Jahrgang XV. 1909. No. 2.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Tagesordnung der XVIII. Hauptversammlung zu Freiburg im Breisgau, Pfingsten 1909.

Montag, 31. Mai, abends 8 Uhr: Begrüßungszusammenkunft im Gartensaal „Zum Pfauen" (Friedrichstraße 61, am Nordende des Bahnhofs.)

Dienstag, 1. Juni, vormittags 9 bis 12 Uhr: Erste allgemeine Sitzung in der Aula der Oberrealschule (Zähringerstraße 15.)

Eröffnung und Begrüßung. — Geschäftliche Mitteilungen.

Vortrag über Darwins Leben und Wirken.

Diskussion über den biologischen Unterricht in den Oberklassen unter besonderer Berücksichtigung der Schülerübungen. Berichterstatter: Bastian Schmid (Zwickau.)

12 Uhr: Frühstückspause. (In der Turnhalle der Anstalt wird Frühstück bereit gehalten.)

Nachmittags 1 bis 3 Uhr: Abteilungssitzungen.

Spaziergang über den Schloßberg.

Abends 8 Uhr: Festmahl. (Lokal noch zu bestimmen.)

Mittwoch, 2. Juni, vormittags 9 bis 12 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung.

Vortrag von Geißler (Luzern): Methodische Wege für dauernden Zusammenhang der Mathematik mit den übrigen Lehrfächern.

Diskussion über die Meraner Vorschläge in der Praxis des mathematischen Unterrichts mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Berichterstatter: H. Schotten (Halle a. S.)

Frühstück wie am Dienstag.

Nachmittags 1 bis 3 Uhr: Geschäftliche Sitzung: Kassenbericht. — Wahl von drei Vorstandsmitgliedern an Stelle von Lenk, Pietzker und Bastian Schmid. — Daran anschließend eventl. Beschlußfassung über eine Verminderung der Mitgliederzahl des Vorstandes. — Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. — Regelung der Beziehungen des Vereins zu der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte*). — Antrag des Vereins-Vorstandes und Vereins-Ausschusses auf Erhöhung des Mitgliedsbeitrages auf 5 M. — Sonstige geschäftliche Anträge.

*) Vergl. diese Nummer: Vereine und Versammlungen, S. 41.

Darnach Besichtigung.
Spaziergang über Lorettoberg nach Günterstal (Gasthaus Kyburg).
Im Verlauf des Nachmittags wird Herr Univ.-Prof. Dr. Deecke einen vorbereitenden Vortrag über die zwei in Aussicht genommenen geologischen Exkursionen halten. (Geologisches Institut, Hebelstraße 40 II.)

Donnerstag, 3. Juni: Erste geologische Exkursion nach Badenweiler.

Freitag, 4. Juni: Zweite geologische Exkursion an den Kaiserstuhl.
Beide Ausflüge sind auch als touristische und botanische Ausflüge zu empfehlen; außerdem wird für Gelegenheit und Führung zu anderen Ausflügen in der Umgebung (Feldberg und Titisee, Höllental) gesorgt werden. Teilnehmer, die schon früher hier ankommen, finden auch schon am Sonntag, 30. Mai und Montag, 31. Mai zu größeren oder kleineren Ausflügen ortskundige Führer. Anmeldung an Prof. J. Mähler, Dreikönigstraße 16.

Angemeldete Abteilungsvorträge:
E. Brocke (Zabern): Ueber die Winkel an einer Geraden, die von zwei anderen geschnitten wird.
E. Grimsehl (Hamburg): Bewegliche Wandtafelzeichnungen im physikalischen Unterricht.
G. Kewitsch (Freiburg i. Br.): Ueber den Ursprung des Sexagesimalsystems.
A. Leiber (Freiburg i. Br.): Ueber spontane Quer- und Längsteilung bei Hydra.
A. Witting (Dresden): Ueber Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.

Alle Sitzungen finden in den Räumen der „Oberrealschule mit realgymnasialer Abteilung" (Zähringerstraße 15, Haltestelle der Tramhauptlinie) statt.

Zur Besichtigung wird empfohlen: Münster, Rathaus, das neue Lehrerseminar, das neue Friedrichsgymnasium und die neue Oberrealschule.

Das Empfangsbureau befindet sich Montag, 31. Mai, 8 Uhr vormittags bis 6 Uhr nachmittags, im Hotel Post, Eisenbahnstraße 35, an den Sitzungstagen während der Sitzungszeiten in der neuen Oberrealschule (Zähringerstraße 15, Tramhaltestelle). Einzeichnungslisten zum Festmahl und den verschiedenen Veranstaltungen liegen im Empfangsbureau auf.

Unterkunft in Freiburg.

Da an Pfingsten der Besuch von Freiburg durch Fremde sehr stark zu sein pflegt, so wird darauf aufmerksam gemacht, daß vorherige rechtzeitige Anmeldung in den Gasthöfen unbedingt notwendig ist.

Die Teilnehmer werden gebeten, sich ihre Zimmer in den gewünschten Gasthöfen direkt selbst vorauszubestellen (Postkarte mit Antwort!).

Die Besorgung von Zimmern in Privathäusern ist während des Semesters kaum erfolgreich.

Allfallsige Anfragen (Postkarte mit Antwort!) wegen Unterkunft sind zu richten an: Prof. J. Mähler, Dreikönigstraße 16.

Gasthöfe.

In der Nähe des Bahnhofes:

Bahnhofshotel	Bismarckstraße 3	Z. m. F. 2.80 M
Hotel Continental zum Pfauen	Friedrichstraße 31	Z. m. F. 3.00—4.00 M
„ Europäischer Hof	Bahnhofstraße 18—24	Z. 2.50—4.00 M; F. 1.20 M
„ Zähringer Hof	Bahnhofstraße 2	Z. m. F. 4.50—5.50 M
„ Post	Eisenbahnstraße 35	Z. m. F. 3.00 M
„ Viktoria	Eisenbahnstraße 54	Z. 2.50 M; F. 1.00 M
„ Roseneck	Fahnenbergplatz 2	Z. m. F. 3.20—3.50 M
„ Salmen	Bertoldstraße 50	Z. m. F. 2.80—3.00 M
„ National	Wilhelmstraße 48	Z. m. F. 3.50 M
„ Beauséjour	Werderstraße 8	Z. m. F. 3.50—4.00 M
Parkhotel	Werderstraße 4	Z. m. F. 4.00 M

In der Stadt:

Hotel Gaß	Gartenstraße 6	Z. m. F. 2.50—3.00 M
„ Freiburger Hof	Kaiserstraße 130	Z. m. F. 2.50—3.00 M
„ Hohenzollern	Urach/Günterstalstraße	Z. m. F. 2.50—3.00 M
„ Markgräfler Hof	Gerberau 22	Z. m. F. 2.50 M
„ Römischer Kaiser	Kaiserstraße 120	Z. 2.50 M; F. 1.00 M
Domhotel zum Geist	Münsterplatz 5	Z. m. F. 3.50 M
Hotel Engel	Engelstraße 3	Z. m. F. 3.50 M
„ Kopf	Engelstraße 5	Z. m. F. 2.80—3.30 M
„ Wilder Mann	Salzstraße 30	Z. m. F. 2.50 M

Eine möglichst zahlreiche Beteiligung von Damen ist sehr erwünscht.

Wie alljährlich, wird der Vereinsvorstand sich auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der Staaten, in denen die Pfingstwoche nur teilweise schulfrei ist, mit der Bitte wenden, daß die Leitungen der einzelnen Anstalten zu wohlwollender Berücksichtigung der behufs Teilnahme an der Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche angewiesen werden. Nach den bisherigen Erfahrungen darf auf die Gewährung dieser Bitte überall mit Sicherheit gerechnet werden.

Der Hauptvorstand. Pietzker. — **Der Ortsausschuss.** Seith.

Die Napoleonsaufgabe.

Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels

von Carl Herbst, Dipl.-Ing. (Dortmund).

Vor etwa 40 Jahren stellte in Hamburg ein Mathematiker die Aufgabe:

„Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, unter alleiniger Benutzung des Zirkels und unter Ausschluß von Berührungspunkten".

Er gab an, Napoleon I. habe das Problem seinerzeit gelöst und einer Gesellschaft von Gelehrten vorgelegt.

Ob sich das historisch belegen läßt, vermag ich nicht mit Bestimmtheit zu sagen. Ich konnte einstweilen nur in Erfahrung bringen, daß Napoleon in der Tat häufig mathematische Unterhaltungen führte und dabei besonders von der Geometrie des Zirkels sprach.

So heißt es beispielsweise in den einleitenden biographischen Bemerkungen des Werkes von Mascheroni (Géométrie du Compas, par L. Mascheroni; Traduite de l'Italien par A. M. Carette. Seconde Édition. Paris 1828) unter anderem wie folgt:

pag. XI. „Mascheroni publia à Pavie, en 1797 (1), la Géométrie du Compas. C'était dans les derniers momens du séjour de Bonaparte en Italie. Le général, qui accueillait avec plaisir les savans italiens, avait ou souvent Mascheroni et s'était entretenu plusieurs fois avec lui de la Géométrie du Compas. Quand la paix de Campo-Formio fut signée, Bonaparte vint à Paris apporter le traité au directoire, et lui présenter les drapeaux de l'armée d'Italie. Le lendemain de cette cérémonie triomphale, qui eut lieu le 20 frimaire an VI (10 décembre 1797), Bonaparte fut invité par François de Neufchâteau à une nombreuse réunion composée de savans et de gens de lettres, tous membres de l'Institut. «Le général les étonna tous, dit le Moniteur du temps, par la variété et l'étendue de ses connaissances».

Lagrange et Laplace faisaient partie de la réunion, et dans une conversation que Bonaparte eut avec ces illustres géomètres, et particulièrement avec Laplace, il leur fit connaître la Géométrie du Compas, ouvrage alors tout nouveau et inconnu en France, en leur donnant la solution de quelques-uns des problèmes qui se trouvent dans cette production originale. Après avoir écouté Bonaparte avec attention, Laplace, qui avait été son professeur de Mathématiques à l'école de Brienne, lui dit en présence de tous les savans réunis autour d'eux: «Nous attendions tout de vous, général, excepté des leçons de Mathématiques».“

pag. XV. „Mascheroni ..... voulut se passer de la règle. On a lieu d'être étonné du grand nombre de propositions nouvelles et piquantes qu' il a su trouver dans un sujet en apparence épuisé. Ses principaux théorèmes avaient été apportés en France par le vainqueur et le pacificateur de l'Italie.“

pag. XVI. „Avant de quitter la Géométrie élémentaire, nous parlerons .... de la Géométrie du Compas, due à l'intéressant et malheureux Mascheroni, enlevé par le chagrin que lui causaient les malheurs de son pays au moment où les succès des armées françaises, commandées par le héros qui le premier avait apporté en France les théorèmes les plus curieux de son livre, allaient lui rendre une patrie qu'il honorait par ses talens.“

Hiernach ist es mehr als wahrscheinlich, daß Napoleon tatsächlich die vorliegende Aufgabe gestellt hat; denn sie gehört in der Tat zu den interessantesten und eigenartigsten, die das Mascheronische Werk enthält.

Tritt man ohne besondere Vorkenntnisse an das Problem heran, so drängt sich zunächst der Gedanke auf, auf der Peripherie des gegebenen Kreises zwei diametral liegende Punkte festzulegen und deren Entfernung zu halbieren.

Für das Halbieren des Abstandes zweier Punkte M und N gibt Mascheroni fünf Konstruktionen an, die zum Teil in dem Werke von A. Adler (Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig 1906) angeführt sind. Weitere Lösungen zeigen Fig. 1 und 2.

Im folgenden wird zur Abkürzung von der Adlerschen Ausdrucksweise Gebrauch gemacht, wonach der um einen Punkt P mit PA beschriebene Kreis durch $P(A)$ bezeichnet wird.

In Fig. 1 liefert $K_1[N(M)]$ nach dreimaliger Eintragung des Radius $MN = m$ den Punkt A auf der Geraden MN. $K_5[A(M)]$ ergibt auf $K_2[M(N)]$ den Punkt B, $K_6[B(M)]$ auf K_1 den Punkt C, $K_7[C(A)]$ auf K_6 den Mittelpunkt von MN.

Beweis: Ist (Fig. 3) P der Schnittpunkt von $MN = m$ mit K_6, so ist $\triangle MPB \sim MBA$, also

$$MP : MN = MP : MB = MB : MA = MN : MA = 1 : 2$$

und somit P Mittelpunkt von MN. Als Centriwinkel ist $\sphericalangle PBC = 2 \sphericalangle PMC = 2\alpha$, daher $PC = 2m \cdot \sin\alpha$. Da ebenfalls $AC = 2m \cdot \sin\alpha$, so muß in Fig. 1 K_7 durch den Mittelpunkt P von MN gehen.

In Fig. 2 stimmt bis zum Kreise K_5 die Konstruktion mit der von Fig. 1 überein. Kreis $K_6'[B'(M)]$ gibt dann auf K_3 den Punkt D, $K_8[D(N)]$ liefert auf K_6' den Mittelpunkt von MN.

Beweis: In Fig. 4 ist nach obigem der Schnittpunkt P von K_6 und MN der Mittelpunkt von MN. Folglich ist

$$EP = n \perp MN \text{ und } n = \frac{1}{2} m \sqrt{3},$$

$$p = \sqrt{m^2 - \left(\frac{1}{4} m\right)^2} = \frac{1}{4} m \sqrt{15}.$$

Für das eingetragene X-Y-System lauten die Gleichungen von K_3 und K_6':

$$K_3 \;-\!/\!-\; \left(x + \frac{1}{2} m\right)^2 + (y - n)^2 = m^2$$

$$K_6' \;-\!/\!-\; \left(x + \frac{3}{4} m\right)^2 + (y + p)^2 = m^2$$

Für $x = -\frac{1}{4} m$ ergeben beide Gleichungen

$$y = \frac{1}{2} m \sqrt{3} - \frac{1}{4} m \sqrt{15}.$$

K_3 und K_6' schneiden sich also auf der zu $x = -\frac{1}{4} m$ gehörigen Vertikalen, so daß $DN = DP$ wird und in Fig. 2 K_8 durch den Mittelpunkt von MN geht.

Die Fig. 5 und 6 zeigen noch einige Varianten zu Fig. 1 und sind ohne weiteres verständlich.

Mit Hilfe der für die Streckenhalbierung aufgestellten Konstruktion läßt sich nun die Napoleonsaufgabe wie folgt lösen: Um einen beliebigen Punkt A des Kreises K (Fig. 7) wird mit beliebigem Radius ϱ der Kreis K_1 beschrieben, welcher K in B und C trifft. Es läßt sich dann nach dem Obigen der Mittelpunkt D von $BC = s$ festlegen und der Eckpunkt E des Rechtecks $ADCE$ bestimmen. Ferner läßt sich K_2 über CE beschreiben, der von $K_3[E(A)]$ in F getroffen wird. K_4 mit dem Durchmesser EF schneidet im allgemeinen K in zwei Punkten G und H. Einer von diesen, in der Figur Punkt H, ist der Schnittpunkt der Sekante CE und des Kreises K. — Zum Beweise werde zunächst angenommen, H sei nur der Schnittpunkt von CE und K_4; dann ist:

$$\sphericalangle EHF = CFE = 90^0, \text{ folglich:}$$
$$EF^2 = EH \cdot EC, \text{ d. h. } EA^2 = EH \cdot EC.$$

Da EA Tangente von K, EC die ganze Sekante, so muß hiernach EH der äußere Sekantenabschnitt sein und H auch auf K liegen. Da ferner $\sphericalangle BCH = 90^0$, so ist BH ein Durchmesser von K, dessen Halbierung den gesuchten Mittelpunkt O und den Radius r liefert.

So ist der eingangs aufgestellte elementare Gedanke folgerichtig durchgeführt worden. — Von einer Ausführung der Konstruktion soll hier Abstand genommen werden, da das Verfahren infolge seiner Kompliziertheit wenig zeichnerisches Interesse hat und von anderen weit in den Schatten gestellt wird. Es mag genügen, die Aufgabe theoretisch gelöst zu sehen.

ϱ ist die einzige angenommene Größe, das Verhältnis $\frac{\varrho}{r}$ ist ausschlaggebend für die Gestaltung der Figur. Für die Determination kann die Länge r nicht unmittelbar herangezogen werden, denn sie ist der Aufgabe nach unbekannt; man ist daher auf die Benutzung abgeleiteter Größen angewiesen. Eine solche ist z. B. das Verhältnis $u = \frac{s}{2\varrho}$. Soll die Konstruktion möglich sein, so muß zunächst die Bedingung

$$\sqrt{1-u^2} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

erfüllt werden; ist weiterhin $\sqrt{1-u^2} > 0{,}87855$, so ist der zu benutzende Sekantenpunkt der untere Schnittpunkt von K_4 und K. Für $\sqrt{1-u^2} < 0{,}87855$ ist der obere Schnittpunkt zu verwenden, für $\sqrt{1-u^2} = 0{,}87855$ berührt K_4 den Kreis K. — Eine andere verwendbare abgeleitete Größe erhält man durch Bestimmung des Punktes J und durch Messung von $AJ = p = \frac{\varrho^2}{r}$. Führt man ein $v = \frac{p}{\varrho}$, so lassen sich obige Bedingungen schreiben: $v > \sqrt{2}$ und $v \gtrless 1{,}7571$. — Im übrigen soll hier des beschränkten Raumes wegen die Wiedergabe der einzelnen Determinationen unterbleiben.

In Erweiterung des bisherigen Lösungsprinzips soll nun die Festlegung von zwei auf einem Durchmesser liegenden, gleichweit von O entfernten Punkten gefordert werden. Dann gelangt man zu dem durch Fig. 8 gekennzeichneten Weg. Der um A mit ϱ beschriebene Kreis K_1 liefert auf K die Punkte B und C. Der Kreis $K_2[D(A)]$ ergibt auf K_1 E und F. Der Mittelpunkt von EF ist der gesuchte Mittelpunkt von K. — Denn es ist:

$$\varrho^2 = 2\,mr = [2\,m \cdot \cos \alpha]^2, \text{ also } r = 2\,m \cdot \cos^2 \alpha = AO.$$

Die Konstruktion ist in Fig. 9 durchgeführt; für die Streckenhalbierung ist das Verfahren nach Fig. 1 zugrunde gelegt.

Geht man von den bisherigen Grundgedanken bei der Lösung ab, so findet man weit elegantere Konstruktionen. Die Beziehung $\varrho^2 = r \cdot p$ liefert für ein gewähltes ϱ zu einem bekannten p das gesuchte r als 3. Proportionale. p ist nach Fig. 7 und anderweitig konstruierbar (s. unten). Für Auffindung der 3. Proportionalen kann die von Mascheroni aufgestellte Konstruktion benutzt werden (Mascheroni, S. 95), s. Fig. 10, die ohne weiteres verständlich ist. Als Peripheriewinkel ist

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha, \quad \sin\beta = \frac{DE}{2\varrho} = \sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{2p},$$

also $\qquad \varrho^2 = p \cdot DE - DE = r.$

Für die 4. Proportionale gibt Mascheroni (S. 99) ein anderes Verfahren an; bei gleichen Innengliedern entsteht daraus die aus Fig. 11 und 12 ersichtliche Konstruktion. In beiden ist $BC = p$, $CD = \varrho$, $DE = p$

und $\qquad BE = \frac{\varrho^2}{p} = r.$

Denn es ist:

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB, \text{ mithin } \alpha = \beta,$$
$$\triangle BAC \sim BEA, \text{ also } p : \varrho = \varrho : BE \text{ und } BE = r;$$

E liegt auf der Geraden BC. Eine Anwendung von Fig. 11 zeigt Fig. 13. In dieser ist

$$AC = EF = \varrho, \; AD = BE = FG = p, \; BG = r.$$

Mascheroni gibt folgende Konstruktion (Fig. 14): Kreis K_1 um A ergibt nach dreimaliger Eintragung von ϱ den Punkt D. Es wird dann $DC = AE$ gemacht und $K_2[E(A)]$ beschrieben, der K_1 in F schneidet. BF ist der gesuchte Radius r. — Man erkennt sofort, daß Mascheroni überaus geschickt die 3. Proportionale benutzt. Abgehend von dem Mascheronischen Beweis findet man für die Konstruktion die folgende Begründung: Es ist

$$DC = p = \frac{\varrho^2}{r}, \quad BF = \frac{AD^2}{AE} = \frac{\varrho^2}{p} = r.$$

An Hand von Fig. 15 erhält man noch folgenden, in sich geschlossenen analytischen Beweis: Es ist

$$x = 2\,\varrho \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi; \quad \varrho = 2\,r \cdot \sin\frac{1}{2}\psi$$

$$p = \frac{\varrho}{2 \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi} = 2\,\varrho \cdot \sin\frac{1}{2}\psi, \text{ also } 2 \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{1}{2}\psi}$$

$$x = \frac{\varrho}{2 \cdot \sin\frac{1}{2}\psi} = r.$$

Zu einer weiteren Lösung dieser Art führt Fig. 16. In dieser ist, wie vorher auf K_1, der Punkt D festgelegt worden. Es ist dann $CE = FE = DB = p$ gemacht und $K_3[F(C)]$ beschrieben, der K_1 in H schneidet. Zieht man die Gerade CE und die übrigen, so findet man folgende Beziehungen:

$$\triangle CGF \sim CFE, \; CG : \varrho = \varrho : p, \; CG = \frac{\varrho^2}{p} = r.$$

Da $EC : AE = AC : CG$ und $\sphericalangle CEA = ACG$, so ist $\triangle CEA \sim ACG$ und $AG = CG = r$, demnach G Mittelpunkt von K. Es ist noch

$$HG = 2\,\varrho \cdot \sin\alpha, \quad HE = \frac{p \cdot \sin\alpha}{\sin\beta},$$

also: $\qquad \frac{HG}{HE} = \frac{2\,\varrho \cdot \sin\beta}{p} = 1, \; HG = HE.$

So entsteht die Konstruktion Fig. 17.

Fig. 18 zeigt eine andere Anwendung des Verfahrens von Fig. 10. Es ist

$$EJ = \frac{\varrho^2}{AD} = \frac{\varrho^2}{p} = r.$$

Da $EJ \,/\!/\, AL \perp EF$, so ist $AL = \frac{1}{2}r$. Die symmetrisch liegenden Kreise $K_5[E(A)]$ und $K_6[F(A)]$ schneiden

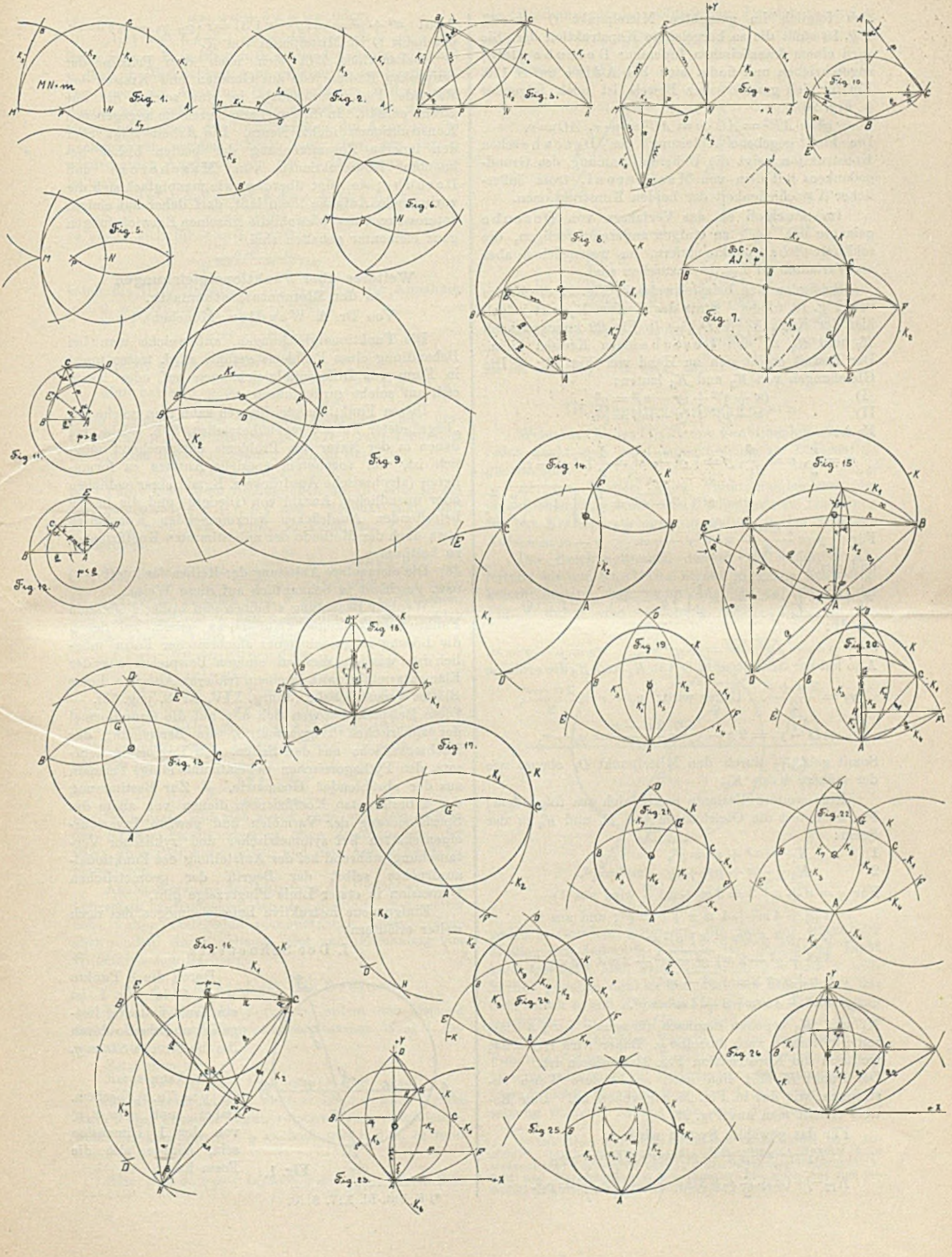


Fig. 1.
MN = m
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 10
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 13
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 17.
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 16.
Fig. 24
Fig. 26
Fig. 25
Fig. 23

sich folglich im gesuchten Mittelpunkt O von K. Fig. 19 stellt die so hergeleitete Konstruktion dar. Sie wird einem französischen Ingenieur D e s c u b e (1885) zugeschrieben und findet sich bei A d l e r auf S. 119. Ein für sich geschlossener Beweis ist noch folgender (s. Fig. 20):

$$\varrho^2 = AF^2 = AO \cdot p = AC^2 = p \cdot r, \; AO = r.$$

Die hier gegebene Ableitung der D e s c u b e schen Konstruktion zeigt die Uebereinstimmung des Grundgedankens mit dem von M a s c h e r o n i, trotz äußerlicher Verschiedenheit der beiden Konstruktionen.

Im Anschluß an das Verfahren von D e s c u b e gelangte ich noch zu einigen anderen Lösungen, die schärfere Schnittpunkte liefern, im wesentlichen aber als Varianten zu Fig. 19 anzusehen sind.

So finden sich beispielsweise in Fig. 21 die Kreise von Fig. 19 wieder. Statt des Kreises K_5 tritt jedoch hier der Kreis K_7 $[G(D)]$. — In Fig. 22 kommen noch K_7 und K_8 zu den D e s c u b e schen Kreisen hinzu. Der Beweis ergibt sich an Hand von Fig. 23. — Die Gleichungen von K_2 und K_6 lauten:

I) $\qquad (x + q)^2 + (y - n)^2 = \varrho^2$

II) $\qquad (x - p)^2 + (y - m)^2 = \varrho^2.$

Es ist

$$m = \frac{r}{2}, \; n = \frac{\varrho^2}{2r}, \; p = \sqrt{\varrho^2 - m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\varrho^2 - r^2},$$

$$q = \sqrt{\varrho^2 - n^2} = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{4 - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Für $\quad y = \frac{2n + r}{2}$ wird $y - n = \frac{r}{2}, \; y - m = n$

und aus I:

$$x_{\mathrm{I}} + q = \sqrt{\varrho^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\varrho^2 - r^2}; \; x_{\mathrm{I}} = p - q,$$

aus II:

$$x_{\mathrm{II}} - p = -\sqrt{\varrho^2 - n^2} = -q; \qquad x_{\mathrm{II}} = p - q = x_{\mathrm{I}}.$$

Also hat der Schnittpunkt G von K_2 und K_6 die ordinate

$$y_g = \frac{2n + r}{2}. \quad \text{Daher wird:} \; y_g - r = \frac{2n - r}{2},$$

$$AD - y_g = 2n - y_g = \frac{2n - r}{2} = y_g - r.$$

Somit geht K_7 durch den Mittelpunkt O, ebenso wie der frühere Kreis K_6.

Eine weitere Variante ergibt sich aus folgendem: Fig. 23 liefert die Gleichungen von K_1 und K_6 in der Form:

1) $\qquad K_1 \mathrel{-\!/\!-} x^2 + y^2 = \varrho^2,$

2) $\qquad K_6 \mathrel{-\!/\!-} (x - p)^2 + (y - m)^2 = \varrho^2.$

Für $y = r + x\sqrt{3} = 2m + x\sqrt{3}$ wird aus 1)

$$4x^2 + 4m^2 + 4mx\sqrt{3} = \varrho^2; \text{ und aus 2)}$$

$$(x - p)^2 + (m + x\sqrt{3})^2 = \varrho^2,$$

$$4x^2 + \varrho^2 - 2x\sqrt{\varrho^2 - m^2} + 2mx\sqrt{3} = \varrho^2,$$

$$2x + m\sqrt{3} = \sqrt{\varrho^2 - m^2},$$

$$4x^2 + 4mx\sqrt{3} + 4m^2 = \varrho^2.$$

K_1 und K_6 ergeben demnach für $y = r + x\sqrt{3}$ dasselbe x, mithin auch dasselbe y. Daher wird $HO = 2x$, wodurch die Konstruktion Fig. 24 bewiesen ist.
Der Punkt H läßt sich noch auf andere Weise bestimmen, wie das in Fig. 25 angegeben ist. Den Beweis ersieht man aus Fig. 26.

Für das gewählte System wird

$$K_1 \mathrel{-\!/\!-} x^2 + y^2 = \varrho_1^2 = r \cdot AD = r \cdot \varrho_2,$$

$$K_{12} \mathrel{-\!/\!-} \left(x + \frac{1}{2}\varrho_2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\varrho_2\right)^2 = \varrho_2^2.$$

Also: $x^2 + y^2 = \varrho_2(y - x\sqrt{3}) = r \cdot \varrho_2, \; y_h - x_h\sqrt{3} = r,$ das heißt O ist Mittelpunkt von K.

Bekanntlich läßt sich nach dem Prinzip der reziproken Radien jede aus Geraden und Kreisen bestehende Figur umwandeln in eine solche, die nur Kreise enthält. In diesem Sinne bieten die angegebenen Konstruktionen nichts Neues. Die Arbeit zeigt aber den inneren Zusammenhang der beiden bisher bekannten Konstruktionen von M a s c h e r o n i und D e s c u b e; sie zeigt überdies, wie mannigfach sich die vorliegende Aufgabe lösen läßt, darf daher auf einiges Interesse rechnen, wiewohl die einzelnen Entwickelungen ganz elementar gehalten sind.

Weiteres über Funktionalgleichungen in der Elementarmathematik.

Von Dr. A. W e n d l e r (München).*)

Die Funktionalgleichungen, auf welche man bei Behandlung eines Problems geführt wird, treten meist in Form von Differentialgleichungen auf oder lassen sich auf solche zurückführen.

Diesen Funktionalgleichungen kann man solche mit „begründeter Form" gegenüberstellen, d. h. solche, bei denen es der Natur des Problems entsprechend möglich ist, von vornherein spezielle Ansätze zu formulieren (algebraische Ausdrücke z. B. mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern) und die in den betreffenden Ausdrücken vorkommenden Konstanten etwa nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu bestimmen.

Die elementare Ableitung der Reihen für $\log(1 + x)$ usw. geschieht ja bekanntlich auf diese Weise.

Weniger Beachtung scheinen nun bisher diejenigen Funktionalgleichungen gefunden zu haben, bei denen die Lösung in geschlossener algebraischer Form möglich ist, wie ich dies an einigen Beispielen aus der Elementarmathematik in einem früheren Aufsatze dieser Blätter versucht habe (Jahrg. XIV, Nr. 3, pag. 53). — Diese Beispiele bezogen sich u. a. auf die Grundformel der sphärischen Trigonometrie, die Berechnung der Rechtecksfläche aus den Seiten, den Proportionallehrsatz, den Pythagoreischen Lehrsatz und einige Formeln aus der abzählenden Geometrie. — Zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten dienen vor allem die Spezialisierung der Variablen und gewisse Invarianzeigenschaften bei symmetrischer und zyklischer Vertauschung, während bei der Aufstellung des Funktionalausdruckes selbst der Begriff der geometrischen Dimension in erster Linie Fingerzeige gibt.

Einige neue instruktive Beispiele mögen das noch weiter erläutern:

I. D e r S e h n e n s a t z.

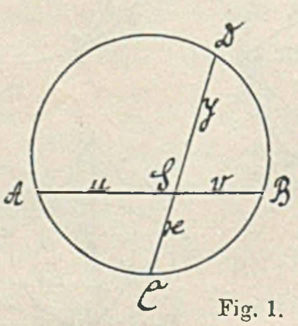


Fig. 1.

Durch die 3 Punkte A, B, C in Fig. 1 ist ein Kreis eindeutig festgelegt und ebenso durch ihn die Strecke $SD = y$.

Man kann somit (1) $y = f(u, x, v)$ setzen. Dabei muß $f(u, x, v)$ von der 1. Dimension sein, könnte also die Form haben

*) S. Unt.-Bl. XIV, S. 53.

(2) $y = a u + b x + c v$ oder

(3) $y = \sqrt{a u^2 + b x^2 + c v^2 + d u x + e u v + g v x}$.

Setzt man z. B. in (2) $x = 0$, so wird $y = a u$, während y dann in Wirklichkeit ganz willkürlich werden müßte. Der durch die Annahme (2) verursachte Widerspruch könnte noch auf anderem Wege nachgewiesen werden. Ganz analog kann die Unzulässigkeit der Annahme (3) nachgewiesen werden. Setzt man aber, um für y wieder einen Ausdruck von der 1. Dimension zu erhalten,

(4) $y = \dfrac{a u^2 + b x^2 + c v^2 + d u x + e u v + g v x}{p u + q x + r v}$,

so ergibt sich für $x = 0$, $v = 0$:

$$y = \frac{a u^2}{p u} = \frac{a}{p} \cdot u,$$

somit die Unbestimmtheit von y durch die Annahme $a = 0$, $p = 0$; für $x = 0$, $u = 0$ wird

$$y = \frac{c v^2}{r v} = \frac{c}{r} v$$

unbestimmt durch $c = 0$, $r = 0$.

Man hat also $y = \dfrac{b x^2 + d u x + e u v + g v x}{q x}$ (5).

Diese Gleichung muß auch die speziellen Fälle umfassen, wo AB Durchmesser und CD darauf senkrecht ist und den noch spezielleren Fall, in dem

$$x = y = u = v = R$$

ist. Führt man diese Bedingungen in (5) ein, so erhält man $q = b + d + c + g$ usw. Bedenkt man, daß für $v = y$ auch $u = x$ wird, so kann man $b + d = 0$ entnehmen.

Man hat also jetzt $y = \dfrac{b x^2 - b u x + e u v + g v x}{(e + g) x}$ (6).

Es muß ferner möglich sein, x mit y zu vertauschen, ohne daß dadurch u und v geändert werden. Also besteht neben (6) die Gleichung

$x = \dfrac{b y^2 - b u y + e u v + g v y}{(e + g) y}$ (6'), somit auch:

$$b x^2 - b u x + g v x = b y^2 - b u y + g v y$$

oder $b (u - y - x) = g v$ (7). Da diese Form nach dem über (2) Gesagten als Abhängigkeitsbedingung nicht bestehen kann, so muß $b = g = 0$ sein. Man hat also in (6)

$$y = \frac{e u v}{e x} = \frac{u v}{x}.$$

Der Sehnensatz läßt sich somit ganz aus dem Wesen des Kreises heraus ableiten ohne Zuhilfenahme der Sätze über Peripheriewinkel und der Aehnlichkeit im besonderen.

Analoges war bei der Ableitung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu bemerken, wo es ebenfalls nicht nötig war, weiter abliegende planimetrische Zwischensätze anzuwenden, die überhaupt erst nach Zeichnung von Hilfslinien sich darbieten.

II. Flächeninhalt des Dreiecks.

Es ist (Fig. 2) $J = f(x, y, z)$, indem das Dreieck aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt ist.

Setzt man nun

$$f = a x^2 \cdot \varphi_1(z) + b x y \cdot \varphi(z) + c y^2 \cdot \varphi_2(z),$$

so muß dieser Ausdruck, wenn x kleiner und kleiner wird, z aber konstant bleibt, verschwinden; desgleichen, wenn bei konstantem z y zu Null wird; d. h. es muß $a = c = 0$ sein.

Also $J = b \cdot x y \cdot \varphi(z) = \dfrac{1}{2} x y \dfrac{\varphi(z)}{\varphi(90^0)}$, wenn man die Gleichung auf das rechtwinklige Dreieck anwendet, denn

$$b x y \varphi(90) = \frac{1}{2} x y.$$

Ferner ist (Fig. 3)

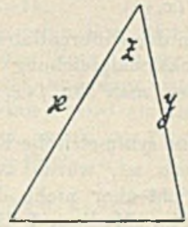


Fig. 2.

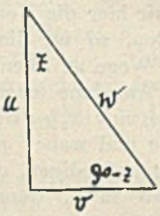


Fig. 3.

$\dfrac{1}{2} u w \cdot \dfrac{\varphi(z)}{\varphi(90)} = \dfrac{1}{2} v w \cdot \dfrac{\varphi(90 - z)}{\varphi(90)}$ oder wegen

$u = w \sin(90 - z)$, $v = w \sin z$: $\dfrac{\varphi(z)}{\varphi(90 - z)} = \dfrac{\sin(z)}{\sin(90 - z)}$.

Es ist somit $\varphi(z) = \sin z$, also $J = \dfrac{1}{2} x y \sin z$.*)

III. Das Brechungsgesetz.

Wenn man in der Physik von Funktionalgleichungen redet, denkt man wohl ausschließlich an Differentialgleichungen.

Als ein Beispiel einer Funktionalgleichung im eigentlichen Sinn kann die D'Alembertsche Gleichung für das Kräfteparallelogramm gelten (s. den früheren Aufsatz).

Das Brechungsgesetz, dessen rein induktive Ableitung bis auf Snellius herauf so große Schwierigkeiten bereitet hat, kann offenbar auf Grund der Fig. 4 durch eine Gleichung $F(x, y, n_{12}) = 0$ ausgedrückt werden, wenn n_{12} die mit der Natur der Medien sich ändernde Variable ist, homogenes Licht vorausgesetzt. Man kann sich nämlich x und y willkürlich gegeben denken und dazu ein Medienpaar, das dem durch α und β bereits festgelegten Strahlengang entspricht. In $n_{12} = f(x, y)$ sind also x und y voneinander unabhängige Variable. Um die Natur der Funktion f durch eine Funktionalgleichung mehr oder weniger vollständig zu bestimmen, muß man natürlich irgendwelche Eigenschaften des Lichtes zur Voraussetzung wählen. Nimmt man nun die Umkehrbarkeit

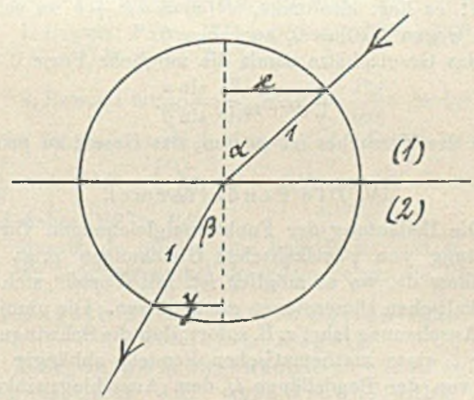


Fig. 4.

*) Bei dieser Ableitung ist im Gegensatz zu der im I. Abschnitt durch die funktionale Behandlung offenbar kein wesentlicher Fortschritt erzielt hinsichtlich der Ursprünglichkeit und Unabhängigkeit von Sätzen, die auch bei der gewohnten Ableitungsweise die Grundlage bilden.

des Lichtstrahls als Erfahrungstatsache an, so muß offenbar $n_{21} = f(y, x)$ sein, wo n_{21}, da es vom gleichen Medienpaar abhängt, offenbar eine Funktion von n_{12} ist, d. h. $n_{21} = \varphi(n_{12})$, somit:

(1) $$f(y, x) = \varphi(f(x, y)).$$

Da wir hier die Methoden der Differentialrechnung ausschließen, so ist die Funktionalgleichung (1) auf direktem Wege zu lösen, indem man für $f(x, y)$ eine passende Annahme macht.

$f(x, y) = \sigma(x, y)$, wo σ eine symmetrische Funktion der Werte und wobei $\varphi(\sigma) = \sigma$ ist, würde zwar die Gleichung befriedigen, entspricht aber nicht der Tatsache, daß zu y, wenn es im Medium 1 läge, im Medium 2 ein $x < y$ gehören müßte, indem Medium 2 als das dichtere vorausgesetzt ist.

Setzt man aber

(2) $$f(x, y) = \frac{F(x)}{F(y)},$$

so wird (1) befriedigt, wenn man $\varphi(u) = \frac{1}{u}$ annimmt. Ein Widerspruch bei der Annahme (2) mit den Erfahrungstatsachen läßt sich zunächst nicht auffinden.

Es ist also $n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$ und das Gesetz würde lauten:

(3) $$\frac{F(x)}{F(y)} = n_{12} = \frac{F(\sin\alpha)}{F(\sin\beta)}.$$

Da erfahrungsgemäß $x = 0$ und $y = 0$ ein zusammengehöriges Wertepaar ist, so hat man $\frac{F(0)}{F(0)} = n_{12}$ für jedes Medienpaar; es muß somit $F(0) = 0$ sein.

Denkt man sich nun ein bestimmtes Medienpaar, also n_{12}, konstant, so muß zu jedem x bei der gewöhnlichen Brechung ein y eindeutig sich bestimmen lassen; es liegt also nahe, $F(x) = ax + b$ zu setzen, somit wegen $F(0) = 0$, auch $b = 0$.

Das Gesetz hätte somit die mögliche Form

(4) $$\frac{x}{y} = n_{12} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Sache des Versuches ist es nun, das Gesetz zu prüfen.

IV. Die Pendelformel.

Die Bedeutung der Funktionalgleichungen für die Ableitung von physikalischen Gleichungen zeigt sich besonders da, wo es möglich ist, mit Vorteil sich der physikalischen Dimensionen zu bedienen. Die unmittelbare Anschauung lehrt z. B. sofort, daß die Schwingungsdauer t eines mathematischen Pendels abhängig sein muß von der Pendellänge l, dem Ausschlagswinkel α und einer die Erdanziehung ausdrückenden Größe, also möglicherweise dem Gewicht $G = Mg$ des schweren Punktes; also $t = f(l, \alpha, M\cdot g)$, bezw. $t = f(l, M\cdot g)$, wenn man bei der Beschränkung auf kleine Winkel von der Tatsache des Isochronismus Anwendung macht. Durch Einsetzung der Dimensionsgrößen findet man somit:

(1) $$[T] = f\left([L], \left[\frac{M\cdot L}{T^2}\right]\right)$$

Man sieht hier auf einen Blick die Invarianz hinsichtlich der Masse, ferner daß diese Funktionalgleichung erfüllt wird, wenn man

$f(x, y) = c\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}$ setzt, da $\sqrt{\frac{[L]}{\left[\frac{L}{T^2}\right]}} = [T]$ ist.

Es resultiert somit:

(2) $$t = c\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{*)}$$

Bei größeren Elongationen hätte man außer c noch die Natur einer Funktion $\varphi(\alpha)$ in der Gleichung

$$t = c\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\varphi(\alpha)$$

zu untersuchen. Aus (1) allein würde nun freilich nicht hervorgehen, welche Lineargröße in die Formel eingeht, ob die Pendellänge selbst oder eine andere von l so abhängige l', daß $l' = \psi(l)$ eine algebraisch eindeutige Funktion von der 1. Dimension ist, also z. B. Höhe oder Basis in dem durch die beiden extremen Lagen des Pendelfadens bestimmten gleichschenkligen Dreieck. Diese Fragen beantworten sich leicht durch Beachtung des tatsächlichen Schwingungsvorgangs.

Was also hier eine Gleichung von der Art wie (1) leisten kann, ist naturgemäß nur die Feststellung der möglichen Form des Gesetzes, sowie die Aufdeckung von Analogien mit physikalischen Gleichungen, welche der nämlichen Dimensionalgleichung (1) genügen, wie z. B. mit der Wegformel $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$ der allgemeinen gleichförmig beschleunigten Bewegung. Man würde also so, wenn dies nicht schon von einem anderen Standpunkt aus möglich wäre, auch auf diese Weise auf den Zusammenhang der Pendelbewegung mit dem Fall auf der schiefen Ebene geführt.

Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes und der Trigonometrie auf die Beweise und Ableitungen von stereometrischen Lehrsätzen.

Von Prof. Dr. Chr. Schmehl in Darmstadt.

1. Vorbemerkung.

In der Stereometrie gibt es eine Anzahl von Lehrsätzen, die gewöhnlich mit Anwendung der Sätze von der Inkongruenz zweier Dreiecke bewiesen werden. In vielen derartigen Fällen lassen sich solche Sätze mit Anwendung einfacher trigonometrischer Formeln beweisen, und zwar ist diese Beweisführung einfacher und schärfer als jene. Da die mir bekannten Lehrbücher davon keinen Gebrauch machen, so kann ich annehmen, daß diese Methode nicht allgemein bekannt ist. Es mag dies vielleicht davon herrühren, daß es in früheren Zeiten üblich war, die Stereometrie vor der Trigonometrie durchzunehmen, wodurch naturgemäß die Anwendung der letzteren ausgeschlossen war. Auch der pythagoreische Lehrsatz kann oft zu solchen Beweisen eine zweckmäßige Verwendung finden. Wenn ich im Nachstehenden eine Anzahl von solchen Sätzen zusammenstelle, so kann ich dabei auch auf eine einfache Beweisführung von Sätzen hinweisen, die herkömmlich in mitunter recht umständlicher Weise bewiesen werden.

2. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene.

Vor. 1. $PQ \perp MN$.
2. PR nicht $\perp MN$, also $PRQ = \alpha$ ist der Neigungswinkel der Schiefen PR gegen die Ebene MN.
3. $QS \perp RS$.

Es sei $\sphericalangle PRS = \gamma$ und $\sphericalangle QRS = \beta$. Dann ist

$$a^2 = b^2 + y^2$$
$$y^2 + z^2 = x^2$$
$$b^2 = c^2 + z^2$$

*) Vergl. auch Mach, Die Prinzipien der Mechanik. Kap. II.

$$a^2 + y^2 + z^2 + b^2 = b^2 + y^2 + x^2 + c^2 + z^2$$
$$\underline{y^2 + z^2 + b^2 = b^2 + y^2 + z^2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Daher ist RSP ein rechter Winkel. Ferner ist

$$\cos\gamma = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

oder $\underline{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta}$ *).

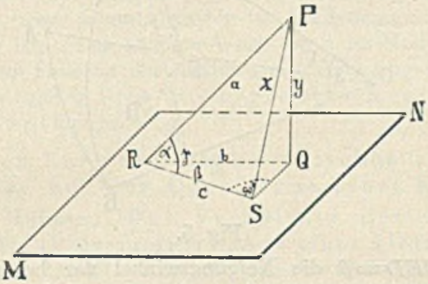


Fig. 1.

Mit Hilfe dieser Formel können folgende Sätze bewiesen werden:

a) Der Neigungswinkel α ist kleiner als der Winkel β.

Beweis: Wenn ein echter Bruch, $\cos\alpha$, mit einem anderen echten Bruche, $\cos\beta$, multipliziert wird, so wird das Produkt $\cos\alpha \cos\beta$ ($= \cos\gamma$) kleiner als der Multiplikand.

$\left[\text{Beispiel: } \frac{2}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7}\right]$. Also ist $\cos\gamma < \cos\alpha$, folglich $\gamma > \alpha$.

b) Wenn der Neigungsschenkel**) einer schiefen Geraden auf einer durch den Fußpunkt der Schiefen in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht, so steht auch die Schiefe auf dieser Geraden senkrecht.

Vor. $\beta = 90^0$.
Beh. $\gamma = 90^0$.

Beweis: $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\alpha \cdot 0 = 0$, also $\gamma = 90^0$.

c) Wenn zwei durch den Fußpunkt der Schiefen in der Ebene gezogene Gerade mit dem Neigungsschenkel gleiche Winkel bilden, so bilden diese Geraden auch mit der Schiefen gleiche Winkel.

Vor. $\beta_1 = \beta_2$.
Beh. $\gamma_1 = \gamma_2$.

Beweis: $\cos\gamma_1 = \cos\alpha \cdot \cos\beta_1$ und $\cos\gamma_2 = \cos\alpha \cdot \cos\beta_2$. Da $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$ ist, so ist $\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$, also $\gamma_1 = \gamma_2$.

d) Je größer der Winkel ist, den eine durch den Fußpunkt einer Schiefen in der Ebene gezogene Gerade mit dem Neigungsschenkel der Schiefen bildet, desto größer ist der Winkel, den diese Gerade mit der Schiefen selbst bildet.

Vor. $\beta_2 > \beta_1$.
Beh. $\gamma_2 > \gamma_1$.

Beweis: $\cos\gamma_1 = \cos\alpha \cdot \cos\beta_1$ und $\cos\gamma_2 = \cos\alpha \cdot \cos\beta_2$. Nun ist $\cos\beta_2 < \cos\beta_1$, und daher auch $\cos\gamma_2 < \cos\gamma_1$, also $\gamma_2 > \gamma_1$.

*) Die bekannte Formel über das rechtwinklige sphärische Dreieck mit der Hypotenuse γ und den Katheten α und β.

**) Dieser Ausdruck für die Projektion der Geraden auf die Ebene ist von Reidt eingeführt worden.

e) Der größte von den Winkeln, den eine Schiefe mit Geraden bildet, die durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen werden, ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels.

Beweis: Die Richtigkeit folgt aus dem vorhergehenden Satz. Der größte Winkel β ist ein gestreckter, und dann ist $\gamma = 180^0 - \alpha$. Oder: $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ wird am kleinsten, wenn $\cos\beta$ am kleinsten ist, d. i., wenn $\cos\beta = -1$ ist, also $\beta = 180^0$. Dann ist $\gamma = 180^0 - \alpha$.

3. Länge einer zu einer Ebene gezogenen Schiefen.

Eine von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogene schiefe Gerade ist um so größer, je weiter ihr Fußpunkt von dem Fußpunkte der von dem Punkte aus gezogenen Senkrechten entfernt ist (und umgekehrt).

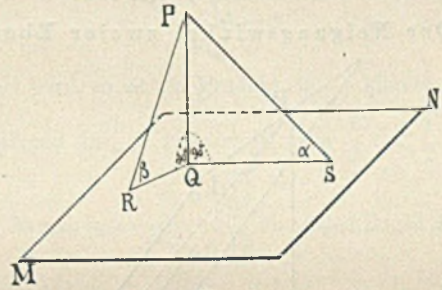


Fig. 2.

Vor. 1. $PQ \perp MN$
2. $QS > QR$
Beh. $PS > PR$.

1. Beweis: $PS^2 = PQ^2 + QS^2$ und $PR^2 = PQ^2 + QR^2$, da $QS > QR$, so ist $PS > PR$.

2. Beweis: $\operatorname{tang}\alpha = \frac{PQ}{QS}$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{PQ}{QR}$; da $QS > QR$, so ist $\operatorname{tang}\alpha < \operatorname{tang}\beta$, also $\alpha < \beta$. Ferner ist $\sin\alpha = \frac{PQ}{PS}$ und $\sin\beta = \frac{PQ}{PR}$; da $\alpha < \beta$, so ist $\sin\alpha < \sin\beta$ und daher $PS > PR$.

Zusatz. Je größer eine Schiefe ist, um so kleiner ist der Neigungswinkel derselben gegen die Ebene.

4. Längste und kürzeste Seitenlinie eines schiefen Kegels.

Derjenige Achsenschnitt eines schiefen Kegels, der auf der Grundfläche senkrecht steht (also durch die Höhe geht), enthält die längste und die kürzeste Seitenlinie des Kegels.

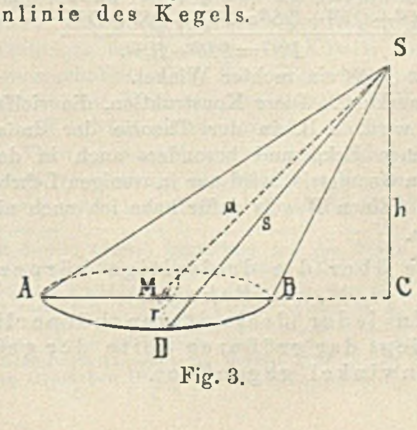


Fig. 3.

1. Beweis: Eine beliebige Seitenlinie des Kegels, z. B. $DS = s$, kann aus der Achse a, dem zugehörigen Halbmesser r und dem von diesen eingeschlossenen Winkel α nach dem Kosinussatz berechnet werden. Es ist $s^2 = a^2 + r^2 - 2\,a\,r \cos \alpha$. s^2 wird am kleinsten, wenn $2\,a\,r \cos \alpha$, d. h. $\cos \alpha$ am größten ist. Dies tritt ein, wenn α der Neigungswinkel der Achse gegen die Grundfläche ist. Dann liegt aber die Seitenlinie BS in dem senkrechten Achsenschnitt. s^2 wird am größten, wenn $2\,a\,r \cos \alpha$, d. h. $\cos \alpha$ am kleinsten wird, d. h. wenn α am größten wird. Dies tritt ein, wenn α der Nebenwinkel des Neigungswinkels ist.

2. Beweis: Der Fußpunkt der Höhe $CS = h$, C, hat den kleinsten Abstand BC von dem Umfang der Grundfläche und den größten Abstand AC von denselben, da C auf der Verlängerung eines Durchmessers liegt. Daher ist nach 3. BS die kürzeste und AS die längste Schiefe von dem Punkte S nach Punkten des Kreisumfanges. Dies gilt auch, wenn der Fußpunkt der Höhe auf den Durchmesser AB selbst fällt.

5. Der Neigungswinkel zweier Ebenen.

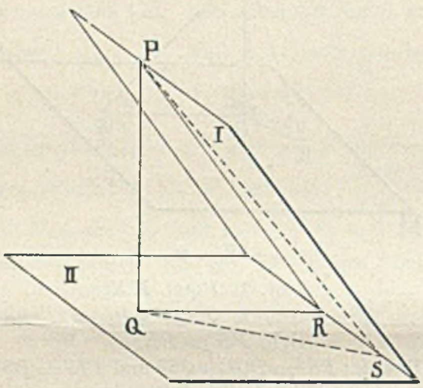


Fig. 4.

Konstruktion. Man fälle von einem beliebigen Punkte der Ebene I ein Lot PQ auf die Ebene II, fälle von dem Fußpunkte desselben Q ein Lot auf die Durchschnittslinie der Ebenen PR und verbinde den Punkt R mit P, dann ist PRQ der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Beweis: Es ist zu beweisen, daß PR auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen senkrecht steht. Man verbinde einen beliebigen Punkt S derselben mit P und Q. Dann ist

$$PS^2 = PQ^2 + QS^2$$
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$
$$QS^2 = QR^2 + RS^2$$
$$\overline{PS^2 + PQ^2 + QR^2 + QS^2 = PQ^2 + QS^2 + PR^2 + QR^2 + RS^2}$$
$$PQ^2 + QR^2 + QS^2 = PQ^2 + QS^2 + QR^2$$
$$\overline{PS^2 = PR^2 + RS^2.}$$

Daher ist PRS ein rechter Winkel.

Anmerkung. Diese Konstruktion, die vielfach gebraucht wird, z. B. in der Theorie der dreiseitigen körperlichen Ecke und besonders auch in der darstellenden Geometrie, wird nur in wenigen Lehrbüchern erwähnt. Einen Beweis dafür habe ich noch nirgends gefunden.

6. Sätze über die dreiseitige körperliche Ecke.

a) In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke liegt der größeren Seite der größere Flächenwinkel gegenüber.

Beweis: (Fig. 5). Es sei $\sphericalangle BOC = a$ und $\sphericalangle AOC = b$ und $a > b$. Man fälle von C das Lot auf die Ebene AOB, CD und ziehe $DE \perp OB$ und $DF \perp OA$ und verbinde E und F mit C. Dann sind $CFD = \alpha$

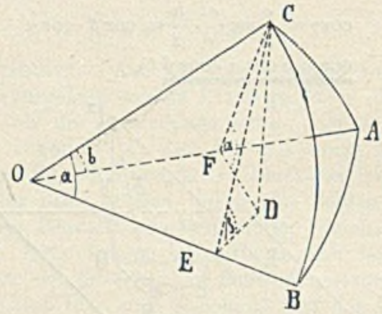


Fig. 5.

und $CED = \beta$ die Neigungswinkel der betreffenden Flächenwinkel, und es ist zu beweisen, daß $\alpha > \beta$. Es ist $\sin a = \frac{EC}{OC}$ und $\sin b = \frac{FC}{OC}$; da $a > b$, so ist $EC > FC$. Ferner ist $\sin \alpha = \frac{DC}{FC}$ und $\sin \beta = \frac{DC}{EC}$; da $FC < EC$, so ist $\sin \alpha > \sin \beta$, mithin $\alpha > \beta$.

b) Die Summe zweier Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke ist größer als die dritte Seite.

Dieser Satz wird in den Lehrbüchern ziemlich umständlich bewiesen. Ein Beweis ist eigentlich nur nötig für den Fall, daß die dritte Seite die größte der drei Seiten ist. Wenn man aus drei ebenen Winkeln (Kreissektoren) eine dreiseitige körperliche Ecke bilden will, so ist dies nicht möglich für die Fälle, daß die Summe der beiden kleineren Winkel gleich dem dritten Winkel oder kleiner ist als der dritte Winkel. Daraus ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes.

c) Die Summe der Seiten einer drei- und mehrseitigen körperlichen Ecke ist kleiner als vier Rechte.

Auch dieser Satz läßt sich dadurch veranschaulichen, daß man drei oder mehr ebene Winkel (Kreissektoren) aneinanderlegt. Wenn diese 4 R betragen, so füllen sie die ganze Ebene aus. Eine körperliche Ecke läßt sich nur dann aus solchen Winkeln bilden, wenn von den gegebenen Winkeln ein Teil weggenommen wird.

7. Je kleiner der Abstand eines Kugelkreises vom Kugelmittelpunkte ist, desto größer ist der Kreis.

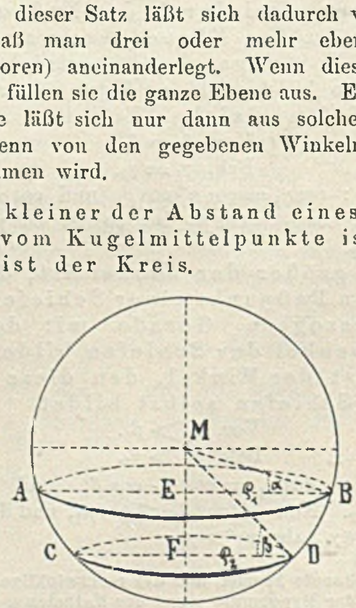


Fig. 6.

Beweis: Wenn $ME \perp AB$, $MF \perp CD$ und $ME < MF$ ist, so ist zu beweisen, daß $\varrho_1 = EB$ größer ist als $\varrho_2 = FD$. Es ist $\sin\alpha = \frac{ME}{MB}$ und $\sin\beta = \frac{MF}{MD}$, also nach Vor. $\sin\alpha < \sin\beta$ und daher $\alpha < \beta$. Mithin ist $\cos\alpha = \frac{EB}{MB}$ größer als $\cos\beta = \frac{FD}{MD}$, also $EB > FD$.

Zusatz. Der Radius ϱ eines Kugelkreises wird am größten, wenn α am kleinsten ist (weil dann $\cos\alpha$ am größten ist). Der kleinste Wert von α ist Null Grad; in diesem Falle ist der Radius gleich dem Kugelradius, und ein solcher Kreis ist ein größter Kreis oder ein Hauptkreis.

8. Der kürzeste Bogen zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Kugel.

a) Hilfssatz. Das Verhältnis des Sinus eines Winkels zu dem Sinus eines kleineren Winkels ist kleiner als das Verhältnis des größeren Winkels zu dem kleineren Winkel.

Vor. $\beta > \alpha$

Beh. $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$.

Beweis: Wenn $\beta = 2\alpha$ ist, so ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \text{ und } \frac{\beta}{\alpha} = 2;$$

$2\cos\alpha$ ist aber kleiner als 2. Wenn $\beta = 3\alpha$ ist, so ist

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = 3 - 4\sin^2\alpha; \quad \frac{\beta}{\alpha} = 3;$$

$3 - 4\sin^2\alpha$ ist kleiner als 3.

Beispiele: $\frac{\sin 45^0}{\sin 30^0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $\frac{45^0}{30^0} = 1,5$ oder $\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}} = 1,5$; $\sqrt{2} < 1,5$. $\frac{\sin 60^0}{\sin 30^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $\frac{60^0}{30^0}$ oder $\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2$; $\sqrt{3} < 2$.

Die Richtigkeit des Satzes folgt auch aus der Betrachtung: Wenn ein Winkel wächst, so wächst sein Sinus nicht proportional dem Winkel, sondern die Zunahme des Sinus ist geringer als die Zunahme des Winkels. So wächst z. B. der Sinus in dem Intervall von 0^0 bis 30^0 von 0 bis 0,5, von 30^0 bis 60^0 von 0,5 bis 0,866, von 60^0 bis 90^0 von 0,866 bis 1.

b) Der kürzeste Bogen zwischen zwei Punkten einer Kugelfläche liegt auf dem durch diese Punkte gehenden größten Kreise.

Vor. ADB ist ein Bogen eines durch die Punkte A und B gehenden größten Kreises mit dem Zentriwinkel $ACB = \alpha$; AEB ist der Bogen eines Parallelkreises mit dem Zentriwinkel $AFB = \beta$.

Beh. Bogen ADB ist kleiner als Bogen AEB.

Beweis: Bogen ADB ist gleich $\frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^0}$, wo r der Kugelradius ist, und Bogen AEB ist gleich $\frac{2\pi r\cos\varphi \cdot \beta}{360^0}$, wo $\varphi = \sphericalangle GCA$ ist. Das Dreieck APB ist gleichschenklig. Man lege durch die Spitze P einen größten Kreis senkrecht zu AB; dann ist $\triangle APD$ rechtwinklig, und es ist $AP = 90^0 - \varphi$, $\sphericalangle APD = \frac{1}{2}\beta$ und $AD = \frac{1}{2}\alpha$. Zwischen diesen besteht die Relation:

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin(90^0 - \varphi)\cdot\sin\frac{1}{2}\beta \text{ oder}$$

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\varphi$. Wenn $\sin\frac{1}{2}\beta$ mit $\cos\varphi$ mul-

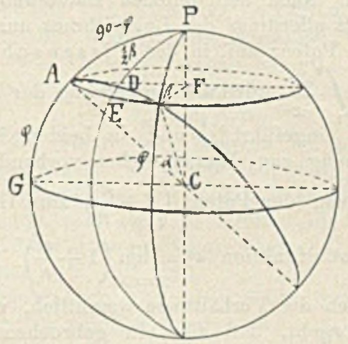


Fig. 7.

tipliziert wird, so ist das Produkt $\sin\frac{1}{2}\alpha$ kleiner als der Multiplikand $\sin\frac{1}{2}\beta$. Folglich ist auch $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\beta$ und $\alpha < \beta$. Ferner ist $\cos\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ und daher Bogen $AEB =$

$\frac{2\pi r\beta\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha}{360\cdot\sin\frac{1}{2}\beta}$. Nun ist nach dem Hilfssatz $\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha} <$

$\frac{\frac{1}{2}\beta}{\frac{1}{2}\alpha}$, also $\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$ und daher auch $\frac{\beta\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta} > \alpha$.

Folglich ist Bogen $AEB = \frac{2\pi r\beta\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha}{360\cdot\sin\frac{1}{2}\beta}$ größer als der Bogen $ADB = \frac{2\pi r\cdot\alpha}{360}$.

Ueber die Bezeichnung der Logarithmen.

Von A. Schülke (Königsberg i. Pr.)*).

In dieser Zeitschrift 1908, S. 129**) und 130, wurde vorgeschlagen, auf einer Versammlung des Vereins eine Einigung über die Bezeichnung der Logarithmen herbeizuführen. Die dortigen Vorschläge möchte ich nach zwei Richtungen hin ergänzen. F. Klein hat mehrfach hervorgehoben, daß der Unterricht zu wenig Rücksicht auf die Wissenschaft und auf die praktischen Verhältnisse nimmt, und der hierin liegende Vorwurf scheint mir so ernst, daß man bei Gelegenheit versuchen sollte, früheres Versäumnis gut zu machen; auf keinen Fall aber dürfte es sich emp-

*) Mit diesem Artikel betrachten wir die Frage der Logarithmenbezeichnung als abgeschlossen. Die Red. d. Unt.-Bl.

**) Zu dem Kullrichschen Artikel, in dem auch eine Abhandlung von Prof. C. H. Müller (Frankfurt a. M.) aus dem Jahre 1893 zitiert wird, bemerkt Herr M., daß er das von ihm schon lange vorher gebrauchte Zeichen, das u. a. den Vorzug besitze, Klammern zu ersparen, bereits 1890 in den Berichten des Freien Deutschen Hochstifts empfohlen habe.

fehlen, durch Einführung von neuen bisher wenig beachteten Vorschlägen eine weitere Trennung herbeizuführen.

Fragen wir uns noch einmal, ob wirklich ein Grund vorliegt, das Zeichen log für unzweckmäßig und inkonsequent zu erklären, und ein neues Zeichen zu erstreben, welches dem Wurzelzeichen entsprechend gebildet ist? Nach der üblichen Darstellung in der Schule tritt allerdings der Logarithmus nur als Umkehrung der Potenz auf, in der Wissenschaft wird er aber als $\int \frac{dx}{x}$ oder als Umkehrung der Exponentialfunktion eingeführt*), und in beiden Fällen ist keine Beziehung zum Wurzelzeichen vorhanden, denn wenn man von der Potenz $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ zum Grenzwert, zur Exponentialfunktion $e^x = \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ übergeht, so ändern sich die Verhältnisse wesentlich, wie schon daraus hervorgeht, daß für ein gebrochenes n die Potenz mehrere Werte annimmt, während e^x eindeutig bleibt. Auch bei den in der neueren Funktionentheorie eine große Rolle spielenden Uniformisierungsproblemen verhält sich der Logarithmus wesentlich verschieden von der Wurzel. (Näheres bei F. Klein, Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus. Leipzig, Teubner 1908). Die Zeichen $\underline{\lvert a}$ oder $\underline{\lceil a}$ sind also tatsächlich inkonsequent, während die alte Bezeichnung log (oder kürzer lg für die briggischen, ln oder l für die natürlichen Logarithmen) ganz in Uebereinstimmung mit den verwandten Funktionen arc tg x, arc sin x bleibt. Es ist demnach nicht sehr wahrscheinlich, daß die Wissenschaft diese Neuerung annehmen wird, — warum sollen wir uns ohne zureichenden Grund noch weiter von der Wissenschaft entfernen?

Nun könnte man vielleicht sagen, daß aus praktischen Gründen eine besonders kurze Bezeichnung erwünscht sei, und man wird zugeben müssen, daß für den, welcher viel mit Logarithmen arbeitet, die kürzeste Bezeichnung die zweckmäßigste wird. Eine solche ist aber längst von den Praktikern bei der Landmessung erprobt und gebraucht: Beim Schreiben und Sprechen verwende man als Dezimalzeichen bei Zahlen das Komma, bei Logarithmen den Punkt; man kann dann häufig das Zeichen log ganz weglassen und z. B. schreiben

$$\begin{array}{l|r|l} a = 541{,}5 & a & 2.7336 \\ \beta = 25{,}09^0 & \sin\beta & 9.6274. \end{array}$$

Diese sehr zweckmäßige Unterscheidung ist wohl zuerst an der Stuttgarter Polytechnischen Schule eingeführt, und seitdem sie Eingang gefunden hat in die fünfstellige Tafel von Gauß 1870 und in das Handbuch der Vermessungskunde von Jordan, wird sie in der Praxis sehr allgemein befolgt; in Preußen ist sie durch die Kataster-Anweisung vom 25. Oktober 1881 amtlich eingeführt. Ferner findet man diese Bezeichnung in den Tafeln von Jordan (sechsstellig), Rex und Schülke (vierstellig); zugleich mit sehr brauchbaren Rechenbeispielen in dem gediegenen Lehrbuch der Trigonometrie von Hammer (Stuttgart, Metzler). Im Unterricht scheint dies Verfahren in Württemberg allgemein üblich zu sein, denn in der Methodik der Elementar-Mathematik von Schneider (Stuttgart, Grub 1908) wird es in den Musterbeispielen überall angewandt, obwohl es im Text gar nicht besonders erwähnt ist. In den norddeutschen Schulen scheint es bisher nur vereinzelt Anwendung zu finden, denn trotzdem in Preußen die fünfstellige Tafel von Gauß an 88 Anstalten und die vierstellige Tafel von Schülke an 63 Anstalten (und an 27 Anstalten außerhalb Preußens) eingeführt ist, habe ich in den üblichen Lehrbüchern keine Hindeutung darauf gefunden. Vielleicht geben diese Zeilen Anlaß, weitere Versuche damit anzustellen.

Der Fall, daß neben dem Logarithmus noch die Grundzahl bezeichnet werden muß, kommt im Verhältnis zu den vorigen Fällen äußerst selten vor, auch sind die Unterschiede der Schreibarten 1) bis 5) auf S. 130 vielleicht mehr durch die Setzer als durch die Verfasser bedingt. Da in der Wissenschaft die Bezeichnungen ${}^b\log a$ und $\overset{b}{\log}\, a$ vorzuherrschen scheinen, so würde ich eine von beiden Formen empfehlen; eine Nötigung zu einer bestimmten Schreibweise scheint mir nicht vorzuliegen, da auch in der Wissenschaft die Einheitlichkeit fehlt, und da Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

*) Vgl. hierzu die Nachschrift zu dem Otteschen Artikel, Unt.-Bl. XIV, S. 107.

Bemerkungen über die kubische Gleichung.

Von Dr. Paul Richert (Berlin).

I.

Eine Bedingung der Rationalität aller drei Wurzeln.

Wenn man sich alle möglichen kubischen Gleichungen der reduzierten Normalform und mit ganzen rationalen Wurzeln derart bildet, daß man die dritte, d. h. die einzige positive Wurzel der Reihe nach gleich 2, 3, 4, 5, $\cdots$ setzt, und demnach für

$x_3 = 2$ einsetzt:	$x_1 = -1$, $x_2 = -1$,	so daß	$x^3 - 3x - 2 = 0$
$x_3 = 3$	„	$x_1 = -2$, $x_2 = -1$,	„	$x^3 - 7x - 6 = 0$
$x_3 = 4$	„	$x_1 = -3$, $x_2 = -1$,	„	$x^3 - 13x - 12 = 0$
		$x_1 = -2$, $x_2 = -2$,	„	$x^3 - 12x - 16 = 0$
$x_3 = 5$	„	$x_1 = -4$, $x_2 = -1$,	„	$x^3 - 21x - 20 = 0$
		$x_1 = -3$, $x_2 = -2$,	„	$x^3 - 19x - 30 = 0$
$x_3 = 6$	„	$x_1 = -5$, $x_2 = -1$,	„	$x^3 - 31x - 30 = 0$
		$x_1 = -4$, $x_2 = -2$,	„	$x^3 - 28x - 48 = 0$
		$x_1 = -3$, $x_2 = -3$,	„	$x^3 - 27x - 54 = 0$
$x_3 = 7$	„	$x_1 = -6$, $x_1 = -1$,	„	$x^3 - 43x - 42 = 0$
		$x_1 = -5$, $x_2 = -2$,	„	$x^3 - 39x - 70 = 0$
		$x_1 = -4$, $x_2 = -3$,	„	$x^3 - 37x - 84 = 0$

— — — — — — — — — — — — — — — —

so bemerkt man, daß keineswegs alle ganzen Zahlen für die Größe $3b_1^2$ auftreten. Es läßt sich aber folgender Satz beweisen:

„Für den Fall, daß die kubische Glei-
„chung lauter reelle ganzzahlige rationale
„Wurzeln hat, muß $3b_1^2$ von der Form
„$3r^2 + s^2$ sein, worin r und s ganze rationale
„Zahlen sind.“

In der Tat lassen sich alle oben angegebenen Faktoren von x mindestens auf eine Art unter dieser Form darstellen. Es ist z. B.: $3 = 3 \cdot 1^2 + 0^2$, $7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2$, $12 = 3 \cdot 2^2 + 0 = 3 \cdot 1^2 + 3^2$, $13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2$, $19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2$, $21 = 3 \cdot 2^2 + 3^2$, $28 = 3 \cdot 1^2 + 5^2 = 3 \cdot 2^2 + 4^2 = 3 \cdot 3^2 + 1^2$ usw. . . . eine von ihnen, die 12 läßt sich sogar auf zwei und die 28 sogar auf drei Arten nach dieser Form darstellen.

Beweis. Soll von einer kubischen Gleichung von der Form $x^3 - 3b_1^2 x - 2c_3 = 0$ der Koeffizient b_1^2 rational und ganzzahlig sein und soll zugleich das

Glied mit x^2 fehlen, so können die Wurzeln offenbar nur die Form $\mp r_1 - \sqrt{r_2}$, $\mp r_1 + \sqrt{r_2}$, $\pm 2 r_1$ haben, worin entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen gelten, d. h. sie können höchstens auf eine Irrationalität zweiten Grades steigen. r_1 und r_2 sind hierin positive ganze und rationale Zahlen.

Hier kann man nun drei Fälle unterscheiden. Entweder ist die erste oder die zweite oder die dritte Wurzel rational. Alsdann muß im ersten Falle

$$x_1 = -2 r_1, \quad x_2 = r_1 - \sqrt{r_2}, \quad x_3 = r_1 + \sqrt{r_2},$$

im zweiten Falle

$$x_1 = r_1 - \sqrt{r_2}, \quad x_2 = -2 r_1, \quad x_3 = r_1 + \sqrt{r_2}$$

und im dritten Falle

$$x_1 = -r_1 - \sqrt{r_2}, \quad x_2 = -r_1 + \sqrt{r_2}, \quad x_3 = 2 r_1$$

sein. Setzen wir nun voraus, daß in der obigen Normalform der kubischen Gleichung $c_3 > 0$ ist (was man ja unbeschadet der Allgemeinheit tun kann), so muß in allen drei Fällen $x_1 < x_2 < 0$ und nur allein $x_3 > 0$ sein. Im ersten und zweiten Falle muß dann aber $r_1^2 < r_2$ sein, weil sonst im ersten Falle nicht x_2 und im zweiten Falle nicht x_1 negativ werden kann. Dagegen muß im dritten Falle $r_1^2 > r_2$ sein, weil sonst nicht x_2 negativ werden kann.

Nun ist aber in allen drei Fällen und abgesehen von jedem Vorzeichen $-3 b_1^2 = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2$. Mit Rücksicht auf $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ schreiben wir dies für den ersten Fall

$$-3 b_1^2 = x_1 (x_2 + x_3) + x_2 \; x_3 = -x_1^2 + x_2 x_3,$$

für den zweiten Fall

$$-3 b_1^2 = x_2 (x_3 + x_1) + x_3 \; x_1 = -x_2^2 + x_3 x_1,$$

und für den dritten Fall

$$-3 b_1^2 = x_3 (x_1 + x_2) + x_1 \,.\, x_2 = -x_3^2 + x_1 x_2.$$

Alsdann wird in Erwägung, daß x_1 und x_2 negativ sind, im ersten Falle

$$3 b_1^2 = x_1^2 - x_2 \; x_3 = x_1^2 + \overline{x}_2 \cdot x_3,$$

im zweiten Falle (1)

$$3 b_1^2 = x_2^2 - x_3 \cdot x_1 = x_2^2 + \overline{x}_1 \cdot x_3,$$

und im dritten Falle

$$3 b_1^2 = x_3^2 - x_1 \cdot x_2 = x_3^2 - \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2,$$

worin $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ die absoluten Werte der Wurzeln x_1 und x_2 bedeuten, so daß $\overline{x}_1 = -x_1$ und $\overline{x}_2 = -x_2$ ist. Nun ist aber nach den obigen Festsetzungen

$$\overline{x}_2 = \sqrt{r_2} - r_1$$

im ersten Falle und

$$\overline{x}_1 = \sqrt{r_2} - r_1$$

im zweiten Falle. Folglich wird im ersten Falle

$$3 b_1^2 = 4 r_1^2 + (\sqrt{r_2} - r_1)(\sqrt{r_2} + r_1) = 3 r_1^2 + r_2,$$

im zweiten Falle (2)

$$3 b_1^2 = 4 r_1^2 + (\sqrt{r_2} - r_1)(\sqrt{r_2} + r_1) = 3 r_1^2 + r_2,$$

und im dritten Falle

$$3 b_1^2 = 4 r_1^2 - (r_1 + \sqrt{r_2})(r_1 - \sqrt{r_2}) = 3 r_1^2 + r_2.$$

Man sieht jetzt deutlich den prinzipiellen Unterschied zwischen den beiden Gleichungssystemen (1) und (2). In (1) erscheint $3 b_1^2$ nur in den ersten beiden Fällen in der Form einer Summe. Dagegen tritt es im System (2) in allen drei Fällen als Summe auf.

Nun ist zwar offenbar, daß die Größe $3 b_1^2$ in jedem Falle ganz und rational wird, wenn nur die Größen a_1, a_2 und a_3 in der allgemeinen Gleichung $x^3 - 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x - a_3 = 0$ ganz und rational sind. Dagegen können die *Wurzeln* der Gleichung offenbar nur dann rational werden, wenn r_2 eine Quadratzahl ist. Setzt man daher $r_2 = s^2$ und ersetzt man r_1 kurzweg durch r, so wird also tatsächlich $3 b_1^2 = 3 r^2 + s^2$.

Es sei übrigens noch die Bemerkung beigefügt, daß für den Fall, wo r_2 negativ und sein absoluter Betrag kleiner als $3 r_1^2$ ist, die Wurzeln offenbar achsenkomplex sind, während sie für den Fall, wo $r_2 - 3 r_1^2 > 0$ ist, formkomplex sind.

II.

Eine besondere Auflösungsart für den Fall ganzer rationaler Wurzeln.

Man kann die Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$x^3 - 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x - a_3 = 0$$

leicht so bestimmen, daß $a_1 = 0$ wird. Denn da

$$3 a_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

d. h. gleich der Summe der Wurzeln ist, so braucht man nur die Wurzeln so zu wählen, daß, wenn die dritte Wurzel x_3 positiv, etwa 7 ist, dann die beiden anderen negativ und zwar so groß sind, daß ihre Summe gleich der dritten, daß sie also -1, -6 oder -2, -5 oder -3, -4 sind.

Ebensoleicht kann man aber auch bewirken, daß $a_2 = 0$ wird. Da nämlich $3 a_2 = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2$ und daher

$$\frac{3 a_2}{a_3} = \frac{x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

ist, so braucht man nur dafür zu sorgen, daß *die Summe der reziproken Wurzeln verschwindet*. In der Tat, ist etwa $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, so ist $-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0$ und daher $(x+3)(x+6)(x-2) = x^3 + 7x^2 - 36 = 0$. Wie man sieht, ist hier das konstante Glied eine Quadratzahl. Das ist kein Zufall. Diese Eigentümlichkeit tritt auch auf, wenn man von der reduzierten Normalform

1) $$x^3 - 3 b_1^2 x - 2 c_3 = 0$$

der kubischen Gleichung ausgeht. Setzt man nämlich $x = \frac{2 c_3}{x_2}$, so wird Gl. 1) zu $\frac{8 c_3^3}{x_2^3} - 3 b_1^2 \frac{2 c_3}{x_2} - 2 c_3 = 0$ oder zu

2) $$x_2^3 + 3 b_1^2 x_2^2 - 4 c_3^2 = 0$$

und hier haben wir in dem x_2-freien Gliede ebenfalls eine Quadratzahl vor uns. Hat nun Gleichung 1) ganze rationale Wurzeln, so hat auch Gleichung 2) ebensolche Wurzeln. Denn die letztere muß ja immer das Produkt von zwei Wurzeln der Gleichung 1) zu Wurzeln haben. Heißt die reduzierte Gleichung z. B.

3) $$x^3 - 39 x - 70 = 0,$$

welche die Wurzeln -5, -2, $+7$ hat, so heißen die Wurzeln der durch $x = \frac{70}{x_2}$ definierten Gleichung

4) $$x_2^3 + 39 x_2^2 - 70^2 = 0$$

$-2 \cdot 7 = -14$, $-5 \cdot 7 = -35$, $(-2) \cdot (-5) = 10$.

Diese Gleichungsform gibt nun wieder ein bequemes Mittel an die Hand, ohne Kardanische Formel und trigonometrische Funktionen eine numerische Auflösung der kubischen Gleichung zu bewerkstelligen für den Fall, daß die Wurzeln ganze rationale Zahlen sind. Da nämlich die rechte Seite der Gleichung

$$x_2^3 + 39 x_2^2 = 70^2$$

eine Quadratzahl ist, so muß auch die linke Seite eine ebensolche Zahl sein. Nun kann man aber die linke Seite in der Form schreiben $x^2(x + 39)$. Hierin ist aber der erste Faktor wieder ein Quadrat. Folglich muß auch der zweite Faktor ein Quadrat werden.

Da dieser aber einerseits nie negativ, andererseits nie größer als $2 c_3$ (70) werden darf, so hat man für x_2 keine zu große Auswahl. Es darf in unserem Beispiel nicht kleiner als -38, aber auch nicht größer als 31 werden. Unter allen zwischen -38 und $+31$ liegenden ganzen Zahlen kommen aber nur diejenigen in Betracht, welche Faktoren von 70 enthalten, da sonst der erste Faktor x_2^2 des Produktes $x_2^2(x_2+39)$ nicht in 70^2 aufgeht. Von allen in Betracht kommenden Quadratzahlen unter 70 kommen also nur 2^2, 5^2 und 7^2 in Frage, die gleich x_2+39 gesetzt werden können. Wir erhalten also

$$x_2+39=4 \quad \text{oder} \quad x_2=-35$$
$$x_2+39=25 \quad „ \quad x_2=-14$$
$$x_2+39=49 \quad „ \quad x_2=10$$

als die drei Wurzeln der Gleichung 4). Alsdann sind die Wurzeln der Gleichung 3) $x=-2, -5, 7$.

Es kann auch vorkommen, daß man die Wahl zwischen mehr als drei Werten für $x_2+3b_1^2$ hat. So kann beim ersten Anblick der Gleichung

$$x^3-103x-198=0$$

und der daraus folgenden

$$x_2^3+103x_2^2=198^2=2^2\cdot3^4\cdot11^2$$

in Erwägung kommen

$$x_2+103=4 \quad \text{oder} \quad x_2=-99$$
$$x_2+103=9 \quad „ \quad x_2=-94$$
$$x_2+103=81 \quad „ \quad x_2=-22$$
$$x_2+103=121 \quad „ \quad x_2=+18.$$

Hiervon ist aber der zweite unmöglich, da sein Primfaktor 47 in 198 nicht enthalten ist.

Ueber die Berechnung des Dreiecks aus der Grundlinie, der Höhe und dem Winkel an der Spitze.

Von Jul. Braun (Trier).

In Schwerings Trigonometrie (Freiburg 1900) ist S. 44 die Berechnung eines Dreiecks aus der Grundlinie a, dem gegenüberliegenden Winkel α und dem Inhalte J u. a. in der Weise vorgenommen, daß aus der Gleichung

$$2J=a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

das Produkt $\sin\beta\sin\gamma=\frac{2J}{a^2}\sin\alpha$ und dann mittels der Gleichung

$$\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha=\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)=2\sin\beta\sin\gamma$$

der Ausdruck

$$1)\qquad \cos(\beta-\gamma)=\frac{4J}{a^2}\sin\alpha-\cos\alpha$$

gewonnen wird, welcher die Winkeldifferenz $(\beta-\gamma)$ ermitteln läßt. Dies wird auf einem bequemeren Wege durch die Einführung eines Hilfswinkels φ ermöglicht gemäß der Gleichung

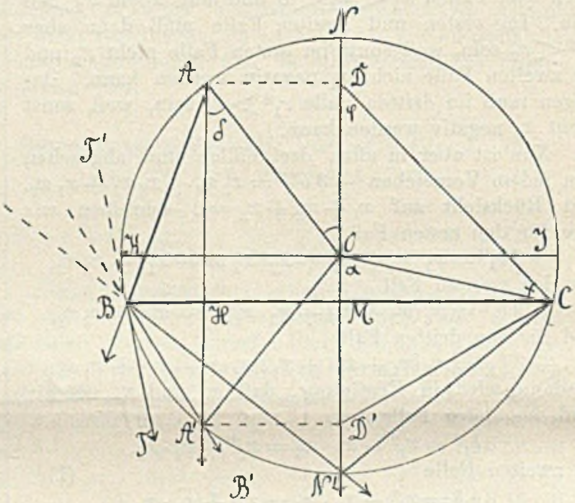
$$2)\qquad \frac{4J}{a^2}=\operatorname{cotg}\varphi;$$

dadurch verwandelt sich 1) in

$$3)\qquad \cos(\beta-\gamma)=\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Wenn in einer geometrischen Aufgabe die Rechnung durch Einführung eines Hilfswinkels eine bemerkenswerte Umgestaltung erfährt, wie in dem vorliegenden Falle, so ist stets die Vermutung gerechtfertigt, daß dieser, einstweilen nur der Rechnung dienende Hilfswinkel auch eine geometrische Bedeutung habe. An und für sich kann er nach den in seiner Definitionsgleichung enthaltenen Angaben, etwa in einer Nebenfigur gezeichnet, d. h. geometrisch dargestellt werden. Seine Bedeutung für die in Rede stehende Aufgabe ist damit aber noch keineswegs ausgedrückt. Eine solche sprechen wir ihm erst dann zu, wenn es gelingt, diesen Winkel mit der Hauptfigur innig zu verbinden, so daß er einerseits mit gegebenen Stücken, andererseits mit einer gesuchten Größe nach geometrischen Sätzen in einen inneren Zusammenhang, in ein gegenseitiges Abhängigkeitsverhältnis tritt. Wo und wie das zu geschehen habe, darüber besteht eine gewisse Freiheit; je weniger Hilfslinien hierbei in Anspruch genommen werden, um so natürlicher ergibt sich der innere Zusammenhang, den wir jetzt zwischen dem oben genannten Hilfswinkel φ, den Stücken a, α, h_a und der Winkeldifferenz $(\beta-\gamma)$ des Dreiecks suchen wollen. Die Höhe h_a oder einfach h ersetzt hierbei den Inhalt J. Da $\frac{2J}{a^2}=\frac{ah}{a^2}=\frac{h}{a}$, so läßt sich die Definitionsgleichung 2) in die Gestalt bringen

$$4)\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{2h}=\frac{a}{2}:h.$$



Fällt man auf das Mittellot MN der Grundlinie BC von A aus die Senkrechte AD und verbindet noch D mit C, so wird $\operatorname{tg} CDM=\frac{a}{2h}$, d. h. $\sphericalangle CDM=\varphi$. Zugleich ist

$$\sphericalangle DCO=COM-CDO=\alpha-\varphi,$$

und nun nach dem Sinussatze

$$\sin(\alpha-\varphi):\sin\varphi=\sin DCO:\sin CDO=DO:OC=$$
$$DO:OA=\cos DOA=\cos OAH,$$

oder

$$\sin(\alpha-\varphi):\sin\varphi=\cos(\beta-\gamma),$$

d. i. die Gleichung 3), zu welcher für den Winkel φ noch die Definitionsgleichung 4) hinzutritt. Hiernach genügt zur Berechnung eines Dreiecks aus a, α, h_a und zur Lösung einer Gruppe von verwandten Aufgaben die Kenntnis der trigonometrischen Funktionen und des Sinussatzes; goniometrische Formeln kommen nicht zur Anwendung.

Untersuchen wir nun die Einschränkungen und besonderen Fälle der Aufgabe, welche uns auf dem betretenen Wege begegnen. Für den Winkel α schreibt der Begriff des Dreiecks die Bedingung

$$5)\qquad 0<\alpha<180^0$$

vor, und für den Winkel φ wollen wir einstweilen festsetzen, daß er zwischen 0^0 und 90^0 gewählt werde; er ist dann nach der Definitionsgleichung 4) für jeden Wert von a und h eindeutig bestimmt und gibt insofern zu keinerlei Bedenken Anlaß. Soll nun aber aus

φ und α nach 3) die Winkeldifferenz $(\beta - \gamma)$ erhalten werden, so muß die Bedingung

6) $$-1 \leqq \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} \leqq +1$$

erfüllt sein. Es wird

7) $$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = +1, \text{wenn entweder } \alpha - \varphi = \varphi, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\alpha}{2}$$
$$\text{oder } \alpha - \varphi + \varphi = 180^0, \text{ d. i. } \alpha = 180^0$$

ist; es wird ferner

8) $$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = -1, \text{wenn entweder } \varphi - \alpha = \varphi, \text{ d. i. } \alpha = 0^0,$$
$$\text{oder } \varphi - \alpha + \varphi = 180^0, \text{ d. i. } \varphi = 90^0 + \frac{\alpha}{2}.$$

Da nach 5) die Werte $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ bereits ausgeschlossen sind, so ist nunmehr die Zulässigkeit und Bedeutung der Fälle

9) $$\varphi = \frac{\alpha}{2} \text{ und } \varphi = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

zu untersuchen. Das Verhalten des Ausdrucks

10) $$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi} = \sin\alpha\operatorname{cotg}\varphi - \cos\alpha$$

ist bald aus der einen, bald aus der anderen Gestalt leichter zu erkennen; die rechte Seite liefert

11) für $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ den Wert

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = +1 \quad \text{und}$$

12) für $\varphi = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ den Wert

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = -1$$

in Uebereinstimmung mit 7) und 8). Außerdem läßt sie aber erkennen, daß ihr Wert stetig abnehmend von $(+1)$ nach (-1) übergeht, wenn φ von $\frac{\alpha}{2}$ bis $\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ emporwächst. Sinkt indessen φ unter den Wert $\frac{\alpha}{2}$ nach 0^0 hinab, so wächst $\operatorname{cotg}\varphi$ und erhebt den Wert von 10) über $(+1)$, wächst hingegen φ über $\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ hinaus nach 180^0 hin, so empfängt $\operatorname{cotg}\varphi$ numerisch größere, negative Werte und drückt die Größe 10) unter (-1) hinab. Hieraus ergibt sich für den Winkel φ die Eingrenzung

13) $$\frac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2},$$

während wir ihn anfangs zwischen 0^0 und 90^0 unterzubringen versuchten. Betrachten wir ihn zunächst für das Intervall

I $$\frac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq 90^0.$$

Der Wert $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ ergibt nach 3)

14) $$\cos(\beta - \gamma) = 1 \text{ und } \beta = \gamma = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

ferner nach der Definitionsgleichung 4)

15) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2h} \text{ oder } h = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Die Punkte D und A liegen für diesen Fall auf dem umbeschriebenen Kreise in N. Das Wachsen des Winkels φ von $\frac{\alpha}{2}$ bis 90^0 bedeutet in der Figur ein Herabsinken des Punktes D von N nach M. Hierbei geht $\cos(\beta - \gamma)$ in einen positiven echten Bruch über; bezeichnet man den absoluten Wert der Winkeldifferenz $(\beta - \gamma)$ mit δ, so wird $\beta - \gamma = \pm\delta$, je nachdem die Spitze A von N aus auf dem Bogen nach B oder C hin fortrückt. Wenn der Figur entsprechend $\alpha < 90^0$, so muß in dem gegenwärtigen Intervall einmal

16) $\varphi = \alpha$ und infolgedessen $\cos(\beta - \gamma) = 0, \beta - \gamma = \pm 90^0$

werden; der Punkt D befindet sich dann in O und daher der Punkt A in K oder J. Denkt man sich in der Figur die entsprechenden Linien ausgezogen, so ist

$$\sphericalangle BCK = BJK = JBC,$$

daher

$$\sphericalangle KBC - BCK = KBC - JBC = 90^0.$$

Uebersteigt φ den Winkel α, so wird nach 3) und 10) $\cos(\beta - \gamma) < 0$ und daher $\delta > 90^0$.

Für den Fall $\varphi = 90^0$ ergibt die Gleichung 3)

$$\cos(\beta - \gamma) = -\cos\alpha = \cos(180^0 - \alpha) = \cos(\alpha - 180^0),$$
$$\beta - \gamma = \pm(180^0 - \alpha) = \pm(\beta + \gamma), \text{ d. i.}$$

17) $$\begin{cases} \text{entweder } \gamma = 0^0 \text{ und } \beta = 180^0 - \alpha \\ \text{oder } \quad \beta = 0^0 \text{ und } \gamma = 180^0 - \alpha. \end{cases}$$

Der Punkt D ist in M angelangt, die Spitze A auf dem Bogen an der einen oder anderen Seite von MN der Grundlinie nähergerückt und schließlich in einen ihrer Endpunkte, etwa in B eingetreten; die Richtung der Seite AB hat die Lage der Tangente BT angenommen und von dem Dreieck ABC ist nur noch die Grundlinie sichtbar. Der absolute Wert δ der Winkeldifferenz ist in dem Intervall I von 0^0 auf $180^0 - \alpha$ angewachsen, wie das eine in Gedanken auszuführende Verschiebung des veränderlichen Winkels OAH erkennen läßt; es müßte nur auf BC in B nach unten das Lot BS errichtet werden; dann wäre

$$\sphericalangle OBS = 180^0 - BOM = 180^0 - \alpha.$$

In Uebereinstimmung hiermit sagt die Definitionsgleichung 4) aus, daß die Höhe $h = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\varphi$ von ihrem höchsten Werte $\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ aus stetig abnimmt, bis sie verschwindet. Der bisherige Verlauf wird kurz dargestellt durch die zusammengehörigen Ungleichungen

18) $$\frac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq 90^0, \quad 0^0 \leqq \delta \leqq 180^0 - \alpha, \quad \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \geqq h \geqq 0.$$

Um die Vorgänge des jetzt zur Besprechung kommenden Intervalles

II $$90^0 \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

richtig zu verstehen, müssen wir scharf beachten, in welchem Sinne der Winkel φ, die Winkel des Dreiecks, sowie der Winkel $OAH = \delta$ bis jetzt aufgefaßt worden sind und diesen ihren Sinn streng festhalten. Betrachtet man den Winkel φ von C aus, indem man den Blick über den einen Schenkel nach D hin richtet, so liegt der andere, von D ausgehende Schenkel DM zur linken. So aufgefaßt wächst der Winkel φ von 90^0 bis $90^0 + \frac{\alpha}{2}$, während der Punkt D von M nach N' rückt. Der Winkel $CAB = \alpha$, von C aus betrachtet, zeigt eine ähnliche Lage, indem der andere, von A ausgehende Schenkel AB links von CA liegt; daran ist festzuhalten, auch wenn der Punkt A, über den Kreisbogen gleitend, die Ecke B nach A' und N' hin durchschreitet. Für jede Lage des Scheitelpunktes A hat er unverändert denselben Wert; aber der Innenwinkel

$CAB = \alpha$ des Dreiecks ABC verwandelt sich in einen Außenwinkel $CA'B' = \alpha$ des Dreiecks $A'BC$, so daß nunmehr der entsprechende Innenwinkel $CA'B = 180^0 - \alpha$ wird. Bezeichnen wir diesen mit α'; ebenso sei weiterhin $\sphericalangle A'BC = \beta'$ und $\sphericalangle A'CB = \gamma'$. In der Figur sind die bisher besonders hervorgehobenen Richtungen durch Pfeilspitzen gekennzeichnet. Diese haben aber keine Gültigkeit für den jetzt zu betrachtenden Winkel β; bei ihm unterscheiden wir einen festen Schenkel BC und einen drehbaren Schenkel BA; letzterer dreht sich entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, während sich der Punkt A von N nach B hin bewegt, und dabei wächst der Winkel β von $NBC = \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ bis $T'BC = (180^0 - \alpha)$. Er wächst also über $(180^0 - \alpha)$ hinaus, wenn wir die Drehung in demselben Sinne fortsetzen und wird gleich $\left(180^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$, wenn die rückwärts gerichtete Verlängerung des drehbaren Schenkels den Punkt N' trifft. Von C aus betrachtet zeigt dieser Winkel den drehbaren Schenkel rechts, gleichviel ob der Punkt A rechts oder links von CB, d. h. auf dem Schenkel selbst oder dessen rückwärts gerichteter Verlängerung liege. Er wird zu einem Außenwinkel des Dreiecks $A'BC$ und erhält den Innenwinkel $A'BC = \beta'$ zum Nebenwinkel. Der Winkel γ hat von $\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ bis 0^0 abgenommen, während der Punkt A von N aus entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers nach B überging; er wird also folgerichtig bei einer fortgesetzten Drehung negativ, gleich $(-\gamma')$. Durch die Winkel α', β' und γ' des Dreiecks $A'BC$ haben wir also die Winkel α, β und γ folgendermaßen gedeutet:

19) $\alpha = 180^0 - \alpha'$, $\beta = 180^0 - \beta'$, $\gamma = -\gamma'$.

Daraus folgt durch Addition

20) $\alpha + \beta + \gamma = (180^0 - \alpha') + (180^0 - \beta') + (-\gamma') = 180^0$.

Diese Winkelsumme ist also auch bei der hier vorgenommenen Deutung konstant geblieben. Der Winkel $OAH = \delta$ hat einen Schenkel OA, der sich um O entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers dreht, und einen zweiten Schenkel AH, der auf BC senkrecht steht, so jedoch daß für einen in O stehenden und nach A hin blickenden Beobachter der zweite Schenkel AH immer links von OA liegt. Auf dem Wege des Punktes A von N nach B ist δ von 0^0 auf $(180^0 - \alpha)$ angewachsen; er wächst weiter nach 180^0 hin, während A von B nach N' rückt. Setzen wir

21) $\sphericalangle HA'O = \delta'$, so ist $\delta' = 180^0 - \delta$.

Nun gilt für das Dreieck $A'BC$ die Beziehung $\delta' = \beta' - \gamma'$, oder, indem wir nach den Gleichungen 19) und 21) wieder zu den ursprünglichen Winkeln zurückkehren

22) $180^0 - \delta = (180^0 - \beta) - (-\gamma)$, d. i. $\delta = \beta - \gamma$,

und diese Winkeldifferenz wächst von $(180^0 - \alpha)$ bis 180^0, während A von B nach N' rückt. Genau dasselbe Ergebnis folgt aus unseren Gleichungen. Zu dem Intervall $90^0 \leqq \varphi \leqq \left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ gehört nämlich nach 3), 10) und 12) die Eingrenzung

$$-\cos\alpha \geqq \cos(\beta - \gamma) \geqq -1 \qquad \text{oder}$$

$$\cos(180^0 - \alpha) \geqq \cos(\beta - \gamma) \geqq \cos 180^0, \text{ d. h.}$$

23) $$180^0 - \alpha \leqq (\beta - \gamma) \leqq 180^0.$$

Der äußerste Wert $\varphi = \left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ liefert die Bestimmung $(\beta - \gamma) = 180^0$; da aber außerdem

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

so folgt nacheinander durch Addition und Subtraktion

$$\alpha + 2\beta = 360^0, \quad \alpha + 2\gamma = 0^0, \quad \text{oder}$$

$$\beta = 180^0 - \frac{\alpha}{2} \qquad \gamma = -\frac{\alpha}{2}, \text{ d. h.}$$

24) $$\beta' = \frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma' = \frac{\alpha}{2}, \; \alpha' = 180^0 - \alpha.$$

Die Höhe h hat mit dem Winkel γ die Eigenschaft gemein, beim Eintritt des Punktes A in B zu verschwinden und daher im weiteren Verlaufe negativ zu werden. Setzen wir die Höhe $A'H = D'M = h'$, wo h' eine positive Größe bedeutet, so geht die Gleichung $D'M = MC \cdot \operatorname{cotg} CD'M$ über in

$$h' = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \varphi' = -\frac{a}{2} \operatorname{cotg} \varphi = -h$$

oder $h = -h'$. Während der Figur gemäß h' vom Werte 0 im Punkte B über die Lage $A'H$ hinaufwächst nach

$$N'M = CM \cdot \operatorname{cotg} CN'M = CM \cdot \operatorname{tg} N'CM = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

gehört zu dem Intervall $90^0 \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ nach der Gleichung $h = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \varphi$ die Eingrenzung

25) $0 \geqq h \geqq \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$, d. i. $0 \geqq h \geqq -\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Auch für die Höhe besteht also zwischen der Figur und Rechnung voller Einklang. Das Ergebnis des zweiten Teilintervalles bringen wir kurz in die zusammengehörigen Ungleichungen

26) $$90^0 \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2}, \; 180^0 - \alpha \leqq \delta \leqq 180^0,$$

$$0 \geqq h \geqq -\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ein Dreieck des gegenwärtigen Bereiches, welches unter anderem dadurch charakterisiert ist, daß es statt des vorgeschriebenen Winkels α den entsprechenden Supplementwinkel $\alpha' = 180 - \alpha$ enthält, habe ich in einer anderen Abhandlung*) ein verkehrtes Dreieck genannt; es tritt neben dem richtigen Dreieck auf und bildet eine uneigentliche Lösung der Aufgabe. Wäre statt des Winkels α sein Sinus gegeben $\sin\alpha = \varkappa$, wo $0 < \varkappa \leqq 1$, so müßte auch ein Dreieck mit dem Supplementwinkel α' als eigentliche, vollberechtigte Lösung betrachtet werden.

Hiermit ist die geometrische Deutung der Gleichungen 3) und 4) für das ganze Intervall

$$\frac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

vollzogen. Dabei wurde dieses in die zwei Teile I und II zerlegt und dem ersteren Teilintervall gehörte der Fall $\varphi = \alpha$, $\cos(\beta - \gamma) = 0$ an, weil wir $\alpha < 90^0$ voraussetzten. Dieser Fall liegt für einen stumpfen Winkel α innerhalb des zweiten Teilintervalles, da unter allen Umständen $\alpha < 180^0$, $\frac{\alpha}{2} < 90^0$, und, indem man auf beiden Seiten $\frac{\alpha}{2}$ addiert,

$$\alpha < 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

ist. Der Winkel φ muß also bei seinem stetigen Anwachsen von 90^0 bis $90^0 + \frac{\alpha}{2}$ an einer Stelle gleich α

---

*) Vergl. Unterrichtsbl. für Mathem. und Naturwissensch. Jahrg. XIV, Nr. 2.

werden. Fanden wir für das Ende des ersteren Teilintervalles $\varphi = 90^0$ die Gleichung

$$\cos(\beta - \gamma) = -\cos\alpha,$$

so bedeutet $(-\cos\alpha)$ gegenwärtig einen positiven Wert. Er wird gleich Null, wenn $\alpha = 90^0$; der Wert $\varphi = \alpha$ liegt dann an der gemeinschaftlichen Grenze der beiden Teilintervalle, und die zusammengehörigen Ungleichungen

$$27)\quad \frac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq 90^0 + \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \geqq h \geqq -\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

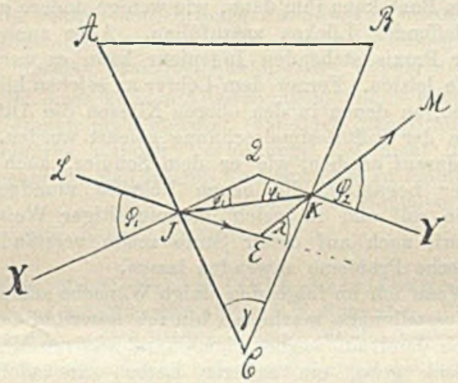
gehen über in

$$28)\quad 45^0 \leqq \varphi \leqq 135^0 \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{2} \geqq h \geqq -\frac{a}{2}.$$

Die Werte der Höhe h zwischen $\left(+\frac{a}{2}\right)$ und $\left(-\frac{a}{2}\right)$ liefern sämtlich richtige Dreiecke; von einem verkehrten Dreieck kann nicht mehr die Rede sein.

Kleinere Mitteilungen.

Ablenkungsminimum beim Prismendurchgang.



Es sei γ der brechende Winkel eines Prismas, dessen Glas gegen Luft den Brechungsindex n aufweist, λ die durch das Prisma hervorgebrachte Ablenkung, ferner mögen die Einfallswinkel und Brechungswinkel beim Eintritt und Austritt die Größen $\varphi_1\, \psi_2\, \psi_1\, \varphi_2$ besitzen, so ist bekanntlich

$$\text{I)}\qquad \sin\varphi_1 = n\sin\psi_1 \qquad \sin\varphi_2 = n\sin\psi_2$$

$$\text{II)}\qquad \psi_1 + \psi_2 = \gamma \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = \gamma + \lambda.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Differentiation

$$\text{III)}\quad \cos\varphi_1 d\varphi_1 = n\cos\psi_1 d\psi_1 \qquad \cos\varphi_2 d\varphi_2 = n\cos\psi_2 d\psi_2$$

$$\text{IV)}\qquad d\psi_1 + d\psi_2 = 0 \qquad 1 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d\lambda}{d\varphi_1}$$

und für den Fall, wo λ ein Minimum, also $\frac{d\lambda}{d\varphi_1} = 0$ ist,

$$\text{V)}\qquad d\psi_1 = -d\psi_2 \qquad d\varphi_1 = -d\varphi_2.$$

Dividiert man nunmehr die beiden Gleichungen III) durch einander, so ergibt sich wegen der Gleichungen V)

$$\text{VI)}\qquad \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2} \quad \text{oder}$$

$$\text{VII)}\qquad \frac{1-\sin^2\varphi_1}{1-\sin^2\varphi_2} = \frac{1-\sin^2\psi_1}{1-\sin^2\psi_2}$$

$$\text{VIII)}\qquad \frac{1-n^2\sin^2\psi_1}{1-n^2\sin^2\psi_2} = \frac{1-\sin^2\psi_1}{1-\sin^2\psi_2}, \quad \text{also}$$

$$\text{IX)}\qquad (n^2-1)(\sin^2\psi_1 - \sin^2\psi_2) = 0.$$

Da die Möglichkeit $n = 1$ ausgeschlossen ist, muß

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{\gamma}{2}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\gamma+\lambda}{2}, \quad n = \frac{\sin\frac{\gamma+\lambda}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ sein.}$$

Prof. Dr. Mühle (Posen).

Ein neues Bildnis von Dirichlet. Von einer bisher unveröffentlichten Photographie Dirichlets aus des Meisters letzten Lebensjahren, die alle anderen durch Schönheit und Lebenstreue übertrifft, soll eine Vervielfältigung in Originalgröße, etwa 14/18 cm, in Heliogravüre hergestellt werden, falls sich eine genügende Anzahl von Subskribenten meldet. Die Originalphotographie befindet sich im Besitze von Fräulein Lotte Nelson in Darmstadt, Moosbergstraße 43; Interessenten wollen die gewünschte Anzahl von Exemplaren (zum Preise von 2 Mark) bei dieser Dame bestellen.

Vereine und Versammlungen.

81. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte. Einem Wunsche der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte entsprechend, wird sich der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an der Aufstellung des Programms für die Sektion 12 (mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht) der diesjährigen, im September in Salzburg stattfindenden Versammlung beteiligen. Anmeldungen zu Vorträgen in der Sektion, die bis Ende April d. J. zu bewirken sind, nimmt demgemäß außer dem Einführenden der Sektion auch der Vorstand des genannten Vereins an, sie sind zweckmäßig an Prof. Pietzker (Nordhausen) zu richten.

Ueber die Frage, ob der Verein diese Mitarbeit an den Vorbereitungen für die Naturforscherversammlung dauernd übernehmen kann, wird die diesjährige Hauptversammlung des Vereins Beschluß fassen (s. die Tagesordnung dieser Versammlung auf S. 25 und 26.)

Lehrmittel-Besprechungen.

Physikalische Wandtafeln von L. Pfaundler. Erste Serie (12 Tafeln) in Mappe M 12. Einzelne Tafeln M 1.50. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1908.

Die Tafeln stellen eine Probeserie aus den 150 selbst angefertigten Wandtafeln vor, deren sich der Verfasser in seinen eigenen Vorlesungen zu bedienen pflegt, sie betreffen sämtlich die Wärme (1. Isothermen eines idealen Gases; 2. Isothermen und Adiabaten eines idealen zweiatomigen Gases; 3. Isothermen des Kohlendioxyds; 4. Spannkraft des Wasserdampfes von -10^0 bis $+40^0$ (Relative und absolute Feuchtigkeit, Hygrometer); 5. Spannkraft des Wasserdampfes bis 120^0 mit Tabelle; 6. Regnaults klassischer Apparat zur Bestimmung der latenten Dampfwärme; 7. Lindes und Hampsons Apparate zur Verflüssigung der Luft; 8. Kritische Daten der Gase; 9. Ausdehnung des Wassers, des Quecksilbers und anderer Flüssigkeiten, Dichtemaximum des Wassers; 10. Darstellung der Phasen des Wassers nach Gibbs in idealer und naturgetreuer Darstellung; 11. Tabelle der wichtigeren Schmelzpunkte; 12. Tabelle der wichtigeren Siedepunkte).

Wie diese Aufzählung zeigt, tragen die Tafeln einen dreifachen Charakter, einige (6. und 7.) stellen die innere Einrichtung gewisser Apparate dar, einige (8, 11 und 12) geben nur Zahlentabellen, die meisten bieten graphische Darstellungen gewisser physikalischer Zusammenhänge, zum Teil mit danebengesetzten Tabellen.

Die Grösse der Tafeln ist sehr bedeutend (reichlich 140 zu 100 cm), teils im Hochformat, teils im

Querformat, sie sind also auch aus weiter Entfernung gut sichtbar, alle Linien klar und scharf, die Zahlen groß und deutlich; überall, wo es angezeigt ist, sind verschiedene Farben zur Verwendung gekommen.

Ueber die Gesichtspunkte, die ihn bei der Herstellung seiner Tafeln geleitet haben, spricht sich der Verfasser in einem kurzen Geleitwort aus, das im übrigen auf das von ihm selbst bekanntlich neubearbeitete Müller-Pouilletsche Lehrbuch verweist. Demnach sollen die Tafeln keineswegs solche Zeichnungen ersetzen, die im Unterricht selbst ohne Schwierigkeit hergestellt werden können, während es dabei auf eine besonders große Genauigkeit nicht ankommt; bei derartigen Zeichnungen ist gerade die Herstellung vor den Augen der Schüler von besonderem pädagogischen Wert.

Nur wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, sollen die fertigen Tafeln eintreten, die dem Lehrer eine zeitraubende Arbeit ersparen sollen, zum Teil auch, soweit es sich nämlich um Zahlentabellen handelt, durch das längere Voranstellen solcher Zahlen der gedächtnismäßigen Einprägung zu Hilfe kommen. Mit Recht betont der Verfasser, daß dem Zweck, den die Tafeln verfolgen, durch Projektion von Diapositiven nicht ebensogut genügt werden würde.

Den vom Verfasser angegebenen Zweck erfüllen seine Tafeln jedenfalls in ganz ausgezeichneter Weise, dieser warmen Anerkennung geschieht durch den Hinweis auf einige Einzelheiten, wo kleine Verbesserungen anzubringen sein dürften, kein Eintrag. Die auf Tafel 5 gegebene Tabelle zerfällt in zwei vertikal nebeneinander verlaufende Teile, wobei die Uebersichtlichkeit dadurch erschwert ist, daß die Trennungslinie der beiden Teile sich gegen die Trennungslinien der einzelnen Kolonnen beider Teile nicht abhebt; bei der im übrigen außerordentlich instruktiven Tafel 9 ist als Maßstab für die Volumenzunahme des Wassers ein Zehntausendtel des Volumens bei 4 angegeben, die Zeichnung selbst gibt aber diese Zunahme vielmehr in Hunderttausendteln des Volumens.

Doch sind das Kleinigkeiten, die im Unterricht leicht verbessert werden können. Im ganzen kann man nur sagen, daß der Unterricht hier durch ein neues Lehrmittel bereichert wird, das, wenngleich zunächst für Hochschulvorträge bestimmt, auch für den Unterricht an den höheren Mittelschulen in weitem Umfange verwendbar und sehr wertvoll, überdies noch außerordentlich billig ist. Es ist zu erwarten, daß die Schulen von dieser Bereicherung in großer Zahl Gebrauch machen werden, die Fortsetzung des Werkes über diese erste Probelieferung hinaus ist auf das dringendste zu wünschen. P.

Bücher-Besprechungen.

R. Geigenmüller, Leitfaden und Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik. 1. Band, 7. Auflage, Mittweida, Polytechn. Buchhandlung 1907. Preis geb. 6,00 M. 2. Band, 6. Auflage, Ebenda 1908, Preis 7,00 M.

Um es gleich vorweg zu sagen: ein Werk, das in den Kreisen der Studierenden der Technik, die Besucher technischer Hochschulen eingeschlossen, weiteste Verbreitung verdient!

Der 1. Band enthält die analytische Geometrie der Ebene und algebraische Analysis, der 2. Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen auf technische Probleme. Gerade die letzteren machen mir das Buch besonders wertvoll, da in den zahlreichen Werken über Differential- und Integralrechnung wohl viele Anwendungen auf Probleme der Geometrie und Naturwissenschaften, selten aber solche mitten aus der Ingenieurpraxis gebracht werden. Seinen im Vorworte kundgetanen Ansichten und Plänen bleibt Verfasser durch das ganze Buch treu: das, was er bringt, bringt er erschöpfend und in klarem, verständlichem Stil; vieles ausführlicher und breiter, als es manchem, der das Schülermaterial, für das das Buch bestimmt ist, nicht kennt, nötig erscheinen wird. Aber aus ureigenster persönlicher Unterrichtserfahrung kann ich versichern, daß auch Studierende, die mit besserer Vorbildung ausgerüstet die Hochschule beziehen, dies Buch mit vielem Nutzen lesen werden. So mancher Abiturient eines Realgymnasiums oder einer Oberrealschule glaubt ja schon „Ahnung zu haben" von analytischer Geometrie, von Funktionen usw., und „schwänzt" deshalb die betr. Hochschulvorträge. Aber wenn dann, etwa in Semesterprüfungen, ihm auf den Zahn gefühlt wird, dann muß er doch einsehen, daß ihm manches fehlt. Geigenmüllers Buch kann ihm dann, wie wenige andere helfen, die klaffenden Lücken auszufüllen. Aber auch dem in der Praxis stehenden Ingenieur kann es wertvolle Dienste leisten. Ferner dem Lehrer an solchen höheren Schulen, an denen in den oberen Klassen die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung gelehrt werden. Er kann daraus ersehen, wie er dem Schüler, auch dem weniger begabten, die neuen Begriffe mundgerecht machen soll und in welch mannigfaltiger Weise sie sich auf, auch auf dieser Stufe schon verständliche, technische Probleme anwenden lassen.

Wenn ich im folgenden einige Wünsche ausspreche und Ausstellungen mache, so bin ich mir wohl bewußt, daß ich damit nur meiner eigenen subjektiven Meinung Ausdruck gebe, ein anderer Leser wäre vielleicht anderer Meinung. Aber da der geschätzte Herr Verfasser in seinem Vorworte selbst um Anregungen und Verbesserungsvorschläge bittet, glaubte ich mit meiner Meinung nicht zurückhalten zu dürfen.

Was die Figuren anlangt, so sind sie durchweg mit großer Genauigkeit und Sorgfalt gezeichnet. Als fehlerhaft ist mir nur die Ellipse Fig. 16 im § 16 Bd. I aufgefallen. Im § 22 und § 23 desselben Bandes sähe ich gern die Gleichung für die Gerade durch einen Punkt und für die durch zwei Punkte an der Hand von Figuren hergeleitet. Sonst kann über Mangel an Figuren nicht geklagt werden. In Hinsicht auf den dargebrachten Stoff glaube ich, daß einiges fehlen könnte, ich würde z. B. im Bd. I die §§ 78—82 (Cissoide, Conchoide, Cassinische Linien) gern missen, im Bd. II das Kapitel über die Integration irrationaler Funktionen. Dagegen möchte ich den Inhalt des Buches bereichert sehen durch ein Kapitel über analytische Geometrie des Raumes, das ja nur bis zur Kugel und allenfalls bis zum dreiachsigen Ellipsoid zu gehen brauchte. Auch vermisse ich ein Kapitel über hyperbolische Funktionen, die doch in letzter Zeit immer mehr Bedeutung in der Technik gewinnen. Wie elegant läßt sich z. B. die kubische Gleichung mit Hülfe von Hyperbelfunktionen lösen, zumal wir jetzt die ausführlichen Tafeln von Ligowski und die von Burrau haben. Unverständlich ist es mir ferner, warum Ellipse, Parabel und Hyperbel nicht „unter einen Hut" gebracht sind (die Bezeichnung „Kegelschnitte" ist nirgends im Buche zu finden!). Ich möchte vorschlagen, mindestens noch der Erörterung der allgemeinen Gleichung 2. Grades Aufnahme zu gewähren, ich habe noch stets gefunden, daß meine Hörer sich gerade für dies Kapitel besonders erwärmten. Wird man doch gerade bei Problemen der Mechanik oft auf eine allgemeine Gleichung 2. Grades geführt! — § 86 Bd. I brächte zweckmäßig die Zahlen

ϱ, ($\varrho^0 = 57{,}3^0$, $\varrho' = 3438'$, $\varrho'' = 206\,265''$),

die zur Umwandlung von Gradmaß in analytisches Winkelmaß (den Ausdruck „Bogenmaß“ würde ich gern vermieden sehen, um zu verhindern, daß der Leser bezw. Hörer sich darunter eine Länge vorstellt) dienen, indem sie die Einheit des letzteren in Gradmaß verwandeln, so daß z. B. das natürliche Winkelmaß b für a''

$$b = \frac{a''}{\varrho''} \text{ und } a' = b \cdot \varrho'$$

wird. Werden diese Zahlen doch so häufig gebraucht, daß wir sie auf den meisten Rechenschiebern durch einen besonderen Strich in der logarithmischen Teilung festgehalten sehen. An einigen Stellen, so z. B. Bd. I § 10, Formel 9 möchte ich für das Behalten von Formeln die Regel der „zyklischen Vertauschung“ angegeben sehen. Endlich möchte ich noch die Ausmerzung einiger entbehrlicher Fremdwörter beantragen, wie: Diameter, Transformation, Direktrix, Fokus, Derivierte, normal, prinzipiell, kompliziert, homogen.

Alle diese kleinen Ausstellungen können mich, wie schon gesagt, nicht abhalten, das Buch allen Studierenden, einerlei welcher Vorbildung, und nicht minder angelegentlich den Herren Fachgenossen zu empfehlen.

F. Hoeber (Hannover).

* * *

Thesing, Kurt, Biologische Streifzüge. Eßlingen und München 1908, J. F. Schreiber. 364 S., 74 Abb. und 6 Tafeln. Geb. 7,00 M.

Es ist eine ebenso unbestreitbare wie gesunde Erscheinung, daß im Kreise gebildeter Laien das Interesse an naturwissenschaftlichen Schöpfungen fortwährend im Zunehmen begriffen ist, und unser Zeitalter darf einmal getrost den Ruhm beanspruchen, mit den Gaben der Wissenschaft nicht gegeizt, sondern sie mit vollen Händen gestreut zu haben. Während noch vor wenigen Jahrzehnten in der deutschen Gelehrtenwelt eine gewisse Scheu vor populärer Darstellung und sogar vor einem leichtfaßlichen Stil vorherrschte und jeder Ausschlag nach dieser Richtung als tadelnswert galt, hat sich in letzter Zeit ein gesunder Wandel vollzogen. Allerdings spricht man bereits auf verschiedenen Gebieten von Ueberproduktion und überflüssigen Büchern. So berechtigt der Kern dieser Anschauung ist, so falsch ist eine Verallgemeinerung, wenn sie sich nur auf Aeußerlichkeiten zu stützen weiß. Der etwas allgemein gehaltene Titel des mir vorliegenden Buches könnte vielleicht die Vermutung entstehen lassen, als handelte es sich um eine Erscheinung, die nicht einen eigenartigen „Typ“ verkörpere. Doch sei gleich vorweg bemerkt, daß wir es hier mit einem seiner ganzen Anlage und Ausführung nach originellen Werke zu tun haben. Die Thesingschen Streifzüge führen nicht nur in das Reich der Tatsachen ein, sondern auch in die Welt der Theorien, wie uns schon ein flüchtiger Blick in das Inhaltsverzeichnis zeigt: von Thales bis Lamarck, Lebenserscheinungen und Bedingungen, die Kräfte im Organismus, die Bausteine der organischen Welt, die Entstehung des Lebens, die Abstammungslehre, die Faktoren der Entwicklung, die Erhaltung des Lebens, Fortpflanzung und Vererbung.

Wie schon aus diesen Angaben ersichtlich, behandelt das Buch die Hauptfragen der Biologie, und die Art und Weise, wie das geschieht, ist besonders anerkennenswert. Gleichviel, ob Beobachtungsmaterial, Theorien oder Hypothesen vorgeführt werden, stets begegnet man einer vortrefflichen Stoffsammlung, und stets hat man den Eindruck, daß hinter dem Stoff ein abwägender, toleranter Fachmann steht, der im übrigen seine Selbständigkeit nicht verleugnet. Diese Selbständigkeit zeigt sich namentlich auch darin, daß der Verfasser es liebt, eigene Beobachtungen und Arbeiten über weniger bekannte Objekte heranzuziehen. Die ganze Art, wie die Methoden der Arbeit und die Methoden der Biologie überhaupt dem Leser vorgeführt werden, erwecken in ihm den Eindruck eines Erlebnisses, und hierin beruht zum Teil der große Wert des Buches.

Zu einer zweiten Auflage, die dem gewandt geschriebenen Buche aufs wärmste zu wünschen ist, möchte ich den Wunsch äußern, daß der Herr Verfasser da und dort noch eine durchgreifendere Popularisierung eintreten lassen möge, damit dieses Werk in noch weitere Kreise dringen kann.

Bastian Schmid (Zwickau).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abel, O., Bau und Geschichte der Erde. Mit 226 Textfig. u. 6 Farbentaf. u. Kart. Wien 1909, Tempsky. geb. M 4.50.

Apel, M., Die Weltanschauung Haeckels kritisch dargestellt. (Moderne Philosophie, Bd. I). Schöneberg 1909, Buchverlag der Hilfe. M 1.—.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. I, 1 (Nov. 1908). Leipzig 1908, Vogel. à Bd. M 20.—.

Arndt, K., Elektrochemie (Aus Natur und Geisteswelt). Mit 38 Abb. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Arnold, P., Experimenteller Nachweis der Sätze vom Kräftepaar (Sonderabdruck aus Nr. 8 d. „Mathem.-Naturw. Bl.“).

v. Bardeleben, K., Die Anatomie des Menschen (Aus Natur u. Geisteswelt). 1. Teil: Allgem. Anatomie u. Entwickelungsgeschichte. Mit 69 Abb. 2. Teil: Das Skelett. Mit 53 Abb. 3. Teil: Das Muskel- u. Gefäß-System. Mit 68 Abb. 4. Teil: Die Eingeweide. Mit 38 Abbild. Leipzig 1908, Teubner. à Bd. M 1.25.

Bardey, E., u. Pietzker, F., Algebraische Gleichungen. 6. Aufl. Ebenda. geb. M 8.—.

Behrendsen, O., u. Götting, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. A. Unterstufe. Mit 280 Fig. im Text. Ebenda. geb. M 2.80.

Berg, A., Einführung in die Beschäftigung mit der Geologie. Mit 3 Abb. im Text. Jena 1909, Fischer. M 1.80.

Blätter f. d. deutsche Erziehung, herausgegeb. von Arthur Schulz, Jahrg. 10, Heft 8 bis 12. Birkenwerder 1908, Verlag der Bl. f. d. E.

Blume, G., Das Voranschlagen für Hochbauten. Mit 2 Taf. u. 17 Textfig. Leipzig 1909, Teubner. kart. M 1.80.

Boas, J. E. V., Lehrbuch der Zoologie für Studierende. 5. Aufl. Mit 603 Abb. Jena 1908, Fischer. M 12.—.

Bock, C. E., Bau, Leben und Pflege d. menschlichen Körpers, für Schüler. 13. Aufl., neubearb. v. W. Camerer. Stuttgart 1909, Union, Deutsche Verlags-Gesellschaft. M 1.20.

Boehm, K., Elliptische Funktionen. I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Fig. im Text. Leipzig 1908, Göschen. geb. M 8.60.

Borel, E., Die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausg. v. P. Stäckel. I. Bd.: Arithmetik u. Algebra. M. 57 Textfig. u. 3 Taf. Leipzig 1908, Teubner. M 8.60.

Buesgen, M., Der deutsche Wald (Naturwiss. Bibliothek). Mit Abb. u. 2 Tafeln. Leipzig, Quelle & Meyer. geb. M 1.80.

Claude—Ostwald, Schule der Elektrizität. Mit 400 Abb. u. Tafeln. Leipzig 1909, Klinkhardt. M 8.—.

Couturat, L., Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von Dr. Carl Siegel (Philosophisch-soziologische Bücherei. Bd. VII). Ebenda. M 8.50.

Crantz, P., Lehrbuch der Mathematik für höh. Mädchenschulen u. Lyzeen. I. Teil: Für höh. Mädchenschulen. Mit 164 geom. Fig. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 2.40.

Dannemann, F., Aus der Werkstatt großer Forscher. 3. Aufl. des 1. Bdes. des „Grundriss einer Geschichte der Naturwissenschaften“. Mit 62 Abbild. u. einer Spektraltafel. Leipzig 1908, Engelmann. M 6.—.

—„— Naturlehre für höhere Lehranstalten auf Schülerübungen gegründet. II. Teil: Physik. Hannover 1908, Hahn. geb. M 3.60.

Darwin, 6 Aufsätze von W. Bölsche, B. Wille, E. David, M. Apel, R. Penzig, F. Naumann (Moderne Philosophie, herausgegeben von M. Apel, Bd. 4). Schöneberg 1909, Buchverlag der Hilfe. M 1.—.

Dekker, Herm., Naturgeschichte des Kindes. 2. Aufl. Stuttgart 1908, Verlag des Kosmos (Franckh). M 1.—.

Dennert, E., Die Zelle ein Wunderwerk. (Naturstudien für jedermann.) Heft 2. Mit 20 Abb. Godesberg, Naturwiss. Verl. à Heft M 0.20.

Detmer, W., Das kleine pflanzenphysiologische Praktikum. 3. veränd. Aufl. Mit 179 Abb. Jena 1909, Fischer. M 7.—.

Dintzl, E., Einführung in die Funktionenlehre für Schüler der oberen Klassen der Mittelschulen. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht des K. K. Erzherzog Rainer-Gymnasiums in Wien. Wien 1908, Selbstverlag d. Erzh. Rainer-Gymn.

v. Drigalski und H. Seebaum, Der Mensch in seinen Beziehungen zur Außenwelt. Leipzig 1908, Quelle & Meyer. geb. M 1.—.

Ehrig, G., Geometrie für Baugewerkenschulen. 1. Teil: Geometrie der Ebene. Mit 198 Fig. im Text, zahlreichen Uebungsaufgaben und vielen Beispielen. 2. Aufl. Leipzig 1909, Leineweber. geb. M 2.80.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr. XIme Année, Nr. 1, 2 Paris 1909, Gauthier-Villars et Genève, Georg & Cie.

Escherich, K., Die Termiten oder weißen Ameisen. Leipzig 1909, Klinkhardt. M 6.—.

Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik, Chemie, sowie von Aufgaben über graphische Darstellungen. 6. verb. Aufl. Ausg. A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. 1. Teil: Pensum der UIII, OIII u. UII. Berlin 1909, Salle. M 2.20.

Fischer, P. B., Determinanten. (Sammlung Göschen.) Leipzig 1908, Göschen. geb. M 0.80.

Francé, J. H., Bilder aus der Insektenwelt. Erste Reihe. Stuttgart 1908, Kosmos-Verlag (Franckh). M 2.25.

—„— Bilder aus dem Leben des Waldes. Ebenda. M 1.—.

Freundt, K., Ueber die Dreiteilung des Winkels. Thorn 1908, Selbstverlag. geh. M 1.—.

Gajdeczka, J., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. 7. umgearb. Aufl. Wien 1908, Tempsky. geb. M 3.60.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.