Jahrgang XV. 1909. No. 6.

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

An die Leser.

Mit der gegenwärtigen Nummer nehme ich Abschied von den Lesern der „Unterrichtsblätter“, deren Redaktion vom nächsten Jahrgang ab in den Händen des Herrn Professors Dr. A. Thaer, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg, liegen wird.

Als ich vor 15 Jahren zusammen mit dem verewigten Bernhard Schwalbe die Redaktion der neuen Zeitschrift übernahm, haben wir in dem Geleitwort, das an der Spitze der ersten Nummer stand, die Gesichtspunkte dargelegt, von denen wir uns bei der Redaktionsführung leiten lassen wollten. Ohne den bewährten Zeitschriften, die die Interessen des mathematischen und naturwissenschaftlichen anderweit in anerkannt vorzüglicher Weise vertraten, irgendwie in den Weg zu treten, wollten auch wir auf unsere Weise diesen selben Interessen dienen, indem wir ein möglichst in die Hände jedes einzelnen Fachgenossen gelangendes Organ schufen, dessen Spalten dem freien Meinungsaustausch über wichtige Fragen des genannten Unterrichts offen ständen. Wir hofften auf diese Weise die Anregungen, die die Versammlungen des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts ihren Teilnehmern gewähren, weiteren Kreisen, ja möglichst allen Fachgenossen zugänglich zu machen, durch die Veröffentlichungen der Vorträge und Verhandlungen auf diesen Versammlungen in der neuen Zeitschrift deren Wirkungen zu verallgemeinern und zur Fortsetzung des dort angesponnenen Gedankenaustausches eine Basis zu schaffen; in diesem Sinne sollten die Unterrichtsblätter ein Organ des Vereins sein, dem wir es herzlichen Dank wußten, daß er auf seiner Göttinger Versammlung im Jahre 1895 die neue Zeitschrift zu seinem Organ erwählte.

Im Rückblick auf die Zeit, die seitdem verflossen ist, darf ich wohl sagen, daß die Hoffnungen und Wünsche, mit denen wir die Zeitschrift bei ihrem Inslebentreten begleiteten, sich voll verwirklicht haben. Getragen von dem Vertrauen der Fachgenossen, insbesondere dem Vertrauen der Mitglieder unseres Vereines, der ja auch seinerseits eine gewisse Förderung seiner Bestrebungen, eine Zunahme der Mitgliederzahl und eine größere Ausdehnung der Mitarbeit der Fachgenossen an der innerlichen und äußerlichen Hebung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auf das Bestehen seines Organs zurückführen darf, haben sich die Unterrichtsblätter einen festen Platz unter den Fachblättern gesichert, ihre Lebenskraft und Lebensfähigkeit erwiesen.

Das Verdienst hieran gebührt vor allem den Verfassern der in den Unterrichtsblättern zum Abdruck gekommenen Artikel — eine wie stattliche Zahl von Mitarbeitern wir hier nennen dürfen, das ergibt ein Blick auf die verschiedenen Inhaltsverzeichnisse, die von Zeit zu Zeit für mehrere Jahrgänge zusammen aufgestellt worden sind.

Daß diese Mitarbeiter den Unterrichtsblättern auch in der Folge treu bleiben, daß neue wertvolle Kräfte zu ihnen hinzutreten werden, darf ich als sicher annehmen. Mit großer Freude begrüße ich es, daß ein in allen Fachkreisen so großes und verdientes Ansehen genießender Mann, wie Herr Direktor Thaer sich zur Uebernahme der Redaktion hat bereit finden lassen. Ich hoffe zuversichtlich, daß unter seiner Leitung, in dauernder Fühlung mit dem Verein, dessen Organ sie sind und unter der Mitwirkung der von Anbeginn an mit ihnen auf das engste verbundenen Verlagshandlung die Unterrichtsblätter die Interessen des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auch weiterhin und mit immer steigendem Erfolge wahrnehmen werden.

F. Pietzker.

Vereins-Angelegenheiten.

Die Vereinsmitglieder werden dringend gebeten, die für das nächste Vereinsjahr in Aussicht genommene Aufstellung eines richtigen und zuverlässigen Mitgliederverzeichnisses dadurch zu erleichtern, bezw. zu ermöglichen, daß die dem Augustheft des Vereinsorgans (1909, Nr. 4) beigelegte Karte ausgefüllt und dem Kassenführer des Vereins, Prof. Presler in Hannover, Königsworther Straße 47, zugesandt wird.

Nach dem Beschluß der diesjährigen Hauptversammlung beträgt der Jahresbeitrag vom 1. Januar nächsten Jahres ab 5 M, worauf an dieser Stelle noch besonders hingewiesen sein möge.

Den Vorsitz im Ortsausschuß für die nächstjährige Pfingstversammlung hat nunmehr Herr Prof. Dr. Spies in Posen (Helmholtzstraße 2) endgültig übernommen.

Der Vereins-Vorstand.

Die Entstehung des 60-Systems.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Freiburg (Br.)*)

Von

Georg Kewitsch in Freiburg (Baden).

Das einzige mathematische Werk, das auf meine Arbeit über dieses Thema hingewiesen hat, ist die Enzyklopädie der Elementar-Mathematik von Weber und Wellstein. Da der Druck dieses Werkes bereits abgeschlossen war, als meine Arbeit erschien (1904 B. 18, nicht 12, und Kewitsch, nicht Kewisch), so blieb die von Cantor in seiner Geschichte der Mathematik gegebene Verlegenheitserklärung im Haupttext stehen. Ich mußte meine Arbeit in der 'Zeitschrift für Assyriologie' von Bezold veröffentlichen wegen der Keilschrifttypen und weil die Assyriologen sich mit dieser Frage mehr beschäftigten als die Mathematiker. Ich hoffe jedoch, auch diesen einen Gefallen zu erweisen, wenn ich das Wesentliche meiner einfachen und natürlichen Erklärung über den Ursprung des 60-Systems im folgenden darlege.

Wir sind gewohnt, ohne Herzklopfen zu sagen: der Kreis wird in 360 Grade geteilt, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden. Fragt uns aber ein Schüler: warum? so sind wir in ungeahnter Verlegenheit. Wir können mit Gewißheit nichts anderes sagen als: es ist so allgemeiner Brauch. Dieselbe Verlegenheit entsteht bei der Frage: warum teilen wir den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden?

Nachträglich befriedigt uns aber diese gezwungene, nichts sagende Antwort nicht, denn jedem Brauch liegt eine Ursache zugrunde. Da greifen wir zu dem naheliegenden Strohhalm als Rettung: Das Jahr hat rund 360 Tage. Das sind zwar 5 Tage zu wenig, man schiebt den Fehler der rohen Beobachtung früherer Zeit zu. Gelehrter klingt es, wenn wir sagen: Die Sonne durchläuft die 12 Sternbilder des Tierkreises, jedes Sternbild faßt 30 Grad, der ganze Kreis also 360. Nur schade, daß man am Himmel die Pflöcke für die Grenzen der Tierkreisbilder nicht sieht. Oder wir wenden uns an den Mond. Er gebraucht zu seiner Bahn rund 30 Tage, d. i. 1 Monat, also kommen auf 1 Jahr 12 Monate mit 360 Tagen. Das sind aber 6 Tage zu viel, denn ein Mondlauf faßt nur

*) S. Unter.-Bl. XV, 3; S. 64. Der Vortrag erscheint hier in etwas erweiterter Gestalt durch Hinzufügung einiger zur mündlichen Mitteilung weniger geeigneter Einzelheiten, namentlich am Schluß.

$29^1/_2$ Tag, 12 also 354 Tage. Ja, meint man dann, 360 sei gewählt worden als Mittelwert zwischen dem Sonnenjahr von 365 Tagen und dem Mondjahr von 354 Tagen. Aber solchen Mittelkalender hat es nie gegeben. Ein Volk hat immer und überall entweder ein Sonnenjahr oder ein Mondjahr mit den nötigen Einschaltungen. Das kann auch gar nicht anders sein, denn der Fehler einer rohen Zählung macht sich bald bemerkbar, er beträgt nach 4 Jahren bereits 21 und 24 Tage. Die Beobachtungsmittel des Altertums waren fein genug, nämlich das erstmalige Aufblinken des hellen Sterns Sirius vor Sonnenaufgang; dann die Schattenlänge eines senkrechten Stabes, dem man oben eine Lichtöffnung gab, um schärfer beobachten zu können (der Gnōmōn). Schon die Beobachtung des Auf- oder Untergangspunktes der Sonne würde genügen, um zu erkennen, daß das Sonnenjahr mehr als 360 Tage hat.

Aber ein Rechenjahr zu 360 Tagen mit 12 Monaten zu 30 Tagen, das gab es bei den Altbabyloniern wie noch heute bei den Banken. Die 5 überschießenden Tage (Epagomenen) betrachteten sie als ein Geschenk des Sonnengottes. Man feierte während derselben. Es war die Zeit der Volksbelustigung, unserm Karneval vergleichbar, alle Geschäfte ruhten. Dies Rechenjahr haben sich die Babylonier aber nicht vom Himmel geholt, sondern es gestaltete sich so, weil sie nicht wie wir nach 10, sondern nach 6 und 60 zählten, wie ich zeigen werde.

Man hat ferner versucht, das 60-System auf ein Naturmaß, also auf Messung zurückzuführen. Man glaubt, die Sonnenscheibe sei als Naturmaß genommen worden. Die Sonnenbahn (Ekliptik) fasse 720 Sonnenscheiben, die Hälfte sind 360. Man erhält die Zahl 720, wenn man als Passierzeit der Sonnenscheibe durch den Mittagskreis 2 Minuten ansetzt; das kleinste Zeitmaß der Babylonier war ursprünglich 1 *imdu* = 4 Minuten, dem entsprechen 2 Sonnenscheiben d. i. 1 Bogengrad. Aber abgesehen davon, daß der scheinbare Durchmesser der Sonne größer als $^1/_2$ Grad ist und zwischen den Grenzen 0,525 und 0,543 schwankt, — der Mond zwischen 0,489 und 0,559 —, so hätte man doch, wenn man die Sonnenscheibe als Naturmaß wählen wollte, den Kreis in 720 Teile geteilt. Und wie war man dann vorher zu dem Zeitmaß *Imdu* = 4 Minuten gelangt? Ein Passageinstrument hatte man damals noch nicht. Man verfuhr folgendermaßen: Ein Gefäß wurde mit Wasser gefüllt und durch Zufluß aus einem Wasserbehälter dafür gesorgt, daß das Gefäß voll blieb. Im Boden war ein Loch, durch welches das Wasser tröpfeln konnte, sobald der Stöpsel herausgezogen ward. Zum auffangen dienten zwei Töpfe, ein kleiner und ein großer. Nun beobachtete man den Sonnenaufgang am Tage der Frühling- und Herbstgleiche. In dem Augenblick, wo der obere Sonnenrand sich zeigte, fing man das Wasser mit dem kleinen Topfe auf bis zum vollendeten Aufgang der Sonne, während der große Topf bis zu ihrem abermaligen auftauchen am folgenden Tage untergeschoben blieb. Man maß oder wog nun das in beiden Töpfen gesammelte Wasser und berechnete aus $^w/_W = ^x/_{360}$ den scheinbaren Durchmesser der Sonne. — Der Versuch setzt also die Kreisteilung in 360° bereits voraus und diente nicht dazu, mit der Sonnenscheibe den Umfang der Sonnenbahn zu messen, sondern umgekehrt, aus dem Umfang den scheinbaren Durchmesser der Sonne zu finden. Die Sonnenzahlen. 720 Scheiben zu $^1/_2$ Grad mit 2 Minuten Passierzeit werden ohne weiteres verständlich, wenn man das bereits vorhandene Zeitmaß *Imdu* = 4 Minuten und das Bogenmaß Grad = $^1/_{360}$ des Tagkreises auf die Sonnenscheibe in runder Zahl überträgt.

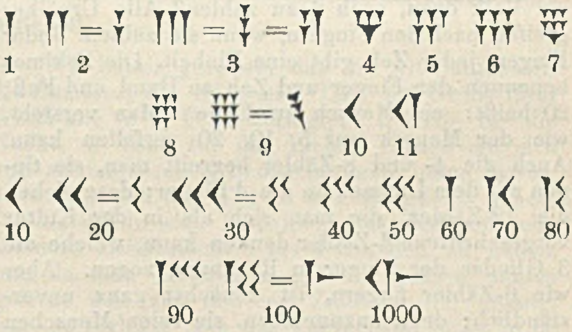
Denn in der Tat, das einzig brauchbare, sich unmittelbar darbietende Naturmaß ist der Tag *ūmu*, die Zeit einer Umdrehung der Erde um sich selbst. Die Aufeinanderfolge von Nacht und Licht drängt sich jedem auf, mag der Kulturzustand auch noch so niedrig sein. Die Einteilungen dieses Naturmaßes dagegen unterliegen der menschlichen Willkür, sie beruhen auf Uebereinkommen, insbesondere wird das bei einem Volke geltende Zählsystem Einfluß auf die Teilung aller Maße ausüben.

Die alten Babylonier, die Sumêrer hatten ursprünglich das 6-system, das sie bei höherer Kultur zum 60-system erweiterten. Dafür sprechen folgende Gründe:

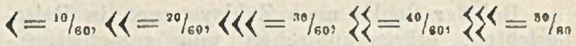
1. Sie hatten besondere Namen für die Sechstel-Brüche:

$^1/_6$ *šuššu*, $^1/_3 = ^2/_6$ *šuššan* (Dualform), $^1/_2 = ^3/_6$ *mišlu*, $^2/_3 = ^4/_6$ *šinipu*, *šinipatu* d. i. zwei Teile, $^5/_6$ *parab*, *parasrab* d. i. der große oder größte Teil.

Nachdem sie schreiben gelernt und dafür die Keilzeichen verwendeten



stellten sie jene Sechstelbrüche dar durch



also wie wir, wenn wir statt $^1/_{10}$, $^2/_{10}$ . . . schreiben 0,1, 0,2 . . .

Die 60tel-Schreibung ist wie die 10tel-Schreibung ein Merkmal späterer Kultur, der aber die 60-Zählung lange vorausgegangen sein muß.

2. Sie teilten den Tag in Sechstel zu 4 Stunden, 3 Teile kamen auf das Licht, 3 Teile auf die Nacht. Es gab 3 Nachtwachen, diese heißen *bararitu* Schummerung (Zeit des Dunkelwerdens), *qablitu* mittlere Nacht, *namaritu* Dämmerung (Zeit des Hellwerdens). Die 3 Teile des Lichts heißen Morgen, Mittag, Abend.

3. Sie teilten auch den Monat in 6 Abschnitte: Fingerwoche *ḫamuštu* = 5 Tage; dem Rechenjahr gaben sie aber doch nur 72 *ḫamuštu*, die 73. war als Volksfest (Epagomene) außer

Rechnung. Sie unterschieden daher auch nicht wie wir 4 Mondphasen, sondern je 3 für zu- und abnehmendes Licht. In der 1. *ḫamuštu* hieß der Mond *asqaru* Sichel, in der 2. *kalitu* Niere, in der 3. *agu tašriḫti* herrliche Mütze.

4. Sie teilten auch das Jahr in 6 Abschnitte zu 60 Tagen, sie unterschieden also 6 Jahreszeiten wie die Inder und Araber bis kurz vor Muhammed. Der spätere Kultus fügte die Buß- und Fastentage 7, 14, 21, 28, [5 (35), 12 (42)], 19 (49) ins Sechsteljahr ein.

5. Ihre Längenmaße waren nach 6 geteilt: 1 *qanu* (Stange) = 6 *ammat* (Elle), 1 *ammat* = 6 *qat* (Hand).

6. Nach der Sage schuf Gott die Welt in 6 Tagen, woraus man schließen darf, daß 6 der Abschluß des ursprünglichen Zählens war.

7. Im Sterngürtel der Planetenbahn hatten sie 36 Grenzmarken (Dekane) angesetzt.

8. Die Zahlensymbolik des Pythagoras stammt aus Babylon. Der höchste Schwur der Pythagoreer war die Tetraktys: $(1+3+5+7)+(2+4+6+8)=36$.

9. Nicht bloß $36=6^2$, auch $216=6^3$ tritt als etwas Besonderes auf; 1 *uddu* hatte 216 Minuten. (216 Tage) galt als Zeit kürzester Schwangerschaft.

10. Noch heute gibt es Völker, die nach 6 zählen. In Labrador ist ein Volksstamm, der nur bis 6 zählen kann; was darüber geht, heißt viel, ist unzählbar. Die Bolaner an der Westküste Afrikas, die Tarahumaren in Brasilien haben besondere Namen für 6, 12, 36.

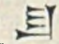
Es drängt sich die Frage auf: Wie kommt ein Volk dazu, nach 6 zu zählen? Alle Urvölker greifen nach den Fingern, wenn sie zählen. Jeder Finger, jeder Zeh gibt eine Einheit. Die Eskimos benennen den Finger und Zeh an Hand und Fuß; 20 heißt: ein Mensch zu Ende. Man versteht, wie der Mensch auf 5, 10, 20 verfallen kann. Auch die 4- und 8-Zähler begreift man, sie tippen mit dem Daumen an die 4 Finger; desgleichen die 12-Zähler, die man sich als in der Kultur vorgeschrittene 4-Zähler denken kann, welche die 3 Glieder der Finger in Rechnung zogen. Aber wie 6-Zähler fingern, ist zunächst ganz unverständlich; denn anzunehmen, sie seien Menschen mit 6 Fingern gewesen, geht doch nicht.

Bei der Suche nach Zählsystemen in Reiseberichten, ethnographischen und sprachwissenschaftlichen Zeitschriften und Werken stieß ich auch auf das merkwürdige 11-System der Neuseeländer, das zwar von den Engländern längst verdrängt ist, für welches aber noch die Sprache Zeuge ist: sie hat für 11, $121=11^2$, $1331=11^3$ die besonderen Namen *katekau*, *karaou*, *kamano*. Weder für die 6-, noch für die 11-Zählung gab es bisher eine Erklärung.

Da las ich einen Reisebericht des Chr. Schrumpf über die Art, wie die Bassuto in Afrika ihr 10-System darstellen: 'Beim Zählen über 100 müssen drei Mann die schwere Arbeit verrichten. Der erste zählt an den Fingern, die er einen nach dem andern aufhebt, die Einer, beginnend mit dem Kleinfinger der linken Hand und fortlaufend bis zum Kleinfinger der rechten. Der zweite tut ebenso für die Zehner, wenn sie voll werden. Der dritte zeigt die Hunderte in derselben Weise an.'

Man erkennt, daß hier eine Haufenzählung geübt wird zu je 10, je 100; aber man bemerkt zugleich, daß die Vollzahlen zweimal auftreten: der erste Mann sagt am Schlusse 10 und der zweite Mann am Beginne sagt auch 'Eine Zehn'. Hierin liegt eine gewisse Verschwendung der Zählmittel. Vermeidet man diese und läßt den zweiten Mann beim Erheben des linken Kleinfingers nicht 10 wiederholen, sondern 11 sagen, so entsteht das 11-System auf ganz einfache natürliche Weise. Während der zweite Mann den linken Kleinfinger bei *katekau* 11 erhebt, zieht der erste Mann die 10 Finger ein und hebt nun beim Weiterzählen wieder jeden Finger einzeln, so daß wir erhalten $11+1=12$, $11+2=13 \ldots 11+10=21$. Darauf hebt der zweite Mann den Nebenfinger, dessen Bedeutung $2 . 11=22$ ist. Der erste Mann zieht wieder die Finger ein, und so geht es weiter bis $10 . 11+10=120$. Nun kommt der dritte Mann, hebt den Kleinfinger der linken Hand und sagt *karaou* $=121=11^2$ d. i. Elf-Elf, entsprechend unserm Hundert = Zehn-Zehn. Es wird hier also keine Haufenzählung befolgt wie bei den Bassutos, sondern eine Reihenzählung, eine richtige Ausführung des Stellenwertes. Das Einziehen der Finger des ersten Mannes vertritt die Null.

Genau so wie das 11-System entsteht das 6-System, wenn der Zähler auf sich allein angewiesen ist. Die linke Hand erhebt je einen Finger, man erhält die Zahlen 1—5. Darauf mit dem Rufe 'sechs' erhebt man den Kleinfinger der rechten Hand und schließt zugleich die linke Hand. Während der Kleinfinger der rechten Hand aufrecht bleibt, zählt man weiter von neuem die Finger der linken Hand und erhält $6+1=7$, $6+2=8$, ... $6+5=11$. Darauf hebt man den Nebenfinger der rechten Hand mit dem Ruf 'Zwei-Sechs' = 12 usf. Für den dritten Mann des 11-Systems tritt der linke Fuß mit seinen 5 Zehen ein, für den vierten Mann der rechte Fuß. Statt der beiden Füße kann man die Hände eines zweiten Menschen wählen. Man erhält so die höheren Zahlstufen für $6^2=36$ und $6^3=216$.

Eine zweite Erklärung für das 6-System ist folgende: Während wie vorhin die Finger der linken Hand die Zahlen 1 bis 5 darstellen, kann die ausgebreitete Hand oder die Faust das Sinnbild für 6 sein. Hierfür spricht das keilschriftliche Zeichen  und der Name *qatu* Hand als Sinnbild der 6. Das wäre eine Haufenzählung. Die Finger der rechten Hand geben dann die Haufen 6 . 1, 6 . 2, 6 . 3 . . ., die Hand-Hand $= 6 . 6 = 6^2 = 36$ wäre ebenfalls die zweite Stufe.

Bei fortschreitender Entwicklung im Verkehr der Menschen machte sich das Bedürfnis nach größeren Zahlen geltend. Rein mathematisch hätten die 6-Zähler nach Potenzen von 6 fortschreiten sollen und es finden sich ja auch Belege für 36 und 216. Der Zeitteil $^1/_{36}$ Tag $= {}^2/_3$ Stunde = 40 Minuten wäre für uns sogar ein brauchbares Zeitmaß für eine Lektion in der Schule, weil wir dann auf die 4 Stunden 8 bis 12 fünf Lektionen legen können mit je 10 Minuten Pause. Auf diese Lösung, den Nachmittagsunterricht aus der Schule zu bannen ohne Störung anderer Verhältnisse, habe ich wiederholt seit vielen Jahren hingewiesen.

Ich bezweifle, daß der nach 6 zählende Urmensch rein mathematische Gefühle hatte, die ihn drängten, seine Zahlen theoretisch nach Potenzen von 6 aufzubauen.

Für große Zahlen schritt das 6-System zu langsam vor. Man kam schneller vorwärts, wenn man 6 als höhere Einheit jedem der 10 Finger unterlegte mit vorausgehendem Vorstrecken der Faust als Merkmal der 6. So gelangte man zu 60. Solche Einführung einer höheren Einheit berichten Reisende auch von andern noch lebenden Völkern. In der Valmansprache von Neu-Guinea zählt man die Finger und Zehe bis 20. Für weitere Zählung greift man auf die 'Hand' als höhere Einheit zurück, die aber hier 5 bedeutet, und zählt nun so viele Fünfheiten, als Finger und Zehe zulassen. So gelangt man zu 50 als ersten Ruhepunkt, zu 100 als zweiten. — Zu einer höheren Einheit stiegen auch die altnordischen Völker, die 12-Zähler waren. Wir selbst haben ja noch auf der Schule gelernt: 1 Rute = 12 Fuß, 1 Fuß = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Strich, 1 Malter = 12 Scheffel, 1 Wispel = 24 Scheffel, und noch heute gilt bei uns 1 Groß = 12 Dutzend, 1 Dutzend = 12 Stück, 1 Schock = 60 Stück. Während bei den 12-Zählern die Fingerglieder die erste Zahlenstufe lieferten, legten sie dem ganzen Finger die höhere Einheit 12 bei. Oder mit mehr Wahrscheinlichkeit: Sie schlugen beide Hände zusammen als Sinnbild der höheren Einheit 10 und zählten in der gleichen Weise 6 und 12 Zehner, wie sie 6 und 12 Einer zählten. Daher hatte bei den 12-Zählern Hundert den Wert 120, das zur Unterscheidung das Groß-Hundert genannt wird, und 60 war bei ihrem Zählen der erste Ruhepunkt. Durch solche Ruhepunkte erklärt sich die verschiedene Wortbildung in der Reihe der Zehner mehrerer Sprachen, z. B. im Sanskrit haben die Zehner 20 bis 50 die Endung *-at*, 60 bis 90 die Endung *-ti*; im Althochdeutschen 20 bis 60 die Endung *-zuc*, 70 bis 110 die Endung *zo*; im Angelsächsischen haben die Zehner von 70 an *hund-* als Vorsilbe, im Gotischen als Nachsilbe. Im Angelsächsischen heißt *hond* die Hand. Ich hatte die 12-Zähler zuerst als vorgeschrittene 4-Zähler hingestellt; man kann sie sich aber auch als erweiterte 6-Zähler denken.

Wir haben erkannt, daß die fingernden 6-Zähler schon allein aus Bedürfnis nach größeren Zahlen zur höheren Einheit 60 gelangen konnten. Es ist indessen nicht ausgeschlossen, daß ihr Handelsverkehr mit anders zählenden Völkern sie zum 60-System drängte, denn in 60 kommen 3-, 4-, 6-, 12- und 5-, 10-, 15-, 20-Zähler zusammen. Der Anstoß dazu konnte auch dadurch entstanden sein, daß ein Zehner-Volk das Sechser-Volk unterjochte und sich mit ihm zu einem neuen Staatswesen vereinigte. Alsdann konnte leicht die höhere Einheit 10, die höheren Einheiten 6 und 12 verdrängen, so daß die Zehner-Zählung die Uebermacht gewann. So erklärt sich, warum wir statt zehn + eins, zehn + zwei sagen: elf, zwölf d. i. 1 und 2 darüber (ein-lif, zwei-lif), und daß in der Keilschrift 100 das Sonderzeichen erhielt, 1000 , die nach dem 60-System = 60 + 40 sprich: 1 Sōs 4 Zehner, und = 16 . 60 + 40, sprich: 16 Sōs 4 Zehner oder 1 Nêr (600) 6 Sōs 4 Zehner darzustellen waren. Es erklärt sich ferner, warum im Assyrischen die einfachen Zahlwörter bis 10 laufen. Die Assyrer waren Semiten; alle Semiten sind 10-Zähler; sie waren die Eroberer. Die Keilschrift selbst mit ihren 9 Keilen und dem Winkelhaken leitete übrigens ebenfalls dazu an, Zahlnamen bis 10 zu bilden. Das 60-System, also das in der Kultur spätere, erforderte keine 60 Namen. Zwar ausführbar wäre es gewesen, wie die Chinesen zeigen, die ein Großjahr von 60 Jahren haben; jedes Jahr hat seinen Namen, wie bei uns die Monate: kia, tse . . . . Dagegen die Eskimos haben nur 5 Zahlnamen und können dennoch jede größere Zahl durch Hinzufügen von Hand, Fuß, Mensch bezeichnen. Das Sonderzeichen für 100 beweist aber auch, daß das Sechservolk die Keilschrift bereits erfunden hatte, als die Assyrer erobernd eindrangen. Das einfache Zeichen für 10 hat seinen Grund nicht im 10-System, sondern weil mehr als 3 mal 3 Keile umständlich zu schreiben und schlecht zu lesen waren; der Winkelhaken ist eine Zusammenfassung von 10 Keilen. Hätten die 10-Zähler die Keilschrift erfunden, so würden sie auch zu 3 mal 3 für 90 verbunden haben, und der Stellenwert für hätte nicht 60, sondern 100 bedeutet.

Wir hatten gesehen, daß die Alt-Babylonier, die Sumêrer, das Naturmaß 'Tag' auf Grund ihrer 6-Zählung in 6 Teile zerlegten, 3 Teile für die Nacht, 3 Teile für das Licht. Hätten sie sich von astronomischen Beobachtungen leiten lassen, so würden sie den Tag in 4 Teile geteilt haben. — Es stellte sich allmählich das Bedürfnis ein, kleinere Zeitabschnitte als 4 Stunden zu haben, und da man inzwischen größere Zahlen zählen gelernt und zur höheren Zahlstufe 60 gelangt war, so zerlegte man das Tagsechstel *šuššu* in 60 kleinere Teile *imdu* = 4 Minuten. Die weiteren Unterabteilungen zerfielen ebenfalls in 60tel zu 4 Sekunden *mimmu* und zu 4 Tertien. Als Beleg führe ich eine Keil-Inschrift astronomischen Inhalts an, (ich weiß nicht, ob es sich auf die Zeit zwischen letzter Sichel des Altmondes und erster Sichel des Neumondes bezieht):

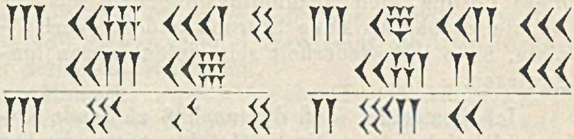
28	4	30	22	10
	2	42	55	
29	1	13	17	10

Der Tag = Nacht + Licht zerfiel also, wie man an diesem Beispiel ersieht, in 6 *šuššu* und jedes *šuššu* in 60 *imdu*, also in 6 . 60 = 360 *imdu*. Die tägliche Sonnenbahn gab den Begriff 'Zeitkreis', es wurde also auch der geometrische Kreis in 360

Teile, 'Grade', geteilt mit Unterabteilungen zu je 60. Es ist hiermit bewiesen und auf natürliche Weise erklärt, daß unsere Kreisteilung in Babylon entstanden ist, weil die Babylonier nach 6 zählten und 60 als höhere Zahlstufe bildeten. Zählen geht vor Messen. Der Urmensch hat erst gezählt, bevor er Astronomie und Geometrie trieb. Beim Fingerzählen schreiten wir vor von 1 zu 6 zu 60 zu 360, das ist der natürliche Gang; die bisherige künstliche Erklärung setzt voraus, daß man bis 360 zählen kann, dann das Sehnensechseck entdeckt, um endlich zur 60-Teilung zu gelangen, auf der man nun eine neue Zählweise aufbaut.

Außer dem Namen *šušu*, (griechisch σῶσσος, νῆρος, σάρος) *Sōs* für 60 treten noch die Namen *Nēr* für 600 = 10 *Sōs* und *Sār* für 3600 = 60^2 = *Sōs-Sōs* auf. Man benannte mit *šušu* nicht nur $^1/_{6}$, sondern auch 60; im ersten Falle hatte man die große Einheit *Tag* oder *Kreis* im Sinne, im zweiten Falle war die kleine Einheit *Imdu* oder *Grad* das Maß. Wie kommt der *Nēr* ins 60-System, das durch *Sōs* = 60 und *Sār* = 60^2 vertreten ist? Die Entstehung dieser höheren Einheiten läßt sich ebenfalls auf Fingerzählen zurückführen: bei *Nēr* geht man von der höheren Einheit 60, bei *Sār* von 360 aus. *Sār* bedeutet 'Abschluß', sein mit der Hand durch die Luft gezogenes Sinnbild ist der Kreis ○, weil ihm 360 als höhere Einheit des Fingerzählens zugrunde liegt und weil man eine Zeitlang größere Zahlen als 3600 = 360 . 10 = 60 . 60 nicht kannte. Neuerdings sind aber von Prof. Hilprecht in Philadelphia Tafeln aus Nippur veröffentlicht worden, in denen der Keil durch Stellenwert 1 oder 60 oder 60^2 = 3600 oder 60^3 = 216000 oder 60^4 = 12960000 bedeutet. — Man kann aber den *Nēr* auch einfach darauf zurückführen, daß es in den Keilschriftzahlen nur die zwei Zeichen für Keil und Winkelhaken gibt. Die Zahl (672) lautet nach dem reinen 60-System 11 Sōs 12, nach dem Schriftbild aber 1 *Nēr* 1 Sōs 1 Zehner 2 Einer. Danach wäre *Nēr* nur die höhere Stufe des Zehners, so wie *Sār* und *Sōs* die höhere Stufe des Einers.

Die Babylonier zeigen uns, daß sie mit ihrer Keilschrift zum Stellenwert auch ohne Null gelangen konnten. So bemerkt A. v. Humboldt in Crelle 4,219: 'Das Zeichen für Null ist kein notwendiges Bedingnis des Stellenwertes'. Es ist bis jetzt noch keine Keilzahl gefunden worden, die 0 Sōs in der Mitte hat. Die Tafeln von Senkereh mit den Quadrat- und Kubikzahlen reichen nicht weit genug. Die erste Quadratzahl mit 0 Sōs wäre 85^2 = 7225 = 2 *Sār* 0 Sōs 25, die erste Kubikzahl wäre 139^3 = 2685619 = 746 *Sār* 0 Sōs 19 = 12 Sōs-Sar 26 Sar 0 Sōs 19. Man findet sie heraus, wenn nach Abstrich der letzten zwei Stellen die übrige Zahl durch 4 und 9 teilbar ist. Aber man hat Täfelchen gefunden, in denen durch Addition und Subtraktion sich Null einstellt. Diese Stelle wird entweder leer gelassen oder es steht dafür ein Trennerzeichen.



3	26	31	40	3	17	22	30
+	23	29		—	25	2	30
3	50	0	40	2	52	20	0

In der Regel kann man nur aus dem Zusammenhang der Keilzeichen und aus dem Sinn entscheiden, welcher Wert ihnen beizulegen ist. So kann die Zahlen 2 und 61, die Zahlen 3, 62, 121 = 2 Sōs 1 oder 180 = 3 Sōs darstellen, sogar 10800 = 3 Sar. Bei einer Zahl wie 121 sieht man höchstens eine kleine Lücke zwischen 2 Sos und dem Einer. Will man Verwechslungen ausschließen, so schreibt man Sos oder Sar hinter die zugehörige Zahl.

Die Sechstelung *šušu* zu 4 Stunden wurde schon in grauer Vorzeit auf Nacht und Licht getrennt übertragen; so erhielt man 'Tagzwölftel' *sīmānu* = 2 Stunden. Das Ideogramm dafür ist KASPU. Man unterscheidet nämlich in den Keilschriftsprachen Wortbild und Aussprache. Die Wortbilder von *šušu, imdu, mimmu* sind ŠU, UŠ, GAR. Den Anlaß zu dieser Aenderung der Tagteilung gab wohl der Umstand, daß durch die erobernden Assyrier, welche als Semiten Mondrechner und 10-Zähler sind, der Monat eindrang. Man kam so zu Jahrzwölftel, also bildete man auch Tagzwölftel. Das greift weiter: 30 Tage sind $^1/_{60}$ des Fingerjahrs *lustrum* = 5 Jahre, und 2 Stunden sind $^1/_{60}$ der Fingerwoche *ḫamuštu* = 5 Tage. Das Zeitmaß Tagzwölftel gilt noch heute bei unseren Soldatenwachen. Das Zifferblatt der Uhren zeigt ebenfalls noch die Zwölftelung. Dennoch hat sich das Sechstel als Doppel-KASPU noch lange erhalten; in der Tafel von Senkereh bildet es die letzte Zahlenreihe:

= 12 . 60^2 = 43200.

Die Zwölftelung *sīmānu* KASPU wurde abermals auf Nacht und Licht getrennt übertragen; so erhielt man Tagvierundzwanzigstel, unsere Stunde. Bei den Semiten beginnt der Neutag mit Sonnenuntergang. Die Lichtstunden beginnen natürlich mit Sonnenaufgang wie im Gleichnis vom Weinberg (Matthäus 20). Das Zifferblatt der Uhren sollte jetzt auf 24-Teilung geeicht werden und Mitternacht die Ziffer 0 erhalten als Zeichen für den Beginn des Neutages.

Zur Erklärung der 24-Teilung wird abermals semitischer Einfluß herangezogen, also Mondbeobachtung. Der Wechsel von Neumond und Vollmond finde 24mal im Mondjahre statt; dieses sei auf den Tag übertragen worden. Die Erklärung steht aber im Widerspruch mit der Erwägung, daß dann doch zunächst das Jahr in 24 Halbmonate zerlegt worden wäre.

Eine andre Erklärung weist darauf hin, daß die Mondscheibe sich in etwa 1 Stunde um ihren Durchmesser vorschiebt (30 Tage = 720 Mondscheiben). Man kommt also auch hier wieder auf astronomische Messungen zurück wie beim Naturmaß Sonnenscheibe, deren Doppel die 360-Teilung des Kreises erklären sollte. Ich könnte ähnliches für das alte ursprüngliche *Imdu* = 4 Minuten anführen, denn so viel beträgt die tägliche Verspätung der Sonnenkulmination, was in einem Jahr einen vollen Tag ausmacht. Sie wurde erkannt durch den Aufgang des Sirius und durch Notieren der Tageslänge am Gnōmōn.

Ich glaube nicht an die künstlichen Erklärungen durch astronomische Messungen. Je genauer diese sind, desto weniger passen sie. Zählen geht vor messen. Das Tagsechstel ergab sich einfach aus der 6-Zählung des Volks. Die zweimalige Halbierung erklärt sich einfach durch Uebertragung der Tagteilung auf Nacht und Licht und durch das Bedürfnis nach einem kleineren Zeitmaß. Ebenso künstlich ist die Erklärung durch geometrische Entdeckungen, weil der Radius sich 6 mal als Sehne in den Kreis eintragen läßt oder weil die Winkel des regelmäßigen Dreiecks 60 Grad betragen. Man muß nicht von unsrer jetzigen Kultur aus urteilen, sondern sich in die Lage des vorgeschichtlichen Menschen versetzen.

Die Unterteilung — 60 — wurde für das halbierte Zeitmaß festgehalten, das bedang die Keilschrift mit dem Stellenwert. Der geometrische Kreis jedoch machte diese Zeitmaß-Aenderungen nicht mit, er behielt die ursprünglichen 6. 60 = 360 Teile bei. So wurde die Uebereinstimmung zwischen Zeit- und Kreisteilung zerstört. Das spricht grade auch nicht für astronomische Erklärungsversuche.

Ich habe die Entstehung des 6- und 60-Systems auf Fingerzählen zurückgeführt. Um etwaige Zweifel über die Fingerfertigkeit beim Zählen und Rechnen zu zerstreuen, teile ich einen Bericht mit, wie die Kurden in Persien noch heute mit den Fingern rechnen, sogar multiplizieren z. B. 7 mal 8. Man biegt an der einen Hand 2 Finger ein, d. i. 7, an der andern Hand 3, d. i. 8; die eingebogenen Finger geben zusammen die Zehner, also 2 + 3 = 5 Zehner. Aufrecht blieben an der einen Hand 3, an der andern 2 Finger; das Produkt beider 3 mal 2 = 6 gibt die Einer. Also 7 . 8 = 50 + 6 = 56.

Wie geht das zu? Die Anwendung ist einfacher als die Erklärung. Es seien x und y die beiden Zahlen, die multipliziert werden sollen. Nun werden 6, 7, 8, 9 dargestellt durch einbiegen von 1, 2, 3, 4 Fingern, wir lassen also jedesmal 5 weg. Wir addieren $(x - 5) + (y - 5) = x + y - 10$ nach der Vorschrift und machen die Summe zu Zehnern, indem wir sie mit 10 multiplizieren, so erhalten wir $10\,(x + y - 10)$. Die aufrechten Finger sind die Differenzen von 10 und den Zahlen der Aufgabe, also $10 - x$ und $10 - y$. Beide nach der Vorschrift multipliziert und zu den gefundenen Zehnern addiert gibt $10\,(x + y - 10) + (10 - x)\,(10 - y)$. Es hebt sich alles weg bis auf x y.

Weitere Belege für 6 und 60,
wobei 60 oft als unbestimmte Vielheit auftritt, wie ja auch wir von 100 Küssen und 1000 Grüßen reden, 1000 Leute waren da.

1. Das Götterbild, das Nebukadnezar errichten ließ, war 60 Ellen hoch, 6 Ellen breit.
2. Um das Bett Salomos stehen 60 Starke aus den Starken in Israel; 60 ist die Zahl der Königinnen.
3. In des Einen Hause waren 60 Hochzeitbälle, in des Andern Kreise 60 Sterbefälle.
4. Der Perserkönig Darius befahl den ionischen Truppen unter Histiäus, an der Isterbrücke 60 Tage zu warten.
5. Der Perserkönig Kyrus läßt den Fluß Gyndes in 360 Rinsel abgraben, weil eins seiner heiligen Rosse darin ersoffen war.
6. Stobäus spricht von einem Groß-Jahr von 60 Jahren (Eklog. Phys. 1, 9, 2).
7. In astronomischen Schriften wurde später der Tag sofort in 60 tel zerlegt zu 0,4 Stunden, so von Ptolemäus bei der Berechnung der Mondumläufe.
8. Im Vedakalender der alten Inder ist 1 Tag = 30 muhûrta zu 0,8 Stunden, 1 muhûrta = 2 nâdikâ, also 1 Tag = 60 nâdikâ.
9. Wer einen guten Imbiß früh genommen,
dem können 60 Läufer nach nicht kommen.
B. mez. 107 b.
10. Das vollendete 60. Jahr bezeichnet den Beginn des Alters.
Mischnah (Tract. Aboth V, 24; Moëd, Kat. 28 a).
12. Gewichte: 1 gun (Talent) = 60 mana (Mine), 1 mana = 60 gin (sekel).
13. Flächenmaße: 1 gan = 1800 sar, 1 sar = 60 gin, 1 gin = 180 še.
14. Hohlmaße: 1 gur = 300 ḳa, 1 ḳa = 60 gin.
15. Der Gudêa-Stab enthält das Maß Fingerbreite = 16,5 mm, 1 Handbreite = 6 Fingerbreiten.
16. 1 weichgesotten Ei gibt mehr Nahrung als 6 Maß Mehl.
17. 6 Schüler bedecken sich mit 1 Ueberwurf. (Bild großer Armut).
18. Ach! 60 fache Pein fühlt dessen Zahngebein,
der fastend zu muß schauen,
wie Andre Speise kauen.
19. Einst lagen wir, als unsre Lieb war mächtig,
auf Schwertes Breite nur und schliefen prächtig
Jetzt, wo die Liebe lau, genügt uns kaum
ein Riesenbett von 60 Ellen Raum.
20. Die 60 jährige, wenn Musik erschallt,
eilt hin gleich jener, die erst 6 Jahr alt.
21. Eumäus hatte 6 . 60 = 360 Schweine (Homer, Odyssee ξ 20).
22. Der Perserkönig Xerxes läßt dem Hellespont 5 . 60 = 300 Rutenstreiche geben.
23. In einem persischen Liede werden die 360 Nutzen der Palme besungen. (Strabo 17, 1, 14).
24. Das Fest der Dädala wurde von den Böotern gemeinsam mit den Platäern alle 60 Jahre gefeiert. (Pausanias 9, 3).
25. Schon war die dritte Wache der Nacht, und es sanken die Sterne. (Odyssee 12, 312).
26. Die 12 Teile des Tages seien mit dem polos und gnōmōn von den Babyloniern zu den Griechen gekommen. Herodot 2, 109.
27. In Indien wird der Tag geteilt in 60 ghati = 0,4 Stunden, jeder ghati in 60 çashaka = 0,4 Minuten, jede çashaka in 6 prâna (Atemzüge) = 4 Sekunden. (BAG. Ginzel, 361 Anm. 3).
Diese Teilung 60, 60, 6 ist die umgekehrte der babylonischen 6, 60, 60.

Literatur.

1. Crelles Journal für Mathematik 1829 B. 4 Humboldt, A. v.
2. Crelles Journal für Mathematik 1856 B. 52 Biernatzki.
3. Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft, B. 9 (Pott); B. 16, 463 (Schrumpf); B. 18, 292, 381; B. 29, 629 (Kämpf) B. 26, 241; B. 46, 570.
4. Zeitschrift für Ethnologie B. 27, B. 29.
5. Berliner Akademie, 1814/15, Ideler, Sternkunde der Chaldäer; 1862 Weber, Vedakalender, 1883. Schrader; 1877 Lepsius, Tafel von Senkereh; 1890 Schmidt, Urheimat der Indogermanen und des europäischen Zahlsystems. 1896 Reisner.
6. Leipziger Akademie, 1901 Zimmern, Zeit- und Raumteilung.
7. Wiener Akademie, 1895 B. 62, Mahler, Chronologie der Babylonier.
8. Zeitschrift für ägyptische Sprache 1878 Delitzsch: Sos, Ner, Sar.
9. Münchener orientalische Gesellschaft B. 1.
10. Transactions of the Society of Biblical Archäology B. 7. Bertin, the Assyrian Numerals.
11. Orientalistische Literatur-Zeitung 1903 Mahler.
12. Beiträge zur Alten Geschichte von C. F. Lehmann, 1901 B. 1 Ginzel.
13. Zeitschrift für Assyriologie von Bezold 1904 B. 18 Kewitsch; 1900 B. 15, 390 Kugler; 1889 B. 4, 190 Strasmaier.
14. Wochenschrift für klassische Philologie 1895.
15. Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin 1889 B. 8.
16. Transaction of the Irish Academy. Hincks.
17. Delitzsch, Entstehung des ältesten Schriftsystems.
18. Thureau-Dangin, L'origine de l'écriture cunéiformes.
19. Schenkel, Bibellexikon: Zahlen.
20. Lehmann, C. F. Babyloniens Kulturmission. 1903 Leipzig
21. Lehmann, C. F. zwei Hauptprobleme.
22. Brandis, Münzen, Maße und Gewichte in Vorderasien 1866.
23. Hommel, Aufsätze und Abhandlungen 1900 S. 239.
24. Pott, die quinare und vigesimale Zählmethode, Halle.
25. Pott, die Sprachverschiedenheiten in Europa, Halle.
26. Pott, Zählmethoden 1847 Halle.
27. Cantor, M. Geschichte der Mathematik.
28. Cantor, Beiträge zum Kulturleben der Völker.
29. Hilprecht, the Babylonian Expedition. Philadelphia 1906.
30. Bilfinger, die babylonische Doppelstunde Stuttgart 1888.
31. Lund, Tr. zum babylonischen 60-System.
32. Schrader, Otto. die älteste Zeitteilung des indogermanischen Volkes 1878.
33. Winckler, Hugo, Altorientalische Forschungen.
34. Winckler, Hugo, die babylonische Kultur.
35. Winckler, Hugo, Himmels- und Weltbild der Babylonier.
36. Weitere Literatur findet man in meiner Arbeit Nr. 13, aus der ich hervorhebe: Stimmen aus Maria-Laach, 1889 B. 11, Ergänzungsheft 44, Epping: Astronomisches aus Babylon, auch gesondert erschienen.

Ueber spontane Quer- und Längsteilung bei Hydra.

Vortrag auf der Hauptversammlung in Freiburg (Br.)[1])

Von A. Leiber (Freiburg i. Br.).

Der Süßwasserpolyp, diese niedrigste Form der Nesseltiere und einzige uns Binnenländern leicht erreichbare, bietet trotz seines einfachen Baues eine unerschöpfliche Fülle anatomischer und physiologischer Merkwürdigkeiten, deren Studium uns immer und immer wieder neue Einblicke in das Getriebe organischen Lebens gewährt. Auch die Fortpflanzungsgeschichte von *Hydra* hat uns in den letzten Jahren insofern Ueberraschungen gebracht, als zwei Formen der vegetativen Vermehrung, die zwar schon vor mehr als 150 Jahren gesehen und beschrieben, von neueren Forschern aber angezweifelt oder wenigstens für pathologische Erscheinungen gehalten wurden, als normalerweise dem Süßwasserpolypen eigene Vermehrungsweisen erkannt worden sind. Ich meine die Vermehrung der Individuenzahl durch Quer- und Längsteilung.

Ehe ich darauf näher eingehe, möchte ich kurz an die beiden bekannten und weitaus häufigeren Vermehrungsweisen erinnern, die geschlechtliche Fortpflanzung und die Knospung.

Die Tiere sind Zwitter. Ihre Geschlechtsprodukte entstehen in bestimmten, bei den einzelnen Arten mehr oder weniger scharf getrennten Zonen, und zwar die Eier mehr dem Fußende zu, die Hoden dem oralen Ende genähert. Die geschlechtliche Vermehrung ist an bestimmte Jahreszeiten gebunden, bei *H. viridis* von Juni bis September.

Die Knospung können wir bei günstiger Ernährung der Tiere zu jeder Jahreszeit beobachten. In Standgläsern ohne weitere Pflege gehaltene Hydren beginnen, auch wenn sie sich in dürftigem Zustand befanden, mit großer Sicherheit zu wachsen und hernach reichlich zu knospen, wenn man sie zwei bis drei Wochen lang vor einer beabsichtigten Demonstration reichlich füttert. Die Knospung wird äußerlich dadurch eingeleitet, daß die Wand des schlauchförmigen Tieres sich ausstülpt. Die Ausstülpung nimmt eine keulenförmige Gestalt an und bleibt zunächst mit dem Innenraum des Muttertieres in unmittelbarer Verbindung. Am Ende bilden sich wenige Tentakel, während der Eingang in den Hohlraum des Tochtertieres sich mehr und mehr zuschnürt. Sind die beiden Hohlräume voneinander getrennt, so besteht anfangs noch eine Entodermverbindung zwischen Mutter und Tochter, die immer dünner wird, bis sie schließlich von dem allseitig sich einfaltenden Ektoderm unterbrochen wird. Dann erst sind die beiden Tiere physiologisch voneinander getrennt, denn unterdessen ist bei der Knospe die Mundöffnung durchgebrochen und damit dem jungen Tiere die selbständige Nahrungsaufnahme möglich. Die Knospe bleibt nun noch einige Zeit am Muttertier haften, während der sich die Fußscheibe ausbildet; dann sitzt sie auf dem Muttertier wie auf einem Fremdkörper und kriecht nach einiger Zeit davon.

Ich glaubte diesen Vorgang deshalb etwas eingehender darstellen zu sollen, weil die Quer- und Längsteilung in ähnlicher Weise abschließen.

Im Jahre 1744 erschienen in Leyden Trembleys „Mémoires pour servir à l'histoire d'un genre de polype d'eau douce" in einem stattlichen Band, die Frucht eifriger Studien, die der Verfasser als Hauslehrer neben seiner übrigen Tätigkeit betrieb. Trembley berichtet mit der ihn auszeichnenden Sorgfalt und Genauigkeit von Quer- und Längsteilungen, die er an den drei Arten von *Hydra* mehrfach beobachtet hat. Querteilungen wurden in derselben Zeit (1755) von

[1]) Siehe Unter.-Bl. XV, 3, S. 64.

Roesel von Rosenhof beobachtet und in den „Insektenbelustigungen" beschrieben. Spontane Längsteilungen fand Roesel nicht. Ueberhaupt sind Querteilungen offenbar häufiger als Längsteilungen und auch sonst mehrfach beobachtet worden, so z. B. von Laurent 1844, von dem Freiburger Anatomen Ecker und insbesondere von dem kürzlich verstorbenen Marshall, der an einer Varietät von *Hydra viridis* aus dem Mansfelder Salzsee, allerdings nur an zwei Exemplaren, Querteilung beobachtete.

Bis vor kurzem waren die Ansichten über die Bedeutung der Querteilung verschieden; man darf wohl sagen, daß die Meinung, es handle sich um pathologische Erscheinungen, vorherrschte. Nun hat aber voriges Jahr Koelitz[2]) in Marburg, der bei anderweitigen *Hydra*-Studien die Tiere in großen Mengen durchmusterte, eine so große Zahl von in Querteilung befindlichen Tieren gefunden und zwar unter sicher durchaus normalen Umständen, daß wir diese Art der Vermehrung gewiß als eine normale ansehen dürfen.

Ungefähr in der Mitte beginnt das Tier sich einzuschnüren, bis die Entodermschicht sich von allen Seiten berührt, verschmilzt, und durch das von außen nach innen vordringende Ektoderm abgetrennt wird. Die Loslösung der beiden aufeinander sitzenden Tochtertiere scheint also auf ähnliche Weise vor sich zu gehen wie die Ablösung einer Knospe, indem das orale Tier eine neue Fußscheibe bildet. Das aborale scheint nachträglich, wie das auch bei künstlich quergeschnittenen Hydren der Fall ist, Tentakel und Mundscheibe zu regenerieren. Im Frühjahr 1908 hat Koelitz die Querteilung in 28 Fällen bei unseren drei *Hydra*-Arten beobachtet, und im Laufe desselben Jahres wurde die Zahl der von ihm gesehenen Fälle noch bedeutend vermehrt. Bemerkenswert ist, daß er wie Roesel den Beginn der Querteilung auch bei noch am Muttertier sitzenden Knospen beobachten konnte.

Die Vermehrung durch Querteilung, die bei den Hydroiden im allgemeinen selten ist, ist bei einer der Hydra offenbar sehr nahestehenden marinen Form, der *Protohydra Leuckarti*, die Regel. Schon 1870 berichtete Greeff[3]) von den Querteilungen dieses Polypen, und 1902 veröffentlichte Aders[4]) aus dem von Greeff gesammelten Material genauere mikroskopische Untersuchungen, die uns auch Längsschnitte durch sich teilende Tiere zeigen, die wohl ein ganz ähnliches Bild darbieten, wie in Teilung befindliche Hydren.

Noch viel seltener als die Querteilung wird die Längsteilung von *Hydra* beobachtet; so selten, daß auf die von Trembley beschriebene Längsteilung in der Literatur fast keine Rücksicht genommen wurde. 1883 berichtet Jennings[5]) von solchen; 1890 erschienen Arbeiten des Italieners Zoja[6]) und des Engländers Parke[7]), in denen von Längsteilung die Rede ist. Parke hat vier- bis fünfmal Tiere in Längsteilung beobachtet und verfolgt und hält sie für eine normale Erscheinung. Im Gegensatz zu meiner gleich anzuführenden Beobachtung sah er den Vorgang der Längsteilung in wenigen Tagen sich abspielen. Da Parke seine Beobachtungen im Mai, ich dagegen im Winter machte, so liegt die Vermutung nahe, daß die Jahreszeit einen Einfluß auf die Geschwindigkeit des Vorgangs hat.

Ich selbst fand 1908[8]) durch Zufall ein in Längsteilung befindliches Tier in den Aquarien des zoologischen Instituts in Würzburg, nachdem schon einige Jahre vorher Prof. Boveri dort ein solches gefunden und konserviert hatte. Die Längsteilung beginnt am Vorderende damit, daß die sonst kreisförmige Mundscheibe länglich wird, die oval gestreckte Mundöffnung sich in zwei teilt und von da die Teilung allmählich bis zur Fußscheibe fortschreitet. Derselbe Vorgang läßt sich künstlich durch einen längsgerichteten Einschnitt in das Vorderende einleiten. So weit der Schnitt geführt ist, heilen die getrennten Vorderenden zu selbständigen Köpfen aus, ein Experiment, das Roesel wohl zuerst, und zwar in beliebig häufiger Wiederholung anzustellen vermochte, so daß er Exemplare mit einer beliebigen Anzahl von Köpfen herstellen konnte. Bei solchen künstlichen Einschnitten ist, nach meines Wissens nicht veröffentlichten Beobachtungen von Boveri, die Regel, daß sich die Gabelungsstelle im Laufe einiger Monate bis zum Fußende verschiebt, wodurch endlich eine vollständige Trennung der beiden Teile bewirkt wird. Das von mir beobachtete Exemplar fand ich im November etwa bis zur Hälfte geteilt. Ende Januar war die Teilung bis zum Fußende fortgeschritten, so daß die beiden Teiltiere mit den Fußenden zusammenhingen, wobei ich anfangs noch eine Entodermbrücke, die von einem Tier ins andere führte, beobachten konnte. Genau wie bei der Ablösung der Knospen verschwand diese Entodermverbindung, es bildeten sich Fußscheiben aus, die zunächst noch aneinander hafteten, und nach wenigen Tagen waren die Tiere voneinander getrennt. Eine sehr interessante Erscheinung war, daß noch vor der Trennung das eine der beiden Teiltiere vom Kopfende her eine neue Teilung begann, woraus wohl geschlossen werden darf, daß der Vorgang nicht mechanisch veranlaßt war. Weitere Beobachtungen konnte ich nicht machen, da die Tiere eingingen. Neuerdings hat auch Prof. Korschelt[9]) in Marburg von einer Längsteilung berichtet, mit dem wohl sehr gerechtfertigten Bemerken, daß auch die Längsteilung, wenn auch eine seltene, so doch normale Vermehrungsweise der *Hydra* ist.[10])

Die bis jetzt wenig beachteten Vermehrungen von Hydra durch Längs- und Querteilung sind von phylogenetischem Interesse. Innerhalb des Stammes der Nesseltiere finden wir Querteilungen bei den Scyphomedusen (die Strobilation) und bei gewissen Aktinien. Längsteilungen sind bei einigen Anthozoen fester Besitz geworden. Die Hydroiden besitzen aber keine der beiden Vermehrungsweisen, mit sehr wenigen Ausnahmen, von denen also zunächst *Hydra* und die oben erwähnte *Protohydra Leuckarti* zu nennen ist. Kürzlich

[2]) Koelitz, W., Fortpflanzung durch Querteilung bei *Hydra*. Zool. Anz. XXXIII, 1908, p. 529—536 und p. 783.

[3]) Greeff, R., *Protohydra Leuckarti*. Zeitschrift für wiss. Zool., XX, p. 37.

[4]) Aders, W. M., Ueber die Teilung von *Protohydra Leuckarti*. Zool. Anz., XXVI, p. 33—39.

[5]) Jennings, T. B., Curious Process of division of *Hydra* Amer. Monthly Micr. Journ. Vol. IV. 1883.

[6]) Zoja, R., Alcune ricerche morfol. e fisiol. sull' *Hydra*. Pavia 1890.

[7]) Parke, H. H., Variation and regulation of abnormities in *Hydra*. Arch. f. Entwmech. X. 1890.

[8]) Zool. Anz. XXXIV, 1909, p. 279—284.

[9]) Zool. Anz. XXXIV, 1909, p. 284—285.

[10]) Während des Druckes dieses Vortrags erschien eine neue Arbeit von W. Koelitz, „Ueber Längsteilung und Doppelbildungen bei *Hydra*", Zool. Anz. XXXV 1909/1910, pag. 36—46, welche neun weitere Fälle von Längsteilung beibringt und auch sonst noch eine Reihe höchst interessanter damit zusammenhängender Beobachtungen enthält.

hat Goette[11]) einen Bericht über *Microhydra,* einen Hydroidpolypen einfachster Organisation veröffentlicht. Dieser besitzt neben der Knospung auch die Querteilung. Damit sind also heute drei Gattungen der Hydroiden bekannt, die sich durch Querteilung zu vermehren vermögen. Gewiß ist es nicht unwichtig, daß dies die einfachsten Formen dieser Tiergruppe sind. Längsteilungen von Hydroiden sind außer bei Hydra nur bei einem Tier bekannt, das dieser Tiergruppe zuzurechnen ist. Es ist dies das 1887 von Ussow[12]) beschriebene *Polypodium hydriforme,* über das seither keine weiteren Untersuchungen vorliegen und dessen Lebensgeschichte aus den Ussowschen Angaben nicht ganz klar zu erkennen ist.[13]) In Sterlet-Eiern schmarotzt ein Stolo, der nach dem Ablegen der Eier aus 32 Knospen Hydroidpolypen hervorgehen läßt, die sich wiederholt längsteilen. Ist *Polypodium* ein echter Hydroidpolyp[14]), so ist er neben *Hydra* der einzige, der Längsteilungen aufweist.

Abgesehen von den hier angedeuteten, mit den Teilungsvorgängen von *Hydra* zusammenhängenden wissenschaftlichen Fragen, ist für uns auch noch der Umstand von Interesse, daß wir unseren Schülern an diesem leicht erreichbaren Objekt alle im Tierreich bekannten Vermehrungsweisen zeigen können, nämlich neben der geschlechtlichen Fortpflanzung die vegetative Vermehrung durch Knospung und Teilung und diese in den beiden Formen von Längs- und Querteilung.

Die ganzen rationalen Wurzeln der kubischen Gleichung.

Von Dr. Richert (Berlin).

In Nr. 3 der Unt.-Bl., S. 53, bezeichnet Herr Häntzschel meine in Nr. 2 aufgestellte Rationalitätsbedingung als „nicht neu“ und sucht sie durch Spezialisierung aus einer Arbeit von Kummer abzuleiten. Demgegenüber bemerke ich: 1. Kummer selbst hat die Spezialisierung nicht vorgenommen. 2. Wäre es Herrn Häntzschel gelungen, meine Gleichung $3\,b_1^2 = 3\,r^2 + s^2$ aus dem Kummerschen Ergebnisse abzuleiten, dann wäre das unbedingt nicht Kummer, sondern Herrn Häntzschel als Verdienst anzurechnen, da man nach meiner Meinung keineswegs jeden mathematischen Satz als „nicht neu“ abtun kann, der durch irgend eine Spezialisierung aus einem andern abgeleitet werden kann. 3. Herrn Häntzschel ist aber noch keineswegs der Nachweis gelungen, daß sein Resultat mit dem meinigen identisch ist. Denn Herr Häntzschel erhält im zweiten Gliede seiner Summe $3\,\beta^2 + (\gamma' \sqrt{3})^2$ die Größe $\gamma' \sqrt{3}$ also etwas irrationales, während ich die rationale Größe s habe; und das gerade ist wesentlich.

Wie dem nun aber auch sei, jedenfalls lassen sich an die Rationalitätsbedingung $3\,b_1^2 = 3\,r^2 + s^2$ weitere höchst interessante Betrachtungen knüpfen.

Zunächst eine kleine Vorbemerkung: Daß $3\,b_1^2$ die Form $3\,r^2 + s^2$ haben muß, ist für die kubische Gleichung $x^3 - 3\,b_1^2\,x - 2\,c_3 = 0$ zwar notwendig. Aber es ist nicht ausreichend, da man noch betreffs des x-freien Gliedes $2\,c_3$ eine sehr vorsichtige Auswahl treffen muß. $2\,c_3$ ist aber leicht zu finden, wenn man einen Blick auf S. 37 in Nr. 2 wirft. Denn dieser lehrt uns, daß die drei Wurzeln $2\,r_1$, $-r_1 - \sqrt{r_2}$, $-r_1 + \sqrt{r_2}$ oder, unter Anwendung von r und s, $2\,r$, $-r - s$, $-r + s$ heißen müssen.

Nunmehr erhebt sich die Frage: „Welche Zahlen lassen sich durch $3\,r^2 + s^2$ ausdrücken?“ mit anderen Worten, da man dem $3\,b_1^2$ nicht jeden ganzzahligen Wert erteilen darf, welchen darf man ihm beilegen, damit die Wurzeln ganz und rational werden?

Zur Beantwortung derselben bedenken wir, daß $3\,r^2 + s^2$ eine sogen. quadratische Form darstellt, wie sie in der Zahlentheorie eine besonders wichtige Rolle spielt. Die allgemeinste Form derselben ist bekanntlich (a, b, c), das als Abkürzung für $a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2$ gesetzt wird. In unserem Falle ist aber $a = 3$, $b = 0$, $c = 1$; und x sowie y sind durch r bezw. s ersetzt. Die Determinante unserer quadratischen Form $(3, 0, 1)$ ist also $D = b^2 - ac = 0 - 3 = -3$.

Nun lehrt aber die Zahlentheorie, daß, wenn eine Zahl P durch die quadratische Form $(3, 0, 1)$ eigentlich darstellbar sein soll, alsdann die Determinante D allemal einem Quadrate v^2 kongruent sein muß modulo P oder kürzer $-3 \equiv v^2$ mod. P d. h.: -3 muß ein quadratischer Rest modulo P sein. In der Legendreschen Bezeichnungsweise heißt dies: Es muß $\left(\frac{-3}{P}\right) = +1$ sein. Nun ist aber $\left(\frac{-3}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{3}{P}\right)$. Soll dies Produkt nun gleich $+1$ werden, dann ist das nur so möglich, daß entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind, d. h.: Entweder muß sowohl -1 als auch 3 quadratischer Rest von P sein; oder sowohl (-1) als auch 3 muß quadratischer Nichtrest von P sein. Nun ist aber (-1) quadratischer Rest für alle Zahlen P von der Form $4\,n + 1$, dagegen quadratischer Nichtrest für alle Zahlen von der Form $4\,n + 3$. Ferner ist 3 quadratischer Rest für alle Zahlen P von der Form $\left\{\begin{matrix} P = 12\,n + 1 \text{ oder} \\ P = 12\,n + 11 \end{matrix}\right\}$; und es ist Nichtrest für alle Zahlen von der Form $\left\{\begin{matrix} P = 12\,n + 5 \text{ oder} \\ P = 12\,n + 7 \end{matrix}\right\}$ oder kürzer

$$\left|\begin{matrix} \left(\frac{-1}{P}\right) = +1, \text{ wenn } P = 4\,n + 1 \\ \left(\frac{-1}{P}\right) = -1, \text{ wenn } P = 4\,n + 3 \end{matrix}\right.$$

und ferner

$$\left|\begin{matrix} \left(\frac{3}{P}\right) = +1, \text{ wenn } P = 12\,n + 1 \text{ oder } 12\,n + 11 \\ \left(\frac{3}{P}\right) = -1, \text{ wenn } P = 12\,n + 5 \text{ oder } 12\,n + 7 \end{matrix}\right.$$

Hieraus folgt, daß P entweder von der Form $P = 12\,n + 1$ oder von der Form $P = 12\,n + 7$ sein muß. Beides kann man noch in der einen Form $6\,n + 1$ zusammenfassen und, indem wir uns zunächst auf Primzahlen beschränken, sagen: „Soll die Primzahl P sich durch die quadratische Form $3\,r^2 + s^2$ darstellen lassen, so muß sie die Form $6\,n + 1$ haben.“

In der Tat ist:

$3\,b_1^2 =$	$\pm 2\,c_3 = 2\,r\,(r^2 - s^2) =$		
$7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2$	$2 \cdot 3$	$=$	6
$13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2$	$4 \cdot 3$	$=$	12
$19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2$	$2 \cdot 15$	$=$	30

[11]) Goette, A., *Microhydra ryderi* in Deutschland. Zool. Anz. Bd. XXXIV, 1909, p. 89—90.

[12]) Morphol. Jahrb. XII.

[13]) Kurz nach Pfingsten erschien eine Arbeit von A. Lipin „Ueber den Bau des Süßwassercölenteraten *Polypodium hydriforme Uss.*“ Zool. Anz. XXXIV, 1909, p. 346—356, welche die Ussowschen Angaben bestätigt und ergänzt.

[14]) Dies ist nach Lipins Arbeit nicht mehr zu bezweifeln.

$3b_1^2 =$	$\pm 2c_3 = 2r(r^2 - s^2) =$
$31 = 3 \cdot 3^2 + 2^2$	$6 \cdot 5 = 30$
$37 = 3 \cdot 2^2 + 5^2$	$4 \cdot 21 = 84$
$43 = 3 \cdot 3^2 + 4^2$	$6 \cdot 7 = 42$
$61 = 3 \cdot 2^2 + 7^2$	$4 \cdot 45 = 180$
$67 = 3 \cdot 1^2 + 8^2$	$2 \cdot 63 = 126$
$73 = 3 \cdot 4^2 + 5^2$	$8 \cdot 9 = 72$
$79 = 3 \cdot 5^2 + 2^2$	$10 \cdot 21 = 210$
$97 = 3 \cdot 4^2 + 7^2$	$8 \cdot 33 = 264$
$103 = 3 \cdot 1^2 + 10^2$	$2 \cdot 99 = 198$
$109 = 3 \cdot 6^2 + 1^2$	$12 \cdot 5 \cdot 7 = 420$
$127 = 3 \cdot 3^2 + 10^2$	$6 \cdot 7 \cdot 13 = 546$
$139 = 3 \cdot 5^2 + 8^2$	$10 \cdot 3 \cdot 13 = 390$
$151 = 3 \cdot 7^2 + 2^2$	$14 \cdot 5 \cdot 9 = 630$
$157 = 3 \cdot 6^2 + 7^2$	$12 \cdot 1 \cdot 13 = 156$
$163 = 3 \cdot 7^2 + 4^2$	$14 \cdot 3 \cdot 11 = 462$
$181 = 3 \cdot 2^2 + 13^2$	$4 \cdot 11 \cdot 15 = 660$
$193 = 3 \cdot 8^2 + 1^2$	$16 \cdot 7 \cdot 9 = 1008$
$199 = 3 \cdot 1^2 + 14^2$	$2 \cdot 13 \cdot 15 = 390$
$211 = 3 \cdot 7^2 + 8^2$	$14 \cdot 1 \cdot 15 = 210$
$223 = 3 \cdot 3^2 + 14^2$	$6 \cdot 11 \cdot 17 = 1122$
$229 = 3 \cdot 6^2 + 11^2$	$12 \cdot 5 \cdot 17 = 1020$

Diese Tabelle enthält nur Primzahlen. Sie alle liefern nur eine einzige Darstellung durch unsere quadratische Form.

Nun lassen sich aber auch viele aus Primfaktoren zusammengesetzte Zahlen durch dieselbe darstellen. Ueber diese gilt nun ein sehr bemerkenswerter Satz: Lassen sich zwei Primzahlen P und P' bezw. durch $3r^2 + s^2$ und $3r'^2 + s'^2$ darstellen, so daß

$$P = 3r^2 + s^2 \text{ und } P' = 3r'^2 + s'^2$$

ist, so läßt sich auch allemal ihr Produkt PP' durch eine gleiche Form darstellen.

In der Tat folgt aus $P \cdot P' = (3r^2 + s^2)(3r'^2 + s'^2)$ durch Multiplikation der rechten Seite

$$PP' = 9r^2r'^2 + 3r'^2s^2 + 3r^2s'^2 + s^2s'^2$$

und, wenn man rechts das Glied $6rr'ss'$ addiert und zugleich subtrahiert,

$$PP' = (9r^2r'^2 \pm 2 \cdot 3rr' \cdot ss' + s^2s'^2) + (3r'^2s^2 \mp 3 \cdot 2 \cdot r's \cdot rs' + 3r^2s'^2)$$

$$PP' = (3rr' \pm ss')^2 + 3(r's \mp rs')^2$$

Setzt man hier $r's \mp rs' = R$, $3rr' \pm ss' = S$, so ist tatsächlich $P \cdot P' = 3R^2 + S^2$ $q \cdot e \cdot d$.

Aus dem Doppelzeichen folgt, daß zusammengesetzte Zahlen im allgemeinen mehrere Darstellungen zulassen. So ist z. B.:

$$\left\{\begin{array}{l} 7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2 \\ 13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2 \end{array}\right\}$$

$$\text{also } \left\{\begin{array}{l} 91 = 3 \cdot (1 - 4)^2 + (6 + 2)^2 = 3 \cdot 3^2 + 8^2 \\ 91 = 3 \cdot (1 + 4)^2 + (6 - 2)^2 = 3 \cdot 5^2 + 4^2 \end{array}\right\}$$

Das Funktionale in der Geometrie.

Von Ernst Schultz (Stettin).

In neuester Zeit ist eine Reihe von Lehrbüchern entstanden, in denen wenigstens im Vorwort das Funktionale in der Geometrie stark betont wird. Bei genauerer Durchsicht entdeckt man jedoch, daß das Funktionale in der Geometrie bei den neuesten Lehrbüchern nach den modernsten Grundsätzen äußerst wenig hervortritt. Im großen und ganzen zeigen die Lehrbücher keine besondere Neuerung, nur daß bei ihnen die Beweise nicht so klar hervortreten, und daß die Beweise der Kongruenz bei ihnen etwas in Mißkredit gekommen sind. Statt dessen werden die Schüler mit Symmetrieachsen, mit graphischen Methoden bekannt gemacht, über deren pädagogischen Wert man zweifeln kann, wenn man bedenkt, daß Quartaner und Tertianer dieses Wissen sich aneignen sollen. Das funktionale Denken in der Geometrie wird gefördert, wenn die Schüler erzogen werden, aus der Veränderlichkeit der betreffenden Größen an den Figuren Eigenschaften abzuleiten, die in den Lehrsätzen wiedergegeben werden. Bei allen Bestrebungen, Neuerungen einzuführen, muß man stets im Auge behalten, den Schüler mit Sätzen vertraut zu machen, mit denen er operieren kann. Zu diesen Sätzen gehören m. E. unbedingt die Grundsätze: Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches usw., was ich schon in einer früheren Arbeit*) nachgewiesen habe. Diese Grundsätze gebraucht der Schüler bei den Beweisen der Lehrsätze, sie benutzt er bei den Gleichungen, ja, sogar genießt er die Freude, den Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches in der Stereometrie bei dem Cavalierischen Grundsatz wiederzusehen. Mir kommt es vor allen Dingen darauf an, daß die Schüler nicht nur durch die Lösung von Konstruktionsaufgaben, sondern durch das Ableiten resp. Beweisen von Lehrsätzen zum selbständigen Denken erzogen werden.

Wie das funktionale Denken an den geometrischen Figuren sich üben läßt, will ich jetzt an einigen Beispielen zeigen.

In den neuesten Lehrbüchern ist die Parallelität der Geraden recht unfruchtbar für das funktionale Denken definiert. Um die Definition der Parallelität für das funktionale Denken fruchtbar zu machen, fasse ich dieselbe als einen Grenzfall auf. In Fig. 1 werde

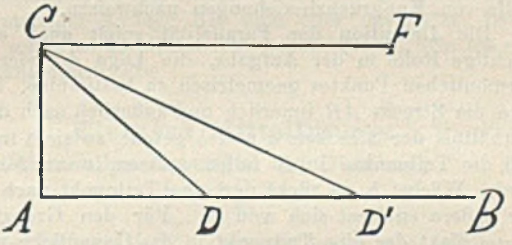


Fig. 1.

die Gerade AB von der Geraden CD geschnitten. Dreht sich die Gerade CD um C nach CD', so sieht man, daß der Winkel ADC kleiner geworden ist, und daß D' von A weiter als D entfernt liegt. Bei weiterer Drehung wird der $\angle ADC$ immer kleiner und der Punkt D rückt mehr nach rechts. Schließlich wird der Winkel ADC gleich Null und es muß dann AD unendlich groß geworden sein. Die Gerade CD nimmt dann die Lage CF ein, und man nennt dann $CF // AB$. Die Parallelität ist also hier als Grenzfall definiert, in welchem der Winkel zwischen zwei Geraden gleich 0^0 wird. Aus dieser Definition und aus der Figur ergibt sich dann sofort, daß die parallelen Geraden im Unendlichen sich schneiden müssen. An dieser Figur läßt sich nun zeigen, daß der Satz von der Summe der Innenwinkel eines Dreiecks bestehen bleibt, wenn die eine Seite $CD // AB$ wird. Der Einfachheit wegen sei $CA \perp AB$. Es ist nun nach dem Satz von der Summe der Innenwinkel $CAD + ACD + ADC = 2R$. Wird der Winkel ADC kleiner und kleiner, so wird für den Grenzfall $ADC = 0^0$, CD geht parallel AB und man sieht, daß immer noch $CAD + ACD = 2R$ ist. Aus der Figur ersieht man, daß $ACF = R$ ist, da

*) Ueber den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta. Unt.-Bl. f. Mathem. u. Naturwiss. 1905, Jahrg. XI, Nr. 1.

$\angle CAB = R$ ist. Man könnte aus der Figur direkt den Schluß ziehen, daß die Summe der entgegengesetzten Winkel an Parallelen einen Rechten beträgt. Es läßt sich auch mit Anwendung der Grundsätze nachweisen, daß die Wechselwinkel an Parallelen gleich sind. Nach dem Vorhergehenden ist $CAD + ACF = 2R$ oder, da $ACF = ACD_1 + D_1CF$ ist, $CAD' + ACD' + D'CF = 2R$. Es ist jedoch $CAD' + ACD' + CD'A = 2R$. Also muß sein $CD'A = D'CF$.

Man kann auch in umgekehrter Richtung vorgehen. Sind die Eigenschaften der Winkel an den Parallelen, welche von einer dritten geschnitten werden, gezeigt, so läßt sich auf funktionale Weise der Satz von der Summe der Innenwinkel zeigen. Nach unserer Definition für die Parallelität muß sein

$$CAB + ACF + 0^0 = 2R \text{ (Fig. 1).}$$

Dreht sich die Gerade CF um C, so nimmt der Winkel ACF in gleicher Weise ab, wie der Winkel zunimmt, den die bewegliche Gerade mit AB bildet. Es ist also $AD'C = D'CF$ als Wechselwinkel an Parallelen. Es wird $ACF = ACD' + AD'C$, mithin bleibt die Gleichung bestehen

$$CAB + ACD' + AD'C = 2R,$$

welche Gleichung den Satz über die Summe der Innenwinkel darstellt. Hierbei ist noch CAB als R angenommen. Will man sich noch von dieser Annahme freimachen, so hat man die Gerade AB um A zu drehen.

Daß die Parallelen AB und CF gleichen Abstand von einander haben, läßt sich wohl am besten mit Hilfe von Kongruenzbeziehungen nachweisen.

Die Definition der Parallelität spielt auch eine wichtige Rolle in der Aufgabe, die Lage des vierten harmonischen Punktes geometrisch zu bestimmen. Hat man die Strecke AB innerlich und äußerlich nach dem Verhältnis der Strecken a und b geteilt, so sieht man, daß die Teilpunkte in B fallen müssen, wenn $b = 0$ wird. Wächst b, so rückt der eine Teilpunkt nach A, der andere entfernt sich von B. Für den Grenzfall $b = a$ rückt der eine Teilpunkt in das Unendliche und der andere Teilpunkt fällt in die Mitte von AB. Zugleich sieht man, daß in diesem Grenzfall die Gerade, welche die Endpunkte der Strecken a und b verbindet, parallel AB geworden ist.

Aus diesen angeführten Beispielen glaube ich mit Recht die Forderung folgern zu können, das Parallele als Grenzfall aufzufassen und zu definieren, wenn das funktionale Denken in der Geometrie in den Vordergrund gerückt werden soll.

Gehe ich zu den Sätzen vom Kreise über, so zeigt sich das Funktionale in dem Satze vom Peripherie- und Zentriwinkel. In den älteren Lehrbüchern werden die beiden Fälle in bezug auf die Lage des Mittelpunktes gesondert behandelt, während die nach dem funktionalen Prinzip bearbeiteten Lehrbücher nur den einen Fall behandeln. Es läßt sich hier so schön auf funktionale Weise der Zusammenhang beider Fälle zeigen. Ist nämlich (Fig. 2) AMB der Zentriwinkel, ACB der zugehörige Peripheriewinkel, so wird nach alter Methode der bekannte Lehrsatz bewiesen. Entsprechend der Figur ist

$$AMB = AMD + BMD$$
$$ACB = ACD + DCB.$$

Läßt man den Punkt C auf der Peripherie sich bewegen, so wachsen augenscheinlich AMD und ACD, während BMD und BCD abnehmen. Fällt D auf B, so wird $AMD = AMB$ und $BMD = BCD = 0$. Man sieht ohne weiteres, daß in allen diesen Fällen der bewiesene Lehrsatz seine Richtigkeit behält. Bewegt sich der Punkt C noch weiter nach C', so wird $AMD < AMB$ und BMD liegt auf der anderen Seite von MB, d. h. es ist BMD von dem Winkel AMD zu subtrahieren, um den $\angle AMB$ zu erhalten. In gleicher Weise ist der Winkel $BC'D'$ mit $AC'D'$ zu subtrahieren, um den Winkel $AC'B$ zu erhalten. Wir sehen also die Beweise für die beiden Fälle durch das funktionale Verfahren zu einem einzigen vereinigt.

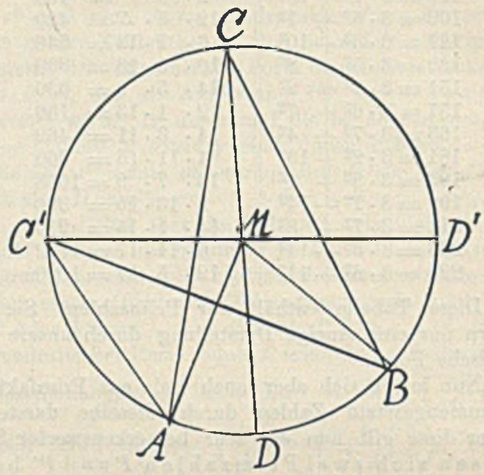


Fig. 2.

Gleiches zeigt sich bei dem Satze vom Abschnitts- oder Sehnentangentenwinkel, wo man ebenfalls zwei verschiedene Beweise hat, je nachdem der Abschnittswinkel ein spitzer oder ein stumpfer ist. Auch hier versuchen die neuesten Lehrbücher nach modernsten Grundsätzen nicht, beide Fälle auf funktionale Weise zu vereinigen. Ist auf bekannte Weise gezeigt worden,

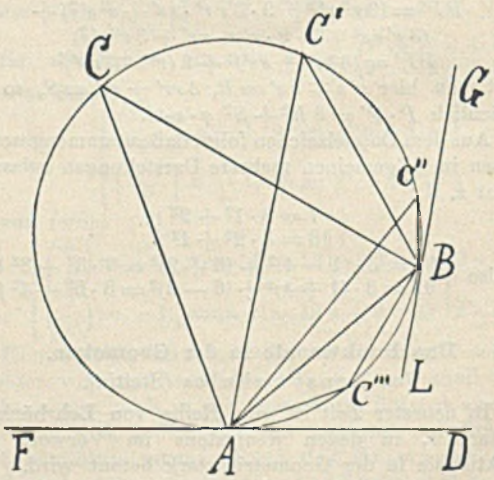


Fig. 3.

daß $ACB = BAD$ ist, so läßt man den Punkt C verschiedene Lagen annehmen, es wird dann sein müssen $AC'B = BAD$, $AC''B = BAD$. Soll nun C'' unendlich nahe an B fallen, so hat es den Anschein, als ob der Satz aufhöre zu bestehen. Es geht jedoch die Sekante $C''B$ in Tangente GB und der Winkel $AC''B$ in den Winkel ABL über. (Wem dies nicht strenge genug ist, braucht ja nur $ABL = C''AB + AC''B$ zu setzen und $C''AB$ gleich null werden zu lassen.) Für diesen

Grenzfall müssen auch die Nebenwinkel gleich sein, d. h. $FAB = GBA$. Ist C'' nach C''' gerückt, so entspricht $AC'''B$ dem Winkel $AC''B$, und da $AC''B$ in ABL übergeht, wenn C'' unendlich nahe an B liegt, so muß $AC'''B = FAB$ sein. Je mehr der Punkt C''' nach A rückt, desto kleiner wird der Winkel ABC''', und man sieht, daß in dem Falle, wo C''' auf A fällt, der Winkel $AC'''B$ in FAB übergeht. Man sieht hier also, wie der Satz fortbesteht, wenn man von den Winkeln auf die Nebenwinkel übergeht.

Bei der Inhaltsberechnung läßt sich auch die Ableitung der Formel für den Inhalt des Trapezes für das Funktionale in der Geometrie verwerten. Man entwickelt einfach das Trapez durch Anlegen des Parallelogramms $CFDB$ an das Dreieck ABC (Fig. 4)

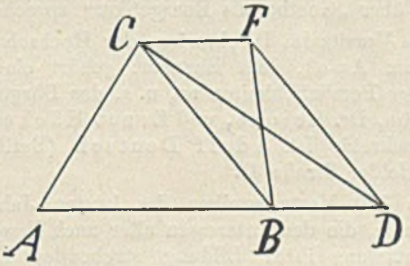


Fig. 4.

Der Inhalt des Trapezes $ABFC$ ist dann gleich $ABC + CBD$, da die Dreiecke CBD und CBF inhaltsgleich sind. Ist der Inhalt des Parallelogramms gleich Null, so sieht man, daß das Trapez in das Dreieck übergeht.

Bei dem pythagoreischen Lehrsatz sieht man, daß die eine Kathete in die Hypotenuse übergehen muß, wenn die andere Kathete gleich null wird, welche dann in die Richtung der Tangente in dem betreffenden Punkt übergeht. Nur in einem modernen Lehrbuche habe ich den Hinweis auf den Zusammenhang zwischen dem verallgemeinerten und dem eigentlichen Pythagoreer gefunden, und dies wird als eine neue Auffassung des erweiterten Pythagoreers angeführt. Ich habe schon seit sechs Jahren im Unterricht gezeigt, wie bei Veränderung des Winkels und der Projektion der Seite der erweiterte Pythagoreer für den spitzen Winkel in den eigentlichen Pythagoreer und dann in den für den stumpfen Winkel übergeht.

Sehr einfach läßt sich auf funktionale Weise der Zusammenhang der Lehrsätze von den Sehnen, den Sekanten und von der Tangente und Sekante zeigen. Den Hinweis auf den Zusammenhang der beiden letzten Sätze findet man überall, den Zusammenhang des ersten Lehrsatzes mit den beiden anderen habe ich nur in einem Buche gefunden. Läßt man die Lage des Schnittpunktes sich ändern, so sieht man ohne weiteres das Fortbestehen des Sehnensatzes für die Sekanten. Läßt man ferner die eine Sekante in die Tangente übergehen, so ergibt sich auch ohne weiteres die Gültigkeit des Satzes für Tangente und Sekante. Will man sich weiter in dem Unterricht ausdehnen, so kann man den Schnittpunkt in das Unendliche fallen lassen und man sieht dann auch hierfür die Gültigkeit der Sätze und gleichzeitig zeigt sich auch hier vorteilhaft, das Parallele als einen Grenzfall anzufassen.

Den Aehnlichkeitspunkt und die perspektivische Lage sollte man nur im Zusammenhang mit den Konstruktionsaufgaben, Dreiecke der Gestalt nach zu zeichnen, behandeln. Hier läßt sich mit Nachdruck das funktionale Denken üben und ich habe stets gefunden, daß die Schüler diesen Aufgaben ein großes Interesse entgegengebracht haben. Freilich ist hierbei hervorzuheben, daß, ein Dreieck der Gestalt nach zeichnen, heißt, ein Dreieck mit beliebig gewählter Einheit zeichnen, und daß die Größe dieser Einheit durch das dritte Stück, welches zur Größenbestimmung dient, bestimmt wird. Ist z. B. das Dreieck der Gestalt nach aus $a : b = 5 : 4$, γ zu konstruieren, so setze man $a = 5z$, $b = 4z$, wo z die durch das dritte gegebene Stück zu bestimmende Größe ist. Der Schüler sieht dann, daß das Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu konstruieren ist. Alsdann ist der Aehnlichkeitspunkt zu wählen, um das Dreieck der Größe nach zu konstruieren. Ja noch mehr, man kann hierauf zurückkommen bei der Durchnahme der Lösungsmethoden der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, wenn für den Quotienten der Unbekannten $\frac{x}{y}$ ein bestimmter Wert $\frac{e}{f}$ erhalten worden ist. Setzt man bekanntlich zur Auflösung $x = ez$, $y = fz$, so sieht der Schüler ohne Schwierigkeit den Zusammenhang der geometrischen und algebraischen Methoden.

An diesen angeführten Beispielen habe ich wohl deutlich gezeigt, wie die Schüler an den einfachsten geometrischen Lehrsätzen im funktionalen Denken geübt werden können. Der Erfolg hängt nur von der Geschicklichkeit des Lehrers ab. Ich glaube sicher, daß mancher Kollege das eine oder das andere Beispiel schon so im Unterricht behandelt hat, wie ich es hier angeführt habe.

Kleinere Mitteilungen.

Ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

In Nr. 5 des XIII. Jahrgangs der Unterrichtsblätter findet sich eine Lösung der bekannten Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ durch Konstruktion bezw. graphische Darstellung von J. Schacht. Es ist indessen für den Lehrer oft von Vorteil, die Größen a, b und c vermittels Rechnung in ganzen Zahlen ausdrücken zu können. Diesem Behufe dient folgende kurze Ausführung.

Aus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ergibt sich $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c}$ und hieraus

$$1)\quad a + b = 2n$$

$$2)\quad ab = 2n \cdot c,$$

wobei n irgend eine ganze Zahl bedeutet. a und b sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 2nx + 2nc = 0, \text{ d. h. } x = n \pm \sqrt{n^2 - 2nc}.$$

Setzt man nun:

$$3)\quad n^2 - 2nc = m^2,$$

so wird:

$$4)\quad \underline{a = n + m}; \quad 5)\quad \underline{b = n - m}.$$

Aus 3) folgt aber $n = c \pm \sqrt{c^2 + m^2}$.

Bestimmt man endlich s durch die Gleichung

$$\underline{6)\quad c^2 + m^2 = s^2},$$

so ist die Lösung der gestellten Aufgabe zurückgeführt auf die bekannte Berechnung pythagoreischer Dreiecke.

Ein Beispiel möge zum Schluß die Durchführung erläutern:

Wählt man gemäß Glchg. 6) für c, m und s die geläufigsten Zahlen, also

$c = 3 \cdot t$, $m = 4 \cdot t$ und $s = 5\,t$, wo t wieder einen ganzzahligen Faktor bedeutet, so folgt aus

$$3)\ n = 8\,t \text{ (bezw: } -2\,t\text{)},$$

daher aus 4) und 5):

$$a = 12\,t\ (2\,t) \text{ und } b = 4\,t\ (-6\,t),$$

und es wird aus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$$\frac{1}{12\,t} + \frac{1}{4\,t} = \frac{1}{3\,t} \text{ bezw. } \frac{1}{2\,t} - \frac{1}{6\,t} = \frac{1}{3\,t}$$

usw. E. Schulte (Bonn).

Berichtigung.

In dem Bericht über die Diskussion betr. die Meraner Vorschläge in der Praxis des mathematischen Unterrichts finden sich einige sinnstörende Druckfehler, die hiermit berichtigt werden. Es muß heißen: S. 101, Sp. 1, Z. 4 v. u. graphische statt praktische, S. 101, Sp. 2, Z. 6, und 3 vom Ende philosophische statt philologische.

Vereine und Versammlungen.

III. Internationaler Kongress für Schulgesundheitspflege zu Paris im Sommer 1910.

Der Kongreß, dessen Ehrenvorsitz der französische Minister des öffentlichen Unterrichts übernommen hat, wird nach der neuerdings von dem Organisationskomitee getroffenen Beschlüssen erst in der ersten Augustwoche (2. bis 7. August) des Jahres 1910 zusammentreten.

Vorsitzender des Komitees ist Dr. Albert Mathieu, Médecin des hopitaux — 37 rue des Mathurins, Paris; Generalsekretär Dr. L. Dufestel, Médecin inspecteur des Écoles — 10 Boul. Magenta, Paris.

Deutscherseits leitet die Vorarbeiten für den Kongreß der Allgemeine Deutsche Verein für Schulgesundheitspflege (Vorsitzender Prof. Dr. med. & phil. Griesbach zu Mülhausen i. Els.).

* * *

Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.

Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft hat die Initiative zur Herstellung einer Gesamtausgabe der Werke Eulers ergriffen. Der IV. Internationale Mathematiker-Kongreß in Rom 1908 hat dieses Vorgehen der genannten Gesellschaft mit Freude begrüßt und den Wunsch ausgesprochen, daß das große Unternehmen von ihr in Gemeinschaft mit den Mathematikern der anderen Nationen ausgeführt werde. Dementsprechend haben sich bereits verschiedene wissenschaftliche Korporationen zur wirksamen Unterstützung bereit erklärt, insbesondere hat die Deutsche Mathematiker-Vereinigung „in Anbetracht der großen Bedeutung, die Eulers nie veraltende Werke für den gesamten Umfang der mathematischen Wissenschaft besitzen", aus ihrem Vermögen als Beitrag zu den Kosten der Herausgabe die Summe von 5000 Fr. zur Verfügung gestellt.

An die Mathematiker aller Länder ergeht die Aufforderung, durch Subskriptionen wie durch freiwillige Beiträge das Zustandekommen des Werkes zu fördern. Präsident der zu dem genannten Zweck niedergesetzten Euler-Kommission ist Prof. Dr. F. Rudio, (Zürich V, Dolderstraße 111).

Schul- und Universitäts-Nachrichten.

Freie Hochschule Berlin. Das jetzt ausgegebene Programm für das Herbstquartal weist 73 Vortragsreihen auf, die zum guten Teil naturwissenschaftliche oder zu den Naturwissenschaften in Beziehung stehende Fragen behandeln, wie 1 (Kulturprobleme der Gegenwart), 6 (Einführung in die Philosophie der Gegenwart), 7 (Entwickelung der Luftschiffahrt), 8 (Vom Urtier zum Menschen), 9 (Einführung in die Arbeitsweise der exakten Physik), 10 (Einführung in die Astronomie), 41 (Einführung in die Grundgesetze der Chemie), 60 (Einführung in die Photographie) u. a. m.

Unter den Vortragenden befindet sich eine Reihe namhafter Persönlichkeiten, von denen hier nur W. Ostwald genannt sein möge, der in Vortragsreihe 1 über „Goethe als Energetiker" sprechen wird.

Den Vorsitz im Direktorium der Hochschule führt Dr. Max Apel, dem Ehrenrat gehört eine Reihe bekannter Persönlichkeiten an, u. a. der Bürgermeister von Berlin, Dr. Reicke, und Ernst Häckel (Jena). Generalsekretär ist Adolf Deutsch (Berlin O 27, Blankenfelder Straße 4).

Die 120 Vortragsreihen des letzten Jahres der Hochschule, die den Interessen aller nach Erweiterung und Vertiefung ihrer Bildung strebenden Elemente dienen will, sind von 9000 Hörern besucht worden.

Das gegenwärtige ausführliche Programm ist kostenlos an verschiedenen Stellen in Berlin, u. a. in der Akademischen Lesehalle und sämtlichen städtischen Lesehallen Berlins, sowie in beiden städtischen Lesehallen Charlottenburgs zu haben, es enthält Angabe der Verkaufsstellen für Hörerkarten.

Lehrmittel-Besprechungen.

Dr. G. und J. v. Schröder, Tafeln für den Unterricht in der allgemeinen Chemie und chemischen Technologie, fortgesetzt von Dr. Aug. Harpf und Karl Hradecky; Berlin, Th. G. Fischer & Co. Preis aufgezogen M 16.

Das verdienstliche Werk, dessen frühere Lieferungen in dieser Zeitschrift (Jahrg. VI, S. 54) bereits die gebührende Würdigung gefunden haben, hat inzwischen eine weitere Fortsetzung durch die Herren Harpf und Hradecky erfahren, von denen der erstere bereits mit Schierl zusammen die Weiterführung des Werkes in seinen früheren Stadien (von der IV. Lieferung an) übernommen hatte. Dem Referenten liegt die X. Lieferung (Tafeln XLVII bis L) vor, deren beide erste Tafeln den Koksofen von Semet-Solvay zeigen, während die dritte die Darstellung von Rein-Aluminium mit Hilfe des Ofens von Borchers und die des Kalziumkarbids unter Benutzung des Ofens der deutschen Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a. M. vorführt, die beiden letzten erläutern die Darstellung von Kohlenstoff und Schwefelkohlenstoff.

Alle Vorzüge, die den älteren Tafeln nachgerühmt werden konnten, klare, auch in größerer Entfernung deutliche Bilder, deren Uebersichtlichkeit nicht durch unwesentliches Nebenwerk gestört wird, finden sich auch bei den gegenwärtigen Tafeln. Die Durchführung des Werkes darf man mit Freude begrüßen. P.

Bücher-Besprechungen.

Kielhauser, A. Ernst, Dr. Die Stimmgabel, ihre Schwingungsgesetze und Anwendungen in der Physik. Eine auf fremden Untersuchungen fußende Monographie. Mit 94 Abbildungen. Leipzig 1909. B. G. Teubner. Geb. 6 M.

Jedem, der sich in irgend einer Weise, sei es als Lehrer, Arzt oder Musiker, mit der Stimmgabel und ihren Gesetzen zu beschäftigen hat, wird diese wertvolle Monographie um so willkommener sein, als sie, unter Beschränkung der mathematischen Deduktionen auf das Allernotwendigste, eine fast lückenlose Darstellung der Geschichte der Stimmgabel, der Grundzüge der Schwingungsgesetze, der Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen von Stimmgabeln und der durch äussere Einflüsse erzeugten Veränderungen der Tonhöhen von Stimmgabeln gibt. Nur ganz kleine, für den Wert des Ganzen wenig ins Gewicht fallende Ergänzungen, wie auf S. 67 die doch heute ziemlich weitgehend mögliche Regulierfähigkeit durch Elektromotoren angetriebener stroboskopischer Scheiben, wären zu wünschen. Der von den Anwendungen der Stimmgabel handelnde vierte Teil hätte freilich vielseitiger sein können. Es sei nur u. a. auf die in dem Buche nicht erwähnte Anwendung der Stimmgabel zur Erzeugung von Oberflächenwellen und die dadurch in eleganter Weise ermöglichte Bestimmung der Kapillarkonstanten nach L. Matthiessen, die L. Grunmach so vielfach und erfolgreich angewendet hat, hingewiesen. Die in einem Anhange gegebene „Zusammenfassung der Ergebnisse“, das recht geschickt zusammengestellte „Verzeichnis der benutzten Literatur“ und die Sach- und Namenverzeichnisse tragen bei einer Monographie, wie der vorliegenden, nicht wenig dazu bei, ihre leichte Verwendbarkeit zu steigern.

Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Miehe, H., Dr., Privatdozent. Die Bakterien und ihre Bedeutung im praktischen Leben. 12. Bändchen der Sammlung „Wissenschaft und Bildung“. 141 S. Leipzig 1907. Quelle & Meyer. Geb. 1.25 M.

Dem Verfasser ist es vorzüglich gelungen, auf einem verhältnismäßig engen Raum das umfangreiche Gebiet der Bakteriologie in recht anziehender, den Gegenstand allseitig beleuchtender Weise zu behandeln. Eine wenn auch nur kurze, so doch anregend geschriebene geschichtliche Einleitung führt unmittelbar zu den Bakterien, ihrer Größe, ihrem Aussehen und ihren sonstigen Eigenschaften selbst. Das geschriebene Wort wird durch zahlreiche, gut gewählte Abbildungen in wirksamer Weise unterstützt. In dem zweiten Teil, der die Verbreitung der Bakterien und ihr Wirken in der Natur, in der Landwirtschaft und der Technik, sowie die krankheitserregenden Bakterien behandelt, wird man nichts von Bedeutung vermissen. Bei den bakteriologischen Methoden hätte vielleicht das selbstverständlich erläuterte Kochsche Gelatine-Verfahren der festen Nährböden in seiner Bedeutung für die großen Fortschritte in der Bakteriologie historisch mehr gewürdigt werden können. Solche Kleinigkeiten können jedoch nicht daran hindern, das Buch allen Lehrenden zur schnellen Orientierung und auch als geeignete Lektüre für Primaner zu empfehlen, falls ein kurzer Abriß der Biologie, etwa im Anschluß an die Chemie, in der Prima erteilt wird. Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

R. Vater, Dampf und Dampfmaschine. 2. Aufl. Leipzig 1909, B. G. Teubner. Preis geb. M 1,25.

In dem kleinen Heftchen (Nr. 63 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“) gibt Verfasser nach einer kurzen, aber sehr klaren und deshalb trotz der Kürze ausreichenden Einleitung über die Grundbegriffe Arbeit, Leistung usw. und über den ersten Hauptsatz der Wärmelehre, die Eigenschaften und Erzeugung des Wasserdampfes. Der dritte Abschnitt, der Hauptteil des Buches, bringt die Entwickelung der Kolbendampfmaschine von den ersten Versuchen Papins an bis zu den jetzigen mehrstufigen Heißdampfkondensationsmaschinen. In zwei kleinen Kapiteln wird der Begriff der Ungleichförmigkeit und die Notwendigkeit des Schwungrades, sowie die Wirkungsweise der Geschwindigkeitsregler erörtert. Den Schluß bildet eine Kritik der Dampfmaschine an der Hand des zweiten Hauptsatzes.

Das Buch ist in leicht verständlicher und doch wissenschaftlicher Weise geschrieben und ist jedem, der sich über die Kolbendampfmaschine orientieren will, sehr zu empfehlen. Die Dampfturbinen werden in einem anderen Band derselben Sammlung behandelt.

K. Schreber (Greifswald).

* * *

Die Luftschiffahrt, herausgeg. von Graf Zeppelin jr. und anderen Fachmännern. Stuttgart 1908, Franckhsche Buchhandlung. Preis M 1,00.

Die Woge der populär gehaltenen Bücher über Luftschiffahrt schwillt immer mehr und mehr an; die Folge ist, daß durchaus nicht alle empfehlenswert sind. Das vorliegende Buch gehört zu den weniger wertvollen.

Trotz des allgemein klingenden Titels wird fast nur das Zeppelinsche starre Luftschiff beschrieben. Und das Buch wäre einheitlicher ausgefallen, wenn die die übrigen Luftschiffe behandelnden Kapitel ganz weggeblieben wären. Z. B. wäre dann der Widerspruch vermieden worden, daß auf S. 136 richtig erklärt wird, infolge der beweglichen Aufhängung der Gondel der Parsevalschen Luftschiffe werde ein Kippmoment vermieden, während auf S. 142 der Unsinn wiedergekäut wird, daß die Schraube des Parsevalschen Luftschiffes zu tief unter dem Druckmittelpunkt hänge und deshalb ein Kippmoment bedinge. Es ist überhaupt eine eigenartige Zumutung, daß die Verlagsbuchhandlung einen Herrn, der derartiges schreibt, als Fachmann bezeichnet. Und solche groben Fehler kommen mehrfach vor.

Gut dargestellt ist die Entwickelung des Zeppelinschen Luftschiffes, und wer dieses kennen lernen will, dem kann das Buch empfohlen werden, aber mit der Bemerkung, daß alle Kritiken und Vergleiche mit anderen Systemen mit großer Vorsicht aufzunehmen sind. K. Schreber (Greifswald).

* * *

Eugen Lutz, Analytische Geometrie der Ebene. Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. Karlsruhe 1909. G. Braunsche Hofbuchdruckerei und Verlag. 301 S. gr. 8° mit 182 Textfiguren. Preis gebunden M 9.—.

Ich bespreche eigentlich gerne solche Bücher, die nicht bei einer der großen mathematischen Verlagsanstalten erscheinen. Denn sie verschwinden leicht in der Masse, auch wenn sie gut sind. Hier möchte einem die Besprechung freilich verleidet werden durch den unwürdig lobhudlerischen Waschzettel, den die

Verlagsfirma beilegte. Ein solches Anpreiseverfahren ist doch bei wissenschaftlichen Büchern sonst nicht üblich. Glücklicherweise ist das Buch aber wirklich gut, wenn auch etwas teuer. Es will den Lehrstoff mehr schulpädagogisch behandeln als dies sonst in ähnlichen Lehrbüchern geschieht. Dies wird erreicht durch genaue Ausführung aller Rechnungen, durch vollständige Durchführung von Spezialfällen und viele zum Teil ganz, zum Teil andeutungsweise gelöste Aufgaben. Auch die gut gezeichneten zahlreichen Figuren tragen dazu bei, die Anschaulichkeit zu erhöhen. Freilich sollte gleich am Anfang, wo der Begriff der analytischen Gleichung klar gemacht werden soll, wenigstens ein Beispiel durchgeführt sein. Auch die Definition der Polarkoordinaten wäre besser gleich so gegeben worden, daß auch negative Radienvektoren zugelassen werden. Schon in dem ersten Beispiel $r = 4 \cos \varphi$ muß ja der Verfasser selbst bemerken, daß das eigentlich nötig wäre.

Es ist ganz gut, daß die Determinanten gleich eingeführt werden. Die kleine Mühe, die darauf verwendet werden muß, lohnt sich reichlich. Linienkoordinaten werden erst spät, bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, benutzt, so daß Leser der ersten zwei Abschnitte nichts für sie Unnötiges zu lernen brauchen. Dreieckskoordinaten konnten nur angedeutet werden, aber die projektiven Gesichtspunkte werden gleich von Anfang an, auch in Hinsicht auf Konstruktionen, berücksichtigt. Das Buch ist sowohl hauptsächlich zum Selbststudium für Studierende an Hochschulen zu empfehlen und auch für die Hand des Lehrers an Mittelschulen.

H. Wieleitner (Pirmasens).

* * *

Freundt, Konrad, Ueber die Dreiteilung des Winkels. Thorn, Selbstverlag. Preis M 1,00.

Die kleine Schrift enthält im wesentlichen eine Zusammenstellung und vergleichende Beurteilung verschiedener, der Winkeldrittelung dienender Mechanismen, darunter befindet sich auch eine patentamtlich geschützte Vorrichtung, die der Verfasser selbst angegeben hat. Für seine Beurteilung sucht er eine geeignete Grundlage durch eine Reihe von allgemeinen Betrachtungen zu gewinnen, die für die Klarlegung der an sich ja genügend einfachen Sachlage den ihnen vom Verfasser beigelegten Wert m. E. nicht besitzen. Uebrigens ist die ganze Auseinandersetzung auch an sich nicht sehr deutlich, was auch von der Beschreibung und zeichnerischen Darstellung der einzelnen Mechanismen wenigstens z. T. gilt. Ich denke dabei namentlich an den unter Nr. 2 dargestellten geometrischen Sachverhalt, bei dem zum Schaden der Deutlichkeit für die Bezeichnung der Punkte und Strecken gleichzeitig Zahlen und Buchstaben zur Verwendung kommen. Im übrigen finde ich, daß dieser Sachverhalt in einer meines Wissens schon längst bekannten, von den Angaben des Verfassers z. T. abweichenden Konstruktion die bei weitem einfachste und darum beste Lösung des in Rede stehenden Problems ergibt. Daß diese nur für Winkel bis 135° anwendbar ist, wie der Verfasser mit Recht bemerkt, scheint mir kein besonderer Fehler zu sein, da schließlich alle über 90° hinausgehenden Winkel ja zu Winkeln unter 90° in einfacher Beziehung stehen.

Trotz ihrer Mängel wird die Schrift vielleicht für manche Leser Interesse bieten. P.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Abel, G., Chemie in Küche u. Haus. II. vollständig umgearb. Aufl. von Klein, J. Mit mehrfarb. Doppeltafel (Sammlung Aus Natur und Geisteswelt). Leipzig 1909, Teubner.

Adler, A., Fünfstellige Logarithmen mit mehreren graph. Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlenreihen. (Samml. Göschen Nr. 423). Leipzig 1909, Göschen. geb. M 0.80.

Arendt, R., Leitfaden für den Unterricht in der Chemie und Mineralogie. 11. Aufl., bearb. von L. Doermer. Hamburg 1909, Voß. M 1.60.

von Bardeleben, K., Statik u. Mechanik des menschlichen Körpers (der Körper in Ruhe und Bewegung). (Sammlung Aus Natur und Geisteswelt), der Anatomie des Menschen. V. Teil mit 26 Abb. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Behrendsen O., u. Götting, E., Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Ausgabe f. höh. Mädchenanstalten, zugl. Unterstufe f. Lyzeen u. Studienanstalten. Mit 296 Fig. Ebenda. geb. M 3.—.

Beutel, E., Algebraische Kurven. 1. Teil: Kurvendiskussion (Samml. Göschen Nr. 435). Leipzig 1909, Göschen. geb. M 0.80.

Blätter f. deutsche Erziehung, herausgegeben von Arthur Schulz in Birkenwerder b. Berlin. 11. Jahrg. Heft 6 bis 8, 10. Birkenwerder 1909, Verlag der Bl. f. d. E.

Böhmig, L., Das Tierreich: VI. Die wirbellosen Tiere (Sammlung Göschen). 1. Bd. mit 74 Fig. Leipzig 1909, Göschen. geb. M 0.80.

Borel, E., Die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe von Stäckel. 2. Bd.: Geometrie. M. 403 Fig. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 6.40.

Briecke, W., u. Mahlert, A., Leitfaden der Physik f. höh. Mädchenschulen u. die Unterklassen v. Studienanstalten f. Mädchen. M. 210 Fig. Berlin 1910, Salle. M 2.40.

PROJEKTIONS-APPARATE
FÜR SCHULZWECKE
Man verlange gratis u. franko Prospekt Mach von: CARL ZEISS JENA

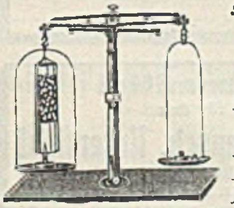
Verlag von Otto Salle in Berlin W 57

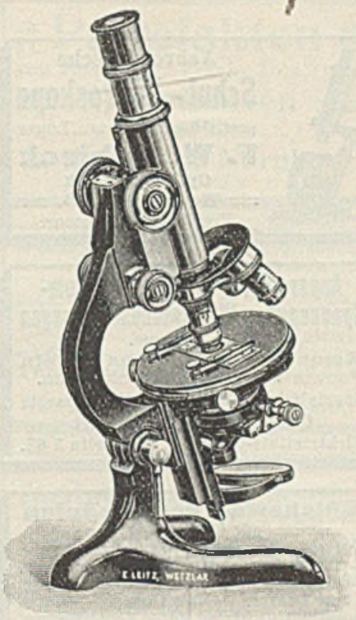
Soeben erschien:

:: **Praktischer Lehrgang** ::
der

Arithmetik

Ein Hilfsbuch in ausführlicher Darstellung für Lehrende und Lernende
von
Prof. Jul. Sonne in Fulda.
Mit vielen Figuren im Text.
Preis M 2.40 geh., M 2.80 geb.

Richard Müller-Uri,
Institut f. glastechnische Erzeugnisse, chemische u. physikalische Apparate und Gerätschaften.
Braunschweig, Schleinitzstrasse 19
liefert auch

sämtliche Apparate nach dem methodischen Lehrbuch der Chemie und Mineralogie v. Prof. Dr. Wilh. Levin — genau nach den Angaben des Herrn Verfassers.



Leitz
Mikroskope :: Mikrotome
Mikrophotographische
und
Projektions - Apparate
:: :: :: für Schulzwecke :: :: ::
▽▽▽
Photographische Objektive
Prismen-Feldstecher
Spezial-Katalog Nr. 5 gratis u. franko.
▽▽▽
E. Leitz, Wetzlar
Berlin NW Luisenstraße 45. **Frankfurt a. M.** Neue Mainzerstraße 24.
St. Petersburg, London, New-York, Chicago.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover, gegründet vor 1606.

Soeben erscheint und ist durch jede Buchhandlung zu beziehen:
Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung.

I. Teil: Differential=Rechnung.

Von Dr. L. Kiepert,
Geh. Reg.-Rat, Prof. der Mathem. a. d. Techn. Hochschule zu Hannover.
Elfte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann.
XX. und 818 S. gr. 8° mit 181 Figuren im Text.
Preis in elegantem Halblederband M 13,50.

Die zehnte Auflage war in mehr als 5000 Exemplaren schon nach wenigen Jahren vergriffen. Damit eine Verzögerung vermieden wird, kommt die elfte Auflage in fast unveränderter Form heraus.

Um die Benutzung der den Anhang des Werkes bildenden „Tabelle der wichtigsten Formeln" zu erleichtern, ist diese Tabelle jetzt in ausIegbarer Form eingeheftet. Hierdurch ist es ermöglicht, die Tabelle während des Gebrauches neben das aufgeschlagene Buch zu legen und so die in den einzelnen Paragraphen des Werkes gegebenen Hinweise auf die Tabelle ohne zeitraubendes Nachschlagen des Gesamtwerkes gleichzeitig zu benutzen.

Sonderabdrucke der Tabelle werden den Herren Dozenten zur Verteilung an ihre Hörer auf Wunsch durch den Verlag kostenfrei geliefert.

Nur Jahresaufträge.

Bezugsquellen für Lehrmittel, Apparate usw.

Beginn jederzeit.

Dr. Theodor Schuchardt
Chemische Fabrik, Görlitz.
Wissenschaftliche Präparate, Reagenspapiere
Sammlungen von
Elementen, Präparaten, Alkaloiden, Farbstoffen, Drogen usw. für den Unterricht.
Preisliste zu Diensten.

Höllein & Reinhardt
Neuhaus/Rennweg
Thermometer aller Art
Glasinstrumente und Apparate,
Geißler- und Röntgen-Röhren, Glas-Meßgeräte, Glasbläserei-Artikel, Glas-Lehrmittel.
Katalog zu Diensten.

Dr. Steeg & Reuter
Bad Homburg vor der Höhe
Gegründet 1855
:: **Kristallpräparate** ::
Apparate zur Polarisation, Doppelbrechung und Interferenz des Lichts

Spindler & Hoyer, Göttingen
Werkstätte für Präzisionsmechanik
Physikal. Apparate
für den
Unterricht an höheren Lehranstalten.
Preisliste kostenlos.

Für den mineralogischen Unterricht
empfehlen
: **Polarisations-Mikroskope** :
Goniometer :: Kristallmodelle
Dünnschliff-Sammlungen
:: :: von Gesteinen und Mineralien. :: ::
Voigt & Hochgesang, Göttingen

Neuartige, vielseitige
Projektionsapparate
für alle Zwecke, bes. für Schulen.
Gebr. Mittelstraß, Magdeburg 40
Feinmechanische Werkstätten.

Für Biologie u. Geographie:
Mendels vielgerühmte
Bioplast-, Mikroplast-Bilder.
Ferner Tier-, Landsch.- u. Arterienbilder
Naturw.-stereograph. Verlag
Berlin N 4, Invalidenstr. 111.

A. Krüss, Hamburg 11
Physikalische Apparate
n. Grimsehl
:: :: **Spektral-Apparate** :: ::
Projektionsapp. Diapositive.

Physikal. Apparate
Vollständige Einrichtung
von physikal. Kabinetten
Ferdinand Ernecke
Berlin-Tempelhof

Wenden!

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.