Jahrgang XV. 1909. No. 3.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe**,
herausgegeben von
F. Pietzker,
Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Nachdruck der einzelnen Artikel ist, wenn überhaupt nicht besonders ausgenommen, nur mit genauer Angabe der Quelle und mit der Verpflichtung der Einsendung eines Belegexemplars an den Verlag gestattet.

Inhalt: Vereins-Angelegenheiten (S. 49). — Ueber die Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Schulunterricht. Von Dr. Karl Goldziher in Budapest (S. 49). — Bemerkungen über die kubische Gleichung. Von Prof. Dr. E. Haentzschel in Berlin (S. 53). — Die Fortsetzung der Funktionen $e_2'(x)$ und $e_2''(x)$. Von Paul Richert in Berlin (S. 54). — Neue Lehrsätze zur elementaren Dreiecksgeometrie. Von Dr. Richard Schröder in Gr.-Lichterfelde (S. 55). — Beweis einiger Sätze über die von den Zentralen der Dreieckskreise gebildeten Flächenstücke. Von F. Weiß in Gr.-Lichterfelde (S. 56). — Die Behandlung der stereographischen Polarprojektion mit elementaren Sätzen der Geometrie und Stereometrie (in den Oberklassen höherer Schulen). Von Dr. P. Haß in Hamburg (S. 56). — Zur Frage der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten. Von Kurt Geißler in Luzern (S. 59). — Ueber den mathematischen Unterricht an einem Technikum. Von Dr. Heinrich Grünbaum in Bingen a. Rh. (S. 60). — Kleinere Mitteilungen [Einige Grundformeln der Differentialrechnung, hergeleitet mit Hilfe der Beziehung: $d\ln x = \frac{dx}{x}$. — Die Scheitelgleichungen der Kegelschnitte, in ihrer Ableitung vom geraden Kreiskegel. — Bestimmung der ganzen Zahlen, für welche die Beziehung gilt: $x^y = y^x$] (S. 62). — Bericht über die achtzehnte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (S. 63). — Schul- und Universitäts-Nachrichten [Schulreformbewegung in Bayern. — Ferienkurse in Hydrobiologie und Planktonkunde an der Biologischen Station zu Plön] (S. 67). — Vereine und Versammlungen [Orts- und Bezirks-Verbände des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts] (S. 67). — Bücher-Besprechungen (S. 67). — Zur Besprechung eingetr. Bücher (S. 68). — Anzeigen.

Vereins-Angelegenheiten.

Die vorliegende Nummer bringt den Bericht über den allgemeinen Verlauf der während der Pfingstwoche in Freiburg (Breisgau) abgehaltenen achtzehnten Hauptversammlung des Vereins. Ueber die Vorträge und die wissenschaftlichen Diskussionen auf dieser Versammlung werden in der bisher üblich gewesenen Art Einzelberichte erscheinen, mit denen in dieser Nummer selbst der Anfang gemacht wird.

Wie aus dem Versammlungsbericht ersichtlich, sind von den satzungsgemäß ausscheidenden Vorstandsmitgliedern die Herren Lenk und Bastian Schmid wiedergewählt worden, während Herr Pietzker eine Wiederwahl abgelehnt hat. Der Vorstand besteht demgemäß bis zur nächsten Versammlung aus den Herren Lenk (Erlangen), Presler (Hannover), B. Schmid (Zwickau i. S.), Schotten (Halle a. S.), Thaer (Hamburg); über die Art, in der der durch Ausscheiden des Herrn Pietzker leer gewordene Platz seine Wiederausfüllung finden soll, wird in der nächsten Nummer berichtet werden. Den Vorsitz im Verein hat bis auf weiteres Herr Prof. Dr. Thaer, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg übernommen; das Amt des Schatzmeisters wird auch weiterhin Herr **Presler** verwalten (s. d. Notiz am Kopfe des Blattes unter der Rubrik „Verein".)

Der Vereinsbeitrag wird vom nächsten Kalenderjahr ab 5 M für das Jahr betragen.

Als Ort der nächstjährigen Versammlung ist Posen gewählt worden. Mitteilungen über die Bildung des dortigen Ortsausschusses wird die nächste Nummer des Vereinsorgans bringen.

Der Vereins-Vorstand.

Ueber die Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Schulunterricht.

Von Dr. Karl Goldziher (Budapest).

Es ist heutzutage allgemein anerkannt, daß die Durchführung der neuen Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Schulunterrichts in der zielbewußten Anwendung des graphischen Verfahrens die wichtigste Stütze hat. Es muß gefordert werden, daß dies Verfahren nicht nur ein zufällig begleitendes und oft als überflüssig erscheinendes Moment des Lehrganges bilde, sondern daß für seine Verwertung eine bestimmte, stufenweise ansteigende Richtung festgestellt werde. Nur in dieser Weise kann das Verfahren seine prinzipielle Bestimmung auf der Schule erfüllen: die anschauliche Sicherstellung des bewußten Entstehens und der richtigen Verarbeitung der

funktionalen Denkweise. Gino Loria bezeichnet die Aufgabe als eine dreifache: sie hat didaktischen, wissenschaftlichen und praktischen Anforderungen zu genügen;[1]) dies kann aber nur dann gelingen, wenn die graphischen Betrachtungen methodisch ausgebildet werden.

1. Die Anpassung des Lehrganges an die richtig erfaßten Grundlagen der exakten Forschungsarbeit und die Forderung, daß die Gestaltung des Unterrichtsstoffes zu wirklicher Anwendbarkeit führen soll, beruht auf Ueberlegungen über das Wesen der Mathematik. Die Mathematik gibt das bestimmteste Muster dafür, wie die beiden fundamentalen Elemente der positiven Forschung: das Konkrete und das Abstrakte erst für sich allein, dann in ihren gegenseitigen Beziehungen genau zu untersuchen sind. Das konkrete Element ist von der Individualität der betrachteten Erscheinungsgruppe abhängig und geht dem allgemeinen abstrakten Teil voran. In der Mathematik kann diese Gliederung genau durchgeführt und die Reziprozität der beiden Elemente genau festgestellt oder untersucht werden. Die Anwendung der Mathematik auf die einzelnen Erscheinungsgruppen der Natur- und Sozialwissenschaften ist dadurch bestimmt, wie weit der konkrete Teil mathematisch zu approximieren ist, damit man dann die präzise Verarbeitung auf sicherer Basis entwickeln könne. Gewöhnlich ist der konkrete Teil der schwierigere, da es dabei auf feinere, dem Wesen der Gruppe und nicht allgemeinen Hypothesen angepaßten Betrachtungen ankommt; der Grad der Anwendbarkeit der Mathematik hängt davon ab, wie weit diese individuelle Untersuchung streng durchführbar ist. (Alexejeff[2]) nennt dies das arithmologische Verfahren, das im Gebiete der Anwendungen die allgemeine analytische Methode inhaltlich überholt). Das richtige Begreifen und Verwerten der analytischen Funktionalbeziehungen hängt somit in erster Instanz von der sicheren Betrachtung der diskreten Funktionalbeziehungen ab.[3]) Aber nicht nur für die Anwendung auf andere Wissenszweige, sondern auch für die Methodik der Mathematik selbst ist diese Gliederung von eingreifender Bedeutung; Comte stellt an die Spitze seiner allgemeinen Betrachtungen über die Mathematik folgenden Satz: „Dans le développement historique de la science mathématique depuis Descartes, les progrès de la partie abstraite ont presque toujours été determinés par ceux de la partie concrète" (IVe leçon).[4])

Wir erblicken nun in der graphischen Methode das Mittel, um diese allgemeinen Betrachtungen bereits auf der Schule in den Vordergrund rücken zu lassen. Die Untersuchung des konkreten Teiles weist direkt auf das anschauliche Verfahren hin (Unterstufe); die graphische Methode leistet den oft sehr schwierigen Uebergang zur abstrakten Behandlung, besonders in Fällen, wo die elementaren Hilfsmittel hierzu noch nicht ausreichen würden (Mittelstufe); sie gibt ein Mittel, den abstrakten Teil anschaulich und leicht zu begründen und zu entwickeln auch auf der Stufe der höheren Schule, wo die präzise Grundlegung der höheren Prinzipien noch nicht möglich ist (Oberstufe).[5])

Für die hier erörterte Auffassung ist es vor allem von Wichtigkeit, daß die graphische Methode womöglich vom Beginn des höheren Unterrichtes angefangen, also schon auf der unteren Stufe einsetzen und den weiteren Verlauf des Lehrganges in methodisch aufgebauter Weise befruchten möge.

2. Auf der Unterstufe schreiten wir intuitiv, auf sachlich-konkreter Basis der algebraischen Festlegung der neuen Begriffsbildungen entgegen. Wir haben in einem zusammenfassenden Aufsatz[6]) bereits darauf hingewiesen und im Einzelnen durchgeführt, wie die qualitative und die quantitative Seite der graphischen Methode auf der Unterstufe eingeführt und verwertet werden kann, um einerseits den Rechenunterricht in jeder Beziehung methodisch zu gestalten und um andererseits mit dem algebraischen Unterricht auf der Mittelstufe gleich zu Beginn in doppelter Richtung (der formal-rechnerischen und der tabellarisch-graphischen) einsetzen zu können. Die praktische Einführung der Grundelemente der zu gebrauchenden Koordinatenmethode stößt dabei auf keinerlei Schwierigkeiten; schon Comte betonte, wie natürlich diese Darstellungsweise ist, indem er von ihr sagte: „un procédé élémentaire qu'on peut regarder comme naturel à l'esprit humain, puisqu'il se forme pour ainsi dire spontanément chez toutes les intelligences, même les plus vulgaires".[7])

3. Im algebraischen Unterricht der Mittelstufe werden dem graphischen Verfahren auf Grund der erwähnten konkreten Vorarbeiten ganz neue Seiten abgewonnen. Die graphische Methode hat hier den Zweck, jeden Schritt des streng logischen Ganges auch in der Anschauung bewußt werden zu lassen, indem die Zeichnung die Elemente des präzisen Kalküls in der für die exakte Forschungsweise so wichtigen Anschauung zu analysieren vermag. In dieser Hinsicht können folgende bemerkenswerte Momente hervorgehoben werden: Durch die anschauliche Vorführung werden die oft als willkürlich erscheinenden Umformungen klargelegt; die algebraischen Diskussionen, die Besprechung schwieriger Einzelfälle, die Lösung der mit den elementaren Hilfsmitteln unerreichbaren Probleme im Gebiete der Gleichungslehre werden in einheitlicher Weise vervollständigt; die Resultate können im Sinne der praktischen Mathematik teils approximativ erprobt, teils weiter verarbeitet werden, wodurch der präzise Gang des Unterrichtes von Seite der Approximationsmathematik ergänzt wird; die funktionale Betrachtungsweise der algebraischen Ausdrücke wird auf konkreter Basis aufgebaut; endlich die neuhinzutretenden schwierigen Begriffe (z. B. Irrationalzahl, allgemeiner Zahlbegriff, Logarithmus usw.) werden dem anschaulichen Erfassen nähergebracht. Die graphische Methode leistet sozusagen die Uniformisierung

[1]) Sulle riforme scolastiche da compiersi e in particolare su quelle relative all'insegnamento della Matematica (Boll. di Mat. V. 1906).

[2]) S. z. B. das Heft: Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung (Berlin 1903, Mayer & Müller) Weiterhin verweisen wir auf die Bestimmungen der Beneke-Preisschrift für das Jahr 1901 der Gött. Gelehrten Gesellschaft. (Das Referat wurde abgedruckt in Gött. Nachr. (1901, Berichte) und Math. Ann. (55.)).

[3]) Die nähere Ausführung dieser Gedanken findet man in dem III. und IV. Kapitel des I. Bandes der Cours de Philosophie Positive von A. Comte.

[4]) Genauere historische Durchführung in F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (Leipzig 1908, Teubner), pag. 180–201. Weiterhin s. die grundlegenden Vorlesungen F. Kleins über die Revision der Prinzipien der Differential- und Integralrechnung („Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechnung auf Geometrie", Leipzig 1902, Teubner).

[5]) „Quand la raison nous fault, nous y employons l'expérience" (Montaigne).

[6]) Der Rechenunterricht auf der Unterstufe der höheren Schulen. (Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht XXXIX, 1908.)

[7]) XIIe leçon.

der elementaren Untersuchungen über algebraische Ausdrücke; durch die Veranschaulichung des in den Ausdrücken enthaltenen funktionalen Zusammenhanges wird der sonst schwierige Uebergang vom Konkreten zum Abstrakten erleichtert und in vielen Fällen vertieft. Wesentlich ist dabei die Vereinigung des algebraischen und planimetrischen Lehrganges der Mittelstufe. In der heutigen Literatur bietet für diese zweite Stufe das Werk O. Lessers[8]) den bestimmtesten Anhaltspunkt und die wertvollste Anregung zur Verwirklichung und Weiterführung dieser Auffassung.

Auch für den geometrischen Unterricht weist der Gebrauch des Millimeterpapieres auf neue Gesichtspunkte hin. Diese sind in den englischen und amerikanischen Lehrbüchern und z. B. in der Aufgabensammlung von A. Weill[9]) bereits vielfach verwertet worden. Indem man die Figuren auf Millimeterpapier zeichnen, die komplizierteren Konstruktionen auf Millimeterpapier ausführen läßt — wodurch auch technische Vereinfachungen eintreten — kann jeder Schritt des sonst ganz allgemein geführten Beweises oder der Konstruktion mit bestimmten Elementen numerisch verfolgt, das Ergebnis anschaulich erörtert und nachgeprüft werden. Diese Methode ist besonders für die Lösung von Problemen aus der praktischen Geometrie von großer Bedeutung; bei der Einübung der Grundkonstruktionen und bei allgemeinen Analysen ist der Gebrauch des Millimeterpapieres zu vermeiden. (Markantes Beispiel: die Bestimmung von π auf graphischem Wege).

Da das graphische Verfahren stets auch als ein approximatives Moment dem Gange des Unterrichtes folgt, so ist besonderes Gewicht darauf zu legen, daß bei der Entwerfung und bei der Ausführung der Zeichnung, und der ihr vorangehenden Tabelle, weiterhin bei den hierzu nötigen Rechen- und Kontrollarbeiten die Gesichtspunkte der praktischen Mathematik zur vollen Geltung kommen sollen. Geschieht dies, so wird der mathematische Schulunterricht für die praktische Ausgestaltung des späteren physikalischen Unterrichtes schon an der höheren Schule und des technischen Unterrichtes an der Hochschule wertvolle Dienste leisten können. Das anzustrebende Ziel wird dadurch unterstützt, daß man im Laufe der graphischen Arbeiten alle Vorteile des Graphikons auszunutzen trachtet; in erster Linie sei in diesem Zusammenhange auf die Einübung des „Graphischen Rechnens" hingewiesen. In unserem bereits zitierten Aufsatz haben wir gezeigt, wie diese Forderung schon auf der unteren Stufe im Kapitel der praktisch vorgeführten Prozent- und Zinsberechnungen zu erfüllen ist; neuerdings hat J. Schröder[10]) diesen Gedanken für die mittlere Stufe ausgearbeitet, indem er zahlreiche Beispiele für die graphische Behandlung der Zinseszins- und Rentenrechnung bekannt machte. Der große Vorteil der graphischen Methode tritt hier erstens in der praktischen Approximation mit der zu erlangenden Genauigkeit, dann besonders in der einfachen Lösung der sonst mit elementaren Hilfsmitteln unzugänglichen Fragestellungen zutage. Ein allgemeines Beispiel für die praktische Anwendung des graphischen Rechnens wird in der Lehre über die geometrische Reihe geliefert. Es gelingt nämlich durch Benutzung eines weiter unten angewendeten Gedankens von Th. Nonne, die ganze Theorie der geometrischen Reihe anschaulich zu gestalten und durch Anwendung linearer Orte die wichtigsten Rechnungselemente (allgemeines Glied, Summe) auf graphischem Wege zu bestimmen.[11])

4. Es möge nun die Auseinandersetzung der Prinzipien folgen, nach welcher man die graphische Methode auf der Oberstufe, also bei der Einführung in die Elemente der Infinitesimalrechnung anzuwenden hätte. Herr Dr. R. Schimmack hat in einer jüngst erschienenen Note[12]) ein bestimmtes Beispiel hierfür angegeben. Die graphische Betrachtung darf auch hier kein endgültiges Beweisverfahren bilden; sie ersetzt auf anschauliche Weise den axiomatischen Aufbau, jene höheren Prinzipien und feineren Betrachtungen, die im Schulunterricht nicht mit genügender Präzision vorgeführt werden können. Wir erwähnten bereits, daß das graphische Verfahren schon auf der Unterstufe dazu verhilft, die funktionale Denkweise ohne die präzisen algebraischen Algorithmen zu kennen in konkreter Weise einzuführen; das Verhältnis der beiden ersten Stadien des Unterrichtes hat in dieser methodischen Hinsicht vieles gemein mit dem Verhältnis der Infinitesimalrechnung auf der Oberstufe zur präzisen Theorie. (Man könnte zur näheren Charakterisierung dieser Bemerkung noch darauf hinweisen, daß auch im ersten elementaren geometrischen Unterricht das anschauliche Erfassen räumlicher Gebilde die axiomatische Grundlegung zu ersetzen vermag.) In dieser Auffassung wird also die Infinitesimalrechnung auf der Schule stets mit dem anschaulichen graphischen Verfahren in engem Verhältnis bleiben müssen, was nicht nur eine Erleichterung des Lehrganges, sondern in methodischer Behandlung auch eine Vertiefung desselben mit sich bringen wird. Man könnte sogar behaupten, daß die Möglichkeit der entsprechenden Behandlung dieser Dinge auf der Schule direkt von dieser anschaulichen Grundlegung abhängig ist. Die nötigen anschaulichen Elemente werden durch den sonstigen Gang des Unterrichts bedingt sein, es ist aber von großem Nutzen, dieselben womöglich vielseitig und von Schritt zu Schritt zu verwerten.[13]) Vom Standpunkte der auf der höheren Schule zu bietenden Universalbildung ist es von großem Werte, daß in

[8]) Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht der höheren Schulen. (Leipzig, G. Freytag und Wien, F. Tempsky. 1908.)

[9]) Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen: I. Mathematik. (Gebweiler 1909, Boltze.) Sehr empfehlenswert für den Schulgebrauch sind die graphischen Hefte Weills. (Derselbe Verlag.)

[10]) Beiträge zur Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Unterricht. (Beilage zum Jahresbericht Nr. 983 der Oberrealschule vor dem Holstentore zu Hamburg, Ostern 1909.) IV. Kapitel.

[11]) Ueber die graphische Behandlung der arithmetischen Progression verweisen wir auf W. M. Baker and A. A. Bourne: Elementary Algebra. (London 1907, Bell and Sons.) XLII. Kap. Im XLVIII. Kap. findet man auch eine graphische Betrachtung aus dem Gebiete der Kombinatorik. S. weiterhin: G. H. Bryan: Une leçon sur les progressions et leurs applications (L'Ens. math. XI. 1909). Aus der älteren Literatur über graphisches Rechnen verweisen wir auf: L. Cremona: Elemente des graphischen Calcüls (deutsch von M. Curtze, Leipzig 1875, Quandt und Händel). Ueber ein dem Nonneschen ähnliches Verfahren s. S. 47—49.

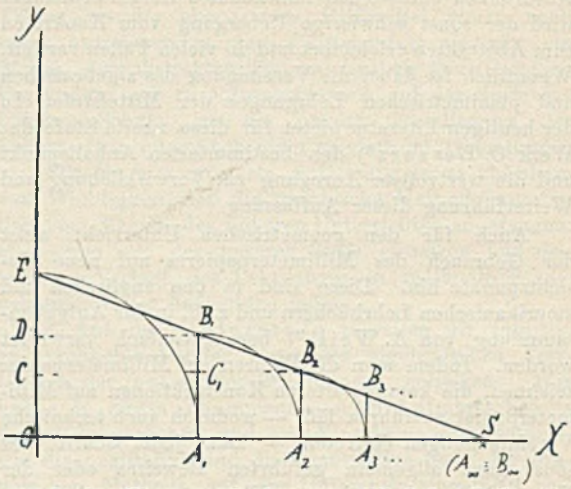
[12]) Eine spezielle Frage der Schul-Infinitesimalrechnung. (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften XIV, 1908, Nr. 2.)

[13]) Ein Beispiel hierfür ist die Untersuchung des Verlaufes einer Funktion durch die graphische Betrachtung der derivierten Kurvenzüge. In dieser Weise sind auch kompliziertere — aber für die Praxis wichtige — Funktionen einfach zu behandeln. Wir verweisen diesbezüglich auf das Referat von Rud. Schimmack: Ueber die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes im Sinne der neueren Reformbestrebungen (Zeitschrift für math. und naturwiss. Unt. XXXIX, 1908), wo diese Behandlungsweise des näheren geschildert wird mit der wertvollen Anwendung auf die Entwickelung von Funktionen in Potenzreihen.

einem solchen Lehrgange neben den formalen Elementen auch die für die Anwendungen wichtigen Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken. Die grundlegenden neuen Gedanken treten dabei so klar hervor, daß auch von Seite der Präzisionsmathematik — natürlich im Verhältnis zur Stufe des Schulunterrichtes — keine triftigen Einwendungen gegen das zu sehr betonte anschauliche Moment zu machen sind; die neuen abstrakten Schwierigkeiten werden eben nicht in ungenauer Weise einfach beseitigt, sondern es wird stets darauf hingewiesen, was die höhere Theorie noch weiterzuführen und zu verfeinern hat. Es muß stets vor Augen stehen, ob das Gebotene dem Schüler wirklich klar geworden ist und zwar jener Stufe entsprechend, auf welcher er sich kraft seiner mathematischen Vorbildung ohne Schwierigkeit bewegen kann. F. Klein hat in seinen Vorlesungen über Elementarmathematik (III. Kapitel 3) am entschiedensten darauf hingewiesen, wie wichtig die induktive Arbeit für die Entwickelung der mathematischen Bildung im allgemeinen, und auf der Schule im speziellen ist.

5. Wir geben nun ein einfaches Beispiel dafür, wie das graphische Verfahren über schwierigere prinzipielle Punkte in anschaulicher Weise hinüberzuhelfen vermag. Bei der Behandlung der unendlichen geometrischen Reihe mit einem Quotienten: $0 < q < 1$ muß man bedenken, daß die grundlegenden Prinzipien über die unendlichen Reihen auf der entsprechenden Stufe in voller Präzision nicht mitgeteilt werden können. Fehlt aber dies, so werden — wie es auch die Geschichte der Mathematik beweist — die beiden schwierigen und dabei wesentlichen Punkte der Untersuchung dem Schüler nie klar werden können. Der gebrauchte Grenzübergang ist zwar an sich noch einfach, aber trotzdem nur skizzenhaft zu erklären; unklar bleiben dabei noch, ob die Grenze 0 durch die stets abnehmenden Glieder bei $n = \infty$ wirklich erreicht wird und ob der Summe der Glieder bei $n = \infty$ der berechnete Grenzwert auch wirklich zuzuschreiben ist. Wir wollen nun zeigen, daß auf graphischem Wege, durch eine anschauliche Abbildung des unendlichen Prozesses ins Endliche, diese beiden Fragen dem Fassungsvermögen der Schüler in genügender Präzision nähergebracht werden können. Es ist wohl bekannt, wie viel Schwierigkeiten diese Dinge auch den feinsten Köpfen bereitet haben, ehe die allgemeinen Prinzipien der konvergenten unendlichen Reihen geklärt und sichergestellt wurden. Unsere Aufgabe ist also, für die Summe der Reihe ein Bild zu konstruieren, das auch im Falle $n = \infty$ durch eine endliche Strecke charakterisiert ist.

Th. Nonne[14]) zeigte, wie die Behandlung der geometrischen Reihe mit einem $q > 1$ — und hieran anknüpfend die Theorie der Zinseszins- und Rentenrechnung auf graphischem Wege am einfachsten auszuarbeiten ist. Sein Grundgedanke ist die sonst auf exponentielle Kurven führende graphische Darstellung so umzugestalten, daß zur Ablesung der in Frage kommenden Größen nur lineare Orte in Betracht kommen. Dies gelingt dadurch, daß man statt der äquidistanten Abszissen, die entsprechenden Werte auf der X-Achse in einer geometrischen Progression mit dem Quotienten der Ordinaten aussteckt. Indem wir nun diesen Gedanken Nonnes für den Fall $0 < q < 1$ anwenden, gelingt es, für die unendliche geometrische Reihe eine anschauliche Behandlungsweise auszuarbeiten.



In der Figur wurde das erste Glied der Reihe (der Einfachheit wegen $= 1$ angenommen) auf der Ordinatenachse durch die Strecke $\overline{OE}$, das zweite Glied der Reihe (also: q, wobei $q < 1$) durch die Strecke $\overline{A_1 B_1}$ aufgetragen mit der Bemerkung:

$$\overline{OA_1} = \overline{OE}.$$

Wird nun E mit B_1 verbunden und wird vom Punkte A_2, der durch die Konstruktion:

$$\overline{A_1 B_1} = \overline{A_1 A_2}$$

erhalten wurde, die Vertikale $\overline{A_2 B_2}$ gezeichnet, so kann aus der Aehnlichkeit der Dreiecke: ECB_2 und $B_1 C_1 B_2$ geschlossen werden, daß:

$$\overline{A_2 B_2} = q^2$$

ist; und ebenso für die weiteren entsprechend konstruierten B-Punkte, daß allgemein das $(k+1)$te Glied:

$$\overline{A_k B_k} = q^k \text{ ist.}$$

Die Figur zeigt also, daß die Verlängerung der Geraden $\overline{EB_1}$ der geometrische Ort der Endpunkte jener Strecken ist, die die einzelnen Glieder der Reihe repräsentieren. Die Teilsummen der Reihe erscheinen ferner auf der Abszissenachse, nämlich:

$$s_1 = \overline{OA_1},\ s_2 = \overline{OA_2},\ \text{usw.}^{15})$$

Wir sehen, daß die Glieder bei wachsendem n abnehmen und daß die Teilsummen stets endlich bleiben. Da aber $q > 0$, so ist der Schnittpunkt S (der bei $q < 1$ stets existiert) der gemeinsame Grenzpunkt aller Punkte A und B, d. h. bei unendlicher Verdichtung der A-Punkte links von S; für $n = \infty$ bleibt also der Grenzwert der Teilsummen stets endlich. Der Grenzwert 0 der Glieder und somit der Grenzwert $\overline{OS}$ der Teilsummen wird aber — da der Punkt S stets im Endlichen konstruierbar ist — wirklich erreicht. Die Strecke $\overline{OS}$ kann demnach als der Grenzwert der Summe der Glieder für $n = \infty$ angesehen werden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DB_1E und OSE folgt dann:

$$\overline{DE} : \overline{DB_1} = \overline{OE} : \overline{OS},$$

d. h.

$$1 - q : 1 = 1 : \overline{OS},$$

also:

$$\overline{OS} = [s_n]_{n=\infty} = \frac{1}{1-q}.$$

[14]) Zinseszins- und Rentenrechnung mit Hilfe graphischer Darstellung. (Berlin 1903, R. Eisenschmidt.)

[15]) Ist die Figur auf Millimeterpapier gezeichnet, so können alle diese Elemente auch wirklich abgelesen werden.

Bemerkungen über die kubische Gleichung.

Von Prof. Dr. E. Haentzschel (Berlin).

I. In diesem Jahrgang (1909, S. 36—37) hat Herr Prof. Dr. Richert im ersten Teile eines Aufsatzes über kubische Gleichungen eine Bedingung für die Rationalität aller drei Wurzeln aufgestellt, die er in der nachstehenden Fassung ausspricht: „Für den Fall, daß die kubische Gleichung $x^3 - 3b_1^2 x = 2c_3$ nur reelle ganzzahlige rationale Wurzeln hat, muß $3b_1^2$ von der Form $3r^2 + s^2$ sein, worin r und s ganze rationale Zahlen sind.“

Ich möchte im folgenden darauf hinweisen, daß dieses Resultat nicht neu ist. In den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1880, erschienen 1881, findet sich auf S. 930—936 der Aufsatz von E. E. Kummer: „Ueber die kubischen und biquadratischen Gleichungen, für welche die zu ihrer Auflösung nötigen Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehungen alle rational auszuführen sind“. Die kubischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, die eine rationale Wurzel haben, teilen sich nämlich in zwei Klassen. Zur ersten Klasse gehören diejenigen Gleichungen, für welche bei der Wurzel

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha + \beta\sqrt{\gamma}} + \sqrt[3]{\alpha - \beta\sqrt{\gamma}}$$

sich sowohl die Quadratwurzel als auch beide Kubikwurzeln glatt ausziehen lassen, so daß

$$x_1 = \text{rationalem} + \text{rationalem Bestandteil}$$

ist. Zur zweiten Klasse gehören die Gleichungen, bei denen

$$x_1 = (m + \sqrt{n}) + (m - \sqrt{n})$$

ist, so daß die Irrationalität verschwindet.

Kummer behandelt nur den ersten Fall und zeigt, daß, wenn α die rationale Wurzel ist, die beiden andern Wurzeln die Form haben müssen:

$$\beta + \gamma \cdot \sqrt{-3} \text{ bezw. } \beta - \gamma \cdot \sqrt{-3};$$

vor allem muß bei reellem γ der rein imaginäre Bestandteil proportional mit $\sqrt{3}$ sein. Die kubische Gleichung aber hat nach Kummer die Form

1) $x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0.$

Der Zusammenhang der Kummerschen Untersuchung mit der des Herrn Richert ergibt sich sofort, wenn man

2) $\alpha + 2\beta = 0$ bezw. $\alpha = -2\beta$

setzt, damit, wie bei Herrn Richert, das Glied mit x^2 verschwindet. Alsdann hat die Gleichung:

$$x^3 - (3\beta^2 + [\gamma \cdot \sqrt{-3}]^2)x + 2\beta(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0$$

die Wurzeln:

$$-2\beta;\quad \beta + \gamma \cdot \sqrt{-3};\quad \beta - \gamma \cdot \sqrt{-3},$$

die für ein rein imaginäres γ, also für $\gamma = \gamma' \cdot \sqrt{-1}$, sämtlich reell sind, während der Koeffizient von x alsdann lautet:

$$-\left\{3\beta^2 + (\gamma' \cdot \sqrt{3})^2\right\},$$

so wie es Herr Richert verlangt.

Z. B. würde sich für

$$x^3 - 13x - 12 = 0$$

ergeben:

$$13 = 3\beta^2 + (\gamma' \cdot \sqrt{3})^2$$
$$13 = 3\beta^2 + 3\gamma'^2.$$

Es ist aber

$$x_1 = 4 = -2\beta,$$

also $\beta = -2.$

Ferner $x_2 = -1 = \beta + \gamma' \cdot \sqrt{3} = -2 + \gamma' \cdot \sqrt{3},$

$x_3 = -3 = \beta - \gamma' \cdot \sqrt{3} = -2 - \gamma' \cdot \sqrt{3};$

daher $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Demnach ist in der Tat

$$13 = 3\beta^2 + 3\gamma'^2 = 3 \cdot (-2)^2 + 1^2.$$

II. Indem ich an die von Kummer abgeleitete Gleichung 1) anknüpfe, erlaube ich mir die folgende Notiz zu machen. Statt die Gleichung 1) durch die vereinfachende Annahme 2) zu reduzieren, wollen wir die Substitution machen:

3) $$x = z + \frac{(\alpha + 2\beta)}{3}.$$

Dies ergibt:

4) $$z^3 - 3\left\{\left(\frac{\alpha - \beta + 3\gamma}{3}\right)\left(\frac{\alpha - \beta - 3\gamma}{3}\right)\right\}z - \left\{\left(\frac{\alpha - \beta + 3\gamma}{3}\right)^3 + \left(\frac{\alpha - \beta - 3\gamma}{3}\right)^3\right\} = 0.$$

Setzt man

5) $$\frac{\alpha - \beta + 3\gamma}{3} = m \text{ und } \frac{\alpha - \beta - 3\gamma}{3} = n,$$

so ist

6) $$z^3 - 3mnz - (m^3 + n^3) = 0,$$

welche offenbar die Wurzel

7) $$z_1 = m + n = \frac{2}{3}(\alpha - \beta)$$

hat, während wieder

$$x_1 = \frac{2}{3}(\alpha - \beta) + \left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) = \alpha$$

ist. Die alten Ausgaben von Bardey's Aufgabensammlung — um 1885 bis 1890 — schreiben auf S. 305 die Auffindung der Gleichung 6) mit der rationalen Wurzel 7) Liebrecht zu. Da aber eine nähere Literaturangabe fehlt, so läßt sich nicht feststellen, ob der hier gegebene Zusammenhang zwischen der Kummerschen Arbeit und der Liebrechtschen Untersuchung den wahren Sachverhalt trifft.

III. In Beziehung auf die in I) genannte zweite Klasse von kubischen Gleichungen beschränke ich mich auf die Notiz, daß für

$$\sqrt[3]{\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma}} = m \pm \sqrt{n}$$

sein muß:

$$\begin{cases} m = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(\beta - \gamma)} \\ n = \gamma; \end{cases} \quad \text{bezw.} \quad \begin{cases} \alpha = m(m^2 + 3n) \\ \beta = 3m^2 + n \\ \gamma = n. \end{cases}$$

Zum Beispiel ist

$$\sqrt[3]{-30 + \frac{82}{9}\sqrt{3}} = \sqrt[3]{-30 + \frac{82}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} = -3 + \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$\sqrt[3]{42 + \frac{55}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{42 + \frac{11}{3}\sqrt{-\frac{25}{3}}} = -2 + \sqrt{-\frac{25}{3}}.$$

Durch solche Umformungen kann man allein mit Hilfe der Cardanischen Formel, ohne Anwendung des Moivreschen Satzes jede kubische Gleichung, die drei ganzzahlige rationale Wurzeln hat, lösen.

IV. Hat man im Unterricht die kubische Gleichung

8) $$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

gelöst, deren Wurzeln wir mit e_1, e_2, e_3 bezeichnen wollen, wo natürlich

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

ist, und wünscht man Uebungsaufgaben zur Hand zu haben, die, wenn die reellen bezw. komplexen Größen e_1, e_2, e_3 Wurzelgrößen enthalten sollten, möglichst dieselben Irrationalitäten in ihren Wurzeln besitzen, so leistet dies die Gleichung

9) $$4\sigma^3 - G_2\sigma - G_3 = 0,$$

wo

$$10)\quad \begin{aligned} G_2 &= g_2 s^2 + 3 g_3 s + \frac{1}{12} g_2^2, \\ G_3 &= g_3 s^3 + \frac{1}{6} g_2^2 s^2 + \frac{1}{4} g_2 g_3 s + \frac{1}{216}(54 g_3^2 - g_2^3) \end{aligned}$$

und s ein reeller Zahlenparameter bedeutet. Sie ist mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von s ein wahres Füllhorn von Uebungsbeispielen, während ihre Wurzeln sehr einfach lauten:

$$11)\quad \begin{aligned} E_1 &= e_1 s + e_2 e_3 + \frac{g_2}{12}, \\ E_2 &= e_2 s + e_3 e_1 + \frac{g_2}{12}, \\ E_3 &= e_3 s + e_1 e_2 + \frac{g_2}{12}; \end{aligned}$$

sie werden in dem besonderen Falle $s = e_1, e_2, e_3$ zu je zweien einander gleich. Eine das Gebiet der elliptischen Funktionen betreffende Untersuchung führte mich auf die Gleichungen 9) bis 11). (Vergl. Haentzschel, Ueber eine von Hermite herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstraßsche Normalform. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 135, S. 75 bis 80. Berlin 1908, Georg Reimer). Sie führen, wenn e_1, e_2, e_3 und s ganzzahlig sind und g_2 durch 12 teilbar ist, auf Scharen von kubischen Gleichungen mit ganzzahligen Wurzeln und bilden demnach ein Analogon zu den diophantischen Gleichungen.

Die Fortsetzung der Funktionen $e_2'(x)$ und $e_2''(x)$.

Von Paul Richert (Berlin).

Bekanntlich bestehen zwischen den Funktionswerten $\sin(2\pi n + x)$ und $\sin x$, sowie $\cos(2n\pi + x)$ und $\cos x$ die Beziehungen

$$1)\quad \left| \begin{aligned} \sin(2n\pi + x) &= \sin x, \\ \cos(2n\pi + x) &= \cos x. \end{aligned} \right|$$

Dieselben können als spezielle Fälle eines allgemeineren Satzes betrachtet werden, aus welchem die Gleichungen 1) entspringen, wenn man sich die rechten Seiten mit einem ganzen rationalen Koeffizienten g_1 bezw. g_2 multipliziert denkt und diesen gleich $+1$ bezw. gleich 0 setzt. Dieser allgemeinere Satz tritt hervor, wenn man die Additionstheoreme der als Exponentialfunktionen zweiten Grades bezeichneten Reihen

$$2)\quad e_2'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$3)\quad e_2''(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

betrachtet. Jene Additionstheoreme lauten ja, wie ich bereits an anderer Stelle gezeigt habe,*)

$$4)\quad \begin{cases} e_2'(x+y) = e_2'(x)\, e_2''(y) + e_2'(y)\, e_2''(x) \\ e_2''(x+y) = e_2'(x)\, e_2'(y) + e_2''(x)\, e_2''(y). \end{cases}$$

Da nun die Funktion 2) für alle reellen endlichen Werte von x selber endlich und stetig ist und alle Werte zwischen $(-\infty)$ bis $(+\infty)$ annimmt, so muß es auch einen gewissen Wert für x geben, für welchen $e_2'(x) = 1$ wird. Nenne ich diesen Wert $\varkappa$, so gilt also die Gleichung $e_2'(\varkappa) = 1$ und, da $e_2''^2(x) - e_2'^2(x) = 1$ ist, auch $e_2''(\varkappa) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Mit Benutzung dieser beiden Gleichungen wird das System 4) zu

$$5)\quad \begin{cases} e_2'(\varkappa + x) = \sqrt{2}\, e_2'(x) + e_2''(x) \\ e_2''(\varkappa + x) = \sqrt{2}\, e_2''(x) + e_2'(x), \end{cases}$$

wenn man darin $y = \varkappa$ setzt. Es gilt für jeden reellen Wert von x und gibt schon in dieser Form ein Mittel an die Hand, die Funktionswerte von $e_2'(x)$ und $e_2''(x)$ für alle über $\varkappa$ hinausliegenden Werte des Argumentes x zu berechnen. Aber diese Gleichungen haben die Unbequemlichkeit, daß der Irrationalfaktor $\sqrt{2}$ darin vorkommt. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Irrationalität sich beseitigen läßt.

Setzt man nämlich in System 5) $x = \varkappa + x_1$, so wird es zu

$$6)\quad \begin{cases} e_2'(2\varkappa + x_1) = \sqrt{2}\, e_2'(\varkappa + x_1) + e_2''(\varkappa + x_1) \\ e_2''(2\varkappa + x_1) = \sqrt{2}\, e_2''(\varkappa + x_1) + e_2'(\varkappa + x_1) \end{cases}$$

und, wenn man hier die Glieder auf der rechten Seite mit Hilfe des Systems 5), in welchem man x durch x_1 ersetzt, reduziert, zu

$$\begin{cases} e_2'(2\varkappa + x_1) = 2 e_2'(x_1) + \sqrt{2}\, e_2''(x_1) + \sqrt{2}\, e_2''(x_1) + e_2'(x_1) \\ e_2''(2\varkappa + x_1) = 2 e_2''(x_1) + \sqrt{2}\, e_2'(x_1) + \sqrt{2}\, e_2'(x_1) + e_2''(x_1) \end{cases}$$

oder zu

$$7)\quad \begin{cases} e_2'(2\varkappa + x_1) = 3 e_2'(x_1) + 2\sqrt{2}\, e_2''(x_1) \\ e_2''(2\varkappa + x_1) = 3 e_2''(x_1) + 2\sqrt{2}\, e_2'(x_1). \end{cases}$$

Aus System 5) folgt aber auch das neue System

$$8)\quad \begin{cases} 2\sqrt{2}\, e_2'(x_1) = 2 e_2'(x_1 + \varkappa) - 2 e_2''(x_1) \\ 2\sqrt{2}\, e_2''(x_1) = 2 e_2''(\varkappa + x_1) - 2 e_2'(x_1). \end{cases}$$

Benutzt man dieses, um die zweiten Glieder auf den rechten Seiten von 7) durch die ganzen rechten Seiten von 8) zu ersetzen, so entsteht aus 7):

$$\begin{cases} e_2'(2\varkappa + x_1) = 3 e_2'(x_1) + 2 e_2''(\varkappa + x_1) - 2 e_2'(x_1) \\ e_2''(2\varkappa + x_1) = 3 e_2''(x_1) + 2 e_2'(\varkappa + x_1) - 2 e_2''(x_1) \end{cases}$$

oder kürzer:

$$9)\quad \begin{cases} e_2'(2\varkappa + x_1) = e_2'(x_1) + 2 e_2''(\varkappa + x_1) \\ e_2''(2\varkappa + x_1) = e_2''(x_1) + 2 e_2'(\varkappa + x_1). \end{cases}$$

Hier fehlt nun schon jede Irrationalität. Aber es kommen noch in jeder der beiden Gleichungen beide Funktionen vor.

Nunmehr setze man in 9) $x_1 = \varkappa + x_2$, so wird

$$\begin{cases} e_2'(3\varkappa + x_2) = e_2'(\varkappa + x_2) + 2 e_2''(2\varkappa + x_2) \\ e_2''(3\varkappa + x_2) = e_2''(\varkappa + x_2) + 2 e_2'(2\varkappa + x_2) \end{cases}$$

und, wenn man rechts für $e_2'(2\varkappa + x_2)$ und $e_2''(2\varkappa + x_2)$ die aus 9) folgenden Werte einsetzt und zugleich x_1 durch x_2 ersetzt,

$$\begin{cases} e_2'(3\varkappa + x_2) = e_2'(\varkappa + x_2) + 2 e_2''(x_2) + 4 e_2'(\varkappa + x_2) \\ e_2''(3\varkappa + x_2) = e_2''(\varkappa + x_2) + 2 e_2'(x_2) + 4 e_2''(\varkappa + x_2) \end{cases}$$

oder

$$10)\quad \begin{cases} e_2'(3\varkappa + x_2) = 5 e_2'(\varkappa + x_2) + 2 e_2''(x_2) \\ e_2''(3\varkappa + x_2) = 5 e_2''(\varkappa + x_2) + 2 e_2'(x_2) \end{cases}$$

und, wenn man in 10) endlich nochmals $x_2 = \varkappa + x_3$ setzt,

$$\begin{cases} e_2'(4\varkappa + x_3) = 5 e_2'(2\varkappa + x_3) + 2 e_2''(\varkappa + x_3) \\ e_2''(4\varkappa + x_3) = 5 e_2''(2\varkappa + x_3) + 2 e_2'(\varkappa + x_3) \end{cases}$$

und hierin statt $2 e_2'(\varkappa + x_3)$ und $2 e_2''(\varkappa + x_3)$ die aus 9) folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} 2 e_2''(\varkappa + x_3) = e_2'(2\varkappa + x_3) - e_2'(x_3) \\ 2 e_2'(\varkappa + x_3) = e_2''(2\varkappa + x_3) - e_2''(x_3) \end{cases}$$

benutzt:

$$\begin{cases} e_2'(4\varkappa + x_3) = 5 e_2'(2\varkappa + x_3) + e_2'(2\varkappa + x_3) - e_2'(x_3) \\ e_2''(4\varkappa + x_3) = 5 e_2''(2\varkappa + x_3) + e_2''(2\varkappa + x_3) - e_2''(x_3) \end{cases}$$

oder einfacher und unter gleichzeitiger Weglassung des Index von x

$$11)\quad \begin{cases} e_2'(4\varkappa + x) = 6 e_2'(2\varkappa + x) - e_2'(x) \\ e_2''(4\varkappa + x) = 6 e_2''(2\varkappa + x) - e_2''(x). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen liefern uns eine höchst einfache Beziehung zwischen Funktionswerten für solche Argumente, die sich um ein gerades Vielfaches der Konstanten $\varkappa$ unterscheiden. Sie enthalten nur noch Funktionen einer Art und entbehren jeder Irrationalität. Ihre große Wichtigkeit für die Berechnung dieser Funktionen liegt auf der Hand. Der hierin liegende Satz kann folgendermaßen in Worte gekleidet werden:

---

*) Osterprogrammbeilage der III. Realschule. Berlin 1907. § 69.

„Ist $\varkappa$ dasjenige Argument, für „welches $c_2'(x) = 1$ wird, so lassen sich „die Funktionswerte $c_2'(x)$ und $c_2''(x)$ „für solche Werte von x, welche größer „als $4\varkappa$ sind, rational durch die Funk„tionswerte von solchen Argumenten „ausdrücken, welche um ein gerades „Vielfaches von $\varkappa$ kleiner sind."

Die vorangegangenen Formeln geben ein bequemes Mittel an die Hand, die Werte beider Funktionen für ein genaues Vielfaches von $\varkappa$ zu berechnen. Wir brauchen in unseren Formeln nur überall $x = 0$ zu setzen. Alsdann ist zunächst ja $c_2'(\varkappa) = 1$, $c_2''(\varkappa) = \sqrt{2}$. Aus 6) folgt für $x_1 = 0 : c_2'(2\varkappa) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ und $c_2''(2\varkappa) = \sqrt{2}\sqrt{2} + 1 = 3$; ferner gehen aus 10) für $x_2 = 0$ die Werte $c_3'(3\varkappa) = 5 + 2 = 7$ und $c_3''(3\varkappa) = 5\sqrt{2}$ hervor und aus 11) für $x = 0$ die Werte $c_2'(4\varkappa) = 6\,c_2'(2\varkappa) = 12\sqrt{2}$ und

$$c_2''(4\varkappa) = 6\,c_2''(2\varkappa) - c_2''(0) = 18 - 1 = 17.$$

Stellen wir diese Werte übersichtlich zusammen, so ist

$$c_2'(\varkappa) = 1,\ c_2'(2\varkappa) = 2\sqrt{2},\ c_2'(3\varkappa) = 7,\ c_2'(4\varkappa) = 12\sqrt{2}$$
$$c_2''(\varkappa) = \sqrt{2},\ c_2''(2\varkappa) = 3,\quad c_2''(3\varkappa) = 5\sqrt{2},\ c_2''(4\varkappa) = 17$$

Fährt man nun unter fortwährender Anwendung der Gleichungen 11) so fort, indem man sukzessive $x = \varkappa + x'$ setzt, so erhält man folgendes System von Funktionswerten:

$c_2'(\varkappa) = 1$	$c_2''(\varkappa) = \sqrt{2}$
$c_2'(2\varkappa) = 2\sqrt{2}$	$c_2''(2\varkappa) = 3$
$c_2'(3\varkappa) = 7$	$c_2''(3\varkappa) = 5\sqrt{2}$
$c_2'(4\varkappa) = 12\sqrt{2}$	$c_2''(4\varkappa) = 17$
$c_2'(5\varkappa) = 41$	$c_2''(5\varkappa) = 29\sqrt{2}$
$c_2'(6\varkappa) = 70\sqrt{2}$	$c_2''(6\varkappa) = 99$
$c_2'(7\varkappa) = 239$	$c_2''(7\varkappa) = 169\sqrt{2}$
$c_2'(8\varkappa) = 408\sqrt{2}$	$c_2''(8\varkappa) = 577$
$c_2'(9\varkappa) = 1393$	$c_2''(9\varkappa) = 985\sqrt{2}$
$c_2'(10\varkappa) = 2378\sqrt{2}$	$c_2''(10\varkappa) = 3363$

Man sieht, daß von zwei aufeinander folgenden Funktionswerten derselben Funktion immer der eine rational und der andere durch den Faktor $\sqrt{2}$ irrational ist. Ist ferner die eine Funktion rational, so ist die andere Funktion desselben Argumentes durch den Faktor $\sqrt{2}$ irrational. Quadriert man endlich zwei Funktionswerte desselben Argumentes, so erhält man stets zwei nur um eine Einheit differierende Zahlen derart, daß die eine ein Quadrat, die andere das Doppelte eines Quadrates ist.

Neue Lehrsätze zur elementaren Dreiecksgeometrie.

Von Dr. Richard Schröder (Gr.-Lichterfelde).

Zunächst spreche ich den Herren, welche mich darauf aufmerksam gemacht haben, daß Satz VI[1] aus meinem in der vorigen Nummer mitgeteilten Artikel schon anderwärts abgedruckt ist, auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus. Sodann erlaube ich mir, mit dem gleichen Vorbehalt und derselben Bitte die folgenden Sätze vorzulegen:

I. Verbindet man in einem beliebigen Dreieck die drei Berührungspunkte des Inkreises untereinander, und ebenfalls die drei auf den Seiten selbst liegenden Berührungspunkte der Ankreise untereinander, so sind die beiden entstandenen Dreiecke flächengleich.

II. Der Inhalt eines beliebigen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen den Inhalten des aus den Berührungspunkten des Inkreises und des aus den Mittelpunkten der Ankreise gebildeten Dreiecks.

III. Konstruiert man zu je zwei Ankreisen eines Dreiecks die äußeren gemeinsamen Tangenten, so bilden sie ein Dreieck, welches außer anderen folgende interessante Eigenschaften besitzt. (Das gegebene Urdreieck und zugleich sein Inhalt soll mit $\triangle$, seine Stücke mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', r, 2s = a + b + c$, das ihm zugehörige Höhenfußpunktdreieck mit H, das Dreieck aus den Mittelpunkten der Ankreise mit E, das Dreieck aus den äußeren gemeinsamen Tangenten mit G bezeichnet werden).

A. Lagebeziehungen: 1. Die Dreiecke $\triangle$ und E liegen perspektiv, ebenso E und G, ebenso G und $\triangle$. Die Perspektivitätszentra liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Verbindungsgeraden der Umkreismittelpunkte von $\triangle$, E und G.

2. Der Inkreis von G und der Umkreis von E liegen konzentrisch.

3. Dreieck G ist ähnlich und liegt ähnlich dem Dreieck H.

B. Größenbeziehungen: 1. Die Winkel von G sind nach A, 3 die Supplemente zu 2α, 2β, 2γ.

2. Der Inkreisradius P von G ist gleich der halben Summe der Berührungsradien von $\triangle$, also

$$P = \frac{\varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \varrho}{2} = 2r + \varrho.$$

3. Hieraus folgen sofort für die Seiten, den Umkreisradius, den Inhalt und den Umfang von G die Formeln:

$$\frac{(2r+\varrho)\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma},\ \frac{2r+\varrho}{4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ (2r+\varrho)^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$
$$2(2r+\varrho)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

4. Die drei inneren gemeinsamen Tangenten der Ankreise von $\triangle$ sind, soweit sie zwischen den Seiten von G liegen, einander gleich und zwar ist jede gleich $2s$, und jede wird durch den auf der betreffenden Seite von $\triangle$ senkrechtstehenden Ankreisradius halbiert.

5. Je zwei dieser inneren Tangenten bilden mit einer Seite von G ein Dreieck, welches dem Dreieck $\triangle$ kongruent ist.

C. Spezialisierungen: 1. Ist $\triangle$ rechtwinklig, so laufen zwei der äußeren gemeinsamen Tangenten parallel; es gibt in diesem Falle kein Dreieck G, wie es auch kein Dreieck H gibt: während letzteres unendlich klein wird, wird ersteres unendlich groß.

2. Ist $\triangle$ gleichseitig, so sind auch H, E, G gleichseitig. Alle homologen Strecken (Seiten, Radien, Umfänge) in H, $\triangle$, E und G verhalten sich wie $1:2:4:10$. Der Inhalt von G ist hundertmal so groß wie der Inhalt von H.

D. Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck mit den Winkeln A, B, C sollen ein zweites Dreieck und 3 Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder dieser Kreise die 3 Seiten des zweiten und 2 Seiten des gegebenen Dreiecks berührt.

Lösung: Konstruiere Inkreiszentrum, Inkreisradius P und die Strecke

$$\frac{P}{1 + 2\sin\frac{A+B}{4}\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}}.$$

Schlage mit dieser Strecke als Radius um das Inkreiszentrum den Kreis, dessen Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden die Mittelpunkte der gesuchten Kreise und damit alles Weitere geben.

Beweis einiger Sätze über die von den Zentralen der Dreieckskreise gebildeten Flächenstücke.

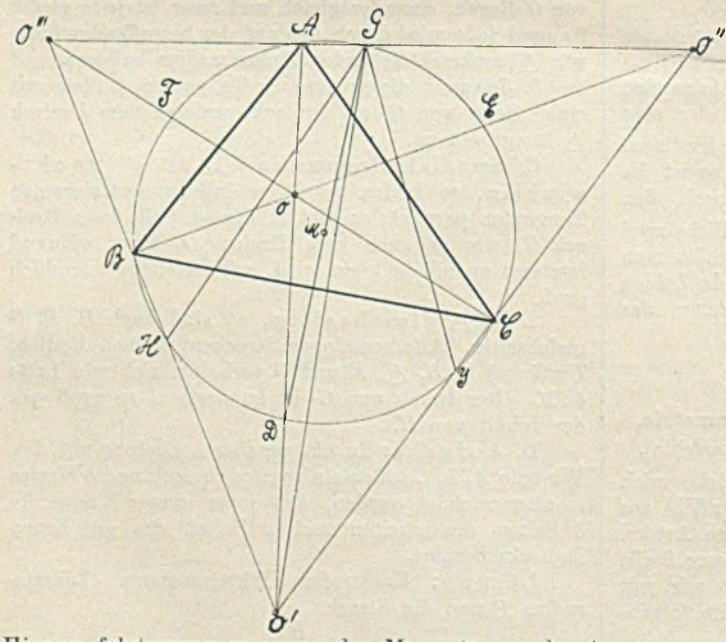
Von F. Weiß (Groß Lichterfelde).

Bezugnehmend auf die in der vorigen Nummer*) von Herrn Dr. Schröder angegebenen Sätze aus der Dreiecksgeometrie gebe ich in Folgendem einen einfachen Beweis der wichtigsten von ihnen und zugleich eine mechanische Interpretation derselben.

Es seien in der Figur O der Mittelpunkt des Inkreises, O', O'' O''' die Mittelpunkte der Ankreise, M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Der Umkreis ist dann der Feuerbachsche Kreis für das Dreieck O' O'' O'''. D, E, F, G, H, J seien bezw. die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte und der Seiten von O' O'' O'''.

Ich denke mir dann in O' die drei Kräfte $O'O$, $O'O''$, $O'O'''$ angreifend und betrachte statt ihrer zunächst die ihnen proportionalen und gleichgerichteten $O'D$, $O'J$, $O'H$. Dann setze ich $O'J$ und $O'H$ zusammen. Dann ist, da $HGJO'$ ein Parallelogramm ist, offenbar GO' ihre Resultante. Nun liegt M auf DG, da DG Durchmesser des Umkreises ist, weil $\sphericalangle DAG = 1R$. Wenn ich also jetzt weiter $O'D$ und $O'G$ zusammensetzte, so ginge die Resultante dieser beiden Kräfte durch M, da M der Schnittpunkt der Diagonalen des entstehenden Kräfteparallelogramms wäre. Da aber die Resultante der drei Kräfte durch M geht, so ist die Summe ihrer Momente in bezug auf M Null, also auch die entsprechende Summe für die Kräfte $O'O$, $O'O''$, $O'O'''$ gleich Null. Seien diese Kräfte P_1, P_2 P_3 und die von M auf ihre Richtungen gefällten Lote p_1, p_2, p_3, so ist mit Rücksicht auf den Drehungssinn der Kräfte

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 + P_3 p_3 = 0.$$



Hieraus folgt, wenn man von den Momenten zu den Dreiecken übergeht, die erste der Gleichungen IV des genannten Artikels in der Form

$$\varepsilon' + \eta' - \eta''' = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man die beiden anderen Gleichungen IV in der Form

$$-\varepsilon'' - \eta' + \eta''' = 0$$
$$\varepsilon''' + \eta' - \eta'' = 0.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich dann V

$$\varepsilon' - \varepsilon'' + \varepsilon''' = 0.$$

Diese Gleichung kann man auch unmittelbar erhalten, indem man OO', OO'' OO''' als Kräfte ansieht, die in O angreifen und in ähnlicher Weise verfährt wie oben.

Nimmt man nun zu den drei ersten Gleichungen die unmittelbar aus der Figur abzulesenden

$$E = E' + E'' + E''', \quad \eta' = \varepsilon'' + \varepsilon''' + E',$$
$$E''' = \varepsilon' + \varepsilon'' + \eta''', \quad E'' = \varepsilon''' - \varepsilon' + \eta''$$

hinzu, so kann man sämtliche Beziehungen zwischen den E, ε, η des erwähnten Artikels erhalten. Es ergibt sich z. B.

$$E' + E''' = \eta' - \varepsilon'' - \varepsilon''' + \varepsilon' + \varepsilon'' + \eta''' = \eta' + \eta''' + \varepsilon' - \varepsilon'''$$
$$= \eta' + \eta''' + \eta''' - \eta'' + \eta' - \eta''' = 2(\eta' + \eta''' - \eta'').$$

Die oben bewiesenen ersten drei Gleichungen bilden also die Grundlage für alle übrigen.

*) S. Unt.-Bl. XV, 1, S. 4.

Die Behandlung der stereographischen Polarprojektion mit elementaren Sätzen der Geometrie und Stereometrie (in den Oberklassen höherer Schulen).

Von Dr. P. Haß (Hamburg).

A) Die stereographische Polarprojektion ist „winkeltreu".

1. Wesen der „stereographischen Polarprojektion".

Man denke sich einen Erd- oder Himmelsglobus mit seinem Südpol auf den Tisch gelegt und seine sämtlichen Punkte vom Nordpol aus auf die Ebene des Tisches projiziert. Es sei etwa der Globus aus Glas. Eine im Nordpol angebrachte punktförmige Lichtquelle würde dann jede auf der Glaskugel befindliche Zeichnung als Schattenbild auf den Tisch werfen. Jedem Punkt der Kugel entspricht ein Punkt der Projektionsebene, nur dem Nordpol entspricht ein Kreis um den Südpol mit unendlich großem Radius. Den Meridianen sowie allen irgendwie durch den Nordpol gehenden Kreisen entsprechen gerade Linien. Die den Meridianen entsprechenden Geraden gehen strahlenförmig vom Südpol aus.

2. Begriff des Winkels α, unter dem sich zwei beliebige Linien auf der Kugel schneiden.

Irgend zwei Linien a und b auf der Oberfläche des Globus mögen sich im Punkte P schneiden. In diesem Punkte lege man zwei Tangenten an die Kugel, welche gleichzeitig je eine der Linien a und b in P berühren. Diese Tangenten mögen miteinander den Winkel α bilden. Dann sagt man: „a und b schneiden sich im Punkte P unter dem Winkel α".

Definition: Schneiden sich irgend zwei Linien im Raum in einem Punkte C, und bilden die Tangenten an die Linien in diesem Punkte miteinander den Winkel α, so sagt man: „Die beiden Linien schneiden sich in P unter dem Winkel α".

3. Jeden der dreifach unendlich vielen Winkel α (auf dem Globus) kann man vom Nordpol der Kugel aus messen.

a) Hilfssatz: Wenn sich zwei Kreise im Raum in zwei Punkten A und B treffen, so schneiden sie sich in beiden Punkten unter ein und demselben

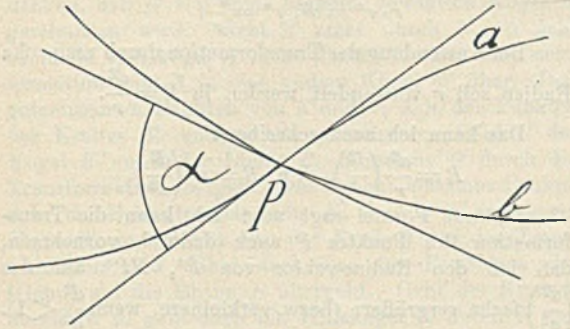


Fig. 1.

Winkel (d. h. definitionsgemäß, die Tangenten an die beiden Kreise in A bilden miteinander denselben Winkel wie die entsprechenden Tangenten in B.)

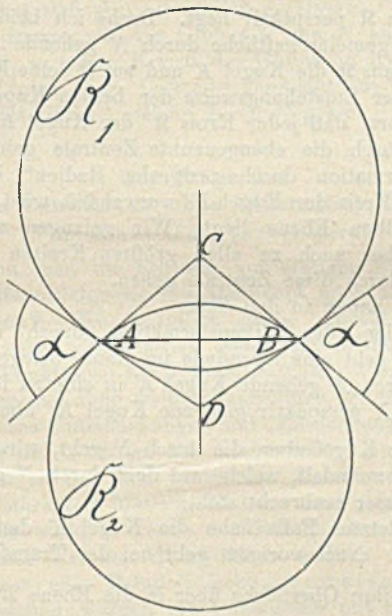


Fig. 2.

Liegen die beiden Kreise in ein und derselben Ebene, so erkennt man die Richtigkeit des Satzes sofort und man kann den Beweis jedem einzelnen überlassen.

Dreht man nun den einen der beiden Kreise, z. B. $\mathfrak{K}_1$, um die Linie AB, so wird die entstehende räumliche Figur durchaus symmetrisch zu einer Ebene durch CD senkrecht zu AB. Dann müssen auch die Winkel zwischen CB und DB einerseits, CA und DA andererseits gleich sein.

(Beweise durch derartige Symmetriebetrachtungen werden jetzt an unseren Schulen schon vielfach für legitim angesehen. Wem sie nicht streng genug erscheinen, der möge sie durch die üblichen Deduktionen aus der elementaren Stereometrie ersetzen.)

b) Uebertragung des Winkels α zwischen zwei sich in P schneidenden Linien a und b des Globus nach dem Nordpol N.

Lege an a und b in P die beiden Kugeltangenten. Durch je eine der letzteren und den Pol lege man eine Ebene. Dieselben schneiden die Kugel in zwei durch N (und P) gehenden Kreisen. Legt man in N die Tangenten an beide Kreise, so bilden dieselben nach unserem Hilfssatz miteinander den Winkel α.

Es ist hiermit zugleich ein Verfahren gegeben, nach welchem man den Winkel zwischen zwei sich in einem Punkte der Kugeloberfläche schneidenden Linien der Kugel am Nordpol N messen kann.

4. Die stereographischen Polarprojektionen zweier sich in P schneidenden Linien der Kugeloberfläche schneiden sich unter demselben Winkel (α) wie die Linien auf der Kugel selbst.

Beweis: Man übertrage den Winkel in der unter 3b angegebenen Weise nach dem Pol. Dadurch erhält man zwei Tangenten am Pol, die miteinander den Winkel α bilden. Bei dieser Uebertragung wurden zwei Ebenen verwendet (vergl. 3b). Sie gehen durch N und enthalten die Kugeltangenten in P. Daher liegen auch die Projektionen dieser beiden Kugeltangenten in den beiden Hilfsebenen. Diese Projektionen sind folglich die Schnittlinien beider Hilfsebenen mit der Projektionsebene und sind daher parallel zu den Tangenten in N. Die Projektionen der Tangenten in P bilden also miteinander denselben Winkel α wie die Tangenten in P selbst. Die beiden sich in P schneidenden Linien auf der Kugel mögen a und b heißen, die Projektionen derselben a' und b'. Letztere schneiden sich in einem Punkte P', der gleichzeitig die Projektion von P ist. Die Projektionen der Tangenten in P schneiden sich ebenfalls in P' und sind Tangenten an a' und b'. Da diese beiden Tangenten sich in P' unter dem Winkel α schneiden, so kann man auch sagen: die Projektionen a' und b' der Linien a und b auf der Kugel schneiden sich im Punkte P' unter dem Winkel α, d. h. unter demselben Winkel wie a und b im Punkte P.

Damit ist der eben angekündigte Satz bewiesen. („Winkeltreue oder konforme Abbildung".)

B) Irgendwelchen Kreisen auf der Kugel entsprechen Kreise bezw. gerade Linien in der Projektionsebene.

1. Beziehung des vom Nordpol aus gerechneten Radius-vektor eines Kugelpunkts zum Radius-vektor seiner Projektion.

Man lege durch den Punkt P der Kugel, durch den Nord- und durch den Südpol eine Ebene. Diese schneidet die Projektionsebene in einer Geraden durch den Südpol. Auf der letzten Linie (SP') liegt P', die Projektion von P.

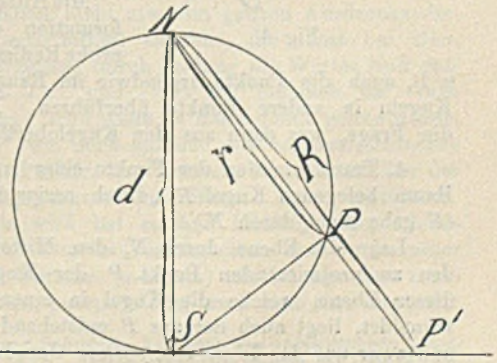


Fig. 3.

d Durchmesser des Globus
NP Radius-vektor von $P = r$
NP' Radius-vektor von $P' = R$
SP Höhe im rechtwinkligen Dreieck NSP'.
Nach einem elementaren Satz ist

$$(NS)^2 = (NP) \cdot (NP'), \text{ d. h.}$$
$$r \cdot R = d^2$$

oder

$$R = \frac{d^2}{r}.$$

2. „Transformation durch reziproke Radien".

Durch unsere Projektion wurde die Oberfläche des Globus verwandelt in die Projektionsebene. Jeder Punkt der Kugel wurde in einen Punkt der Projektionsebene übergeführt. Infolge der letzten Gleichung kann man diese Ueberführung eines Kugelpunktes auch dadurch hervorgebracht denken, daß man seinen Radius-vektor r durch das d^2fache seines reziproken Wertes ersetzt hat. Man hat für diese zweite Art der Ueberführung — oder Transformation — ganz passend den Namen „Transformation durch reziproke Radien" eingeführt. Mit Hilfe dieses Begriffs können wir nun kurz sagen: die stereographische Polarprojektion der Kugel kann man mittels „Transformation durch reziproke Radien" vollziehen.

3. Nutzen der Transformation durch reziproke Radien.

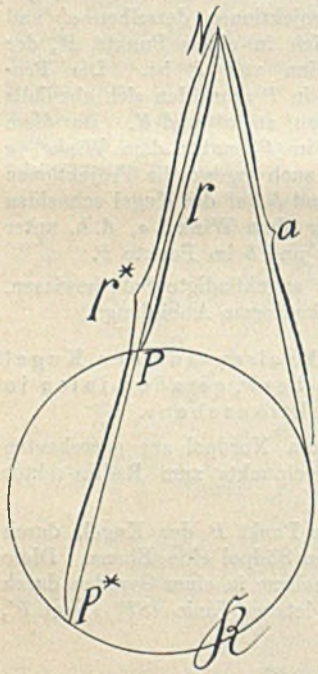


Fig. 4.

Bei der einfachen Projektion wurden in andere Punkte nur solche Punkte des Raumes übergeführt, die auf der Oberfläche des Globus liegen. Die Gesamtheit der entstehenden Punkte bildete die Projektionsebene. Vermittels der „Transformation durch reziproke Radien" kann man jeden Punkt des Raumes in einen andern überführen. Die Transformation leistet also mehr als die Projektion und letztere kann auch durch sie ersetzt werden. Der Begriff der „stereographischen Polarprojektion" ist in dem der „Transformation durch reziproke Radien" enthalten.

Mit Hilfe der „Transformation durch reziproke Radien" kann man z. B. auch die Punkte irgendwie im Raum belegener Kugeln in andere Punkte überführen. Es entsteht die Frage, was dann aus den Kugeloberflächen wird.

4. Transformation der Punkte einer irgendwie im Raum belegenen Kugel K „durch reziproke Radien". (K gehe nicht durch N.)

Lege die Ebene durch N, den Mittelpunkt und den zu projizierenden Punkt P der Kugel K. In dieser Ebene, welche die Kugel in einem Kreise $\mathfrak{K}$ schneidet, liegt auch der aus P entstehende Punkt P' und zwar auf der Linie NP. Diese Gerade schneidet den Kreis $\mathfrak{K}$ noch einmal in einem Punkte P^*.

Es sei $NP = r$, $NP^* = r^*$. Die Tangente von N aus an $\mathfrak{K}$ habe die Länge a. Dann haben wir nach einem elementaren Satz:

$$r \cdot r^* = a^2, \; r^* = \frac{a^2}{r}.$$

Bei Anwendung der Transformation durch reziproke Radien soll r verwandelt werden in $R = \frac{d^2}{r}$.

Das kann ich auch schreiben:

$$R = \frac{a^2}{r}\left(\frac{d^2}{a^2}\right), \text{ d. h. } R = r^*\left(\frac{d^2}{a^2}\right).$$

Letztere Formel sagt aus: Ich kann die Transformation des Punktes P auch dadurch vornehmen, daß ich den Radius-vektor von P^*, NP^* auf das $\left(\frac{d^2}{a^2}\right)$ fache vergrößere (bezw. verkleinere, wenn $\frac{d^2}{a^2} < 1$). Lasse ich P auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ wandern und führe die Transformation aus durch jeweilige Vergrößerung (bezw. Verkleinerung) auf das $\left(\frac{d^2}{a^2}\right)$ fache des Radius-vektor NP^*,†) so erhalte ich einen Kreis $\mathfrak{K}'$, der in bezug auf N zu $\mathfrak{K}$ perspektiv liegt. Drehe ich beide Kreise um ihre gemeinschaftliche durch N gehende Zentrale, so wird aus $\mathfrak{K}$ die Kugel K und aus $\mathfrak{K}'$ eine Kugel K'. Aus dieser Entstehungsweise der beiden Kugeln sieht man sofort, daß jeder Kreis $\mathfrak{K}$ der Kugel K, dessen Ebene durch die ebengenannte Zentrale geht, durch „Transformation durch reziproke Radien" in einen größten Kreis der Kugel K' verwandelt wird, welcher in derselben Ebene liegt. Wir gelangen auf diese Weise aber auch zu allen größten Kreisen von K', welche durch diese Zentrale gehen.

Wir haben so den Satz:

Infolge der „Transformation durch reziproke Radien" geht eine irgendwie im Raum belegene, aber nicht durch N gehende Kugel K in eine zu ihr in bezug auf N perspektiv gelegene Kugel K' über.

Jede Kugel aber, die durch N geht, wird in eine Ebene verwandelt, welche auf dem durch N gehenden Durchmesser senkrecht steht.

Im letzten Falle habe die Kugel K den Durchmesser δ. Nach vorigem geht bei der Transformation $R' = \frac{\delta^2}{r}$ ihre Oberfläche über in die Ebene B', welche K in dem zu N diametralen Punkte berührt. Aus der Transformation $R' = \frac{\delta^2}{r}$ kann ich aber die verlangte Transformation $R = \frac{d^2}{r}$ herstellen, indem ich jeden Radius-vektor $R' = \frac{\delta^2}{r}$ eines Punktes von B' auf das $\left(\frac{d^2}{\delta^2}\right)$ fache vergrößere (bezw. verkleinere). Dadurch geht aber die Ebene B' nur in eine andere zu ihr parallele Ebene B über, die dann auf dem durch N gehenden Durchmesser von K senkrecht steht.

5. Bei der stereographischen Polarprojektion gehen Kreise unseres Globus in Kreise bezw. Gerade der Projektionsebene über.

Statt die Oberfläche des Globus G auf die berührende Projektionsebene B zu projizieren, kann ich sie auch vermittels der „Transformation durch reziproke

†) Mit P wandert natürlich auch der Punkt P^* auf dem Kreise $\mathfrak{K}$.

Radien" $R = \frac{d^2}{r}$ in die Ebene B überführen. Irgend einen Kreis $\mathfrak{K}$ auf G kann ich mir dadurch entstanden denken, daß G von einer passend gewählten Kugel K geschnitten wird. Geht $\mathfrak{K}$ nicht durch N, so geht auch die Hilfskugel K nicht durch N. Bei der Transformation geht K in eine andere Kugel K' über. Den gemeinsamen Punkten von K und G, d. h. den Punkten des Kreises $\mathfrak{K}$ entsprechen gemeinsame Punkte der Kugel K' und der Ebene B, in welche G durch die Transformation übergeht. Der Ort gemeinsamer Punkte, d. h. der Schnittpunkte von K' und B aber ist ein Kreis $\mathfrak{K}'$, in welchen also der Kreis $\mathfrak{K}$ bei der Transformation und daher auch bei der Projektion des Globus auf die Ebene B übergeht. Geht der Kreis $\mathfrak{K}$ durch N, so geht auch die Hilfskugel K durch N und wird — s. o. — durch die Transformation übergeführt in eine Ebene. Diese schneidet B in einer Geraden g, d. h. der Kreis $\mathfrak{K}$ geht bei der Transformation und auch bei der Projektion in eine Gerade über (vergl. die Meridiane).

Es hat sich also tatsächlich ergeben:

Projizieren wir den Globus G von N aus auf die Ebene B, so gehen Kreise des Globus in Kreise oder gerade Linien über. Letzteres geschieht nur für solche Kreise des Globus, welche durch N gehen.

Zur Frage der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten.

Von Kurt Geißler (Luzern).

Kann man die Existenz von stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten überhaupt noch als fraglich bezeichnen? Eine ziemlich große Anzahl heutiger Mathematiker würde lachen, wenn jemand die Existenz solcher Funktionen heute noch abstritte, von dem betreffenden gar ohne weiteres annehmen, er müsse von den neueren Untersuchungen und „Entdeckungen" hierüber gar nichts wissen, also mathematisch „ungebildet" sein, oder sie gar nicht verstehen. Dasselbe würde oft in noch stärkerem Maße geschehen, wenn jemand noch behaupten wolle, er könne den Euklidischen Satz, daß es zu einer Geraden durch einen endlich entfernten Punkt nur eine Parallele gebe, beweisen. Auch einem solchen würden sie Unkenntnis mit den nichteuklidischen Geometrieen usw. vorwerfen. Es kommt bei letzterem natürlich darauf an, was man unter Beweisen versteht; man würde wohl zugeben, daß es ein Beweisen sei, falls man die Tatsache einer Parallelen folgern könne aus anderen Grundeigenschaften ohne Hinzunahme einer besonderen Grundeigenschaft, eines besonderen Axiomes des Raumes. Ich würde einem Lachen in letzterer Frage nicht zustimmen. Ich würde auch für nötig halten, bei der Behauptung der Existenz von stetigen Kurven ohne Differentialquotienten eine genaue Festsetzung der Bedeutung von „Existenz" zu geben, und wenn diese fehlt oder sehr angreifbar ausfällt, auch die ganze Frage noch für angreifbar erklären. Es möge mir erlaubt sein, ganz unbekümmert durch etwaiges Belächeln, hier weniges über die Fragwürdigkeit jener Funktionenlehre, jener Funktionenbehauptung oder sagen wir lieber: der Begründung einer mathematischen Vorstellung derartiger Funktionen anzuführen.*)

Bildet man aus wellenartigen Kurven durch Summation einer bestimmten endlichen Anzahl von Einzelkurven eine neue Kurve, so zeigt dieselbe kein Fehlen von Differentialquotienten, falls die Einzelkurven solche überall besaßen. Stellt man sich nun bei solchen Annäherungskurven vor, daß eine einzelne Welle steiler als vorher ansteigt und steiler abfällt (ich erinnere an die Weierstraßsche Kurve als Beispiel), so gelangt man zu dem bei Bildung des Limesbegriffes so beliebten Worte „immer mehr". Mit dem Limesbegriffe haben solche Untersuchungen regelmäßig zu tun. Ich will hier ungeniert zusetzen, daß ich der Meinung durchaus nicht zustimmen kann, es sei durch den Limesbegriff die Untersuchung über das Unendlichkleine einfach für immer abgetan und eine Frage der Richtigkeit der Limeswerte für alle Fälle gebe es gar nicht.

Man sorgt, wie man zu sagen pflegt, z. B. durch die Wahl des Produktes der in der Funktion vorkommenden Größen a und b dafür, daß beim Hinzufügen weiterer Einzelkurven der dabei immer abnehmende horizontale Abstand (Richtung der x-Achse) der beiden Scheitelpunkte schneller abnimmt als die dabei auch abnehmende Höhendifferenz (in der y-Richtung). Dann werden die Bergtallinien (Verbindungen eines Punktes, etwa x_0, y_0 mit zwei Nachbarscheiteln x', y' und x'', y'' immer steiler, es handelt sich um die Quotienten

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} \text{ und } \frac{y'' - y_0}{x'' - x_0},$$

die also immer größer werden sollen, aber die entgegengesetzten Vorzeichen besitzen. Will man nun als auch in diesem Falle unzweifelhaft richtig die Limesbegriffe bilden, so werden die Brüche zu $+\infty$ und $-\infty$, und doch soll dann genau dieselbe Stelle der Kurve betroffen sein. Man schließt, daß die beiden Werte für solche Stelle in einen zusammenfallen müßten, falls es den Differentialquotienten überhaupt gäbe, und dieser wäre dann ebenso wohl $+\infty$ wie $-\infty$, was offenbarer Unsinn sei; es gebe also keinen Differentialquotienten.

Hierbei ist eine ganze Anzahl von Voraussetzungen gemacht worden, die alle noch diskutabel sind — es handelt sich also um eine „Frage", so lange diese Diskussion nicht ganz zweifellos zugunsten jener Ansicht beendet ist. Das kann sie nur durch Annahmen und nur für die Annehmer solcher Annahmen. Zahlenmäßig wird einfach angenommen, daß es exakte Vorstellung von unendlich kleinen Größen und deren Ordnungen nicht gibt, ferner, daß das plötzliche Zusammenfallenlassen von zwei Werten in einer logischen Gedankenkette erlaubt ist, während man vorher zur Bildung der Zahlenausdrücke gerade immer das Trennen der beiden Werte nötig hatte; ferner, daß bei diesem Zusammenfallen nicht etwa im ganzen Ausdrucke diejenige Unbestimmtheit entstehe, die sonst bei allen solchen Differenzen durch Bildung des Wertes Null entsteht. Das $+\infty$ und $-\infty$ soll plötzlich für einen Punkt gelten; denn wenn es dafür nicht gelten würde, sondern für zwei noch auf der x-Achse unterschiedene Stellen oder Punkte, so würde das Zusammenfallen der beiden entgegengesetzten Werte nicht statthaben. Geometrisch wird bei solcher Bildung eines Limesbegriffes und -wertes vorausgesetzt, daß es in einer Stelle einer Geraden (x-Achse) absolut nur eine senkrechte Gerade geben könne, man sich eine unendlich

*) Näheres darüber, wie über die Frage der Parallelen, der nichteuklidischen Geometrie, der Mengenlehre usw. findet man in meiner Schrift: Moderne Verirrungen auf philosophisch-mathematischen Gebieten. Kritische und selbstgebende Untersuchungen. 160 S. Verlag Alpwacht, Ebikon bei Luzern 1909. 2 M (direkter Bezug.)

kleine Abweichung nicht vorstellen könne, daß die beiden rechtwinkligen Dreiecke nicht als Dreiecke mit einer untersinnlichen Kathete vorgestellt werden könnten, sondern daß man durchaus berechtigt sei, diese zusammenfallen zu lassen in einen Punkt. Es wird die Möglichkeit einer feineren Vorstellung, eines Festhaltens von immer weitergehenden Verkleinerungen einfach verworfen. Wenn nun aber das Problem gerade so gewählt ist, daß dabei überhaupt die Verfeinerung das Wesentliche ist und daß durch Aufgeben derselben plötzlich gewissermaßen eine Grobheit hineingebracht wird, die gar nicht zur vorher angenommenen Verfeinerung paßt? Es wird gar nicht berücksichtigt, daß man beim Zusammenfallenlassen einer in das positiv Unendliche gehenden Geraden mit einer in das negativ Unendliche gehenden eine bisherige Unterscheidung aufgibt, ebenso wie man beim Zusammenschrumpfen einer oder zweier immer kleinerer x-Strecken eine Unterscheidung plötzlich aufgibt, statt der Streckenvorstellung die Punktvorstellung einfach einsetzt. Wenn nun jemand sich freilich über das Wesen der Punktvorstellung nicht mehr den Kopf zerbrechen kann oder will, ebensowenig über das etwa versuchte Zusammenfallen von positiver Richtung und negativer Richtung, falls es sich um das Unendliche handelt, wenn er da schweigt, dann ist mit diesem Schweigen die Sache nur scheinbar zu befriedigendem Ende gebracht. Niemand kann aber widerlegen, daß bei Annahme eines Punktes, die Unterscheidung von Grenzen, von Begrenzung aufgegeben worden ist. Eine sehr kleine Strecke hat als solche Endpunkte und eine Länge; gibt man bei einer nicht mehr sinnlichen Strecke die vorgestellte Unterscheidung von Anfang und Ende auf, so wird es ein Punkt, freilich nur für die Betrachtung, bei der man jene untersinnlichen Unterscheidungen aufgeben will. Es ist eine Willkür zu sagen, beim Grenzübergange und Bildung des Differentialquotienten durch Grenzübergang, wolle man zu einem Punkte kommen, der nun einfach existieren soll. Es existiert ein solcher Differentialquotient nur unter Voraussetzung der Bedingungen dieser Existenz, nur für solche Vorstellungen. Es existiert ein Punkt der Kurve auch nur für solche angenommenen Beschränkungen der Vorstellung. Dann aber darf man nicht davon sprechen, daß die Existenz solcher Kurven mit Stellen nachgewiesen sei, die überhaupt daselbst (oder überall) keinen Differentialquotienten und keine Tangentenrichtung besäßen. Eine dicht vor einem Punkte vorhandene Tangentenrichtung in das Positive hin und eine dicht nach dem Punkte vorgestellte Tangentenrichtung in das Negative hin kann man nur mit einer Annahme durch „Immernäherrücken" zusammenfallen lassen und nur künstlich hernach sagen, da $+\infty$ nicht $-\infty$ sein könne, so könne es auch Punkte bei der Summationskurve geben, die etwas so Unvereinbares nicht besäßen, also keinen Differentialquotienten hätten. Man dürfte nur sagen: sie als Kurven, deren Entstehung ich so vorschreibe, haben keinen solchen Differentialquotienten, wie ich vorschreibe ihn zu bilden. Sie können aber nichts sagen gegen die Behauptung, die gewöhnliche Art der Bildung des Differentialquotienten sei in diesem Falle falsch, weil gerade dieser Fall eine feinere Vorstellung der Unterschiede, des Punktes, des Unendlichen, des Senkrechtstehens voraussetze, die man nur mit Gewalt unter die gröbere Auffassung bringen könne; mag nun auch diese gröbere Auffassung in gröberen Fällen zu Werten führen, die richtig auch dann herauskommen, wenn man statt des Grenzbegriffes die Vorstellung des Untersinnlichen mit seinen Feinheiten anwendet.

Wenn ich ein grobes Beispiel gebrauchen darf: Man kann ohne Mikroskop durch Sehen und Weiterschließen vieles herausbekommen, was sich auch bei genauerer Betrachtung mit dem Mikroskop noch als richtig erweist. Aber man darf nicht schließen, daß alles, was man nach der dabei angewandten gröberen Beobachtung und Schlußweise gefunden zu haben meint, noch als richtig bestehen bleiben wird, wenn man das Mikroskop anzuwenden versteht — am wenigsten, wenn offenbar bei der betreffenden Untersuchung diejenige Feinheit in Betracht kommt, die mit dem Mikroskop weiterverfolgt werden kann und sollte.

Ueber den mathematischen Unterricht an einem Technikum.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Freiburg *)

von Dr. Heinrich Grünbaum (Bingen a. Rh.).

Die modernen Bestrebungen im mathematischen Unterricht haben eine Richtung angenommen, wie sie schon seit Jahren von den deutschen Techniken befolgt wird: den Mathematikunterricht aus der Sphäre einer bloßen Schulung im formalen Denken herauszuheben und ihn für das Erfassen und Verstehen der modernen Kultur fruchtbar zu machen. Es möge deswegen das Interesse der Fachmänner auch einmal auf diese jüngste aber hochwichtige Schulgattung — an der jährlich viele tausende junger Leute ihre technische Ausbildung finden — hingelenkt werden. Hier wird die Mathematik in einem Umfang und einer Auswahl gelehrt, wie sie durch die speziellen technischen Unterrichtsziele benötigt werden. Es folgt nun die Schilderung der einzelnen Disziplinen:

Die Algebra. So früh als möglich muß mit den Gleichungen begonnen werden, und die formalen Uebungen (Zusammenfassen, Zerlegen, Erweitern, Kürzen ....) sind möglichst an Gleichungen vorzunehmen. Die Uebungsgleichungen dürfen keine kunstvollen Präparate sein, sondern sind dem späteren mathematischen und technischen Lehrstoff zu entnehmen. Von höchster Wichtigkeit sind Uebungen im Einsetzen von Zahlwerten in mathematische Ausdrücke. Sie führen frühzeitig auf die Begriffe: Konstante, Veränderliche, Funktion. Die Funktionen:

$$y = ax + b; \quad y = ax^2; \quad x \cdot y = C$$

usw. sind unter Benutzung der graphischen Darstellung bereits im ersten algebraischen Unterricht zu behandeln. (Beispiele: gleichförmige Bewegung, lineare Wärmeausdehnung, Beziehung zwischen Celsius- und Fahrenheit-Angaben, gleichförmig beschleunigte Bewegung, isothermische Zustandsänderung. . . . . .)

Ein weiteres Uebungsgebiet sind die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \ldots$ soweit sie sich elementar behandeln lassen. Beispiel: $\left|\frac{x^3 - a^3}{x - a}\right|_{x=a}$.

Sorgfältig muß das numerische Rechnen (zunächst ohne jegliches Hilfsmittel) geübt werden, insbesondere das kritische Abschätzen und Beurteilen der Genauigkeit von Zahlenresultaten. Erst wenn eine gewisse Sicherheit und Gewandtheit im einfachen Rechnen erzielt ist, wird das Rechnen mit allen Hilfsmitteln (Tabellen, Logarithmen, Rechenschieber) geübt.

*) S. diese Nummer, S. 64.

Die den zweiten Grad übersteigenden Gleichungen sind durch Näherung zu lösen. Die notwendigen Sätze lassen sich in einfacher Weise so aussprechen: „Liefert die Funktion $f(x)$ für $x = x_1$ einen negativen, für $x = x_2$ einen positiven Wert:

$$f(x_1) = -E_1, \quad f(x_2) = +E_2,$$

so liegt zwischen x_1 und x_2 mindestens eine Wurzel der Gleichung: $f(x) = 0$."

„Sind hierbei x_1 und x_2 zwei Werte, die sich nur noch um eine Einheit der n-ten Dezimale unterscheiden, so ist:

$$\delta = \frac{E_1}{E_1 + E_2}$$

die Korrektur in Einheiten der n-ten Dezimale."

An weiterem algebraischen Unterrichtsstoff sei noch auf die Reihen, die Zinseszins- und Rentenrechnung (Anwendung auf die Versicherungsrechnung!) und den binomischen Lehrsatz hingewiesen.

Die Geometrie. Aus Gründen der Oekonomie des Unterrichts empfiehlt sich die Zweiteilung: Ebene Geometrie (Planimetrie und Trigonometrie) und Raumgeometrie (Stereometrie und darstellende Geometrie). Vor einer „streng wissenschaftlichen" Darstellung der Grundlagen muß gewarnt werden. Die in dem Schüler schlummernden geometrischen Anschauungen müssen vielmehr in sorgfältiger „propädeutischer" Lehrart geweckt und zu begrifflicher Klarheit erhoben werden. Dieses Gebiet der geometrischen Erweckung" muß weit ausgedehnt werden, es muß die Parallel-, Symmetrie- und Kongruenzsätze, sowie die Berechnung des Flächeninhalts noch mit umfassen. An dieses Kapitel schließt sich dann am besten sofort die Einführung in die Trigonometrie an.

Noch ein Wort über die planimetrischen Konstruktionsaufgaben: Nur solche Aufgaben dürfen behandelt werden, die imstande sind, das konstruierende Denken anzuregen und zu befruchten. Dahingegen müssen solche Aufgaben, deren Lösungen auf einem versteckten Kunstgriff beruhen, oder nur im Rahmen einer ganz speziellen Figur möglich sind, übergangen werden. Am wichtigsten sind Aufgaben, die sich durch geometrische Oerter, durch Verschiebung oder Drehung einer Figur lösen lassen. Ueberhaupt sollen die grundlegenden Begriffe und Sätze der Kinematik des ebenen starren Systems innerhalb des planimetrischen Unterrichts ihren Platz finden; die Begriffe: Translation und Rotation, die Lehre vom Momentanzentrum, die Sätze von Euler und Chasles, die Begriffe: Rollen und Gleiten u. ä. erfordern keine der Fassungskraft und Reife der Schüler unangemessenen Ueberlegungen. Sie tragen aber erheblich zur Belebung und Befruchtung des planimetrischen Unterrichts bei.

Der Unterricht in der darstellenden Geometrie muß in enger Fühlung mit dem stereometrischen Anfangsunterricht bleiben. Er muß eine gewisse Leichtigkeit in der Handhabung der senkrechten Projektion anstreben und als eigentliche Aufgabe den ebenen Schnitt durch Körper und die Durchdringung einfacher Körperformen betrachten. Als Uebungsstoff können mit großem Vorteil die dem Schüler in den technischen Fächern vertraut gewordenen Formen von Maschinenelementen, Apparaten usw. dienen. Auch Schattenlehre und Perspektive müssen mindestens in den Grundzügen behandelt werden.

Analytische Geometrie. Der Unterricht in der analytischen Geometrie soll den Schülern außer einer vertieften Auffassung und Beherrschung des Funktionsbegriffes die Kenntnis der wichtigsten Kurven, insbesondere der Kegelschnitte verschaffen.

Zur Einführung in das Wesen des Koordinatenbegriffs dienten bisher — üblicher Weise — die bekannten Aufgaben über Punkte, Flächeninhalte usw. Demgegenüber schlage ich vor, den Vektorbegriff in den Anfang und Vordergrund zu stellen, schon deswegen, weil dieser Begriff dem Techniker in zahlreichen Gebieten fort und fort begegnet. Für die Zerlegung des Vektors: $m\,(\alpha)$ (m = absolute Länge, α = Winkel mit der pos. x-Achse) in die den Achsen parallelen Komponenten:

$$m_x = m \cdot \cos\alpha, \quad m_y = m \cdot \sin\alpha,$$

für die Zusammensetzung des Vektors aus den Komponenten,

$$m = +\sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{m_x}{m}, \quad \sin\alpha = \frac{m_y}{m},$$

endlich für die Vektoraddition durch algebraische Addition der Komponenten, können sofort zahlreiche Beispiele gegeben werden: Parallelogramm der Kräfte, der Geschwindigkeiten; Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Kräftesystems mit gemeinsamem Angriffspunkt; elektrische und magnetische Anziehung, die Gaußischen Hauptlagen der Magnetnadel . . . .

Die Einführung der Polarkoordinaten kann ebenfalls als Beispiel für den Vektorbegriff behandelt werden: Jeder Punkt $(x;\ y)$ bestimmt einen Vektor: den Radiusvektor $r\ (\alpha)$, und es ist:

$$x = r \cdot \cos\alpha, \quad y = r \cdot \sin\alpha, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Vektormultiplikation in der Ebene reduziert sich auf das Vektormoment, dem je nach dem Drehungssinn das positive oder negative Zeichen beigelegt wird. Die wichtige Aufgabe: Das Moment eines Vektors durch die Momente der Komponenten auszudrücken, ist durch die Gleichung:

$$r \cdot m = x \cdot m_y - y \cdot m_x$$

gelöst und findet Anwendung auf Drehmomente, Kräftepaar, allgemeine Gleichgewichtsbedingung eines ebenen Kräftesystems usw.

Auch analytische Aufgaben, wie die Inhaltsberechnung von Dreiecken und Vielecken, die Koordinatentransformation, der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden, die Hessesche Normalform, können einfach aus dem Vektormoment entwickelt werden.

Ein anderer Vorschlag geht dahin, bei der Ableitung der Tangentengleichung den Begriff und die Benennung „Differentialquotient" und

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

von vornherein einzuführen. Die bisherige Behandlung, die diesen Begriff ängstlich vermeidet, ist gekünstelt und unbefriedigend.

Ein dritter Punkt betrifft die Behandlung der Parabel. Obgleich die Kurve, welche die meiste praktische Anwendung findet, wird die Parabel von altersher in der sehr unpraktischen Gleichungsform $y^2 = 2px$ behandelt. Weit empfehlenswerter ist die Form $y = ax^2 + bx + c$, die sich durch Parallelverschiebung aus $y = ax^2$; $a = \frac{1}{2p}$ gewinnen läßt. Sie findet Anwendung auf horizontalen und schiefen Wurf, Simpsonsche Flächenregel, geometrische Veran-

schaulichung der quadratischen Gleichung, elementare Theorie der Maxima und Minima u. a. Endlich geben wir hiermit dem Schüler eine allgemeine Funktion (ganze F. II Grades) in die Hand, während er in der Form $y^2 = 2px$ nur eine ganz spezielle Funktion sehen wird.

Höhere Analysis. Die Differential- und Integralrechnung ist für die Techniken mehr als ein hervorragendes mathematisches Bildungsmittel, sie ist ein durch die Einheitlichkeit und Oekonomie des Unterrichts erforderter Lehrgegenstand. Wer sich in sogenannten „elementaren" Lehrbüchern die zahl- und umfangreichen, schwerfälligen Veranstaltungen und Vorbereitungen ansieht, die notwendig sind, um bei gewissen Ableitungen die „höhere" Mathematik zu vermeiden, dem wird ohne Zweifel bald klar werden, welcher von beiden Wegen der einfachere ist. Ich möchte dem bekannten antiken Wort die moderne Wendung geben: die höhere Analysis darf kein Königsweg sein, der nur dem „gelehrten" Mathematiker und Techniker offen stände. Freilich ist es nicht leicht, auf dem Technikum einen befriedigenden Unterricht in der höheren Analysis zu geben. Zahlreiche Klippen sind da zu umschiffen. Vor allzu abstrakten Definitionen müssen wir uns ebenso hüten, wie vor der Gefahr, jede Schwierigkeit im Sande einer „geometrischen Anschaulichkeit" zu verdecken. Aber der Mathematiker, der die Einsicht in diese eigentümlichen Schwierigkeiten mit einer genauen Kenntnis der modernen didaktischen Arbeiten verbindet, wird nach einigem Tasten ohne Zweifel den richtigen Weg finden, um dem Schüler nicht bloß gedächtnismäßige Beherrschung der Formel, sondern vor allem infinitesimales Denken zu übermitteln.

Kleinere Mitteilungen.

I.

Einige Grundformeln der Differentialrechnung, hergeleitet mit Hilfe der Beziehung: $d\ln x = \frac{dx}{x}$.

1) Für $y = u \cdot v$ wird

$$\ln y = \ln u + \ln v$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$
$$dy = y \cdot \frac{v \cdot du + u \cdot dv}{u \cdot v} = v \cdot du + u \cdot dv.$$

2) $y = \frac{u}{v}$ ergibt:

$$\ln y = \ln u - \ln v$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{u \cdot v}$$
$$dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

3) $y = u^v$ liefert:

$$\ln y = v \cdot \ln u$$
$$\frac{dy}{y} = \ln u \cdot dv + v \cdot \frac{du}{u}$$
$$dy = u^v \cdot \ln u \cdot dv + v \cdot u^{v-1} \cdot du.$$

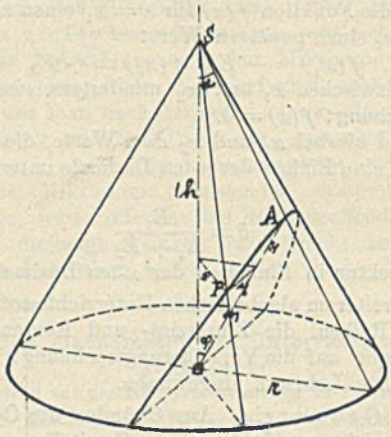
Hieraus erhält man für $y = a^v$, bei $a =$ konstant, $dy = a^v \cdot \ln a \cdot dv$; und bei $y = u^n$, wo $n =$ konstant, wird $dy = n \cdot u^{n-1} \cdot du$.

C. Herbst (Dortmund).

* * *

II.

Die Scheitelgleichungen der Kegelschnitte, in ihrer Ableitung vom geraden Kreiskegel.



Nach der Figur ist für einen unter dem Winkel φ gegen die Kegelachse geneigten Schnitt: $OA = \frac{h \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}$.

Der Punkt P der Schnittebene gehört demjenigen Kreise an, welcher, im Abstande $\xi \cos\varphi$ von der Grundfläche, durch den Kegel gelegt wird. Der Radius ϱ dieses Kreises ist gegeben durch die Beziehung:

$$\varrho = \frac{r\,(h - \xi \cdot \cos\varphi)}{h} = \operatorname{tg}\alpha\,(h - \xi \cdot \cos\varphi)$$

Der Schnittkreis liefert:

$$y^2 = \varrho^2 - \xi^2 \cdot \sin^2\varphi = \operatorname{tg}^2\alpha\,(h - \xi \cdot \cos\varphi)^2 - \xi^2 \cdot \sin^2\varphi$$
$$= \operatorname{tg}^2\alpha\,[h - (OA - x) \cdot \cos\varphi]^2 - \sin^2\varphi\,(OA - x)^2$$
$$= \operatorname{tg}^2\alpha\left[h - \left(\frac{h \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} - x\right) \cdot \cos\varphi\right]^2$$
$$- \sin^2\varphi\left[\frac{h \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} - x\right]^2$$
$$y^2 \cdot \sin^2(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}^2\alpha\,[h \cdot \cos\alpha \cdot \sin\varphi + x \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi)]^2 - \sin^2\varphi\,[h \cdot \sin\alpha - x \cdot \sin(\alpha + \varphi)]^2$$
$$= 2\,x \cdot h \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$
$$(\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) + x^2 \cdot \sin^2(\alpha + \varphi)\,(\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$= 2\,x\,h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \sin^2(\alpha + \varphi)$$
$$+ x^2 \cdot \sin^2(\alpha + \varphi) \cdot \sec^2\alpha\,(\sin^2\alpha \cdot \cos^2\varphi - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\varphi)$$

Also:

$$y^2 = 2\,x \cdot h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi + x^2 \cdot \sec^2\alpha\,(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)$$
$$y^2 = 2\,r \cdot x \cdot \sin\varphi + x^2 \cdot \sec^2\alpha\,(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)$$

für $\varphi \gtreqless \alpha$ erhält man:

$$y^2 = 2\,r \cdot \sin\varphi \cdot x - \sec^2\alpha\,(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha) \cdot x^2 \quad \text{(Ellipse)}$$
$$y^2 = 2\,r \cdot \sin\alpha \cdot x \quad \text{(Parabel)}$$
$$y^2 = 2\,r \cdot \sin\varphi \cdot x + \sec^2\alpha\,(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi) \cdot x^2 \quad \text{(Hyperbel)}$$

C. Herbst, Dipl.-Ingenieur (Dortmund).

* * *

III.

Bestimmung der ganzen Zahlen, für welche die Beziehung gilt: $x^y = y^x$.

Zunächst erkennt man, daß x und y dasselbe Vorzeichen haben müssen. Denn wäre $x = p$ und $y = (-q)$, wo p und q absolut, so müßte sein: $p^{-q} = \left(\frac{1}{p}\right)^q = (-q)^p$, was natürlich unmöglich.

Für ganzzahlige x und y kann man daher stets setzen $x = y \cdot z$, wo z eine positive rationale Zahl > 1. Dann wird:

$$(y \cdot z)^y = y^{yz}$$
$$y^z = \pm y\,z \text{ und } y^{z-1} = \pm z$$

Hiernach ist $y_{abs} = \sqrt[z-1]{z}$. Ein ganzzahliges y bedingt also ein ganzzahliges z.*)

$z \underset{min}{=} 2$ liefert $y = \pm 2$ und $x = \pm 4$. $z > 2$ ergibt $1 < y < 2$. Denn für $z = z_0 = 3$ erhält man

$$2^{z_0 - 1} = 4 > 3 > z_0$$

$$2 \cdot 2^{z_0 - 1} > 2 z_0 > z_0 + 1, \text{ da } z_0 > 1$$

$$2^{(z_0 + 1) - 1} > z_0 + 1.$$

Setzt man $z_0 + 1 = z$, so folgt: $2^{z-1} > z$. Die Ungleichung bleibt also von $z = 3$ an für alle Werte von z bestehen, so daß hier in der Tat stets $1 < y < 2$, mithin keine ganze Zahl sein kann.

$+2$ und $+4$, sowie (-2) und (-4) sind somit die einzigen ganzen Zahlen, die die Bedingung erfüllen.

C. Herbst (Dortmund).

Bericht über die achtzehnte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Im Auftrage des Vorstandes.

Die Freiburger Hauptversammlung des Vereins bot in mehrfacher Beziehung ein neues Bild dadurch, daß die Zahl der aus Norddeutschland gekommenen Versammlungsteilnehmer naturgemäß erheblich geringer war, als bei den Versammlungen an mehr nördlich gelegenen Orten, ferner auch dadurch, daß sie eine neue Zeitdisposition aufwies, indem statt der sonst üblichen drei allgemeinen Sitzungen nur zwei stattfanden, während dafür zwei in erster Linie der Belehrung dienende und je einen vollen Tag in Anspruch nehmende Ausflüge angesetzt worden waren.

Den Beginn machten am Pfingstmontag, 31. Mai, die satzungsmäßigen Sitzungen des Vorstandes mit dem Vereinsausschuß und beider Körperschaften zusammen mit dem Ortsausschuß, der für den glatten Verlauf der Versammlung in vortrefflicher Weise vorgesorgt hatte. An diese beiden Sitzungen schloß sich die sehr zahlreich, auch von einer großen Zahl von Damen besuchte Begrüßungszusammenkunft im Gartensaal des Hotel Continental zum Pfauen an, in der eine, durch den gemeinschaftlichen Gesang einiger von einem Freiburger Herrn gedichteten Lieder noch gesteigert, sehr angeregte Stimmung herrschte.

Am Dienstag, 1. Juni, früh begann um 9 Uhr die erste allgemeine Sitzung in der Aula des neuen Oberrealschulgebäudes in der Zähringer Straße, dessen Räume überhaupt in freundlichster Weise der Versammlung zur Verfügung gestellt worden waren. Zunächst erfolgte eine Reihe von Begrüßungen, die der Direktor der Anstalt, Herr Dr. Martin, eröffnete. Dieser hieß als Hausverwalter und zugleich als Vertreter der sprachlich-historischen Abteilung des Lehrerkollegiums seine Gäste willkommen und wünschte den Verhandlungen Erfolg und Segen. „Sie tagen in einem Schulgebäude", führte er etwa aus, „das in seiner Ausstattung nicht leicht übertroffen wird und dessen Einrichtungen die Möglichkeit bieten, neu auftauchende Forderungen an den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht praktisch zu erproben. Auf die Wertschätzung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts weist auch Johann Keplers Büste an der Fassade über dem Haupteingang hin. Gerade 300 Jahre sind verflossen seit dem Erscheinen der „astronomia nova" dieses großen Reformers und Vollenders des Kopernikanischen Werkes. Optimismus, Phantasie, logisches Denken und strenge Wissenschaftlichkeit waren die Zeichen, in denen er gesiegt hat; die Erinnerung an diesen großen und so vielseitigen Mann mögen ein günstiges Omen für die Versammlung sein!"

Herr Geh. Hofrat Treutlein, Direktor der Goetheschule in Karlsruhe, begrüßte im Auftrag des Großherzoglichen Oberschulrats die Versammlung, deren Tagung dieser große Aufmerksamkeit entgegenbringe, und deren Resultate er nach Möglichkeit in der Praxis der Schule aufnehmen und verwerten werde.

Der Prorektor der Albert Ludwigs-Universität und der Dekan der philosophischen Fakultät hatten Herrn Geh. Rat Lüroth, Professor der Mathematik an der Universität, ersucht, ihre Willkommengrüße zu übermitteln. Herr Geh. Rat Lüroth hofft, daß durch die mündliche Aussprache zwischen den Schulmännern aus Nord und Süd manche Verschiedenheiten der Anschauungen sich ausgleichen werden, wie dieses durch schriftlichen Verkehr wohl kaum hätte möglich sein können. Die Universität bringe allen zur Diskussion stehenden Fragen nicht das gleiche Interesse entgegen. Die innere Frage des Schulbetriebs berühre sie weniger als die nach Auswahl und Abgrenzung der Lehrfächer. Zwar könne das kleine Land Baden seine drei Hochschulen nicht so vollkommen ausstatten und mit Professuren versehen wie andere Staaten, deren Hochschulen zum Teil aus Privatmitteln reich unterstützt werden. Doch habe die hiesige Universität in den letzten Jahren versucht, durch Einrichtung einiger, den neueren Anforderungen entsprechender Vorlesungen und Uebungen — wie z. B. solcher über darstellende und praktische Geometrie, numerisches Rechnen, populäre und theoretische Astronomie, Elementarmathematik und die Technik des schulmäßigen Experimentierens auf den verschiedenen Gebieten der Naturwissenschaft — den Bedürfnissen der künftigen Lehrer möglichst entgegenzukommen. Zur Weiterbildung der Lehrer dienen auch die vom Staate reichlich unterstützten Ferienkurse. Eine ganz besondere Erleichterung finde der biologische und geologische Unterricht durch die in dieser Hinsicht reich ausgestattete nächste und weitere Umgebung, deren Reichtum an Naturformen die Teilnehmer an der Tagung bei den geologischen Exkursionen zu beobachten selbst Gelegenheit haben werden.

Herr Oberbürgermeister Dr. Winterer entbot im Namen der Stadt Freiburg i. Br. dem Verein einen herzlichen Willkommengruß. Die Stadt freue sich, ja, man könne sagen, fühle sich sogar geehrt, daß diese Versammlung hier tage, denn Freiburg sei durch seine etwas exzentrische Lage für solche Tagungen gerade nicht prädestiniert; es sei Sorge der Städte, Anstalten zu unterhalten, in denen gerade die Fächer, die der Verein vertritt, die Hauptrolle spielen. Es bilde ein Hauptbestreben aller zivilisierten Völker, die Hauptergebnisse der Naturwissenschaft der großen Masse, der Allgemeinheit, zugänglich zu machen und dadurch den kulturellen Zustand zu heben. Der Tagung wünschte Herr Oberbürgermeister den besten Erfolg.

Für alle diese, großenteils von lautem Beifall begleiteten Begrüßungen dankte im Namen des Vereins

---

*) Anm.: Wäre $z = \frac{m}{n}$, so wäre $y_{abs}^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}$, $y_{abs}^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n$, y also keine ganze Zahl.

mit warmen Worten der Vorsitzende, Prof. Pietzker (Nordhausen), der damit zugleich die achtzehnte Hauptversammlung des Vereins förmlich eröffnete.

Demnächst ergriff der Vorsitzende des Ortsausschusses, Herr Oberrealschul-Direktor Prof. Dr. Seith das Wort zu einigen geschäftlichen Mitteilungen, nach ihm sprach der Vorsitzende Pietzker, indem er zunächst die diesmal besonders umfangreiche Liste der Mitglieder verlas, die dem Verein seit der letzten Tagung durch den Tod entrissen waren und die Versammlung ersuchte, deren Andenken durch Erheben von den Sitzen zu ehren. Es sind seit der Göttinger Versammlung verstorben:

1. Direktor Fehrs (Wetzlar),
2. „ Matzat (Weilburg),
3. „ Moesta (Dresden),
4. „ Pflieger (Colmar),
5. „ Schild (Gronau),
6. Professor Dix (Zittau),
7. „ Franzky (Spandau),
8. „ Hellgreve (Berlin),
9. „ Jähnike (Bromberg),
10. „ Loew (Berlin),
11. „ Otto (Werdau)
12. „ Perlewitz (Charlottenburg),
13. „ Thienemann (Essen),
14. „ Westphal (Bremen),
15. Oberlehrer Nitsche (Groß-Lichterfelde)
16. „ Schulze (Burg),
17. Volksschullehrer Hodum (Staßfurt).

Weiterhin sprach der Vorsitzende sein Bedauern aus, daß der Wunsch des Vorstandes in diesem Säkularjahr der Geburt Darwins das Andenken dieses großen Pfadfinders auch innerhalb des Vereins durch einen Festvortrag zu ehren, sich leider nicht habe verwirklichen lassen. Eine Zeitlang durften wir hoffen, daß wir einen solchen Vortrag aus berufenstem Munde, nämlich dem Sr. Exzellenz des Herrn Geheimrats Weismann, würden hören können, doch war es dem Herrn Geheimrat nicht möglich, zurzeit der Versammlung in Freiburg selbst anwesend zu sein. Wenn wir also uns darauf beschränken müßten, den Namen Darwins in Ehrfurcht und Pietät zu nennen, so dürften wir dafür doch mit Sicherheit hoffen, daß die Verhandlungen dieser Tagung, insbesondere die Diskussionen über den biologischen Unterricht, der durch Darwins Untersuchungen so mächtig befruchtet worden sei, im Geiste Darwins sich vollziehen würden. Neben dem Namen Keplers, dessen vorher Herr Direktor Martin gedacht habe, stehe in diesem Erinnerungsjahr der Name Darwins, der Geist dieser beiden großen, nur von dem lauteren Streben nach Wahrheit geleiteten und jeder auf seinem Gebiete bahnbrechenden Forscher möge über unseren Verhandlungen walten, die damit unter einen glücklichen Stern gestellt seien.

Danach erteilte er das Wort Herrn Dr. Bastian Schmid (Zwickau) zu seinem Bericht über den biologischen Unterricht in den Oberklassen unter besonderer Berücksichtigung der Schülerübungen. Auf die sehr beifällig aufgenommenen Ausführungen des Referenten schloß sich dann sofort eine eingehende Diskussion, über deren Verlauf ein besonderer Bericht erscheinen wird.

In der Stunde zwischen 12 und 1 Uhr nahmen die Versammlungsteilnehmer in der Turnhalle der Anstalt ein von der Stadt Freiburg in liebenswürdigster Weise dargebotenes Frühstück ein. An Stelle des Herrn Oberbürgermeisters, der durch die Vorbereitungen für den bevorstehenden Empfang Ihrer Königlichen Hoheiten des Großherzoglichen Paares verhindert war, machten die Herren Stadträte Kapferer und Zimmermann die Honneurs der Stadt, der der Vereinsvorsitzende für ihr freundliches Entgegenkommen unter dem lebhaften Beifall der Anwesenden den wärmsten Dank aussprach. Seine Worte fanden eine sehr freundliche Erwiderung von seiten des Herrn Stadtrats Kapferer.

Dann folgten von 1 bis 4 Uhr die Fachsitzungen der Abteilungen, zunächst zwei parallel gehende Sitzungen unter dem Vorsitz der Herren Prof. Stulz und Prof. Grabendörfer, in deren einer die Herren Brocke (Zabern) „über die Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden“ und Grünbaum (Bingen) „über den mathematischen Unterricht an einem Technikum“ sprachen, während in der zweiten Vorträge der Herren Kewitsch (Freiburg i. Br.) über „die Entstehung des 60-Systems“ und Rohrbach (Gotha) über den logarithmischen Rechenschieber nebst einigen damit zusammenhängenden Fragen des praktischen Rechenunterrichtes stattfanden. Eine sich hieran anschließende kombinierte physikalisch-naturwissenschaftliche Sitzung wurde durch Herrn Prof. Scheid geleitet, in ihr folgten sich drei Demonstrationsvorträge der Herren K. T. Fischer (München) über „einige einfache Gegenstände für Schülerübungen“, Grimsehl (Hamburg) über „bewegliche Wandtafelzeichnungen im physikalischen Unterricht“ und Leiber (Freiburg) „über spontane Quer- und Längsteilung bei Hydra“.

An diese größtenteils sehr beifällig aufgenommenen Vorträge schlossen sich kurze Diskussionen.

Nachdem so die wissenschaftliche Arbeit des ersten Versammlungstages zur Erledigung gekommen war, fanden sich die Teilnehmer im Stadtgarten, zu dem ihnen der unentgeltliche Zutritt während der Versammlungstage freundlichst gewährt worden war, beim Kaffee zusammen, um von da aus eine überaus genußreiche Wanderung über den Schloßberg zu unternehmen und am Abend um 8 Uhr im Festsaale des Hotels Zähringer Hof zum Festmahl wieder zusammenzukommen.

Dieses, durch einen reichen Damenflor verschönerte Mahl verlief in angeregtester Stimmung, gewürzt durch eine Reihe von Trinksprüchen, deren erster vom Vorsitzenden des Ortsausschusses, Herrn Direktor Dr. Seith, Sr. Majestät dem Deutschen Kaiser und Sr. Königlichen Hoheit dem Großherzog gewidmet wurde. Weitere Trinksprüche galten den Ehrengästen und den Damen; auch der Stadt Freiburg, die der Versammlung ein so freundliches Entgegenkommen gezeigt hatte und des Ortsausschusses, der die Versammlung in so vorzüglicher Weise vorbereitet hatte, wurde mit warmen, sehr beifällig aufgenommenen Worten gedacht.

Von auswärts lagen eine Reihe brieflicher und telegraphischer Begrüßungen vor, insbesondere ein Telegramm von dem allverehrten Mitbegründer des Vereins, Prof. Bail in Danzig, ferner ein sehr freundliches Grußschreiben von seiten des zurzeit in Locarno weilenden Herrn Geheimrats Rebmann aus Karlsruhe, der wiederholt seinem Bedauern Ausdruck gab, daß er die Versammlung nicht habe im Namen des Großherzoglichen Oberschulrats persönlich begrüßen können, und ein Brief unseres alten treuen Freundes, des Herrn Direktors Kosta Iwkowits in Belgrad, der im vergangenen Jahre verhindert gewesen war, uns einen

Gruß zu senden, aber in diesem Jahre seine treue Anhänglichkeit an den Verein aufs Neue in herzlichen Worten bekundete.

Der zweite Versammlungstag, Mittwoch 3. Juni, führte früh um 8 Uhr zunächst eine größere Zahl von Versammlungsteilnehmern in das physikalische Institut, wo dessen Assistent, Herr Dr. Gäde, die nach seinen Angaben neu konstruierte Luftpumpe in einer von den Anwesenden mit lebhaftem Dank und größtem Interesse verfolgten Reihe von Demonstrationen vorführte.

Um 9 Uhr begann dann die zweite allgemeine Sitzung, der Herr Direktor Dr. Seith präsidierte. Sie wurde durch einen Vortrag des Herrn Dr. Geißler (Luzern) über „methodische Wege für dauernden Zusammenhang der Mathematik mit den übrigen Lehrfächern“ eröffnet, an den sich alsbald die im Versammlungsprogramm vorgesehene „Diskussion über die Meraner Vorschläge in der Praxis des mathematischen Unterrichts mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen“ anschloß, eingeleitet durch einen kurzen Bericht des Herrn Dr. Schotten (Halle a. S.).

Diese Diskussion fand nach der von $12^1/_2$ bis $1^1/_2$ Uhr dauernden Frühstückspause noch eine kurze Fortsetzung, unmittelbar darauf trat die Versammlung in die von dem Vereinsvorsitzenden Pietzker (Nordhausen) geleitete Geschäftssitzung ein, die kurz vor 4 Uhr ihr Ende erreichte.

Hier erstattete zunächst der Vereins-Schatzmeister Presler (Hannover) den im nachstehenden wiedergegebenen

Kassenbericht
vom 1. Januar 1908 bis 1. Januar 1909.

Einnahme

Bestand am 1. Januar 1908	374,92 M
Zinsen	16,63 „
Mitgliederbeiträge 3 · 1223 = ...	3669,— „
Summa	4060,55 M
Hiervon ab Ausgaben	3610,30 „
bleibt Bestand	450,25 M
Hierzu Bestand des Sparkassenbuches für 7 Dauermitgliedskarten am 1. Jan. 1909	237,87 „
Bestand am 1. Januar 1909	688,12 M

Ausgabe

1. Vertragsmäßige Summe an den Verleger des Vereinsorgans 2 · 1223 = ...	2446,— M
2. Kosten der Göttinger Versammlung . .	545,85 „
3. Drucksachen der Werbepapiere und Schreibhilfe	163,88 „
4. Vergebung der Kosten für Teilnahme an zwei Sitzungen des Unterrichtsausschusses	185,60 „
5. Vergütung an den Kassenführer	160,— „
6. Portoauslagen	108,97 „
Summa, wie oben	3610,30 M

Ueber den Befund der Kasse berichteten die beiden bereits am vorhergehenden Tage bestellten Kassenrevisoren, die Herren Lorey (Minden i. W.) und Scheid (Freiburg), auf deren Antrag die Versammlung dem Kassenführer mit bestem Danke für seine Mühewaltung Entlastung erteilte.

Der Versammlung wurde nunmehr die Frage unterbreitet, wie sich das Verhältnis des Vereins zu der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte in der Folgezeit gestalten solle. Anlaß zu dieser Erörterung gab eine im Anfang des Jahres vom Vorstande der genannten Gesellschaft an den Verein ergangene Aufforderung, bei der Vorbereitung des Programms ihrer Abteilung 12 (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht) für die regelmäßig im September stattfindenden Naturforscherversammlungen mitzuwirken. Der Vereinsvorstand hatte diese Frage zunächst zum Gegenstand eines Meinungsaustausches zwischen seinen Mitgliedern und denen des Vereins-Ausschusses gemacht, auf Grund dessen er sich vorläufig zu einer solchen Mitwirkung für das laufende Jahr bereit erklärt, die endgültige Regelung der Sache aber der Hauptversammlung vorbehalten hatte. Demgemäß ist auch in Nr. 2 des laufenden Jahrgangs des Vereinsorgans eine Bekanntmachung erfolgt, worin der Vereinsvorstand seine Bereitheit zur Vermittelung von Vortrags-Anmeldungen für die Sitzungen der obengenannten Abteilung auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung aussprach.

In der Debatte wurde betont, daß die Mitarbeit des Vereins an der Vorbereitung für die Naturforscher-Versammlung möglicherweise zu einer Zusammenlegung der Vereinsversammlungen mit denen der Naturforscher-Gesellschaft führen müßte, daß aber diese Zusammenlegung aus verschiedenen schon in früheren Jahren mehrfach hervorgehobenen Gründen nicht gut möglich sei. Die Versammlung kam dann zu dem Beschluß, zunächst einmal das Ergebnis der für dieses Jahr getroffenen Schritte abzuwarten, indem sie den Vorstand ermächtigte, je nach dem Ausfall dieses Ergebnisses für das nächste Jahr vorläufige Maßnahmen zu treffen und dann der nächstjährigen Hauptversammlung die ganze Frage zur endgültigen Entscheidung nochmals zu unterbreiten.

Ein weiterer Gegenstand der Beschlußfassung war die Wahl des nächstjährigen Versammlungsortes, der Vorsitzende konnte mitteilen, daß nach privaten, an den Vorstand gelangten Nachrichten bei den Fachgenossen in Posen große Neigung vorhanden sei, den Verein nächstes Jahr zu einer Tagung dorthin einzuladen. Die Wahl Posens wurde unter Hervorhebung einer Reihe von besonders in Betracht kommenden Einzelmomenten lebhaft befürwortet, namentlich von den Herren Poske (Berlin), Masuch (Rogasen) und Lorey (Minden, früher Görlitz). Die Versammlung erteilte dann einstimmig dem Vorstande den Auftrag, mit den dortigen Fachkreisen in nähere Verhandlungen wegen Abhaltung der nächstjährigen Versammlung in Posen einzutreten.

Nunmehr schritt die Versammlung zu der satzungsmäßigen Erneuerung des Vorstandes, aus dem in diesem Jahre die Herren Lenk, Pietzker und B. Schmid ausscheiden. Es wurde beantragt, die drei Herren durch Zuruf wiederzuwählen und da sich kein Widerspruch erhob, auch demgemäß verfahren. Von den drei somit wiedergewählten Vorstandsmitgliedern erklärten die Herren Lenk und B. Schmid sich zur Annahme der Wiederwahl bereit, dagegen bat der bisherige Vorsitzende Pietzker (Nordhausen), es seinem Lebensalter und seinem sehr starken Ruhebedürfnis zugute zu halten, wenn er die Wiederwahl ablehne. Er blieb auch bei dieser Erklärung stehen, obwohl ihm von verschiedenen Seiten in sehr herzlichen, ihn zum wärmsten Danke verpflichtenden Worten der Wunsch ausgesprochen wurde, die Leitung des Vereins in der Hand zu behalten. Nur zur Fortführung der Redaktion des Vereinsorgans für den Rest des laufenden Kalenderjahres erklärte er sich bereit.

Dadurch wurde nun der Verein vor die Frage ge-

stellt, ob nicht vielleicht eine Zurückführung der Zahl der Vorstandsmitglieder auf die frühere Höhe (5) angebracht sei, diese Frage, über die man im Schoße des Vereinsvorstandes und Vereinsausschusses geteilter Meinung war, wurde von der Versammlung mit Stimmenmehrheit verneint. Aber zur Wahl einer geeigneten Persönlichkeit für die leergewordene Stelle im Vorstande erklärten verschiedene Redner augenblicklich noch außerstande zu sein, so wurde denn beschlossen, diese Wahl der nächstjährigen Versammlung zu überlassen, dem Vorstande aber die Befugnis zur vorläufigen, im Einverständnis mit dem Vereinsausschuß zu bewirkenden Zuwahl einer ihm geeignet erscheinenden Persönlichkeit zu geben. Auf Antrag von Schotten (Halle) wurde dem bisherigen Vorsitzenden Pietzker die Würde eines Ehrenvorsitzenden verliehen, die er mit Worten des Dankes für diese unverdiente Ehrung annahm, zur Vertretung des Vereins in den Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an Pietzkers Stelle wurde Thaer (Hamburg) delegiert, der auch für das nächste Jahr die Geschäfte des Vorsitzenden übernahm, endlich erfuhr noch der Vereinsausschuß eine Ergänzung, die dadurch nötig geworden war, daß die Hoffnung, Herrn Studienrat Dr. Reinhardt, Rektor des Realgymnasiums in Freiberg (Sachsen) zur Mitarbeit im Vereinsausschuß zu gewinnen, sich nicht verwirklicht hatte. Zu allgemeiner Befriedigung erklärte Herr Direktor Dr. Seith (Freiburg) sich bereit, die auf ihn gefallene Wahl in den Vereinsausschuß anzunehmen.

Am Schluß der Geschäftssitzung stand die Frage der Beitragserhöhung. Der Vorsitzende führte nochmals die Gründe an, die bereits im Vorjahre auf der Göttinger Versammlung dahin geführt hatten, eine Beitragserhöhung als nötig anzuerkennen, insbesondere der Umstand, daß die Verhältnisse sich seit der Gründung des Vereins mannigfach geändert hätten, daß die Kosten der Versammlungen mehrfach nur unter Hinzunahme von finanziellen Beihilfen seitens der Stadtverwaltungen an den Versammlungsorten hätten bestritten werden können, daß es dem Vorstande bisher geradezu peinlich gewesen sei, Herren, die er selbst zur Teilnahme an der Versammlung, sei es zur Ausschußsitzung, sei es zur Uebernahme von Vorträgen oder Referaten veranlaßt habe, keine Entschädigung für die ihnen dadurch erwachsenen Kosten gewähren zu können, daß auch die Frage einer Erweiterung des Vereinsorgans wert sei, in Betracht gezogen zu werden, und daß die Beitragserhöhung es ermöglichen werde, alljährlich ein gedrucktes Mitgliederverzeichnis herauszugeben und dem Vereinsorgane beizulegen, endlich daß dadurch auch Mittel für mancherlei Untersuchungen und Feststellungen über die Lage des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts gewonnen würden, wie solche den Wünschen vieler Fachgenossen entsprächen.

Diesen Ausführungen stimmte eine größere Zahl von Rednern zu. Gegen eine Beitragserhöhung sprach sich Herr Prof. Dr. K. T. Fischer (München) im Auftrage der Sektion Bayern, insbesondere der Ortsgruppe München dieser Sektion aus, in der Abstimmung wurde der Antrag des Vorstandes, den Beitrag vom nächsten Jahre ab auf 5 M zu bemessen, gegen eine Stimme angenommen.

Außerhalb der Tagesordnung brachte noch Herr K. T. Fischer (München) 15 auf die Schülerübungen und die Lehrerausbildung bezügliche Leitsätze, die von der Sektion Bayern des Vereins aufgestellt worden sind, zur Kenntnis der Versammlung. Eine Abstimmung über diese Leitsätze, die nicht vorher zur allgemeinen Kenntnis gebracht worden waren, konnte infolgedessen nach der bisher vom Verein beobachteten Praxis nicht stattfinden, es wurde aber beschlossen, diese Sätze, falls die Sektion Bayern damit einverstanden sei, im Vereinsorgan zum Abdruck zu bringen.

Damit hatten die geschäftlichen Verhandlungen ihren Abschluß gefunden, der Vorsitzende bemerkte, daß die Versammlung nunmehr noch nicht ihr Ende erreicht habe, indem vor allem noch die beiden geologischen Ausflüge am Donnerstag und Freitag bevorständen, doch sei der gegenwärtige Augenblick der einzige, in dem das Fazit der Versammlung gezogen und die Eindrücke, die sie hinterlasse, zusammengefaßt werden könnten.

Da sei es denn ihm eine große Freude, erklären zu können, daß die großen Hoffnungen, mit denen wir nach Freiburg gezogen seien, sich reichlich erfüllt hätten, der Verlauf der auch vom Wetter sehr begünstigten Versammlung sei ein überaus befriedigender und verheiße es auch bei den noch bevorstehenden Ausflügen weiter zu sein. Wir dürften hoffen, durch die eingehenden Diskussionen, in denen so viele Fachgenossen zum Wort gekommen seien, unseren Vereinsbestrebungen eine wirksame Förderung, allen Versammlungsteilnehmern aber ein reiches Maß von Anregungen gewährt zu haben, der Dank dafür gebühre vor allem den Herren, die sich zur Uebernahme von Vorträgen und Berichten hatten bereitfinden lassen. Aufrichtig verpflichtet fühle sich der Verein der Universität und der Stadt Freiburg für das ihm so verschiedenfach bewiesene wohlwollende Entgegenkommen und in ganz besonderem Maße der unermüdlichen Tätigkeit des Ortsausschusses, der unter der Leitung seines Vorsitzenden durch die bereitwillige Mitwirkung der Freiburger Herren vor und während der Versammlung den so befriedigenden schönen Verlauf der Versammlung ermöglicht habe. Nachdem noch Herr Grimsehl (Hamburg) ein sehr gütiges herzliches Wort des Dankes für die Tätigkeit des Vorstandes und insbesondere die des bisherigen Vorsitzenden hinzugefügt hatte, schloß dieser die Geschäftssitzung, der nun noch eine Besichtigung einiger Freiburger Bauwerke, vor allem des Münsters, sowie des neuen Gymnasiums und des neuen Seminargebäudes unter der freundlichst angebotenen höchst dankenswerten sachkundigen Führung des Herrn Prof. Dr. Baumgarten vom Bertoldgymasium folgte.

Den Abend verbrachte dann eine größere Zahl von Versammlungsteilnehmern in dem herrlich gelegenen Garten des Gasthauses Kyburg in Günterstal, wohin die Einzelnen auf mannigfachen Wegen, meist über den Lorettoberg gepilgert waren.

Der Donnerstag, 3. Juni, und der Freitag, 4. Juni, gehörten den beiden höchst instruktiven geologischen Ausflügen, deren Führung der Direktor des geologischen Instituts der Universität, Herr Dr. Deecke, freundlichst übernommen hatte. Beide Ausflüge führten ihre Teilnehmer schon in aller Frühe aus Freiburg hinaus, der erste in die Gegend von Badenweiler, wo das große Verwerfungsgebiet der Gegenstand eingehender, durch Schichtenprofile und anderweitige Erläuterungen unterstützter Belehrungen und Demonstrationen von seiten des Ausflugsleiters bildete, während eine kleinere Zahl von Ausflugsteilnehmern einen Teil der Zeit zu einem

Besuche des „Blauen“ mit seiner berühmten Aussicht verwendete; der zweite Ausflug galt dem Kaiserstuhl mit dem ihm nordwestlich vorgelagerten Limberg, er führte die Teilnehmer quer durch den Kaiserstuhl in Rothweil bis Gottenheim. An den belehrenden Demonstrationen, die auch hier durch verschiedene in den Händen der Teilnehmer befindliche Schichtenprofile unterstützt wurden, beteiligten sich außer dem Leiter, Herrn Prof. Deecke, noch die Herren Dr. Söldner, der zurzeit mit der Neuaufnahme des Limbergs beschäftigt ist und aus dieser Tätigkeit heraus neue Mitteilungen über den Aufbau des ganzen Gebietes zu machen in der Lage war, ferner Herr Prof. Dr. Meigen, der die Flora des Gebiets eingehend erläuterte, und Herr Prof. Dr. Weigand aus Straßburg, der die Aussicht von der Limburg auf die Vogesen näher erklärte, sowie noch verschiedene Herren aus Freiburg, insbesondere Herr Prof. Scheid. Beide Ausflüge, bei denen der Genuß der landschaftlichen Schönheit und die durch den Aufschluß über den geologischen Aufbau gewonnene Belehrung sich in glücklichster Weise ergänzten, verstärkten die schönen Eindrücke, mit denen die aus der Ferne gekommenen Teilnehmer nun wieder von dannen zogen, vielfach erfüllt von dem Wunsche, an diesen schönen Platz für längere Zeit zurückkehren zu können und vor allem erfüllt von der lebhaften Hoffnung, daß die bei dieser Versammlung gewonnene engere Fühlung zwischen Süd und Nord dauern und sich immer mehr verstärken werde. Die Erinnerung an die Freiburger Tage wird überall eine lange und nachhaltige sein.

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Schulreformbewegung in Bayern. Die „Sektion Bayern“ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hat einen eingehenden Lehrplan-Entwurf für Mathematik und Physik an den bayerischen Realgymnasien ausarbeiten lassen, der sich mit dem auf Veranlassung des bayerischen Staatsministeriums für die Reformabteilung des Realgymnasiums zu Nürnberg an dieser Anstalt selbst ausgearbeiteten Lehrplan deckt. Nach diesem Plan werden der Mathematik im ganzen 39 (für die einzelnen Klassen von unten an $4+4+5+4+4+4+5+4+5$), der Physik 12 (4 mal $0+2+2+2+3+3$), der Chemie 6 (6 mal $0+2+2+2$), den beschreibenden Naturwissenschaften 12 ($2+2+2+2+2+2+3$ mal 0), dem Zeichnen 23 ($3+4+4+2+2+2+2+2+2$) Wochenstunden zugewiesen.

Dazu werden eine Reihe von grundlegenden Gesichtspunkten aufgestellt. Es wird für unzulässig erklärt, den Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts in die unteren Klassen zu verlegen, der mathematische Unterricht soll die Schüler bis an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung führen. In Physik sollen die nach dem Schluß des sechsten Schuljahres abgehenden Schüler einen Ueberblick über das Gesamtgebiet der Physik gewonnen haben, die Schüler der oberen Klassen Gelegenheit zur eigenen Ausführung einfacher Uebungen und grundlegender Experimente erhalten. Dem Lehrer soll in Bezug auf Auswahl und Behandlung des Unterrichtsstoffes weitestgehende Freiheit gewährt, die Stellung der Prüfungsaufgaben für jede Schule dieser selbst überlassen werden.

* * *

Ferienkurse in Hydrobiologie und Planktonkunde an der Biologischen Station zu Plön. Während der Monate Juli und August sollen in der Folgezeit an der unter Leitung von Prof. Dr. Otto Zacharias stehenden Biologischen Station zu Plön alljährlich Kurse veranstaltet werden, die das Leben im Süßwasser zum Gegenstand haben, sie erstrecken sich besonders auf die niedere Flora und Fauna der in der unmittelbaren Umgebung von Plön gelegenen Binnenseen, im Anschluß daran kommt aber auch noch ein reiches Material aus benachbarten Teichen, Tümpeln und Moorgewässern zur Demonstration.

In jedem Kursus werden die nachstehend verzeichneten Dinge verhandelt.

1. Kurzer Abriß der Geschichte der Süßwasserbiologie in Form eines einleitenden Vortrages. Schilderung der Lebensbedingungen, die ein Binnensee innerhalb seiner Uferzone, am Grunde und im Bereich der übrigen Wassermasse darbietet. Hinweis auf die verschiedenartigen Mittel, womit die Organismen dem freien Schweben in ihrem Elemente angepaßt sind.

2. Vorzeigung und Erklärung der gebräuchlichen Fanginstrumente.

3. Demonstration der hauptsächlichsten Uferformen und der Planktonwesen unter dem Mikroskop, sowie Anleitung zum Studium des feineren Baues unter Zuhilfenahme von Abbildungen und Lehrbüchern. Anfertigung eigener Skizzen und Zeichnungen von den beobachteten Objekten.

4. Anleitung zum Konservieren und Präparieren von Einzelobjekten und ganzen Planktonfängen. Praktische Ausübung der Färbetechnik nach verschiedenen Methoden. Herstellung von Dauerpräparaten, die den Kursisten als Eigentum verbleiben.

5. Mikroskopische Durchmusterung derartiger Präparate, um die konservierten — vielfach ein verändertes Aussehen zeigenden — Objekte identifizieren zu lernen. Vergleichende Untersuchungen an Material aus einer Sammlung von Planktonfängen anderweitiger Herkunft. Einführung in die neueste Fachliteratur.

Vereine und Versammlungen.

Orts- und Bezirks-Verbände des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Vorsitzender der Sektion Bayern, die jetzt 146 (allerdings nicht sämtlich dem Hauptverein angehörende) Mitglieder zählt, ist, wie bisher Prof. Dr. Heß (Nürnberg), Vertreter im Vereins-Ausschuß Prof. Dr. K. T. Fischer an der Technischen Hochschule München.

Den Vorsitz in der Ortsgruppe Groß-Berlin führt, wie bisher, Prof. Dr. v. Hanstein (Groß-Lichterfelde), der die Ortsgruppe auch im Vereins-Ausschuß vertritt, Stellvertreter ist Prof. Ohmann.

Vorsitzender der Ortsgruppe Breslau ist Prof. Dr. Maschke, Vertreter im Vereins-Ausschuß Prof. Lübeck.

Bücher-Besprechungen.

Klein, L. Bemerkenswerte Bäume im Großherzogtum Baden (Forstbotanisches Merkbuch). Mit 214 Abbildungen nach photographischen Naturaufnahmen. Herausgegeben mit Unterstützung des Großherzoglichen Ministeriums der Justiz,

des Kultus und Unterrichts. Heidelberg 1908, C. Winter. XXVIII u. 372 S. Preis: geb. M 4.

Ein wundervolles Buch, wenn es auch, wie der Verfasser als möglich hinstellt, vielleicht nicht ganz vollständig sein, sondern hier und da ein merkwürdiger Baum übersehen sein sollte. Ausgezeichnet durch die schönen Abbildungen, bei denen übrigens meist eine oder mehrere, eine Abschätzung der Größenverhältnisse ermöglichende Personen auftreten, vortrefflich auch durch den begleitenden Text, der die einzelnen Baumklassen nach ihrer Art und den für ihre eigentümliche Gestaltentwickelung maßgebenden Faktoren gruppiert und eine Fülle von einzelnen, dem Laien meist neuen Winken, gibt. Aeußerlich ist es so eingerichtet, daß zunächst die sämtlichen Abbildungen hintereinander folgen, dann der auf diese Abbildungen immer zurückgreifende zusammenhängende Text, beginnend im ersten Teil mit den Nadelhölzern, zuerst Fichte und Tanne, von diesen zunächst die durch Größe, Schönheit und Alter hervorragenden normalen Bäume, dann durch Samen- oder Knospenvariation entstandene Spielarten (Trauertannen und -Fichten, Schlangentannen und -Fichten, astlose Fichten, Säulenfichten, Hexenbesen und Kugelfichten, Zwergfichten usw.), krankhafte Wuchsformen (Knollenfichten usw.), Standortsformen der Fichte und Tanne usw.

Dann folgt der zweite, die Laubhölzer enthaltende Teil, ein dritter Teil bringt Verwachsungen jeder Art, teratologische und pathologische Mißbildungen, unter die übrigens auch noch eine Reihe von Abbildungen der beiden ersten Teile fällt.

Das Buch ist in hohem Grade geeignet, die verständnisvolle Naturbeobachtung zu wecken und zu steigern, dabei bereitet seine Durchsicht an sich viel Vergnügen. Möge es viele Leser finden und möge es zu vielen ähnlichen Beschreibungen den Anstoß geben. Dabei denke ich besonders an den Harz, der für ein ähnliches Buch eine reiche Fülle von Stoff bieten würde. P.

* * *

G. C. Young und W. H. Young. Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe, besorgt von S. und F. Bernstein. Mit 127 Figuren und 3 bunten Tafeln; XVI und 239 S. Leipzig und Berlin 1908, B. G. Teubner. Preis M 3.

Ein Buch, das ich mit vieler Erwartung in die Hand genommen und mit gemischten Empfindungen wieder aus der Hand gelegt habe. Es ist von einer Mutter (Grace Chisholm Young) zum Unterricht der eigenen Kinder geschrieben und soll demgemäß den kindlichen, auch nach geometrischer Erkenntnis dürstenden Geist auf eine möglichst einfache und natürliche Weise in die Geometrie einführen, also eine Propädeutik mit einfachsten Mitteln bieten. Natürlich ist dazu die planmäßige Pflege der Anschauung eines der wichtigsten Mittel, diese wird nun dadurch bewirkt, daß geometrische Gebilde durch Falten von Papier zustande gebracht werden, dazu tritt gelegentlich noch das Einstecken von Nadeln und das Einschneiden des Papieres längs gewisser Falten (Kniffe).

Das ist ja nicht ganz neu, schon manche Lehrer und manche Eltern haben davon mit Nutzen Gebrauch gemacht, aber es ist doch sehr lehrreich und nützlich, in diesem kleinen Buche zu sehen, wie viel man damit erreichen kann, insofern ist das Buch eine sehr dankenswerte Bereicherung der zur Einführung in die Geometrie bestimmten Literatur.

Nun kommt aber zu dem noch der erklärende Text hinzu und mit diesem vermag ich mich nur zum Teil einverstanden zu erklären. Je weiter die Unterweisung fortschreitet, um so abstrakter und doktrinärer wird die erläuternde Auseinandersetzung, nach meinem Gefühl geradezu geeignet, die Freude an der zunehmenden Erkenntnis zu beeinträchtigen. Da werden Prinzipien aller Art eingeführt, formelle Beweise gegeben, Definitionen zweifelhafter Art aufgestellt, neue, dem praktischen Empfinden des Kindes wohl recht gleichgültige Begriffe (z. B. Symmediane) herangezogen, selbst die Unbeweisbarkeit der Parallelentheorie zur Sprache gebracht und der fehlende Beweis durch Aufstellung eines Grundsatzes ersetzt u. dergl. m.

Fremdwörter wie „isogonal-konjugierte“ Linien sind für ein Kind doch einfach unverständlich, solcher Wörter bietet das Buch aber eine ganze Zahl.

Manche Sätze sind auch dem gereiften Leser etwas dunkel, wie z. B. der Satz auf Seite 207: „Die die Mittellinie Begleitende heißt die Symmediane. In dem Fall, daß das Dreieck nicht rechtwinklig ist, vertritt sie oft die Senkrechte auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wie der Vergleich der folgenden Uebungen mit dem am Ende von § 31 ergeben wird“. Das ist nichts als ein konfuser erneuter Hinweis darauf, daß die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörende Symmediane mit der Dreieckshöhe zusammenfällt, während überall sonst beide Linien voneinander getrennt sind. Die Ableitung des Wortes Tetraeder von dem gar nicht existierenden Worte „hedron“, das angeblich Ecke bedeuten soll, ist ein arger Schnitzer, vor dem die Namen vieler anderer, nicht in Eckenzahl und Flächenzahl zufällig übereinstimmender Polyeder hätten warnen sollen. — In den Figuren sind die Buchstaben vielfach so klein, daß sie kaum zu erkennen sind. — So darf das Buch nur teilweise auf Anerkennung Anspruch machen. P.

* * *

Berichtigung.

Zu meinem Bedauern ist mir bei der Besprechung des Buches: „Höhere Mathematik“ von R. Geigenmüller (Unt.-Bl. XV, Nr. 2, S. 42) ein Irrtum insofern unterlaufen, als ich die Fig. 16, Bd. I, als eine fehlerhaft gezeichnete Ellipse angesprochen habe. Dieselbe stellt vielmehr eine eiförmige Kurve vierter Ordnung von der Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = 2rx^3$ dar und ist vollständig richtig gezeichnet. F. Hoeber.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Fuß, K., Leitfaden für den Unterricht in der Chemie und Mineralogie mit Berücksichtigung der Land- und Hauswirtschaft sowie der Industrie. 4. verb. Aufl. Mit vielen Abb. Nürnberg 1909, Kornsche Buchhdlg. M 3.—.

Geistbeck, M., Mathematische und physikalische Geographie. 30. durchgesehene und 31. Aufl., mit 116 Abb. Freiburg i. Br. 1908, Herder. M 1.60.

Girndt, M., Aufgabensammlung zur bautechnischen Algebra. Leipzig 1909, Teubner. kart. M 1.50.

—„— Leitfaden der bautechnischen Algebra. 3. Aufl. Mit 29 Fig. im Text und 2 Tafeln. Ebenda. kart. M 1.50.

Girndt-Liebmann, Mathematische und technische Tabellen. Mit 58 Fig. Ebenda. kart. M 1.20.

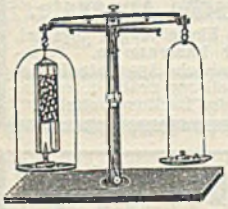
Goldschmidt, W. K., Der Wert des Lebens (Moderne Philosophie, Bd. 3). Schöneberg 1909, Buchverlag der Hilfe. M 1.—.

Graebner, P., Die Pflanzenwelt Deutschlands. Mit zoologischen Beiträgen von Oberl. F. G. Meyer. 129 Abb. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 7.—.

Gruner, P., Stoff und Kraft (Naturstudien für jedermann). Heft 1. Godesberg, Naturwiss. Verl. à Heft M 0.20.

Gutzeit, E., Die Bakterien im Kreislauf des Stoffes in der Natur und im Haushalt des Menschen (Aus Natur und Geisteswelt). Mit 13 Abb. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert auch



sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.

Gegen Einsendung von 30 Pf. erhalten Sie zwei Proben oder gegen Nachnahme von 15 M eine Probekiste mit 12 Flaschen unserer preiswerten

Niersteiner Weine

weiß, rot od. sortiert franko jeder deutschen Eisenbahnstation. Im Fasse per Liter M 1.— und höher ab hier.

Gräflich von Schweinitz'sches Weingut, Nierstein a. Rh. 120.

Im Verlage von Otto Salle in Berlin erschien:

Neuere Darstellungen
der
Grundprobleme der reinen Mathematik
im Bereiche der Mittelschulen
von Dr. **Alois Lanner.**
Prof. a. d. Staats-Oberrealsch. in Innsbruck.
Preis 3 Mk.

Zwei Forderungen sind es, die mehr und mehr seitens der Fachkreise erhoben werden, nämlich einerseits ein engerer Anschluss des mathematischen Unterrichts in den höheren Lehranstalten an die Ergebnisse der wissenschaftl. Forschung, andererseits eine Erweiterung des Lehrstoffes in die Funktionentheorie und Infinitesimalrechnung. Diesen Forderungen gerecht zu werden, hat sich das Buch in seinen Darlegungen zur Aufgabe gestellt.

Verlag von Otto Salle in Berlin W 57

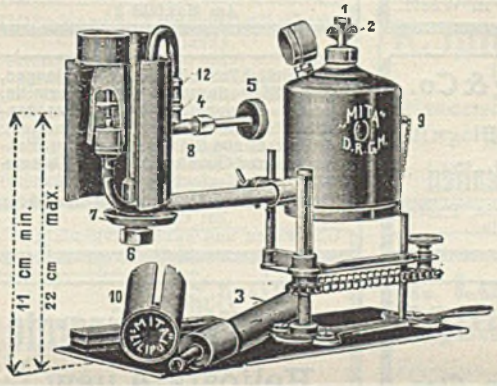
Soeben erschien:

Der biologische Unterricht
in den
Ober-Realschulen.
Erwägungen und Vorschläge
von
Dr. Ricken
Direktor der Ober-Realschule in Hagen.
Preis 1.— M.

Zum graphischen Zeichnen
bestens empfohlen sind
Dr. Weills Graphische Hefte
à 1.— M (D. R.-G.-M. 323540)
I. für Mathematik und Naturwissenschaften
II. für Geographie, Wirtschaftslehre und Statistik.

Von einem praktischen Schulmanne zusammengestellt, finden dieselben auch wegen der damit verbundenen außerordentlichen **Billigkeit des qmm Papieres** rasch neue Freunde und Einführung.
Musterexemplare an die Herren Fachlehrer gerne gratis vom
Verlag: J. Boltzesche Buchhandlung in Gebweiler.

Unabhängig, einfach, sicher, sauber, ohne Vor- und Nacharbeit, ohne Vor- und Nachentwicklung, also jederzeit im Moment fertig und beinahe kostenlos im Betriebe, ist
„Mita"-Reform-Licht.
Die beste Lichtquelle nach Bogenlicht, beinahe Kalklicht erreichend, **vorzüglich für Unterricht mit Lichtbildern und für Laboratorien.**



Wer mit einer angenehmen u. zuverlässigen Lichtquelle von 40 facher Vergrößerungskraft in Familie, Schule und auf Reise arbeiten will, fordere Prospekt und Gebrauchsanweisung 10 in jeder größeren Handlung photograph. Artikel oder direkt von

Siegel & Butziger Nachf.
Dresden-A. 42.

Verlag der **J. Boltzeschen Buchhandlung** in **Gebweiler.**

Soeben ist erschienen und kann durch jede Buchhandlung bezogen werden:

Sammlung graphischer Aufgaben
für den Gebrauch an höheren Schulen.
I. Mathematik
von
Dr. A. Weill,
Oberlehrer am Gymnasium zu Gebweiler.
Preis M 1.80.

Die Aufgabensammlung ist so eingerichtet, daß sie an den verschiedensten Punkten im Unterricht verwandt werden kann. Sie versucht durch positive Angaben, eine systematische Entfaltung des Funktionsbegriffs zu ermöglichen.

Mineralien, Mineralpräparate, geschliffene Edelsteine, Edelsteinmodelle, Meteoriten, Metallsammlungen, mineralogische Apparate und Utensilien.
Gesteine, Dünnschliffe von Gesteinen, Verwitterungsfolgen von Gesteinen. Bodenarten. Bodenkarten natürlicher Gesteine nach Prof. A. Geistbeck, geologische Hämmer.
Petrefakten, Gipsmodelle selt. Fossilien, und Anthropologica, Geotektonische Modelle. **Sammlungen für allgemeine Geologie.** Exkursions-Ausrüstungen. Krist. Polyskop.
Krystallmodelle aus Holz, Glas und Pappe. Kristalloptische Modelle.
Diapositive für den geologischen und petrographischen Unterricht, sowie für physikalische Geographie (Erdbeben-Serien usw.).
Der neue mineralogisch-geologische Lehrmittel-Katalog (reich illustr.) No. XX, steht auf Verlangen portofrei zur Verfügung.
Meteoriten, Mineralien und Petrefakten, sowohl einzeln als auch in ganzen Sammlungen, werden jederzeit gekauft oder im Tausch übernommen.
Dr. F. Krantz, Rheinisches Mineralien-Kontor,
Fabrik und Verlag mineralogischer und geologischer Lehrmittel.
Gegründet 1833. Bonn a. Rh. Gegründet 1833.

Nur Jahresaufträge. **Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.** Beginn jederzeit.

Dr. Theodor Schuchardt
Chemische Fabrik, Görlitz.
Wissenschaftliche Präparate, Reagenspapiere
Sammlungen von
Elementen, Präparaten, Alkaloiden, Farbstoffen, Drogen usw. für den Unterricht.
Preisliste zu Diensten.

Höllein & Reinhardt
Neuhaus/Rennweg
Thermometer aller Art
Glasinstrumente und Apparate,
Geißler- und Röntgen-Röhren, Glas-Meßgeräte, Glasbläserei-Artikel, Glas-Lehrmittel.
Katalog zu Diensten.

Anatomische, zoologische und botanische Präparate und Modelle für den
Naturwissensch. Unterricht
in bekannter Güte.
Illustrierte Preisliste kostenlos.
Zoologisches Institut
Wilh. Haferlandt & Co., G. m. b. H.,
Charlottenburg, Schillerstr. 88.

Verbessertes Gabelelektroskop
nach Prof. Busch.
10 M per Paar.
Billigstes und in seiner Wirkung unübertreffliches Elektroskop. Prospekt sende ich auf Wunsch. Wiederverkäufer erhalt. hohen Rabatt. Allein. Fabrikant
J. E. Evers, Arnsberg in Westf.

:: Petrefakten ::
von Solnhofen, Fränk. Jura, und
Rhätpflanzen
verkaufe billig
E. Reinhard, Nürnberg
Am Maxfeld 3

Paul Gebhardt Söhne, Berlin C 54
Spezialität:
Physikalische Apparate.
Bauabteilung: Einrichtungen physikal. und chemischer Laboratorien. Preisliste 17: Physikalische Apparate; Preisliste 18: Bauabteilung, gratis u. franko.
Lieferanten der Berliner Schulen.

Dr. Heinr. König & Co.,
G. m. b. H.
Chem. Fabrik, Leipzig-Plagwitz
sämtliche Chemikalien
für Wissenschaft, Pharmazie, Photographie und Technik.

Ia Qualität künstl. Tier- und Vogelaugen, feinste Säugetieraugen mit Glasemaille, Garantie naturgetreu, künstl. Menschenaugen (Reformaugen nach Prof. Snellen), Hilfsartikel aus Glas für Aquarien, Präparaten- und Conchyliengläser, Thermometer usw. offeriert (Preislisten franko)
Theodor Zschach, Mönchröden
bei Coburg
Glaswaren und künstl. Augenfabrik.

E. Leybold's Nachfolger
Cöln a. Rh.
Fabrik Physikal. Apparate
Spezialität:
Apparate für Schülerübungen

Friedr. Thomas
Siegen i. W.
Kristallmodelle aus Glas,
an den meisten Lehr-Anstalten eingeführt.
Man verlange Preisliste.

Projektions-Apparate
Heliostate usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

R. Winkel, Göttingen
Optische und mechan. Werkstatt.
Projektionsapparate für die Schule
in jeder Preislage. Sehr geeignet zur Vorführung aller Experimente, welche mittels Projektion sichtbar zu machen sind. Ferner für Mikro- und Diapositivprojektionen.
Preisliste frei und unberechnet.

Physikal. Apparate
u. **chemische Gerätschaften,**
sowie sämtl. **Schullehrmittel**
fertigen u. liefern in bekannter tadelloser Ausführung zu mässigen Preisen.
Schultze & Leppert
Physikalisch-mechanische u. elektrotechn. Werkstätten, Cöthen in Anh.

Spektralapparate
Kathetometer, optische Bänke usw.
Hans Heele, Berlin O. 27.

Naturalien- und Lehrmittel-Anstalt
Ernst A. Böttcher,
Berlin C. 2, Brüderstr. 15.
Werkstätte und Lager naturwissenschaftlicher Lehrmittel aller Art.
Kataloge gratis u. franko.
„Gold. Med. St. Louis 1904."

Empfehlen
Elektr. Instrumentarium
für Lehrzwecke
welches allgem. Anerkennung findet.
Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt am Main.
Spezialkatalog zu Diensten.

Projektions-Photogramme
für den
Naturwissensch. Unterricht
in zweckdienlichster Ausarbeitung
Prospekt und Verzeichnisse kostenlos
Otto Wigand, Zeitz. 2.

Spezial-Fabrik aller Arten
Elektrischer und magnetischer Mess-Instrumente
für Wissenschaft und Praxis.
Hartmann & Braun A.-G.
Frankfurt am Main.
Kataloge stehen zu Diensten.

Klapptafel n. Prof. Rühlmann, mit Zubehör, z. Darstellung aller Lagen von Punkten, Geraden u. Ebenen, sowie die in Aufgaben vorkommenden Bewegungen. Prospekt frei. Dynamos, Dampfmaschinen, Wasserturbinen.
Rob. Schulze, Halle a. S.
Elektrotechn. u. mechan. Werkstätten.

Sämtl. Bedarfsartikel für Projektion, Reduzierventile, Kalklichtbrenner (Marke „Triumph" usw.)
Prospekte gratis und franko.
Sauerstoff-Fabrik Berlin, G. m. b. H.
Berlin B. 11. Tegeler Straße 15.
Mehrfach prämiiert auf in- und ausländischen Ausstellungen.

Franz Schmidt & Haensch
Berlin S 42, Prinzessinnenstr. 16
Polarisations-, Spektral-, Projektions-Apparate, Photometer u. andere wissenschaftl. Instrumente
Preislisten kostenlos.

Lehrmittel!!
Anatomische Modelle, künstl. Früchte und Pilze, Skelette und Schädel, künstl. Augen aller Arten } Lieferant für Lehranstalten
liefert billigst
A. Müller-Zschach, Lauscha S.-M.

Neuheit Patentiert Neuheit
Starkstrom-Influenz-Maschine „Mercedes"
Alfred Wehrsen
Berlin SO 33.
Liste 10 a gratis.

Influenz-Maschinen
Alfred Wehrsen
Grösste Spezialfabrik
Berlin SO 33.
Liste 10 gratis.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's u. unseren technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!

Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie **chem.-techn. Wagen** von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeek & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Laboratoriums-Apparate
Demonstrations-Apparate
für Chemie, Physik usw.
Dr. Rob. Muencke
Berlin N. W. 6, Luisenstr. 58.

Apparate für elektrische Strom-Spannungs- u. Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektrischer Meßapparate
Gans & Goldschmidt
Elektrizitäts-Ges. m. b. H., Berlin N 65.

Max Kohl, A.-G., Chemnitz, Sachsen
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
::: Physikalischen Apparaten und ::: **:::: chemischen Gerätschaften ::::**
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen
mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

R. Winkel, Göttingen
Optische und mechan. Werkstatt.
Mikroskope
von den allerfeinsten bis zu den einfachen Schulmikroskopen
— in erstklassiger Ausführung. —
Preisliste frei und unberechnet.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O. 27, Andreasstr. 71—73.

R. Jung, Heidelberg
Werkstätte für
wissenschaftl. Instrumente
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

Anthropologie
in der Schule
Vielfach preisgekrönt
Kataloge kostenlos —
Linnaea
Berlin NW 21

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Botanische Modelle
in eigener Werkstatt hergestellt
liefert und empfiehlt
R. Brendel, Grunewald-Berlin.
Preisverzeichnisse
werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel

Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
— Patent Klingelfuss. —

Lehrmittel
für den
naturwissensch. Unterricht
liefert in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mäßigen Preisen
Wilh. Schlüter, Halle a. S.
Naturwissensch. Lehrmittel-Institut.

Otto Himmler
Optisch-mechanische Werkstätte
Mikroskope
Berlin N 24.

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und
Apparate für strahl. Wärme
nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz, Wetzlar
Projektionsapparate
Mikroskope, Mikrotome
Mikrophotographische Apparate
= Photographische Objektive =
Prismen - Feldstecher.

Arno Haak, Jena
Carl Zeißstraße 12
Glastechnische Werkstätte.
Thermometer
und **Glasinstrumente** für Wissenschaft und Technik.

Sauerstoff
Wasserstoff
Leuchtgas
komprimiert in leichten Stahlzylindern
Sauerstoff-Fabrik Berlin, G. m. b. H.
Berlin B. 11, Tegeler Straße 15.
Ständige Musterausstellung, Besichtigung erbeten. — Bitten genau auf Firma zu achten!

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Heidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Vorzügl. Erwerbsquelle
für Pensionierte, Rentner, Damen ist ein **Original-Kaiser-Panorama,** das Ideal aller Anschauungsmittel, stereoplast. Urkunden, das Sehenswert. der Erde, 760 Zyklen, grösst. Archiv der Welt. An 1000 pädag. Anerkenn. 250 Filialen. Ca. 2500 M., erford. Prosp. gratis.
Hofl. **A. Fuhrmann, Berlin W,** Passage.
Lichtbilder mit Vorträgen leihweise.

Verlag von Otto Salle, Berlin W. 57

Bei Einführung

neuer Lehrbücher

seien der Beachtung der Herren Fachlehrer empfohlen

Geometrie.

Fenkner:

Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Prof. Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. W. Krumme, weil Direktor der Ober-Realschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2.20 M. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1.60 M. Dritter Teil: Ebene Trigonometrie. Preis 1.60 M.

Lesser:

Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Oskar Lesser, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 M.

Walther:

Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie für die Unter- und Mittelstufe mit Anhang (Trigonometrie und Anfangsgründe der Stereometrie). Von Dr. Fritz Walther, Oberlehrer am Französ. Gymnasium in Berlin. Preis 2.20 M mit Anhang.

Arithmetik.

Fenkner:

Arithmetische Aufgaben. Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Bearbeitet von Prof. Dr. Hugo Fenkner in Braunschweig. — Ausgabe A (für 9stufige Anstalten): Teil I (Pensum der Tertia und Untersekunda). 6. Aufl. Preis 2.20 M. Teil IIa (Pensum der Obersekunda). 3. Aufl. Preis 1.20 M. Teil IIb (Pensum der Prima). 2. Aufl. Preis 2.60 M. — Ausgabe B (für 6stufige Anstalten): 3. Aufl. Preis geb. 2 M. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittleren Lehranstalten): Preis 1.10 M.

Physik.

Heussi:

Leitfaden der Physik. Von Dr. J. Heussi. 16. völlig umgearb. Aufl. Mit 199 Holzschnitten. Bearbeitet von Prof. Dr. E. Götting. Preis 1.50 M. — Mit Anhang „Elemente der Chemie". Preis 1.80 M.

Heussi:

Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und andere höhere Bildungsanstalten. Von Dr. J. Heussi. 7. verb. Aufl. Mit 487 Holzschnitten. Bearbeitet von Prof. Dr. E. Götting. Preis 5 M.

Chemie.

Levin:

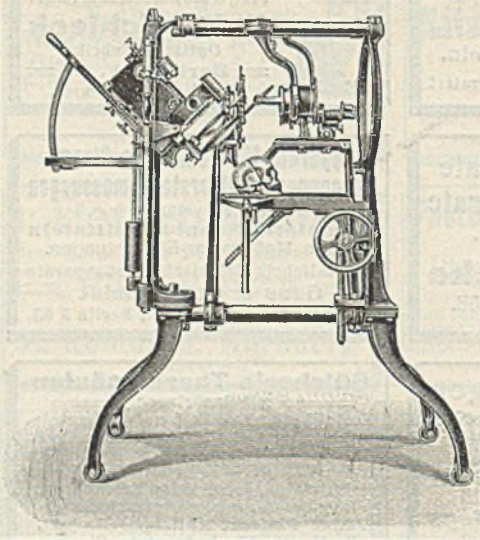
Meth. Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Chemie unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Prof. Dr. Wilh. Levin. 5. Aufl. Mit 112 Abbildungen. Preis 2 M.

Levin:

Meth. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Oberrealschulen. Von Prof. Dr. Wilh. Levin. Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgym., Untersekunda der Oberrealschule). Mit 72 Abb. Preis 1.40 M. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda u. Prima). Mit 113 Abb. Preis 2.40 M. Teil III: Organische Chemie. Mit 37 Abb. Preis 1.65 M.

E. Leitz, Optische Werke, Wetzlar

Berlin NW., Luisenstraße 45. Frankfurt a. M., Neue Mainzerstraße 24.
St. Petersburg. London. New-York. Chicago.

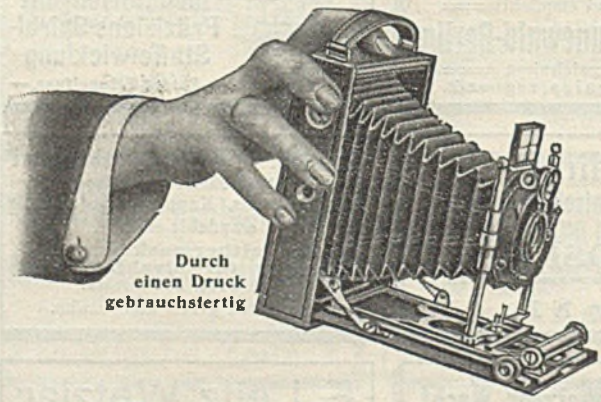


Projektions-Apparate
für
Demonstrations- und Schulzwecke, sowie für physikal. Projektionen

Mikroskope
Mikrotome
Mikrophotographische Apparate
Photogr. Objektive
Prismenfeldstecher.

Spezial-Kataloge 42d auf Verlangen gratis.

GOERZ
AUTOFOK-
„TENAX"
Flachkamera für Platten und Filmpacks



Mit Goerz-Doppel-Anastigmat
Dagor und Syntor

Format 9×12 cm M 210.— M 170.—
Format 10×15 cm M 245.— M 195.—

Preisliste kostenfrei.

Bezug durch alle Photohandlungen, wo nicht erhältlich, durch die

Opt. Anstalt C. P. GOERZ, A.-G.
Berlin-Friedenau 106

Wien Stiftgasse 21 | Paris 22 rue de l'Entrepôt | London 1,6 Holborn Circus | New-York 79 East 130 th. Street

☞ Hierzu je eine Beilage der Firmen **Fr. Fuendeling**, Werkstätten für Feinmechanik in **Friedberg** (Hessen) ● **R. Paul Sachse in Halle a. S.** ● **B. G. Teubner**, Verlag in **Leipzig** ● **Friedr. Vieweg & Sohn**, Verlag in **Braunschweig** ● **Leopold Voss**, Verlag in **Hamburg**, welche geneigter Beachtung empfohlen werden.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.