${}_{65}p_x{}^{85}$	${}_{70}p_x{}^{85}$
25	22.465	19.452	18.705	—	20.323	17.415	16.664	—
26	23.459	20.126	19.309	—	21.201	17.990	17.172	—
27	24.544	20.844	19.949	—	22.156	18.602	17.708	—
28	25.732	21.613	20.630	—	23.197	19.254	18.276	—
29	27.027	22.430	21.349	—	24.338	19.948	18.877	—
30	28.456	23.307	22.116	21.409	25.592	20.690	19.513	18.784
31	30.031	24.242	22.928	22.150	26.977	21.483	20.189	19.391
32	31.775	25.243	23.788	22.933	28.515	22.333	20.907	20.033
33	33.716	26.312	24.699	23.757	30.232	23.247	21.671	20.712
34	35.886	27.457	25.664	24.624	32.162	24.231	22.486	21.431
35	38.333	28.688	26.689	25.538	34.348	25.294	23.357	22.195
36	41.112	30.009	27.777	26.502	36.842	26.446	24.289	23.007
37	44.292	31.432	28.932	27.517	39.717	27.698	25.290	23.871
38	47.975	32.966	30.159	28.584	43.068	29.064	26.366	24.793
39	52.302	34.636	31.472	29.717	47.023	30.560	27.527	25.779
40	57.445	36.442	32.869	30.905	51.765	32.206	28.783	26.834
41	—	38.427	34.370	32.171	—	34.025	30.147	27.968
42	—	40.616	35.993	33.524	—	36.047	31.631	29.188
43	—	43.039	37.743	34.960	—	38.306	33.253	30.504
44	—	45.744	39.646	36.499	—	40.841	35.026	31.921
45	—	48.781	41.722	38.148	—	43.701	36.970	33.449
46	—	—	43.988	39.915	—	—	39.106	35.098
47	—	—	46.480	41.820	—	—	41.458	36.877
48	—	—	49.225	43.866	—	—	44.064	38.801
49	—	—	52.277	46.085	—	—	46.966	40.889
50	—	—	55.690	48.492	—	—	50.222	43.162

Anmerkung: Die Tafel der 17 Englischen Gesellschaften betrifft versicherte, normale Leben mit vollständiger ärzt-

Die Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung.

Von Ludwig Balser (Darmstadt).

Wenn man die Geometrie in der Schule angemessen zur Geltung bringen will, ohne die Analysis über Gebühr zu beschneiden, wird man solche konstruktive Aufgaben bevorzugen, die sich zugleich zur rechnenden Behandlung eignen, und die womöglich in diesem Gewande bereits Lehrgegenstand sind. Dies trifft für die sphärische Trigonometrie zu, die außerdem vermöge ihrer Anwendung auf die mathematische Erdkunde einen ungesuchten Konzentrationsmittelpunkt abgibt. Es sei gestattet, auf einige Aufgaben aus diesem Gebiete näher einzugehen; wenn es mir auch nicht möglich sein wird, etwas wesentlich neues zu sagen, so scheint mir doch eine Diskussion der einschlägigen Fragen nicht zwecklos zu sein bei der großen Verschiedenheit, mit der allein schon die Darstellung der Kugel gegeben wird.[1])

Die Auffassung, daß unrichtige Zeichnungen die Raumphantasie mehr verwirren als klären, auch dann, wenn der begangene Fehler als „konventionelle Vereinfachung“ eingeführt wird, scheint mehr und mehr an Boden zu gewinnen. Vielfach stellt man die Kugel in schiefer Parallelprojektion dar, die man bereits bei ebenflächigen Körpern angewandt und erklärt hat. Dieses Verfahren hat manche Vorzüge; es läßt sich aber nicht leugnen, daß die große Mühe und der nicht unbeträchtliche Zeitaufwand, den die Konstruktion von Schrägbildern der Kugel verursacht, vor ihrer Anwendung zurückgeschreckt und so mittelbar das Festhalten an den hergebrachten Fehlern begünstigt hat. Diese Schwierigkeiten sind darin begründet, daß der Umriß, d. h. die Trennungslinie zwischen dem sichtbaren und dem unsichtbaren Teil der Kugelfläche im Schrägbild eine Ellipse ist, deren Lage und Gestalt von der willkürlich gewählten Sehstrahlrichtung abhängt. Will man den Eindruck der Vollkugel hervorrufen, so kann man auf den Umriß nicht verzichten; andererseits aber wird man wichtige Punkte, wie z. B. Zenit und Himmelspol bei der Darstellung des nautischen Dreiecks, nicht auf den Umriß legen, weil dann ihre Polaren als gerade Strecken erscheinen würden, was doch durch Anwendung der schiefen Projektion vermieden werden sollte.

Man nimmt also zwei Punkte der Figur etwa auf dem parallel zur Tafel liegenden Großkreis an und erhält schließlich so viele Linien, daß die Zeichnung ihre Durchsichtigkeit verliert[2]); auch den Umstand empfindet der Schüler störend, daß der höchste Punkt der Kugelfläche in der Zeichnung nicht die höchste Stelle einnimmt. Endlich sind die Bildellipsen der Großkreise nicht durch ihre Achsen gegeben, sondern durch ein konjugiert umschriebenes Parallelogramm, und wenn dieses schmal ausfällt, so wird die Kurve leicht fehlerhaft. Auch Schablonen können wenig helfen, da sie nur einzelne Ellipsen liefern, deren Lage innerhalb der Figur angegeben sein muß.

Sollte man unter diesen Umständen nicht die senkrechte Projektion für die Kugel bevorzugen[3]) und das Schrägbild daneben zur Erläuterung vornehmlich einzelner Teile der Hauptfigur heranziehen? Im Schrägbild könnte man sich dann grundsätzlich auf diejenigen Linien beschränken, die zur Darstellung des betreffenden Gegenstandes unerläßlich sind. In diesem Sinne ist in der Figur 1[4])

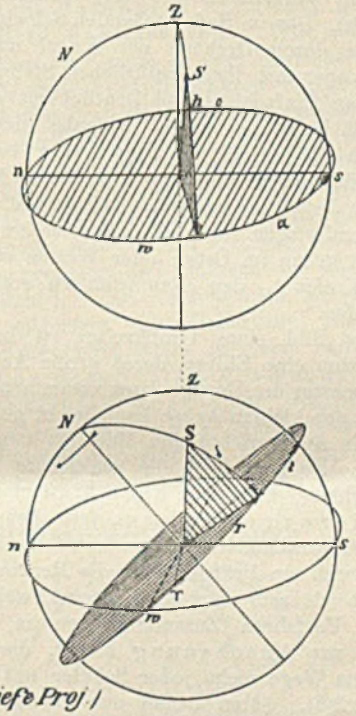


Fig. 1.

das System des Horizonts und das des Aequators veranschaulicht; es fehlt in der Figur oben der sogen. erste Vertikal, weil die Ost-Westlinie als Senkrechte zur Nord-Südrichtung bestimmt ist, ebenso ist der Sechsuhrkreis weggelassen, auch der Höhen- und der Bahnkreis sind unterdrückt, und der Umriß ist entbehrlich, wenn man die Figuren als Bilder von Drahtmodellen mit eingesetzten Pappescheiben auffaßt. Gegen die Anwendung der senkrechten Projektion scheinen zwei Gründe zu sprechen: einmal der Wechsel der Darstellungsmethode bei dem Uebergang von den ebenflächigen Körpern zur Kugel, dann aber auch die Anforderung, einen durch seinen Durchmesser abgebildeten Kreis als solchen sich vorstellen zu müssen

[1]) Vergl. H. Wiener, Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle. Band 1, Heft 1. Teubner 1907. S. 52 ff.

[2]) Dieser Uebelstand fällt bei Schülerzeichnungen besonders schwer ins Gewicht, er tritt aber auch bei manchen an sich einwandfreien Lehrbuchfiguren hervor. Damit soll jedoch das Schrägbild der Kugel nicht ohne weiteres verworfen werden; hat man, um nur ein Beispiel zu erwähnen, ein rechtwinkliges Kugeldreieck darzustellen, so bietet die schiefe Projektion den Vorteil, den am vordersten Punkt der Kugel gedachten rechten Winkel in wahrer Größe zu zeigen, ohne die Katheten als gerade Strecken erscheinen zu lassen.

[3]) Holzmüller hat dies schon in seiner „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ (Teubner 1886) empfohlen.

[4]) Die Figuren 1, 3 und 4 sind der von mir besorgten Neubearbeitung der Nellschen Logarithmentafel (E. Roth, Gießen 1909) entnommen.

licher Untersuchung und ist nur bei Personen mit günstiger Sterblichkeit zu verwenden. Die Tafel der 23 Deutschen Gesellschaften begreift eben solche Leben, ist aber bei allen Deutschen verwendbar, deren Leben nicht besonderen beruflichen Gefahren ausgesetzt ist. Die Reichstafel stellt die Sterblichkeit der gesamten deutschen Bevölkerung dar, ohne Rücksicht auf ärztliche Untersuchung oder Versicherung. Für die gewöhnlichen Sterbekassen, Todesfallversicherung mit Prämienzahlung bis zum Tode, sind die Prämien p_x^{90} (P_x^{90}) der Tafel der 23 Deutschen Gesellschaften und p_x^{100} (P_x^{100}) der Reichstafel für beide Geschlechter zu verwenden.

und einen Punkt der Tafel als Bild zweier Punkte der Kugelfläche zu erfassen; denn liegen im obigen Beispiel Zenit und Pol auf dem Rande (Fig. 3), so fallen Ost- und Westpunkt in der Mitte des Umrißkreises zusammen. Das erste Bedenken wird hinfällig durch die Tatsache, daß die schiefe Projektion die senkrechte voraussetzt, da das Schrägbild eines Punktes aus seiner senkrechten Projektion gefunden wird; die Anwendung der senkrechten Projektion wird also die früheren Gedankenreihen nicht stören, sondern im Gegenteil sie befestigen. Erscheint andererseits ein Kreis im Bilde als gerade Strecke, so setzt die Erfassung dieser Figur eine gewisse Entwickelung des Raumsinns voraus, aber doch nicht in höherem Grade, als zum Verständnis der Kugelgeometrie überhaupt nötig ist. Der in Rede stehenden Schwierigkeit könnte man ja durch Drehung der Kugel aus dem Wege gehen, aber mit ihrer natürlichen Stellung würde die Figur an Einfachheit und Deutlichkeit einbüßen, und schließlich ist es doch Aufgabe des Unterrichts, Schwierigkeiten, die in der Sache begründet sind, offen klarzulegen und zu überwinden. Man wird hierbei die Erfahrung machen, daß gerade die Zeichnung der Sonderlagen, wie sie eintreten, wenn z. B. ein Gestirn genau im Osten oder Westen steht, sich vorzüglich eignet, den Raumsinn zu entwickeln bezw. zu prüfen.

Das Bild eines Großkreises ist bei senkrechter Projektion eine Ellipse, deren große Achse mit einem Durchmesser des Umrißkreises zusammenfällt; auch die Länge der kleinen Achse kann leicht gefunden werden und die Achsenrichtungen sind meist unmittelbar gegeben. Zudem bietet die senkrechte Projektion die Möglichkeit, die Stücke nach Maß einzutragen bezw. der Figur zu entnehmen fast ebenso einfach, wie dies bei planimetrischen Konstruktionen geschieht. So ergibt sich ein Prüfstein für die Rechnung, der allein deshalb als sehr wertvoll erscheint, weil das zeichnerische Verfahren Zusammenhänge in überzeugender Weise zur Anschauung bringt, die auf rein abstraktem Wege nicht jeder Schüler mit völliger Klarheit erfaßt. (Man denke nur an die Verwechslung von Stundenwinkel und Azimut in Sonderfällen.)

Die Konstruktion läßt sich darauf gründen, daß jeder Kreis, der auf der Zeichentafel senkrecht steht, durch seinen Durchmesser abgebildet wird sowie darauf, daß jeder Kreis, dessen Mitte in der Tafel liegt, durch Drehung um den in der Tafel liegenden Durchmesser in diese sich bringen läßt. Wir legen die Tafel durch die Kugelmitte und knüpfen die weiteren Erläuterungen an das Beispiel des nautischen Dreiecks an. (Fig. 3.)

Den Zenit Z nehmen wir auf der höchsten Stelle des Umrisses an (um Raum zu sparen, wurde die Figur ein wenig aus ihrer natürlichen Lage gedreht), den Nordpol N des Himmels ebenfalls auf dem Umriß, um den Polabstand nach links verschoben, so daß die westliche Hälfte des Himmels vor der Tafel liegt; Horizont und Aequator erscheinen als Durchmesser des Umrißkreises. Der Stern S möge auf der westlichen (vorderen) Kugelhälfte liegen und vorläufig durch sein Bild gegeben sein; wir suchen seine Koordinaten sowohl im System des Horizonts wie in dem des Aequators. Wenn wir die Seiten ZS und NS einzeichnen (vergl. Anm. 1), so geschieht es nur, um die Anschauung zu unterstützen, zur Konstruktion dürfen die Ellipsenbögen nicht benutzt werden, sondern nur Geraden und Kreise[5]). Wir drehen deshalb den Scheitelkreis ZS

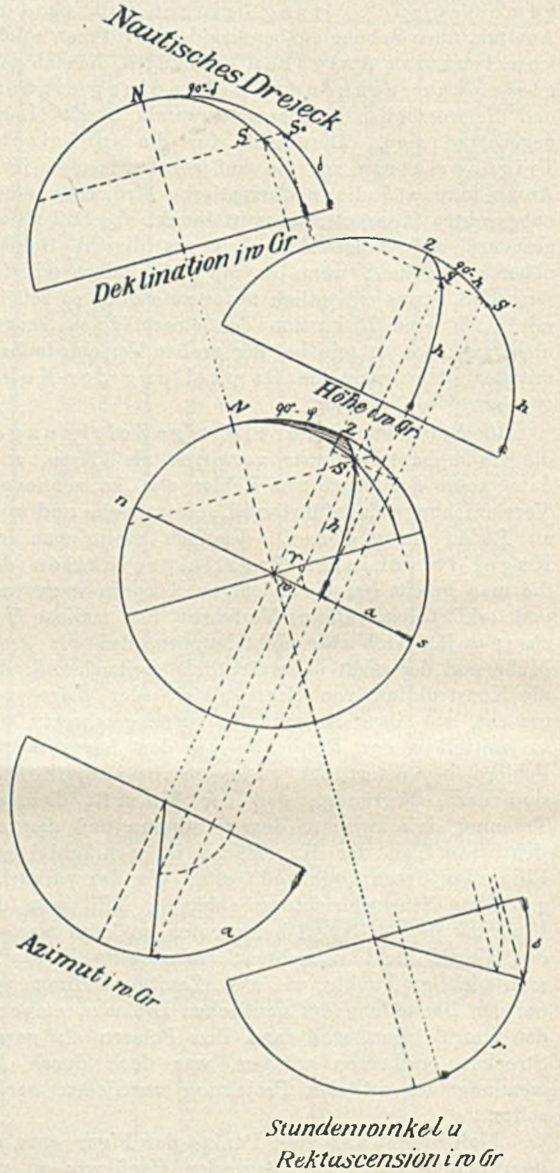


Fig. 3.

um die Scheitellinie an den Rand[6]), wo er mit dem Umrißkreis zur Deckung kommt. (Fig. 3 oben). Bei dieser gedachten Bewegung beschreibt S einen Bogen des Höhenkreises; derselbe steht auf der Tafel senkrecht und wird daher durch seinen parallel zum Bild des Horizonts liegenden Durchmesser abgebildet; Horizont und Höhenkreis schneiden am Rande

[5]) Holzmüller hat in seinem Lehrbuch der Elementarmathematik Band 3 S. 264 ff. alle sechs Dreiecksaufgaben mit Determination gelöst, doch wird dort die dem Punkte S entsprechende Ecke als Schnitt eines Ellipsenbogens mit einer Geraden bestimmt. Dieses Verfahren folgt dem Gang der Rechnung, kann aber nicht als rein konstruktiv gelten und würde deshalb in diesem Zusammenhang unzulässig sein.

[6]) Bei dem Entwurf der vorliegenden Unterrichtsskizze war ich bemüht, stets im Raum zu konstruieren und das Ziehen von „Hülfslinien“ in der Ebene zu vermeiden: denn nur durch den Zwang, an die Raumfigur selbst zu denken und die Konstruktion räumlich auszudrücken, kann jeder Mechanismus fern gehalten werden.

die Höhe h in wahrer Größe aus. Um das Azimut a zu erhalten, projiziere man den Höhenkreis auf den Horizont und lege diesen mit der Projektion in die Tafel um (Fig. 3 unten); man kann sich dabei auf einen Halbkreis (den vorderen) beschränken und diesen um den wagerechten Durchmesser des Umrißkreises z. B. nach unten herabschlagen, so daß er mit der unteren Hälfte des Umrißkreises zur Deckung kommt, während die Projektion des Höhenkreises mit dem aus der Hauptfigur (dem Aufriß) zu entnehmenden Halbmesser konzentrisch einzutragen ist. Der Stern wurde eben mit dem Höhenkreis auf die Ebene des Horizonts projiziert und mit diesem herabgeschlagen. Seine Umlegung ist also der Schnittpunkt des von S der Hauptfigur auf den wagerechten Durchmesser gefällten Lotes mit dem umgelegten Höhenkreis (denn bei dieser Umlegung kommt jeder Punkt soweit senkrecht unter die Drehachse, als er in Wahrheit vor der Tafel liegt). Die Umlegung stellt zugleich die Ansicht von oben (den Grundriß) dar; das Bild des durch S gehenden Scheitelhalbkreises ist der durch den umgelegten Stern gehende Halbmesser; dieser schneidet das vom Südpunkt s des Horizonts zu messende Azimut aus. In ganz entsprechender Weise findet man die Koordinaten im System des Aequators unter Benutzung der täglichen Bahn des Gestirns. Die Deklination δ erscheint in wahrer Größe, wenn der Stern im Meridian steht; man zeichne also (Fig. 3 links oben) den Bahnkreis des Gestirns als Gerade parallel zum Bild des Aequators, dann schneiden diese beiden parallelen Geraden den gesuchten Bogen aus dem Meridian aus. Der Stundenwinkel t wird gefunden, indem man den Aequator mit dem projizierten Bahnkreis umlegt (Fig. 3 rechts unten). Soll auch die Rektaszension r des Sterns bestimmt werden, so muß der Widderpunkt ♈ auf dem Aequator eingetragen sein derart, daß sein Stundenwinkel der Sternzeit der Beobachtung entspricht. Dann ist r der Bogen des Aequators, gemessen von ♈ (der täglichen Bewegung entgegen) bis zum Schnittpunkt mit dem Stundenkreis NS des Gestirns.

Anm. 1. Bringt man den Schnittpunkt des Scheitelhalbkreises mit dem Horizont aus der Umlegung (dem Grundriß) in den Aufriß (Fig. 2), so hat man für die

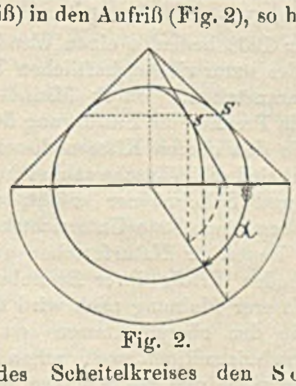


Fig. 2.

Bildellipse des Scheitelkreises den Scheitel der kleinen Halbachse. Läßt man andererseits den Punkt S den Höhenkreis durchlaufen, so beschreibt die Tangente des Scheitelkreises einen Drehkegel, dessen Spitze aus der Kreistangente in So gefunden wird. Die Ellipsentangente in S geht also durch diese Kegelspitze. Sollte die Kegelspitze über die Zeichenfläche hinausfallen, so schneide man die Kegelfläche mit dem Horizont und lege den Schnittkreis mit diesem in die Tafel um; dann kann der Fahrstrahl des Winkels a (s. o.) als Grundrißprojektion der gesuchten Kegelerzeugenden betrachtet werden, er schneidet also aus jenem Schnittkreise den Spurpunkt der Erzeugenden aus und dieser bestimmt in den Aufriß gebracht zusammen mit S die gesuchte Gerade. Liegt S so nahe am Horizont, daß die Bestimmung unsicher wird, so benutze man an Stelle des Horizonts eine andere wagerechte Ebene.

Anm. 2. Wird das Grund- und Aufrißverfahren als bekannt vorausgesetzt, so vereinfacht sich der skizzierte Lehrgang wesentlich; es sollte aber gezeigt werden, daß man auch ohne diese Lehre auskommen kann.

Es sei nun umgekehrt der Stern durch seine Koordinaten, etwa durch a und h gegeben, außerdem sei die Polhöhe φ bekannt; gesucht wird das Bild des Gestirns. Wir zeichnen Z und N wie oben ein, tragen h vom Horizont aus auf dem Rand ab, ziehen den Höhenkreis und legen den Horizont mit der Projektion des Höhenkreises in die Tafel um; in die Umlegung (den Grundriß) kann der Winkel a in wahrer Größe eingetragen werden, sein Fahrstrahl schneidet aus dem umgelegten Höhenkreis den Stern aus. Dieser ist schließlich in den Aufriß zu bringen, indem man ihn auf die wagerechte Achse der Umlegung projiziert und senkrecht bis zum Höhenkreis hinaufgeht[7]). Die vorstehenden Erörterungen geben ganz allgemein den Uebergang von einem sphärischen Koordinatensystem zu einem anderen, sie leiten auch von dem System des Aequators zu dem der Ekliptik über unter Benutzung des astronomischen Dreiecks, welches den Nordpol N des Himmels, den Nordpol E der Ekliptik und den Stern S zu Ecken hat (Fig. 4). Es ist also der

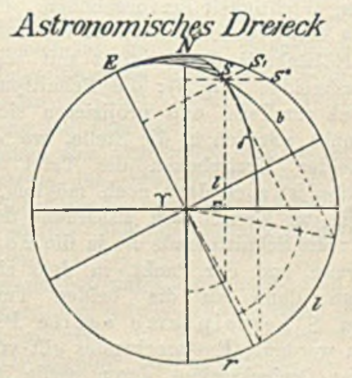


Fig. 4

Bogen $NE = \varepsilon = 23^0\frac{1}{2}$ (Schiefe der Ekliptik) in der Figur am Rand abgetragen; die Drehungen und Umlegungen sind hier in der Hauptfigur selbst vorgenommen, so daß sie außer r und δ auch die astronomische Länge l und die astronomische Breite b zeigt; l ist von ♈ aus auf der Ekliptik der täglichen Bewegung entgegen zu messen, b der Abstand des Sterns von der Ekliptik.

Das Kugeldreieck wird dabei aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel konstruiert und die fehlenden Stücke (ausgenommen den Winkel bei S) in wahrer Größe gezeichnet. In

[7]) Durch die Festsetzung, daß a und t im Sinne der täglichen Bewegung zu messen sind, wird die Aufgabe eindeutig, indem nur eines der beiden zur Tafel symmetrischen nautischen Dreiecke als zulässig erscheint.

ganz der gleichen Weise ermittelt man auch für zwei durch ihre geographischen Koordinaten gegebenen Punkte A und B der Erdkugel den sphärischen Abstand, sowie die Winkel, die der Großkreis AB mit den Meridianen dieser Orte bildet (Fig. 5); hat man

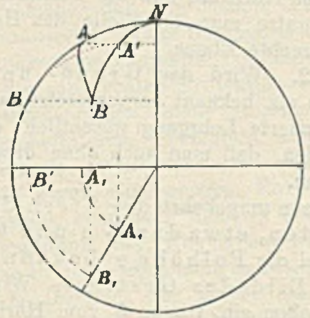


Fig. 5.

den Meridian von A an den Rand gelegt, so wird man zur Konstruktion des Winkels bei B diesen Punkt durch Drehung der ganzen Figur um die Erdachse an den Rand bringen. Der Drehwinkel, nämlich der Längenunterschied beider Orte, tritt samt den zugehörigen Parallelkreisbögen im Grundriß in wahrer Größe auf, und wenn man die hinter der Tafel liegende Hälfte des Aequators mit der vorderen zur Deckung bringt, indem man beide nach unten in die Tafel herabschlägt, so kommen die Drehwinkel der Punkte A und B zur Deckung. Die Kenntnis aller Dreieckswinkel ermöglicht zugleich die Konstruktion des sphärischen Exzesses.

Von den übrigen Grundaufgaben des Kugeldreiecks sei die aus den drei Seiten wegen der Durchsichtigkeit der Konstruktion und wegen ihrer praktischen Wichtigkeit hervorgehoben. Um z. B. aus δ, φ und h den Stundenwinkel t zu ermitteln, hat man nur den Höhenkreis des Gestirns mit seinem Bahnkreis zu schneiden (Fig. 3); die Schnittpunkte liegen symmetrisch zur Tafel und projizieren sich daher in einen Punkt, nämlich in die Stelle, wo die Schnittgerade beider Kreisebenen die Tafel trifft. Die Konstruktion ist auch dann noch möglich, wenn sich die Spuren der Kreisebenen außerhalb des Umrisses schneiden; die Schnittgerade ist ja die Potenzlinie beider Kreise, und der Punkt, in dem sie die Tafel trifft, muß dann als die beiden imaginären Punkten S gemeinsame reelle Projektion angesehen werden. Entsprechendes gilt von den nach S gehenden Dreiecksseiten, deren reelle Bilder durch affine Vergrößerung des Umrißkreises gefunden werden.

Will man aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln oder aus den drei Winkeln die fehlenden Stücke ermitteln, so konstruiere man statt des Dreiecks selbst sein Poldreieck nach den obigen Vorschriften. Die Lösung der Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen zu konstruieren, erfordert, ebenso wie die zu ihr duale Aufgabe, den Schnitt zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen; sie mögen deshalb hier übergangen werden.

Eine Reihe von Konstruktionen, die für die Zeichnung der Ellipse wichtig sind, beabsichtige ich im Zusammenhang mit einer elementargeometrischen Behandlung dieser Kurve später zusammenzustellen.

Kleinere Mitteilungen.

Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden. Nachdem die Frage einer rationellen Einteilung und Bezeichnung für solche Winkel, namentlich in dem Falle, wo die geschnittenen Linien parallel sind, im vorigen Jahrgang der Unt.-Bl. mehrfach behandelt worden ist (XIV, S. 57, 79, 107, 130), erscheint es nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß die für diese Frage maßgebenden Gesichtspunkte schon vor längerer Zeit in der Schottenschen „Vergleichenden Planimetrie" (H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, Leipzig, Teubner 1893) eine eingehende Erörterung gefunden haben (s. daselbst besonders Teil II, S. 359 ff.).

Lehrmittel-Besprechungen.

Der logarithmische Rechenstab. In Nr. 6 des vorigen Jahrganges 1908, S. 132, empfiehlt Herr G. Junge (Berlin) einen billigen logarithmischen Rechenstab ohne Schieber. Zur Ergänzung bemerke ich, daß die Kartonrechenstäbe von Gebr. Wichmann (Berlin NW 6, Karlsstraße 13) zum Preise von 1,25 M bereits früher von mir empfohlen worden sind*). Leider besitzen die neueren Stäbe nicht mehr die logarithmische Teilung auf der Rückseite der Zunge, was für die Schule ein Mangel ist. — Neuerdings hat die Firma Niethammer in Frankfurt a. M. (Roßmarkt) einen Präzisions-Schulrechenstab zu 4,50 M konstruiert, der allen Anforderungen (Buchsbaumholz und scharfe Teilung) entspricht. Es fehlen nur die trigonometrischen Skalen, die für die Schule wenig Wert haben; am besten bringt man die trigonometrischen Zahlen unmittelbar aus einer dreistelligen Tafel in Rechnung. Vor allem besitzt dieser Stab auch die logarithmische Skala auf der Rückseite der Zunge, auch werden ihm die natürlichen Stellenwertsregeln beigegeben**).

C. H. Müller (Frankfurt a. M.)

Bücher-Besprechungen.

v. Hanstein, Lehrbuch der Tierkunde. Eßlingen 1907, Schreiber. Geb. 5 M.

Das Jahr 1908 bedeutet einen Wendepunkt in der Geschichte des naturwissenschaftlichen Unterrichts an höheren Lehranstalten. Durch Ministerialerlaß vom 19. März ist in Preußen die Einführung des biologischen Unterrichts in den oberen Klassen dieser Anstalten gestattet; damit sind die Wünsche zahlreicher Universitätsprofessoren und Schulmänner erfüllt, und auch die 1904 zu Breslau eingesetzte Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte hat einen glänzenden Erfolg ihrer Bestrebungen zu verzeichnen. Unserer Meinung nach wird der biologische Unterricht in den oberen Klassen erst dann das gewünschte Ergebnis zeitigen, wenn schon in den unteren und mittleren mehr und mehr gegen die übermäßige Bewertung und Verwertung der Morphologie und Systematik Front gemacht und dem naturgeschichtlichen Unterricht eine verständnisvolle biologische Betrachtungsweise zugrunde gelegt wird. — Im Zu-

*) C. H. Müller, Der logarithmische Rechenstab. Verlag von Auffarth, Frankfurt a. M., 1899; 1,50 M.

**) Vergl. von demselben Verfasser: Der logarithmische Rechenstab und die Schule. Zeitschrift f. math. u. naturw. Unt. 1908, Bd. 38, S. 256.

sammenhange mit diesen Gedanken haben wir die Tierkunde v. Hansteins, der sich gerade auf biologischem Gebiet einen Namen erworben hat, mit besonderem Interesse in die Hand genommen. Den von dem Verfasser noch kürzlich in Wort und Schrift geäußerten Anschauungen entsprechend, zeichnet sich das vorliegende Werk vor vielen ähnlichen Neuerscheinungen durch eine maßvolle Auffassung und ruhige Beurteilung bionomischer Verhältnisse aus. Mit Recht warnt v. Hanstein vor einem Zuweitgehen hierin; nicht alles, sagt er, beruht auf Anpassung, und nicht jede am Schreibtisch ersonnene Theorie hält der Betrachtung in freier Natur stand. Der Stoff ist nicht nach methodischen, sondern nach den Grundsätzen des Systems angeordnet, ohne daß indessen das letztere übermäßig hervortritt.

Was die „Tierkunde" noch besonders wertvoll macht und diese gerade an den Anstalten zur Einführung empfiehlt, die in den oberen Klassen biologischen Unterricht einzurichten gedenken, sind die biologischen Abschnitte in dem allgemeinen Teil. Unserer Meinung nach würde die vergleichende Uebersicht über den Aufbau des Tierkörpers einen Teil des Pensums der Obersekunda; „die Beziehungen der Tiere zur Außenwelt" dasjenige der Unterprima und die geographische Verbreitung der Tiere dasjenige der Oberprima ausmachen.

Die Ausstattung des Buches ist vornehm; besondere Sorgfalt ist von der Verlagsbuchhandlung auf die fast durchweg farbigen Abbildungen verwandt; durch den achtfachen Farbendruck ist ein hoher Grad von Naturtreue erreicht. Der Preis des Lehrbuchs ist in Rücksicht auf die aufgewandte Mühe und Ausstattung ein niedriger; er wird einer eventuellen Einführung keine Schwierigkeiten bereiten.

Auf Wunsch des Verlages ist der dritte Teil: „Bau und Leben des Menschen und der Wirbeltiere" (geb. 1 M) gesondert erschienen. Auch über den Inhalt dieses Teiles läßt sich nur Vorteilhaftes sagen. Er entspricht dem Pensum der Untersekunda, doch kann er in Rücksicht auf die Vergleiche mit dem Wirbeltierkörper auch mit Vorteil dem biologischen Unterricht in der Prima zugrunde gelegt werden. — Wir sind überzeugt, daß die beiden Hansteinschen Werke sich viele Freunde erwerben werden, und wünschen ihnen eine weite Verbreitung, um dem biologischen Unterricht an höhereren Lehranstalten eine immer breitere Grundlage zu schaffen.

L. Kraetzschmar (Göttingen).

* *
*

Simroth, Heinrich, Die Pendulationstheorie. Leipzig 1907, Konrad Grethlein. XII und 564 S. mit 27 Karten im Text. Preis 12,00 M.

Die Pendulationstheorie ist zuerst von P. Reibisch im Jahre 1901 aufgestellt worden (Ein Gestaltungsprinzip der Erde. 27. Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden, 1901, S. 105—124), ihr Inhalt ist in Kürze der, daß die Rotationsachse der Erde keine feste Lage hat, sondern innerhalb einer durch den Erdmittelpunkt gehenden Ebene langsame Pendelbewegungen von ziemlich großer Amplitude ausführt; die Pole dieser Ebene sind an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen des Erdkörpers in Ecuador und Sumatra zu suchen, diese Punkte heißen „Schwingungspole", der Kreis innerhalb dessen die Rotationspole der Erde ihre hin- und hergehende Bewegung ausführen, der „Schwingungskreis", seine beiden Hälften haben gegen Greenwich die Länge 10° östlich und 170° westlich. Diese Wanderung der Rotationspole bedingt nun aber zugleich eine Verschiebung der Geoidform des Erdkörpers, indem die neue Lage dieser Form zunächst von den Wassermassen angenommen wird, während der feste Erdkern gleichfalls das Bestreben zeigt, sich der neuen Lage anzupassen.

So befinden sich die einzelnen Quadranten der Erdoberfläche in ständiger Veränderung, indem sie entweder der Lage zustreben, wobei ihnen die Rotationspole näher liegen („polare Schwingungsperiode") oder der, in der sie von den Polen am weitesten entfernt sind („äquatoriale Schwingungsperiode").

Unser europäisches Festland befindet sich jetzt (im Quartär) in äquatorialer Schwingung.

Der Ursprung der ganzen Theorie stammt aus dem Bedürfnis einer ausreichenden Erklärung des ja noch immer das größte Rätsel der Geologie darstellenden Problems der Eiszeiten, das in der Tat hier eine verblüffend einfache Lösung findet — die Eiszeit ist demnach immer dann eingetreten, wenn der pendelnde Nordpol der Erde unseren Gegenden am nächsten gekommen ist. Aber auch eine ganze Reihe anderer Erscheinungen, das Sinken der Küsten in gewissen, das Emporsteigen der Küsten in anderen Erdgegenden, erklären sich ungezwungen durch die größere Schnelligkeit, mit der die Wasserhülle der Erde ihre Geoidform der immer neuen Lage der Rotationsachse anpaßt, während der Einfluß, den diese Lagenänderung der Achse auf die Landmassen ausübt, u. a. darin zur Erscheinung kommt, daß die Verbindungslinie der Schwingpole, die von allen diesen Veränderungen nicht (oder nur wenig) berührt wird, der längste Durchmesser des (bekanntlich keinen genauen Rotationskörper darstellenden) Erdballs ist. In ganz neuer Beleuchtung erscheint dabei die eigenartige Rolle, die bei den Umgestaltungen der Erdoberfläche der afrikanische Kontinent spielt, namentlich auch durch die Rückwirkung auf Europa.

Vor allem aber ergibt sich von selbst eine ganz neue Auffassung der geologischen Perioden, die danach im wesentlichen mit den wechselnd aufeinander folgenden Perioden polarer und äquatorialer Schwingung zusammenfallen.

Den wesentlich auf geographische und geologische Betrachtungen gegründeten Ausführungen des Urhebers dieser Theorie will nun der Verfasser eine weitere Stütze dadurch geben, daß er darlegt, wie eine außerordentlich große Zahl von auffallenden Uebereinstimmungen einerseits, ausgeprägten Gegensätzen andererseits in der organischen Welt durch die neue Theorie eine überraschend einfache Lösung finden. Aus der erdrückenden Fülle des Materials sei hier nur eine Einzelheit hervorgehoben, das auffallende Vorkommen einer bestimmten Alligatorenart am Mississippi und am oberen Yang-tse, d. h. an zwei symmetrisch zum Schwingungskreise gelegenen Stellen der Erdoberfläche.

Die Stellen, von denen die einzelnen Gattungen der organischen Wesen ihren Ausgang genommen haben, sucht der Verfasser nämlich auf dem Schwingungskreis, bei den durch die Pendulation der Rotationsachse veränderten klimatischen Verhältnissen wurden dann die einzelnen Lebewesen veranlaßt, behufs Erhaltung ihrer Existenzbedingungen ihre bisherigen Wohnplätze zu verlassen, um, sei es in östlicher, sei es in westlicher Richtung, neue, ihren Existenzbedingungen entsprechende Plätze aufzusuchen. Dieses Erklärungsprinzip wird dann unter Heranziehung einer ganz staunenswerten Menge von Beispielen auf die einzelnen Gattungen der Lebewesen angewendet.

Hier sei nur die Einteilung kurz angegeben. Nach einer Einleitung, die zunächst gewisse allgemeine Gesichtspunkte (Bedeutung von Wasser und Land für die Entstehung der Organismen usw.), dann eine Darstellung der ganzen Theorie in ihren Grundzügen bringt, kommt der „Systematische Teil", der sich zunächst mit der Tierwelt, in dieser der Reihe nach mit den Weichtieren, den Arthropoden, den Wirbeltieren, den übrigen Wirbellosen, den Echinodermen, Brachiopoden, Bryozoen, Tunikaten beschäftigt, dann die Entstehung des Menschengeschlechts, die natürlich in die Gegenden des Schwingungskreises verlegt wird, die allmähliche Verbreitung, Rassendiffentierung und Entwickelung der Menschen behandelt — der zweifellos interessanteste, aber auch wohl angreifbarste Teil des ganzen Werkes —, hierauf einen Abschnitt über die Pflanzenwelt, dann noch einige Bemerkungen zur Geologie und zum Schluß eine kurze Zusammenstellung gewisser, für die Theorie bedeutsamer allgemeiner Gesichtspunkte bringt.

In diesen Schlußabschnitten kommt der Verfasser u. a. auch zu dem Ergebnis, daß die Pendelbewegung der Rotationspole nicht nur innerhalb des „Schwingungskreises", sondern auf einer diesen Kreis zur Achse habenden Schraubenlinie erfolgen müsse, während die Schwingungspole sich auf gewissen Kreisen um die obengenannten Punkte bewegen.

Die Darlegungen des mit einer Reihe von sehr instruktiven Karten im Text ausgerüsteten, sehr schön ausgestatteten Buches sind sehr klar, soweit der Verfasser sich auf dem ihm nächstliegenden Felde der Biologie und Biogeographie bewegt, weniger kann man das von den Darlegungen sagen, die er von der durch ihn auf die Biogeographie angewendeten Theorie selbst gibt. Da bleibt vor allem die Rolle des von ihm sogenannten „Kulminationskreises", d. h. des durch die Schwingpole und die Rotationspole gehenden Kreises etwas im Dunkeln. Nach der hier eben wiedergegebenen Definition ist dieser Kulminationskreis veränderlich, eine ganze Reihe von Ausführungen des Verfassers erwecken aber den Eindruck, daß er ihn als festen Kreis angesehen wissen will. Auch manche Bezugnahmen auf die mathematische Geographie der Erde zeigen anscheinend, daß diese Materie dem Verfasser nicht völlig geläufig ist.

Das ändert aber nichts daran, daß die Ausführungen des Buches geradezu frappierend sind, sehr geeignet, auf den Leser in ähnlich faszinierender Weise zu wirken, wie es der Verfasser an sich selbst erfuhr, als ihm die Theorie zum ersten Male entgegentrat. Diesem Eindruck kann sich kein Leser entziehen, auch der nicht, der im übrigen in dem Rausch, den eine so großzügige, ganz neue Gesichtspunkte eröffnende Theorie leicht erzeugt, sich seinen kühlen Kritizismus bewahrt. Der wird freilich immer sagen müssen: die Möglichkeit der neugelehrten Erdwandlung sei durchaus zugegeben; um die neue Lehre aber als notwendig anzunehmen, müßten doch für sie ganz klare mechanische Grundlagen vorhanden sein, von denen aber zunächst nichts zu sehen ist, die vagen Möglichkeiten, die der Verfasser (S. 543) angibt, können diesen Mangel nicht ersetzen. Wie dem nun auch sei, einfach an dieser Theorie, die durch das Simrothsche Buch eine so mächtige Unterstützung erfährt, vorbeizugehen, ist geradezu unmöglich. Möge das bedeutsame Buch viele und namentlich auch recht viele kritische Leser finden.

P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Blätter für deutsche Erziehung, herausgeg. v. Arthur Schulz. Jahrg. 10, Nr. 5, 6, 7. Birkenwerder 1908, Verlag der Bl. f. d. Erz.

Plüß, B., Unsere Beerengewächse. 2. verm. und verb. Aufl. Mit 123 Bild. Freiburg 1908, Herder. geb. M 1.50.

La Revue de l'Enseignement des Sciences (Rédacteur F. Marotte). 2me Année, No. 12—10. Paris 1908, Le Soudier.

Richter, O., Kreis und Kugel in senkrechter Projektion. Mit 147 Fig. im Text. Leipzig 1908, Teubner. M 4.40.

Rinkel, R., Einführung in die Elektrotechnik. (Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe.) Mit 445 Abbild. im Text. Ebenda. geb. M 11.20.

Rosenberg, H., Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre. In 2 Bdn. 2. Aufl. 361 Fig. Wien 1908, A. Hölder.

Roesler, J. K., und Wilde, Fr., Kaufmännisches Rechnen. 1. Teil. 8. Aufl. Halle 1909, Gesenius. geb. M 2.40.

Rothe, K. C., Der moderne Naturgeschichtsunterricht. Beiträge zur Kritik und Ausgestaltung. Wien 1908, Tempsky. geb. M 5.— = K 6.—.

Rüdorff, Fr., Grundriß der Chemie. Ausgabe B. 14. Aufl. Berlin 1908, Müller. geb. M 4.—.

Rüefli, J., Kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von Uebungsaufgaben. 6. Aufl. Bern 1908, A. Francke.

—„— Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von Uebungsaufgaben. 4. Aufl. Ebenda.

Ruska, J., Geologische Streifzüge in Heidelbergs Umgebung. Mit zahlreichen Originalabbildg., Karten und Profilen. Leipzig 1908, Nägele. geh. M 3.80, geb. M 4.40.

Scheel, W., Das Lichtbild. Leipzig 1908, Quelle & Meyer. M 1.—.

Scheiner, J., Populäre Astrophysik. Mit 30 Tafeln und 210 Fig. im Text. Leipzig 1908, Teubner. geb. M 12.—.

Schmehl, Chr., Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. 2. Teil. Ausgabe A: Für die Obersekunda und Prima der Gymnasien; Ausgabe B: für die Obersekunda der realistischen Anstalten. Gießen 1908, Roth. br. à M 1.60, geb. à M 2.—.

Schmeil, O., und Fitschen, J., Flora von Deutschland. 5. Aufl. Mit 587 Abbild. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 3.80.

Schubert, H., Niedere Analysis. 1. Teil. 2. Aufl. (Sammlung Schubert V.) Leipzig 1908, Göschen. geb. M 3.60.

Schulte-Tigges, Ergänzungsheft zur 24. und der früheren Auflagen von Mehlers Hauptsätzen der Elementar-Mathematik. Berlin 1908, G. Reimer.

Schulz, E. F., Naturkunden. Heft 1: Vögel, 1. Reihe. Heft 2: Pflanzen, 1. Reihe. Heft 3: Pflanzen, 2. Reihe. Heft 4: Pilze, 1. Reihe Berlin 1908, Parey. à Heft M 1.—.

Schwering, K., und Krimphoff, W., Ebene Geometrie. 6. Aufl. Mit 160 Fig. Freiburg 1908, Herder. geb. M 2.20.

Sexual-Probleme der Zeitschrift „Mutterschutz", neue Folge, herausgeg. von Dr. Max Marcus. Halbj. 6 Hefte (M 3.—). 4. Jahrg. 1908, Heft 1. Frankfurt a. M. 1908, Sauerländer.

Sieberg, A., Der Erdball, seine Entwicklung und seine Kräfte. Lfg. 1. Eßlingen, Schreiber. M —.75.

Simon, M., Ueber Mathematik. Erweiterung der Einleitung in die Didaktik. Gießen 1908, Töpelmann. M —.80.

Spengel, J. W., Ergebnisse und Fortschritte der Zoologie. 1. Bd., 2. Heft. Mit 38 Abbild. Jena 1909, Fischer. 1 Bd. M 20.—.

Starke, H., Physikalische Musiklehre. Leipzig 1908, Quelle & Meyer. M 3.80.

Strasburger, E., Noll, F., Schenk, H., Karsten, G., Lehrbuch der Botanik für Hochschulen. 9. umgearb. Aufl. Mit 782 zum Teil farb. Abbild. Jena 1908, Fischer. M 7.80.

Zur Strassen, O., Die neuere Tierpsychologie. Leipzig 1908, Teubner. M 2.—.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit 10 Bildn., sowie einem Anhange Unterhaltungsliteratur enthaltend. 101. Ausgabe. Abgeschlossen im April 1908. Ebenda.

Vater, R., Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. 67 Abbild. Ebenda.

Voigt, A., Deutsches Vogelleben. Ebenda. geb. M 1.26.

—„— Lehrbuch der Pflanzenkunde. 3. Teil: Anfangsgründe der Pflanzengeographie. Hannover 1908, Hahn.

—„— Die Pflanzengeographie in den botanischen Schulbüchern. Zweite Geleitschrift zum Lehrbuch der Pflanzenkunde. Ebenda.

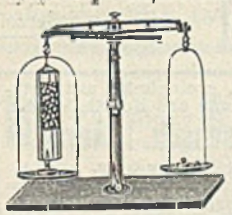
Volquardts, G., Feldmessen und Nivellieren. Leitfaden für den Unterricht an den Hochbauabteilungen Bautechnischer Fachschulen. 35 Fig. Leipzig 1908, Teubner. M —.80

Wagner, P., Lehrbuch der Geologie und Mineralogie für höhere Schulen. 2. und 3. verb. Aufl. Mit 268 Abbild und 3 Farbentafeln. Leipzig 1908, Teubner. geb. M 2.40.

PROJEKTIONS-APPARATE
FÜR SCHULZWECKE

Man verlange gratis u. franko Prospekt Msch von: CARL ZEISS JENA

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert auch



sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Gegen Einsendung von 30 Pf. erhalten Sie zwei Proben oder gegen Nachnahme von 15 M eine Probekiste mit 12 Flaschen unserer preiswerten

Niersteiner Weine

weiß, rot od. sortiert franko jeder deutschen Eisenbahnstation. Im Fasse per Liter M 1.— und höher ab hier.

Gräflich von Schweinitz'sches Weingut, Nierstein a. Rh. 120

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 57

Methodik
des
Botanischen Unterrichts
von
Dr. Felix Kienitz-Gerloff
Professor a. d. Landwirtschaftsschule zu Weilburg a. L.

Mit 114 zum Teil farbigen Abbildungen

Preis Mk. 6.50.

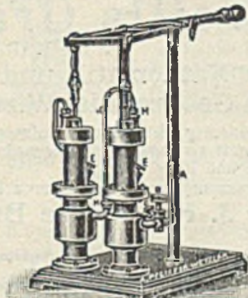
Verlag von Otto Salle, Berlin W. 57.

Grundsätze und Schemata
für den
Rechen-Unterricht
an höheren Schulen.
Mit einem Anhange:
Die periodischen Dezimalbrüche
nebst Tabellen für dieselben.
Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer a. d. Realschule zu Magdeburg
Preis 1.20 Mk.

Die Formeln
für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen abgeleitet an Figuren.
Von
Dr. Karl Bochow
Oberlehrer in Magdeburg.
Preis 1 Mk.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 2.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik u. Präzisions-Optik. Gegr. 1891.



Allein-Vertrieb und Alleinberechtigung
zur Fabrikation der
Geryk-Oel-Luftpumpen
D. R.-P. in Deutschland.
Einstiefelige Pumpen bis 0,06 mm Hg. } Vakuum
Zweistiefelige „ „ 0,0002 „ „ }
Sämtliche Neben- und Hilfs-Apparate.

Neuheit! Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen
eigen. Konstrukt.; höchste Verdünnung in kürzest. Zeit D.R.-P. angemeld. Unzerbrechl.; ohne Glas u. Porzellan

Alle physikal. u. chemischen Apparate.
Komplette Einrichtung physikalischer Kabinette, phys. u. chem. Vorbereitungszimmer u. Hörsäle.

Verlag der **J. Boltzeschen Buchhandlung** in **Gebweiler.**

Soeben ist erschienen und kann durch jede Buchhandlung bezogen werden:

Sammlung graphischer Aufgaben

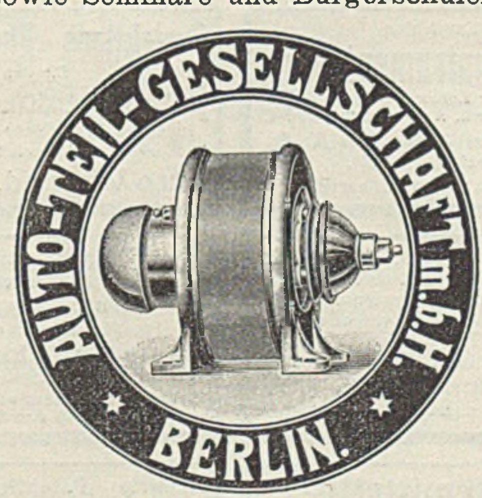
für den Gebrauch an höheren Schulen.

I. Mathematik
von
Dr. A. Weill,
Oberlehrer am Gymnasium zu Gebweiler.
Preis M 1.80.

Die Aufgabensammlung ist so eingerichtet, daß sie an den verschiedensten Punkten im Unterricht verwandt werden kann. Sie versucht durch positive Angaben, eine systematische Entfaltung des Funktionsbegriffs zu ermöglichen.

Kleiner Wechselstrom-Apparat
für Unterrichtszwecke

Unerläßliches pädagogisches Hilfsmittel im Physikunterricht
Wichtig für höhere Mittelschulen, Gymnasien, sowie Seminare und Bürgerschulen.



Man verlange Prospekt und kleine Broschüre:
„Was soll an Hand des kleinen Wechselstrom-Apparates den Schüler gelehrt werden?“

Auto-Teil-Gesellschaft m. b. H.

Berlin SW. 48, Wilhelmstr. 131/132.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's u. unseren technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie chem.-techn. Wagen von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeek & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Laboratoriums-Apparate
Demonstrations-Apparate
für Chemie, Physik usw.
Dr. Rob. Muencke
Berlin N. W. 6, Luisenstr. 58.

Apparate für elektr. Stromspannungs- und Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektr. Meßapparate
Gans & Goldschmidt, Berlin N. 65

Max Kohl, Chemnitz, Sachsen.
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und :::
:::: chemischen Gerätschaften ::::
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

Projektions-Apparate
neuartiger, vollkommener Bauart
Gebr. Mittelstrass
Hoflieferanten, Magdeburg 40.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O. 27, Andreasstr. 71—73.

R. Jung, Heidelberg
Werkstätte für
wissenschaftl. Instrumente
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

Biologie
in der Schule
Vielfach preisgekrönt
Kataloge kostenlos —
Linnaea
Berlin NW 21

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Botanische Modelle
in eigener Werkstatt hergestellt
liefert und empfiehlt
R. Brendel, Grunewald-Berlin.
Preisverzeichnisse
werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel
Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
Patent Klingelfuss.

Lehrmittel
für den
naturwissensch. Unterricht
liefert in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mäßigen Preisen
Wilh. Schlüter, Halle a. S.
Naturwissensch. Lehrmittel-Institut.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und Apparate für strahl. Wärme
nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz, Wetzlar
Projektionsapparate
Mikroskope, Mikrotome
Mikrophotographische Apparate
Photographische Objektive
Prismen-Feldstecher.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 30.
Die Einheit der Naturkräfte.
Ein Beitrag zur Naturphilosophie
von P. Angelo Secchi, S. J.
Autorisierte Uebers. von Prof. Dr. L. Rud. Schultze.
2. rev. Aufl. 2 Bde. mit 61 Holzschn.
Preis geh. 12 Mk., geb. 14 Mk.

Sauerstoff | Wasserstoff | Leuchtgas — komprimiert in leichten Stahlzylindern
Sauerstoff-Fabrik Berlin, G. m. b. H.
Berlin N. 11, Tegeler Straße 15.
Ständige Musterausstellung, Besichtigung erbeten. — Bitten genau auf Firma zu achten!

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Heidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

R. Winkel, Göttingen
Optische und mechan. Werkstatt.
Mikroskope
von den allerfeinsten bis zu den einfachen Schulmikroskopen
in erstklassiger Ausführung.
Preisliste frei und unberechnet.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.