Jahrgang XV. 1909. No. 5.

Unterrichtsblätter

für

Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe,**

herausgegeben von

F. Pietzker,

Professor am Gymnasium zu Nordhausen.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Prof. Pietzker in Nordhausen erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (3 Mk. Jahresbeitrag oder einmaliger Beitrag von 45 Mk.) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Vereins-Angelegenheiten.

Vortragsanmeldungen für die nächstjährige Pfingstversammlung — und zwar sowohl für die allgemeinen, wie für die Abteilungssitzungen — sind auch jetzt schon sehr erwünscht. Sie sind entweder an den Hauptvorstand z. H. des Vorsitzenden Direktor Prof. Dr. Thaer (Hamburg, Oberrealschule vor dem Holstentore) oder an den Ortsausschuß in Posen z. H. des Herrn Prof. Dr. Spies (Helmholtzstraße 2) zu richten, der an Stelle des als Direktor nach Bromberg versetzten Herrn Prof. Dr. Thieme vorläufig die Geschäftsführung im Ortsausschuß übernommen hat.

Der Vereins-Vorstand.

Die Meraner Vorschläge in der Praxis des mathematischen Unterrichts.

Verhandlungen auf der Hauptversammlung in Freiburg (Br.).

I. Bericht

erstattet von H. Schotten (Halle a. S.).

M. H. Es liegt mir zunächst am Herzen, einem Irrtum zu begegnen, der immer wieder auftaucht und der geeignet ist, der Anerkennung und Verbreitung der sogenannten Meraner Vorschläge entgegenzuwirken. Es ist das der Irrtum, daß der dem Bericht der Unterrichtskommission angehängte Lehrplan eine bindende Vorschrift bedeute. Das ist absolut nicht der Fall; dieser Lehrplan soll nur eine von vielen Möglichkeiten darstellen, wie man die Ideen der Unterrichtskommission in die Wirklichkeit umsetzen kann, ohne mit den bestehenden Lehrplänen in einen allzu scharfen Gegensatz zu geraten. Ich habe persönlich aber öfter die Erfahrung machen müssen, daß man aus dem erwähnten Irrtum heraus Stellung gegen die Meraner Vorschläge überhaupt nahm. Das ist sehr bedauerlich, und ich wollte daher zunächst die heutige Gelegenheit benutzen, um diesem Irrtum möglichst entgegenzutreten. Der den Meraner Ausführungen angehängte Lehrplan bedeutet durchaus nicht die Hauptsache der Arbeit der Unterrichtskommission, deren Wert liegt vielmehr in den dem Lehrplan vorangehenden Ausführungen, die sich teils auf den Inhalt, teils auf die Methodik des mathematischen Unterrichts beziehen.

Es ist leicht möglich, diesen Inhalt durch zwei Schlagworte zu charakterisieren, die — wie man wohl behaupten kann — schon eine allgemeine, einheitliche Bedeutung gewonnen haben. Danach handelt es sich bei dem mathematischen Unterricht um die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und um die Pflege des funktionalen Denkens.

Was zunächst das funktionale Denken betrifft, so ist es nicht überall so aufgefaßt worden, wie es aufgefaßt werden sollte. Es handelt sich darum, die

Variabilität der Größen — seien es arithmetische oder geometrische —, ihre gegenseitige Abhängigkeit und ihren wechselseitigen Zusammenhang den Schülern zum Bewußtsein zu bringen: und sie daran zu gewöhnen, gerade auf diese „Lebendigkeit" der Größen zu achten und ihr Denken auf die Betrachtung des „Veränderlichen" einzustellen. Dies kann im Unterricht schon von Sexta an betrieben werden; schon dort muß dem Schüler klar gemacht werden, wie z. B. eine Summe abhängig ist von einem der Aenderung unterworfenen Summanden, wenn der andere konstant bleibt; wie eine Differenz sich ändert bei konstantem Minuend und variablem Subtrahend, und umgekehrt bei veränderlichem Minuend und konstantem Subtrahend. Das Erstgenannte gilt für die Rechnungen der zweiten Stufe, wo bei dieser Betrachtung besonders die Brüche einem viel intensiveren Verständnis der Schüler entgegengebracht werden. Dabei wird man natürlich das Wort Funktion noch gänzlich vermeiden können. Aber der ganze Unterricht muß durchtränkt sein mit der Betrachtung der veränderlichen Größen und den Folgen, die daraus entspringen; überall muß der Schüler sich des Einflusses der veränderlichen Größen bewußt werden.

Das ist im geometrischen Unterricht noch viel leichter möglich, wenn man nicht die Betrachtungen an feste Figuren anknüpft, sondern immer und überall mit der Betrachtung beweglicher Gebilde anfängt. Schließlich wird man ja natürlich eine feste Figur zeichnen müssen, sie wird aber dann ganz anders angesehen werden, nicht als die allein mögliche, sondern als eine der unendlich vielen möglichen, als ein Sonderfall. Gerade bei diesen Betrachtungen würden sich dann die Uebergangs- und Grenzfälle, die uns besondere Sätze liefern, in heller Klarheit herauskristallisieren und ein lebendiges, verständnisvoll erfaßtes Eigentum der Schüler werden. Daß dabei das logische Moment nicht zu kurz kommt, dazu bietet sich reichlich Gelegenheit.

Ueber die Wirkungen der Meraner Vorschläge auf die Resultate des mathematischen Unterrichts läßt sich naturgemäß noch kein abschließendes Urteil fällen, da noch keine Generation vorhanden ist, die von Anfang an nach diesen Grundsätzen unterrichtet worden ist. Wenn sich aber hier und da Schwierigkeiten in den oberen Klassen ergeben, so muß man eben bedenken, daß die Schüler nicht in dem gewünschten Sinne vor- und durchgebildet sind. Wird das erst allgemein der Fall sein, dann wird auch der Widerstand gegen die Einführung der Anfänge der Infinitesimalrechnung, der noch hier und da auftaucht, völlig verschwinden: dann werden diese den natürlichen Abschluß des gesamten mathematischen Schulunterrichts bilden.

Als ein vorzügliches Hilfsmittel für die mathematische Erziehung im Meraner Sinne muß dann noch die fortgesetzte Uebung in der graphischen Darstellung erörtert werden; ein Hilfsmittel, das auch in den Meraner Vorschlägen stark betont wird.

Schließlich gilt es noch, sich mit einem anderen Bestandteil der Meraner Forderungen auseinanderzusetzen, der eine gleich starke Betonung wie die graphischen Darstellungen erfährt, mit den sog. „Anwendungen". Ich muß gestehen, daß ich diese Bezeichnung für nicht sehr glücklich gewählt halte. Es ist nicht recht klar, was man darunter alles verstehen soll. Nach meiner Ueberzeugung ist eigentlich nur ein Gebiet vorhanden, wo man von einer direkten Anwendung sprechen kann, das ist die mathematische Geographie, ein in sich abgeschlossenes Gebiet, in dem die sphärische Trigonometrie „angewendet" wird. Ueberall sonst handelt es sich in der Tat nicht um solche Anwendungen, es wäre daher besser gewesen, von praktischen Uebungsbeispielen zu sprechen, die sich überall an die realen Verhältnisse des Lebens und der Natur anschließen sollen. Es ist jedoch anzuerkennen, daß auch schon vor den Meraner Vorschlägen damit begonnen worden ist, die alten gekünstelten Beispiele, die sich auf gedachte, nie wirklich vorkommende Verhältnisse bezogen, aus den Aufgabensammlungen auszumerzen, daß man angefangen hat, praktischere Aufgaben zu geben, die sich an den Gedankenkreis der Schüler anlehnen und ihrem Verständnis offenstehen. Es ist aber immer noch mehr zu betonen, daß durch die Wahl der Aufgaben die Schüler dazu erzogen werden sollen, den Zusammenhang der Mathematik mit dem Leben und den Wissenschaften, die der Naturbetrachtung gewidmet sind, klar zu erkennen, damit sie befähigt werden, überall, wo es möglich und nötig ist, ihre mathematischen Kenntnisse anzuwenden.

II. Diskussion.

Hierfür schlägt der Vorsitzende Seith (Freiburg) die folgende Disposition vor:

1. Ziele des Unterrichts:
   a) Pflege der Raumanschauung.
   b) Erziehung zum funktionalen Denken (zugleich logische Schulung.)
2. Methode:
   a) Graphische Darstellung.
   b) „Anwendungen".
3. Infinitesimalrechnung auf der „höheren" Mittelschule.

Die Versammlung stimmt dem zu.

Bei der weiteren Diskussion stellt sich dann die Notwendigkeit heraus, die Punkte 1. und 2. im Zusammenhange zu behandeln.

Lorey (Minden): In der Literatur wird wiederholt der Meraner Lehrplan als Klein-Gutzmerscher Lehrplan bezeichnet und dadurch der Eindruck hervorgehoben, als wenn den praktischen Schulmännern von Universitätsprofessoren, die nicht vor einer Klasse gestanden haben, etwas aufoktroyiert würde. Aus diesem Grunde halte ich es für meine Pflicht, jedenfalls auch im Sinne von Klein, ausdrücklich zu betonen, daß der Meraner Lehrplan durch eine gemeinsame Arbeit von praktischen Schulmännern und Universitätsprofessoren entstanden ist.

Treutlein (Karlsruhe) tritt ein für einen vorbereitenden geometrischen Unterricht, der die Sinne auszubilden und Stoff für die spätere Arbeit herbeizuschaffen hat. Aus der Geschichte erklärt sich der noch vielfach gebräuchliche Lehrgang nach Euklid mit der Stereometrie am Ende. Im Gegensatz hierzu ist eine frühe und systematische Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens dringend nötig. Eingehen auf warum und weil ist dabei nicht ausgeschlossen, wohl aber das Euklidische Beweisverfahren. Auch in die wissenschaftlichere Behandlung der Planimetrie gehören räumliche Vorstellungen, namentlich in die Aehnlichkeitslehre.

Schotten (Halle a. S.) bemerkt, daß nach seiner Ansicht trotz des Henrici-Treutleinschen Buches die Symmetrie noch nicht genügend beachtet werde;

sodann regt er an, über die Bedeutung und Anwendung der Modelle Mitteilungen zu machen.

Lorey (Minden): Die Symmetrie findet sich in dem ausgezeichneten Buche von Henrici-Treutlein. Es würde mich interessieren, welche Erfahrungen man mit dem propädeutischen Unterricht in der Quinta der Oberrealschule gemacht hat.

Geißler (Luzern): Es ist gewiß nichts dagegen zu sagen, daß die sinnliche Anschauung geklärt und ausgebildet wird. Aber es handelt sich hier — wie auch ausdrücklich bei dem Meraner Bericht gesagt ist — um die wichtigen eigentlichen Ziele des mathematischen Unterrichts und die wichtigen, in die Mitte zu stellenden Forderungen. Und dabei sollte man nicht bei der bloß wünschenswerten Ausbildung des Anschauungsvermögens und dem funktionalen Denken usw. stehen bleiben, und nicht auf diese die praktischen Vorschläge beschränken, sondern von vornherein etwas anderes stets praktisch berücksichtigen, was mindestens ebenso wichtig ist. Der Schüler soll nicht in der Art an die sinnliche Auffassung gewöhnt werden, daß er dabei seinen Drang zur genauen Vorstellung (statt Wahrnehmung), seinen Drang zum Fragen irgendwie vergißt. Vielmehr soll man stets zugleich die damit zusammenhängende abstrahierende Fähigkeit mit ausbilden. Aehnlich sollte er ja nicht die Einbildung erhalten, daß es einfach und leicht sei, funktional zu denken, er sollte von früh auf merken, daß das Leben, ebenso wie der Stoff der anderen Fächer große Schwierigkeiten bietet und nur in seltenen, einfachen Fällen mit mathematischer Abhängigkeit dargestellt werden kann. Also Vorsicht, Bescheidenheit, Beschränkung und weiterer Blick vom Einfachsten zum Komplizierten des Lebens ist stets als Wichtigstes mit auszubilden.

Bode (Frankfurt a. M.) hat selbst propädeutischen Unterricht in V (1—2 Stunden) gegeben und ist grundsätzlich dafür, selbst den Rechenunterricht in VI dem wissenschaftlich gebildeten Mathematiker zu übertragen. Der Schüler soll durch den propädeutischen geometrischen Unterricht räumliche Anschauung, Uebung im Zeichnen und Hunger nach wissenschaftlicher Erkenntnis bekommen. Bisher sei der Erfolg ein sehr erfreulicher, es gebe jetzt in IV viel weniger Leistungen, die mit 4 und 5 zu zensieren seien.

Treutlein teilt auf Herrn Loreys Frage mit, seine bezüglichen 15jährigen Erfahrungen hätten ergeben, daß jeder mathematische Praktikant und Reallehrer herangebildet und gewöhnt werden kann, den propädeutischen Unterricht wissenschaftlich, wenn nicht gut, doch befriedigend zu erteilen. Zur systematischen Ausbildung des Anschauungsvermögens sind Modelle anfangs durchaus nötig, allmählich werden sie so überflüssig, wie in Prima schließlich der Lehrer selbst. Die Schüler schneiden Papierfiguren im Unterricht mit der mitgebrachten Schere aus. Zur Wiederholung dienen die groß ausgeführten Modelle der Schule. Dabei wird der sprachliche Ausdruck gepflegt. In IV werden graphische, oder — besser gesagt — zeichnerische Darstellungen von Funktionen (auf Rechen-, nicht mm-Papier) gut verstanden. Viele sind nicht nötig, aber man muß beständig auf sie zurückkommen.

Lorey: Die Bodeschen Aeußerungen sind sehr überzeugend und ich selbst hege keinen Zweifel, daß, von einem Mathematiker gegeben, der propädeutische Unterricht in Geometrie ausgezeichnet wirkt; die große Schwierigkeit besteht aber darin, daß man an den Realanstalten vielfach diesen Unterricht in V durch seminaristische Lehrer geben lasse, auch aus Mangel an Mathematikern.

Masuch (Rogasen) betont die Unterscheidung zwischen sinnlicher und reiner Anschauung, der Anschauung a priori im Kantischen Sinne, und stellt die Ausbildung des räumlichen produktiven Anschauungsvermögens, das sich von der gewonnenen empirischen Anschauung, der Anschauung a posteriori, unabhängig macht, als ein hohes Ziel des mathematischen Unterrichts hin. Dies sei auch bei den Meraner Vorschlägen gemeint worden.

Schotten erklärt, daß auch er durchaus für den propädeutischen Unterricht in Quinta eintrete.

Brocke (Zabern): Als Schüler von Max Simon will ich nicht versäumen, auch an dieser Stelle auf die „Didaktik und Methodik“ meines hochverehrten Lehrers, namentlich die 2. Aufl. von 1908, hinzuweisen. Auf Einzelfragen möchte ich, wie gesagt, nicht eingehen. Als eine erfreuliche Erscheinung aber konstatiere ich, daß eine fruchtbare Einwirkung der durch den Artikel Simons in den Südwestdeutschen Schulblättern 1907 inaugurierten Wendung der Diskussion der Meraner Vorschläge, die ich selbst erstmalig als solche feststellte und in gewisser Weise fortzusetzen unternommen habe*), unverkennbar ist. Was die Mißverständnisse betrifft, von denen Herr Prorektor Lorey vorhin sprach, wie auch Herr Direktor Schotten in seinem Vortrage, so besteht in diesem Punkte eine gewisse Gegenseitigkeit. Eine Erörterung persönlicher Spannungen gehört jedoch nicht hierher und ist auch unserer großen Sache nicht dienlich.

Grimsehl (Hamburg): An der Oberrealschule Uhlenhorst-Hamburg wird der propädeutische Unterricht gegeben, wenn der Rechenunterricht in V in den Händen des Mathematikers liegt, dagegen nicht, wenn der Elementarlehrer den Unterricht erteilt.

Geißler: Es scheint mir nicht gemeint zu sein, daß man durch Aeußerung verschiedener Ansichten Vorschriften wünsche; Freiheit ist wünschenswert, aber auch für den Schüler. Dieser findet sehr viel zu fragen, und man soll nicht durch bestimmtes Verlangen, z. B. gewisse Auffassung des Grenzbegriffes, etwa das Fragen unterdrücken oder an eine gewisse Darstellung gewöhnen. Wenn auch der Schüler schon einmal merken darf und soll, welch ein Mittel man durch Differentialquotienten in der Hand hat, so soll er doch stets und bei jedem guten Unterricht fühlen und sein Gefühl bewahren dürfen, daß hier noch sehr viel zu denken ist, auch Uebersinnliches. Dann wird um so mehr der Hunger entstehen, zu denken und auf der Universität nach Gründlichkeit und weiterer Vertiefung zu suchen, sich selbst kritisch zu entscheiden, welcher Auffassung wohl der Vorzug zu geben sei.

Treutlein hat Reallehrer gefunden, die den vorbereitenden Geometrieunterricht sehr gut zu geben wußten. Dieser stört nicht den späteren wissenschaftlichen Betrieb, erzieht vielmehr nach und nach einen Heißhunger nach streng logischer Erkenntnis.

Loewy (Freiburg) führt aus, ihm erscheint der propädeutische Unterricht absolut notwendig; mit ihm knüpft man an die besten Traditionen der Vergangenheit an, an Newton und Helmholtz, nach denen die Geometrie in der Empirie ihre Basis hat. Der propädeutische Unterricht hat die Schüler nicht nur

*) Vergl. die Verhandlungen der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel, 1907.

mit dem aus der Erfahrung stammenden Arbeitsmaterial der Geometrie bekannt zu machen, sondern soll ihnen auch Lehrsätze vorführen, um die Sehnsucht nach Mehr zu wecken. (Sundara Row, Geometrical exercises in paper folding, G. C. Young and W. H. Young, der kleine Geometer, deutsch von S. u. F. Bernstein). In Zusammenhang mit diesem propädeutischen Unterricht spricht Redner über den mathematischen Unterricht in der Prima, der auch in gewisser Weise propädeutisch sein soll. Er müßte gewisse Ausblicke auf Fragen geben, die über den Lehrstoff hinausgehen, und auch für den Universitätsunterricht vorbereiten. Z. B. Besprechung des Problems der Quadratur des Kreises, seine Lösbarkeit bei unendlich häufiger Anwendung des Zirkels mittelst der Reihe $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$, Kreisteilung, Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der Gleichung fünften Grades. Bei Besprechung solcher allgemeiner Fragen könnte auch vielleicht mehr als bisher das Gefühl für die Schönheit der Mathematik geweckt werden; hier ist ebenso wie für die Freude an der Natur die Anleitung erforderlich. Anknüpfend an Herrn Schotten, der die mathematische Geographie als einziges abgeschlossenes Anwendungsfeld der Mathematik bezeichnet hat, wird die Versicherungsmathematik genannt. Sie sollte ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung nur mit Hilfe des Begriffs des Durchschnitts durchgeführt werden. Ihre Wichtigkeit erhellt daraus, daß die deutschen Versicherungsanstalten jährlich mehr Prämien einnehmen, als der preußische Staat direkte Steuern. An die verschiedenen Sterblichkeitstafeln lassen sich Bemerkungen über die Aenderung der Sterblichkeit infolge Hygiene und verschiedener Lebensbedingungen anknüpfen.

Lorey: Das von Herrn Prof. Loewy erwähnte Buch „Der kleine Geometer" ist von dem mathematischen Ehepaare Young verfaßt und aus der Erziehung seiner sechs Kinder entstanden.

Der Vorsitzende Seith schlägt vor, jetzt zur Besprechung der Infinitesimalrechnung überzugehen.

Treutlein hält für angezeigt, diese wenigstens in der Gymnasialprima zunächst geschichtlich und geometrisch darzustellen, erst nachher abstrakt.

Grimsehl: An den Oberrealschulen in Hamburg ist die Infinitesimalrechnung seit dem Bestehen der Oberrealschule eingeführt mit dem besten Erfolg. Diejenigen Lehrer, die den Unterricht gegeben haben, werden ihn niemals wieder aufgeben; sie verzichten lieber auf irgendwelche anderen Kapitel der Mathematik, als auf die Infinitesimalrechnung. Die Physik andererseits zwingt zur Einführung der Infinitesimalrechnung. Die Begriffe „Geschwindigkeit, Beschleunigung" usw. sind Differentialquotienten. Man soll sich auch nicht vor dem Worte für den Begriff fürchten.

Bode ist aus einem Gegner ein Freund der Einführung der Infinitesimalrechnung geworden. Sie kann in O II oder U I bei den kubischen Gleichungen mit dem Tangentenproblem begonnen werden. Das Buch von Burkhardt, anschauliche Behandlung einzelner Aufgaben mit viel Zeichnen, ist zu empfehlen.

Lüroth (Freiburg) bemerkt, daß man die Infinitesimalrechnung auf die Archimedische oder Leibnizsche Art behandeln könne, auf strengere oder weniger strengere Weise, daß man im ersten Jahre mit Integrationsproblemen beginnen müsse, daß aber nur die praktischen Lehrer über die zweckmäßigste Art entscheiden könnten.

Lorey: Auch ich kann nur Günstiges berichten und zwar vom Gymnasium in Görlitz, wo ich bis Ostern d. J. als Oberlehrer tätig war. Ich bin mit dem letzten Jahrgang bis zur Taylorschen Entwicklung gekommen und habe damit guten Erfolg erzielt. Warnen muß ich aber vor der doch zuweilen drohenden Gefahr, daß ein formales Darauflosdifferentiieren in die Schulen einzieht. Mit Rücksicht auf die von Herrn Geheimrat Lüroth erwähnten Schwierigkeiten des Infinitesimalbegriffes mache ich auf die treffliche Arbeit von Hessenberg in den Abhandlungen der Friesschen Schule aufmerksam, die die Mystik der unendlichkleinen Größen beseitigt.

Seith warnt vor oberflächlichem Betrieb, da sonst die Schüler den Eindruck einer lückenhaften Wissenschaft bekommen.

K. T. Fischer (München): Es wäre besser, statt „Infinitesimalrechnung" das Wort „Grenzbegriff" einzuführen; dabei wäre die Behandlung des Grenzbegriffes nur dann und so weit aufzunehmen, als derselbe bei geometrischen oder physikalischen Ueberlegungen sich aufdrängt. Am Gymnasium wird eine strenge mathematische Behandlung nicht möglich sein.

Schotten konstatiert eine erfreuliche Uebereinstimmung für die Einführung der Infinitesimalrechnung in die höheren Schulen; dagegen fordert er für die Behandlung individuelle Freiheit des Lehrenden.

Thaer (Hamburg): Differentiieren und Integrieren zahlreicher Funktionen ist zwar nicht notwendig, aber nicht schädlich. Besonders ist dies als Sicherheitsventil für solche Herren zu empfehlen, die nun doch einmal sich und die Jungen plagen müssen, sei es mit planimetrischen Konstruktionsaufgaben oder mit quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. In bezug auf die Strenge ist doch wohl festzuhalten, daß wir nur so streng sein werden, als wir einerseits dem Verständnis der Schüler zumuten können, andererseits selbst imstande sind. Nachdem Herr Prof. Study den Lehrern die Fähigkeit abgesprochen hat, in Differentialrechnung unterrichten zu können, ist es mir persönlich zweifelhaft geworden, ob ich die Begriffe mit der nötigen Strenge erfaßt habe. Die verschiedenen Methoden, die heute angegeben sind, sind aber wertvolle Anregungen, aber nicht als bindende Vorschriften anzusehen.

Loewy bemerkt, daß auch die Geometrie in unseren Schulen nicht streng gelehrt wird und gelehrt werden kann. (Z. B. Schnittpunktsätze, Messen, Aehnlichkeit). Die Infinitesimalrechnung brauchte also vielleicht auch nicht, wie Herr Direktor Seith verlangt, absolut streng gelehrt zu werden. Die Voranstellung der Differentialrechnung scheint vielleicht empfehlenswert, um dem Schüler den für die Naturwissenschaften unentbehrlichen Geschwindigkeitsbegriff an erster Stelle zu geben. Mit den Elementen der Differentialrechnung — es brauchen nicht alle Funktionen differentiiert zu werden — kann man bereits in der Natur herrschende Gesetze der Oekonomie (Brechungsgesetz, Reflexionsgesetz) ableiten; derartige Kenntnisse sollten allgemein werden.

Grimsehl konstatiert, in Uebereinstimmung mit Schotten, daß alle einig sind in der Ueberzeugung, daß die Infinitesimalrechnung nötig sei. Es handele sich nur um die Namen „Differentialquotient" und „Integral". Er plädiert daher, das Ding beim rechten Namen zu nennen. Er schränkt die Bedenken Bodes ein, daß ein zusammenhängender Lehrgang der Infinitesimalrechnung schädlich wäre. Es soll die Differentialrechnung nicht als abgeschlossenes Gebäude eingeführt werden, aber nachdem der Begriff des Differentialquotienten genügend eingeführt ist, sollen die einzeln zusammengetragenen Bausteine zu einem einheitlichen Ganzen verbunden werden. Dadurch lerne der Schüler, daß das bessere Werkzeug ihn zu besseren Leistungen befähigt. Der Schüler erhält dadurch Hunger nach mehr, wenn er sieht, daß die Schulmathematik nicht die Gesamtheit der ganzen Mathematik bildet. Die Strenge der mathematischen Behandlung ist nur relativ. Sie soll stets so weit geführt werden, wie es bei der Bildungsstufe der Schüler möglich ist, doch werden wir nie auf der Schule zu einer absoluten Strenge kommen. Je höher der Schüler in seiner Bildung gekommen ist, je weiter kann man die Strenge treiben. Zu der Bemerkung des Direktors Thaer, daß viele Lehrer sich und den Schülern das Leben unbequem machen, durch besondere Tüfteleien, z. B. bei geometrischen Konstruktionen oder bei quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, möchte er darauf hinweisen, daß die Ursache vielfach in dem Bestreben mancher Lehrer zu suchen sei, in den Veröffentlichungen der Abiturientenaufgaben in den Jahresberichten durch schwierige Aufgaben zu imponieren. Er halte es darum für erwünscht, daß diese Veröffentlichungen unterbleiben.

K. T. Fischer betont wiederholt, man solle nicht Differential- und Integralrechnung unterscheiden, sondern das beiden Charakteristische, Gemeinsame und an der Schule Neue, „den Grenzwert" als Schlagwort nehmen, um den Stoff zu charakterisieren. Die Archimedische Methode der Flächenrechnung wird auch den Mathematiker befriedigen und dürfte im Hinblick auf die historische Entwicklung im Bereiche der Aufnahmefähigkeit des Primaners liegen. Mathematik soll als abstrakte Wissenschaft des Denkens rein und klar der Naturwissenschaft gegenübergestellt werden.

Seith gesteht dem Physiker, aber nicht dem Mathematiker das Recht zu, die Schwelle zu überschreiten, wo die Ueberlegung problematisch wird, und weitere Folgerungen anzuschließen. Gerade die Schüler, die nicht Mathematik weiterstudieren, sollen von ihrem einwandfreien Aufbau den Eindruck eines Kunstwerks ins Leben mitnehmen.

Zum Schluß ging die Diskussion auch auf mehrere Punkte ein, die in dem der Diskussion vorangegangenen Vortrag von Geißler (s. Unt.-Bl. XV, Nr. 4, S. 80) berührt worden waren. Da der Vortragende selbst nicht mehr anwesend war, beschränkte sich die Debatte auf Hervorhebung einiger allgemeiner Gesichtspunkte, doch wurde ausgesprochen, daß das Schweigen zu verschiedenen Bemerkungen des Herrn Geißler nicht als Zustimmung aufzufassen sei. Im Einzelnen bemerkte Poske: Die Bemerkungen des Herrn Geißler zu den Meraner Vorschlägen sind, auch soweit sie eine Kritik zu enthalten scheinen, nicht geeignet, jenen Vorschlägen Abbruch zu tun. Namentlich ist bezüglich des funktionalen Denkens (genauer: des Denkens in funktionalen Beziehungen) zu sagen, daß die funktionale Auffassung keineswegs auf praktische Darstellungen beschränkt bleiben soll, sondern daß diese nur eine Veranschaulichung und eine unentbehrliche Vorstufe bedeuten. Und ebensowenig reden die Meraner Vorschläge einer unbegrenzten Tragweite des funktionalen Denkens das Wort; allerdings stellt die funktionale Auffassung einen Leitgedanken dar, der selbst bis zu den letzten Problemen, wie dem der Beziehung zwischen Körperlichem und Geistigem hinführt, ohne daß jedoch mit der Aufdeckung funktionaler Beziehungen das Wesen dieses Zusammenhanges aufgeklärt wäre. Hier leitet vielmehr gerade das funktionale Denken bis an die Grenze, wo sich Erforschliches und Unerforschliches scheiden und wo die „Ahnung" beginnt, die der Vortragende vom Unterricht ferngehalten wissen wollte. — Herr Geißler hat weiter gegen die Meraner Vorschläge eingewendet, daß mit der Erziehung zur räumlichen Anschauung und der Gewöhnung an funktionales Denken die Ziele des mathematischen Unterrichts nicht ausreichend bezeichnet seien. Indessen wollten die Meraner Vorschläge ja keine Didaktik des mathematischen Unterrichts geben, sondern nur die Stellen bezeichnen, an denen vor allem eine Reform des mathematischen Unterrichts wünschenswert erschien. Es ist selbstverständlich, daß mit der räumlichen Anschauung die Bildung klarer Vorstellungen Hand in Hand geht (die Meraner Vorschläge betonen geradezu die hieraus entspringende Schulung des logischen Denkens), und ebenso, daß die Gewöhnung an funktionales Denken für sich noch nicht die Lösung aller schwierigen Probleme bedeutet, obwohl sie die Vorbedingung für deren Inangriffnahme darstellt. — Der Vorwurf endlich, daß der Studienplan der Unterrichtskommission der Naturforscher und Aerzte die Studierenden an ihrer philologischen Ausbildung hindere, beruht auf einer völligen Verkennung des Planes. Dieser sucht im Gegenteil die Anzahl der Fachvorlesungen in den ersten sechs Semestern auf ein Minimum herabzusetzen, um den Studierenden die Pflege allgemeiner Bildungsfächer und insbesondere auch philologische Studien zu ermöglichen. Nicht Geringachtung, sondern hohe Wertschätzung der philologischen Bildung hat bei dem Entwurf dieses Studienplanes mitgewirkt.

Ueber die Winkel an einer Geraden, die von zwei anderen geschnitten wird.

Vortrag auf der Hauptversammlung zu Freiburg i. Br.*)

von E. Brocke (Zabern).

Es handelt sich um die Frage einer rationellen Einteilung und Bezeichnung der bekannten 16 Winkelpaare. Da diese Frage vor kurzem in den vorliegenden Unterrichtsblättern mehrfach behandelt wurde,**) so erschien die diesjährige Hauptversammlung als der rechte Ort, die Frage in ihrem ganzen Umfange von neuem aufzurollen. —

Der erste Teil gab eine Einführung in das Problem. Zunächst wurde die bisherige Entwickelung und der gegenwärtige Stand der Frage geschildert und erörtert; insbesondere wurde Schottens Dreiteilung besprochen. Sodann wurde die Lücke festgestellt, die in der Schulmathematik wie in der wissenschaftlichen Elementarmathematik im Hinblick auf das Thema nach wie vor besteht, und zu dieser Tatsache Stellung

*) S. Unt.-Bl. XV, 3, S. 64.
Die obigen Ausführungen geben nur einen, allerdings die Hauptpunkte deutlich heraushebenden Auszug aus dem Vortrag, der in ausführlicher Bearbeitung in Schottens Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht erscheinen wird.

**) S. Unt.-Bl. XV, 1, S. 18.

genommen. Endlich wurde, nach einer Rechtfertigung der sprachlichen und sachlichen Fassung des Themas, das zugehörige Problem formuliert, was hier, wie gesagt, nur für den Kern der Sache geschehen soll.

Betrachtet man nämlich die Zusammenhänge zwischen der Größenbeziehung der zwei Winkel irgend eines Paares und der der übrigen Paare und ferner der gegenseitigen Lage der zwei Geraden zu einander samt den Umkehrungen, so bemerkt man, daß *eine Einteilung in zwei Klassen zu je acht* und *eine dazu passende Bezeichnung* notwendig und ausreichend ist, um die betreffenden Lehrsätze möglichst einfach und natürlich, kurz und doch vollständig, formal und inhaltlich streng richtig aussprechen zu können. Demgemäß lautet das Problem: *Wie erkennt man diese zwei Klassen ohne Größenvergleichung?* Wie erkennt man, ob ein beliebiges Winkelpaar zur einen oder zur anderen Klasse gehört? *Welches sind die dementsprechend passendsten Bezeichnungen und Namen* für diese beiden Klassen? —

Der zweite Teil sollte die Grundlegung, Entwickelung und Würdigung einer Lösung bieten, mußte aber aus Mangel an Zeit kursorisch behandelt werden.

An der Hand der Figur zweier einander schneidender Geraden wurden auch für die Figur des Themas die Voraussetzungen und Bedingungen, die Anknüpfungsmomente und Gesichtspunkte für die aufzustellenden Kriterien gewonnen.

Abgesehen von der Figur und den 16 Winkelpaaren, wird, was sich als zweckmäßig bewährt, als weitere Voraussetzung festgesetzt, daß als zugeordnete oder entsprechende Schenkel je zwei solche gelten, welche entweder beide in der einen Geraden oder beide nicht in der einen Geraden liegen. (Bei der zweiten Art liegt der eine Schenkel in einer der zwei Geraden, der andere in der anderen.) Die Bedingung, die zu erfüllen ist, verlangt, daß jedes der aufzustellenden Kriterien zu einer und derselben bekannten Zweiteilung der 16 Winkelpaare zu je 8 führen soll. Nebenbedingungen sind Einfachheit und Natürlichkeit. Als Anknüpfungsmomente sind offenbar die Stücke des Winkels zu betrachten, nämlich Scheitel, Schenkel und Fläche. Der Scheitel möge jedoch — dies soll als weitere einschränkende Festsetzung beachtet werden — nicht als unmittelbares Anknüpfungsmoment dienen, sondern nur eine sekundäre Rolle spielen, da seine direkte Benutzung etwas Gesuchtes und Unnatürliches an sich hat, obwohl es möglich ist, zugehörige Kriterien aufzustellen. Diese Festsetzung steht also mit der vorher aufgestellten Nebenbedingung im Einklange. Als Gesichtspunkte endlich, unter denen Schenkel und Flächen beschrieben und verglichen werden sollen, kommen Lage und Bewegung gleichermaßen zur Anwendung.

Auf diesem Boden lassen sich folgende vier Kriterien aufstellen:

Das **erste** *Kriterium* betrachtet die *Lage der Winkelflächen*. Dabei fragt man sich, ob sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der einen bezw. der zwei anderen Geraden liegen. Danach gibt es acht Winkelpaare von der Eigenschaft, daß die zwei Winkel jedes Paares zu der einen Geraden *ebenso* liegen, wie zu den beiden anderen, was von den acht übrigen *nicht* gilt.

Das **zweite** *Kriterium* betrachtet die *Lage der Schenkel*, nämlich ihre *Richtung*. Dabei fragt man sich, ob die entsprechenden Schenkel gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Danach gibt es acht Winkelpaare von der Eigenschaft, daß bei jedem Paare die zwei Schenkel in der einen Geraden zu einander *ebenso* liegen, wie die in den beiden anderen Geraden, was von den acht übrigen *nicht* gilt.

Das **dritte** *Kriterium* betrachtet die *Bewegung der Schenkel* und zwar ihre *Drehung* um die Scheitel. Dabei werden die Winkel beschrieben und zwar entweder von der einen Geraden oder von den beiden anderen aus. Danach gibt es acht Winkelpaare von der Eigenschaft, daß bei jedem Paare die Drehung eines Schenkels des einen Winkels *in demselben Sinne* erfolgt, wie die des entsprechenden Schenkels des anderen Winkels, während sie bei den acht übrigen *im entgegengesetzten Sinne* erfolgt.

Das **vierte** *Kriterium* betrachtet die *Bewegung der Winkelflächen*. Dabei werden die Winkel zur *Deckung* gebracht, was stets durch eine Drehung in der Ebene — auch die Verschiebung ist ja in gewissem Sinne eine Drehung — geschehen kann; übrigens je nach den Größen- oder Lagenbeziehungen ganz oder nur teilweise. Danach gibt es acht Winkelpaare von der Eigenschaft, daß der eine Winkel jedes Paares derart mit dem anderen (ganz oder nur teilweise) zur Deckung gebracht werden kann, daß die *entsprechenden* Schenkel (beider oder nur der ersten Art) sich decken, während bei den acht übrigen eine Deckung nur derart möglich ist, daß die *nichtentsprechenden* Schenkel zur Deckung gelangen. Die Drehungsmittelpunkte der ersten Gruppe sollen „*Orthocentra*“, die der zweiten „*Paracentra*“ heißen.

Das erste Kriterium wird man kurz das der *Flächenlage*, das zweite das der *Schenkelrichtung* nennen, das dritte ist das des *Drehungssinnes*, das vierte endlich könnte das Kriterium der *Deckungsmöglichkeit* genannt werden.

Als *Namen* für die Winkel der beiden Klassen oder Gruppen, die für alle vier Kriterien (wie auch in anderer Hinsicht) passen, schlägt der Verfasser die folgenden vor: *Die Winkel jedes Paares der ersten Klasse* heißen **„homologe“** oder „*entsprechende*“, *die der zweiten Klasse* **„anhomologe“** oder „*nichtentsprechende*“ Winkel. Auf diese Weise ist dem Bedürfnisse nach einer wissenschaftlichen (internationalen) Terminologie genügt und auch für passende deutsche Worte gesorgt, falls man solche gebrauchen will.*) —

Was die Würdigung der vorstehenden Lösung angeht, so sei hier vor allem auf folgenden Sachverhalt hingewiesen. In den aufgestellten Kriterien handelt es sich um die Seiten oder Halbebenen, welche jeder Geraden in der Ebene zugehören, um die Seiten oder Halbgeraden, welche jedem Punkte auf einer Geraden zugehören, und um ausgezeichnete Bewegungen von Geraden oder Halbgeraden wie auch der ganzen Ebene oder geradlinig begrenzter Teile derselben (Halbebenen, Winkel) in der Ebene der Figur. Das sind gewisse der vom Verfasser sogenannten symmetrischen und symmetriebildenden Eigenschaften der Grundgebilde.

*) Die Frage nach besonderen Namen, die den einzelnen Kriterien angepaßt sind oder gar zu weiteren Einteilungen der beiden Klassen selbst gehören würden, bleibe hier ganz aus dem Spiel. Uebrigens hat der Verfasser zum Zwecke einer deutlichen und vollständigen Einsicht in alle Einteilungsmöglichkeiten *graphische Tabellen* aufgestellt, deren Vorführung, wie im Vortrage, so auch an dieser Stelle unterbleiben muß.

Ferner kommt ebenfalls auf Schritt und Tritt, schließlich auch in den Bezeichnungen und Namen, das allgemeine Prinzip des Entsprechens zur Anwendung. Für dieses Prinzip, welches sich für die Geometrie als das der Benutzung symmetrischer Beziehungen spezialisiert, ist der Vortragende schon früher mehrfach in Wort und Schrift eingetreten.*)

Sodann sei gerade hier ganz besonders betont, daß es selbstverständlich ist, daß für die Zwecke des Unterrichts, namentlich des Anfangsunterrichts, je nach dem Alter der Schüler oder dem Stande der Klasse oder des betreffenden Schülers, nach empirischen Betrachtungen und Messungen, diese Einteilungskriterien und Namen durch Mittel bekannter Art, wie Kolorierung, Schraffierung, Bogen und Pfeile, Buchstaben, passende Vergleiche, überhaupt durch geschickte Bezeichnung und Darbietung veranschaulicht, nahegebracht, schmackhaft und verdaulich gemacht werden können und müssen. Man wird die Bezeichnungen so wählen, daß die gleichbezeichneten Winkel der ersten, die verschiedenbezeichneten der zweiten Klasse angehören. Eine solche geschickte Bezeichnung erleichtert nicht bloß die Durchführung der Kriterien, sondern vermag sie sogar in gewissem Grade zu ersetzen, was für die geometrische Praxis von Vorteil ist, weil dadurch das abstrahierende Denken auf ein Minimum reduziert wird.

Auch dürfte klar sein, daß durch die aufgefundene Lösung der Freiheit des Lehrers in rein inhaltlich-sachlicher Hinsicht (Zugänglichkeit einer größeren Zahl von Sätzen, Uebungen und Anwendungen) wie noch mehr in formaler und methodischer Hinsicht (nach Auswahl und Behandlung) ein ganz bedeutend weiterer Spielraum geschaffen ist, als er bisher bestand, wo ja, wie im ersten Teile näher ausgeführt wurde, in beiderlei Hinsicht Unvollständigkeit und Unklarheit, Einseitigkeit und Unsicherheit weit verbreitet waren und noch sind.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die aufgestellten Kriterien, die vorgeschlagenen Namen und die erwähnten Bezeichnungen, wie schon für die Figur zweier sich schneidender Geraden, so erst recht, natürlich in entsprechender Variation, für die Figur zweier Paare sich schneidender Geraden sich eignen und dort dieselben Vorteile bieten. —

Die Bedeutung und Tragweite der aufgefundenen Lösung konnte hier nur kurz gekennzeichnet werden. Der enge Zusammenhang mit den unterrichtlichen Reformbestrebungen dürfte ohnedies auch in diesem Auszuge deutlich erkennbar sein. Der Vortrag schloß mit einer Aufforderung zur Diskussion, die dann auch in anregender und lebhafter Weise stattfand und an demselben Tage auf dem nächtlichen Wege vom Festmahle nochmals aufflackerte.

---

*) Siehe darüber die „Verhandlungen der 49. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel vom 24. bis 27. September 1907" (Leipzig 1908, Teubner) S. 182 f. und S. 187 und den „Bericht über eine in Basel veranstaltete Besprechung der Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte" von Marcel Großmann in der Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht, 39. Jahrg. 1908, S. 79 ff. — Eine Darlegung, wie sich das angeführte Prinzip für den arithmetisch-algebraischen Unterricht spezialisiert, hat der Verfasser in Arbeit und wird demnächst erscheinen.

Ueber Funktionalgleichungen in der Elementarmathematik.

Von A. Wendler (Erlangen).

(Schluß.)

In diesen Blättern (XIV, Nr. 3, pag. 53 und XV, Nr. 2, pag. 30) habe ich in zwei Aufsätzen die Behandlung elementarmathematischer Fragen mit Hilfe von Funktionalgleichungen versucht. Die folgenden Zeilen sollen nun einer abschließenden kritischen Beleuchtung dieser Versuche dienen, deren Zweck und Ziel dadurch, wie ich hoffe, völlig klargelegt wird.

Zunächst einige Bemerkungen über die Funktionalgleichungen überhaupt:

Als Funktionalgleichungen bezeichnen wir alle diejenigen Gleichungen, welche Eigenschaften von Funktionen ausdrücken und auf Grund dieser Aussage deren Form ganz oder teilweise zu bestimmen erlauben. Dabei lassen sich etwa folgende Kategorien unterscheiden: I. Differenzengleichungen. II. Differentialgleichungen und solche Funktionalgleichungen, welche sich durch Differentiations- und Eliminationsprozesse auf Differentialgleichungen zurückführen lassen. III. Funktionalgleichungen, deren Behandlung sich auf die Cauchy-Riemannsche Funktionentheorie gründet. IV. Funktionalgleichungen, auf welche unter Einführung symbolischer Bezeichnungen die Methoden der Gruppentheorie Anwendung finden.

Vom Standpunkt der gewöhnlichen Elementarmathematik aus waren alle diese Hilfsmittel naturgemäß auszuschließen, worauf ich ja auch in der Einleitung zum ersten Aufsatz hingewiesen habe. Die einzige allgemeinere, noch als elementar zu bezeichnende formale Methode, ist die bei einer einzigen Funktion mit einer Unbekannten öfter anwendbare Methode der unendlichen Reihen, wie sie z. B. bei Bardey zur Ableitung der Reihe $\log(1+x) = Ax + Bx^2 + \cdots$ sich findet. Im übrigen muß man sich bei einer rein elementaren Behandlung eben darauf beschränken, unter möglichster Ausnutzung der Methode der unbestimmten Koeffizienten von Fall zu Fall Lösungen zu finden, wie ich es an einzelnen Beispielen versucht habe. Da solche Lösungen dann meist nur partikulär, mit Rücksicht auf das gegebene Problem nur als möglich, höchstens wahrscheinlich anzusehen sind, so können sie selbstverständlich auch nicht zur lückenlosen Ableitung mathematischer Sätze benutzt werden. Dazu würde vielmehr gehören, daß die aufgestellte Funktionalgleichung notwendig und hinreichend erkannt und vollständig gelöst werden könnte.

Welchen Zweck kann dann die versuchte funktionale Behandlungsweise nach einer so weitgehenden Einschränkung noch haben? Wir alle kennen die Tatsache, daß die Auffindung eines unbekannten Weges in der Mathematik vielfach erleichtert wird, wenn man das wirkliche oder auch nur wahrscheinliche Resultat bereits im voraus kennt. Bei der funktionalen Behandlung steht gerade diese heuristische Seite im Vordergrund. Die zu einer strengen Begründung nötigen Spezialuntersuchungen erscheinen dabei nicht nur nicht entbehrlich, sondern werden geradezu herausgefordert und in bestimmte Richtung gelenkt. Daß die Beweiskraft des Verfahrens in den einzelnen Fällen verschieden groß ist und nicht alle Probleme für die versuchte Behandlung gleich günstig liegen, ist ganz natürlich und kann an den mitgeteilten Beispielen geprüft werden. Es kommt eben bei all diesen, noch leicht zu vermehrenden Beispielen wesentlich darauf an, wieweit die Voraussetzungen reichen. So ist es z. B. eine durchaus begründete Annahme, daß die Winkelsumme W eines Polygons in der Ebene von der Anzahl n der Ecken abhängt. Hypothetisch dagegen — und äquivalent mit dem Parallelenaxiom — wäre die Annahme, daß W nur eine Funktion von n sei. Läßt man diese Annahme zu, so ist es leicht, eine Funktionalgleichung aufzustellen und sie rein elementar vollständig zu lösen. Dagegen würde die von vornherein recht wohl zulässige Annahme, daß W auch eine Funktion von der Fläche des Polygons sei, auf eine Funktionalgleichung führen, deren elementar leicht angebbare Lösung zunächst nur als möglich und mit Rücksicht auf den zuerst betrachteten Fall als wahrscheinlich zu betrachten ist und formell mit dem Resultat übereinstimmt, das man bei der Berechnung des Flächeninhalts eines von größten Kreisen gebildeten Kugelpolygons findet.

Was nun die Physik betrifft, so geht aus den drei mitgeteilten Beispielen hervor, in welchem Sinne hier Funktionalgleichungen unter Beschränkung auf eine rein elementare Behandlungsweise mit Vorteil Anwendung finden können. Welche Rolle dabei der Begriff der physikalischen Dimension spielen kann, mag noch etwas eingehender erörtert werden:*)

Auf Grund willkürlicher Abmachung erhalten bekanntlich die (abgeleiteten) physikalischen Größen neben der Zahl, welche sie mit einer Größe der nämlichen Art vergleicht, gewisse Namen; das sind die Dimensionalausdrücke, welche algebraische Funktionen von gewissen, passend gewählten Grundeinheiten sind. Handelt es sich nun darum, eine neue physikalische Größe durch die einmal gewählten Einheiten (z. B. Länge (L), Masse (M), Zeit (T) im C.- G.- S.-System) auszudrücken, so kommen hauptsächlich Proportionalgesetze von der Form $Y = c \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots$ in Betracht, wobei die X_i- Ausdrücke bedeuten, die in bekannter Weise von den gewählten Grundeinheiten abhängen. Ist Y noch unbestimmt, so macht man gewöhnlich aus dem Proportionalgesetz ein Gleichheitsgesetz und bestimmt dabei zugleich die Dimension von Y, indem man $c = 1$ wählt (bezw. als reine Zahl voraussetzt). Sei nun Y bestimmt und etwa ein X unbestimmt, so gibt dies zu prinzipiellen Bemerkungen Anlaß, die vorteilhaft an die Beispiele

$$\text{Kraft} = \frac{1}{\mu}\frac{mm'}{r^2} \text{ bezw. } = \frac{1}{k}\frac{c\,c'}{r^2}$$

für das magnetische, bezw. elektrostatische Grundgesetz angeknüpft werden.**)

Zunächst folgt hieraus:

$$|m| = \mu^{1/2}\, cm^{3/2}\, g^{1/2}\, sec^{-1} \text{ und } |e| = k^{1/2}\, cm^{3/2}\, g^{1/2}\, sec^{-1}.$$

Eine Zurückführung auf die drei mechanischen Grundeinheiten ist also nur möglich, wenn man über μ oder k Annahmen zuläßt, z. B. daß μ eine reine Zahl ist. Sieht man nun von dieser physikalisch nicht begründeten Annahme ab, so ist eine Zurückführung auf die drei mechanischen Einheiten als nicht gelungen zu betrachten, da wegen der aus der Maxwellschen Theorie folgenden Gleichung $\mu \cdot k \cdot V^2 = 1$ entweder μ oder k unbestimmt bleibt, als vierte Fundamentalgröße. Es ist somit ein geradezu das Wesen der Elektrizität betreffendes Problem, jene Zurückführung von μ oder k auf die drei mechanischen Einheiten zu ergründen.

*) Vergl. hierzu die Artikel von Weise, Pietzker und Kuhfahl, Unt.-Bl. IV, S. 64, 66 und V, S. 33. Anmerkung der Redaktion.

**) Vergl. Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, II. Absch., 1. Kap., pag. 48 und 49.

Der so gekennzeichnete heuristische Wert des „absoluten“ Maßsystems läßt sich mit noch etwas anderer Nuance aus folgender Ausführung erkennen:

Es bestehe von vornherein die begründete Annahme, daß die physikalischen Größen Y, X_1, $X_2 \cdots$ (und nur diese allein) in einem Abhängigkeitsverhältnis stehen: $Y = f(X_1, X_2 \cdots)$. Die Funktion f selbst sei unbekannt. Setzt man jetzt für Y, X_1, $X_2 \cdots$ die als bekannt vorausgesetzten Dimensionalausdrücke ein, so resultiert offenbar eine Funktionalgleichung. Jede, wenn auch partikuläre Lösung, entspricht möglicherweise dem gesuchten Zusammenhang. Führt dann die experimentelle Nachprüfung auf einen Widerspruch, so hat dies entweder seinen (mathematischen) Grund in der Unvollständigkeit der Auflösung oder einen physikalischen Grund, indem außer den in Rechnung gezogenen Größen X_1, $X_2 \cdots$ noch andere in Betracht kommen, deren Einfluß nicht so auf der Hand liegt, daß sie von Anfang an in Rechnung gezogen werden konnten. Auf alle Fälle ist bei dieser Behandlungsweise zu bedenken, daß f immer nur bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt werden kann, da ein solcher keinen Einfluß auf die Dimensionalausdrücke hat. Er kann in gewissem Sinne mit den Integrationskonstanten der Differentialgleichungen verglichen werden.

Ein Beispiel für diese Behandlungsweise wurde bereits im letzten Aufsatz erbracht. (Ableitung der Pendelformel.)

Ein weiteres Beispiel möge der Statik entnommen werden, wobei wir naturgemäß Kraft und Länge als Fundamentaleinheiten zugrunde legen: Es handelt sich um den von einer Flüssigkeit auf die Bodenfläche q ausgeübten Bodendruck B. Dieser hängt wahrscheinlich ab von q selbst, der Art der Flüssigkeit (spez. Gewicht s) und einer offenbar den Füllungsgrad definierenden Größe (Raumgröße φ $(L) = L_1$ oder L^2 oder L^3).

$$B = f(q, s, \varphi(L)).$$

Die Funktionalgleichung zwischen den Fundamentaleinheiten ist somit:

$$K = f\left(L^2, \frac{K}{L^3}, \varphi(L)\right),$$

für die offenbar $K = L^2 \cdot \frac{K}{L^3} \cdot L$ eine mögliche Lösung darstellt. Akzeptiert man also die mögliche, bezw. wahrscheinliche Beziehung $B = (c) \cdot q \cdot s \cdot L$ (vorbehaltlich einer experimentellen Nachprüfung), so führt die Frage nach der Bedeutung von L von selbst auf den Versuch mit dem Pascalschen Apparat, indem von vornherein $L = h$ vermutet wird. Die Frage, ob die aufgestellte Funktionalgleichung auch noch anders befriedigt werden konnte, bezw. ob B nicht auch noch von anderen Größen abhängt als den in Rechnung gezogenen, bleibt bis zur experimentellen Prüfung offen.

Als letztes Beispiel von etwas größerer Tragweite möge noch die Formel für die schwingende Saite behandelt werden. Es ist eine von vornherein zulässige, bezw. durch qualitative Versuche einfachster Art zu begründende Annahme, daß die Schwingungsdauer T abhängt von der Länge L, dem Querschnitt q, der Spannung P und dem Material, also etwa der Dichte d*) der Saite: $T = f(L, q, P, d)$. Fügt man

*) Würde man z. B. das spez. Gewicht s statt d nehmen, so würden unter Aufrechterhaltung eines Proportionalgesetzes sich widersprechende Gleichungen für die Exponenten $\alpha, \beta \cdots$ ergeben, ein Zeichen dafür, daß jetzt der Faktor c keine reine Zahl, sondern eine mit einer Dimension behaftete Größe wäre $\left(\frac{s}{g} = d!\right)$

dieser Annahme noch die andere aus der Analogie mit den meisten physikalischen Formeln entspringende Voraussetzung hinzu, daß ein Proportionalgesetz vorliegt, so kann man offenbar $T = c \cdot L^{\alpha} \cdot P^{\beta} \cdot q^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ setzen, wobei unter c zunächst eine reine Zahl zu verstehen ist. Die Einführung der Dimensionalausdrücke liefert somit:

$$T = c \cdot L^{\alpha} \cdot \left[\frac{M \cdot L}{T^2}\right]^{\beta} \cdot [L^2]^{\gamma} \cdot \left[\frac{M}{L^3}\right]^{\delta}$$

oder:

$$L^{\alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta} \cdot T^{-1-2\beta} \cdot M^{\beta + \delta} = \text{reine Zahl.}$$

Daher müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta &= 0 \\ 1 + 2\beta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \end{aligned}$$

bestehen. Würden sich die Gleichungen widersprechen, so müßte man bei Aufrechterhaltung des Proportionalgesetzes die Annahme fallen lassen, daß c eine reine Zahl sei. Die Gleichungen ergeben aber:

$$\beta = -\frac{1}{2},\ \delta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{2-\alpha}{2}.$$

Der unter den obigen Annahmen mögliche, bezw. wahrscheinliche Zusammenhang wäre also zunächst durch

$$T = c \cdot L^{\alpha} \cdot P^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{2-\alpha}{2}} \cdot d^{\frac{1}{2}} = c \cdot L^{\alpha} \sqrt{\frac{q^{2-\alpha} \cdot d}{P}}$$

gegeben. Um α zu bestimmen, hat man die Erfahrungstatsache zu benutzen, daß eine k mal so lange Saite ein k mal so großes T gibt. Aus $L_1 = k L_2$ und $T_1 = k T_2$ einerseits und $T_1 : T_2 = L_1^{\alpha} : L_2^{\alpha}$ folgt aber $k = k^{\alpha}$, also $\alpha = 1$.

Somit ist $T = c \cdot L \cdot \sqrt{\frac{q \cdot d}{P}}$ eine mögliche, ja die wahrscheinliche Form des Gesetzes.

Nach all den verschiedenen Proben möchte ich nun das Ergebnis meiner Betrachtungen dahin zusammenfassen:

Als Glied innerhalb einer systematischen Entwicklung hat die vorgetragene funktionale Behandlungsweise im allgemeinen keine Berechtigung, da ihr bei der vorausgesetzten Einschränkung in der Lösung der zugehörigen Funktionalgleichungen die volle Beweiskraft fehlt. Wohl aber kann sie — sit venia verbo — gewissermaßen als Forschungsprinzip aufgefaßt werden, das sich auf den verschiedensten Gebieten als fruchtbar erweist und so im Rahmen einer mit den denkbar einfachsten Mitteln arbeitenden Analyse eine ähnlich allgemeine Rolle spielt, wie etwa ein Ansatz von Differentialgleichungen im Rahmen der höheren Analysis. Nur unter diesen Gesichtspunkten möchte ich für Probleme der Elementarmathematik der „Methode der Funktionalgleichungen" einen weiteren Ausbau durch geschicktere Hände wünschen.

Rationale Dreiecke, für welche die Masszahlen der Seiten eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden.

Von Dr. Th. Harmuth (Gr.-Lichterfelde).

Die Dreiecksseiten a, b, c sollen der Reihe nach mit a, $a + d$, $a + 2d$ bezeichnet werden; a und d sind als ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Faktor vorauszusetzen.

Dann ist der halbe Umfang $s = \frac{3}{2}(a + d)$, ferner

$$s - a = \frac{1}{2}(a + 3d),\ s - b = \frac{1}{2}(a + d),$$

$$s - c = \frac{1}{2}(a - d).$$

Nach der letzten Gleichung ist die Annahme $a > d$ erforderlich. Für den Inhalt erhält man

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{3(a + d)(a + 3d)(a + d)(a - d)},$$

vereinfacht $\triangle = \frac{a + d}{4}\sqrt{3(a + 3d)(a - d)}$.

Soll das Dreieck einen rationalen Inhalt haben, so muß in dieser Gleichung der Radikand ein vollständiges Quadrat sein. Es sei also

$$3(a + 3d)(a - d) = x^2,$$

so ist x eine ganze Zahl. Weil der Faktor 3 nicht quadratisch ist, muß das Produkt $(a + 3d)(a - d)$ durch 3 teilbar sein. Demnach ist x^2 durch 9 teilbar, also x durch 3. Es ist also, wenn $x = 3y$ gesetzt wird,

$$(a + 3d)(a - d) = 3y^2$$

die Bedingung für einen rationalen Inhalt.

Setzt man ferner $a + 3d = m$, $a - d = n$, so ist

$$4d = m - n \equiv 0 \text{ mod. } 4,$$
$$a + 3d \equiv a - d \text{ mod. } 4.$$

Zerlegt man demnach $3y^2$ auf jede mögliche Art in zwei ganzzahlige Faktoren, so wird jede Zerlegung, in der die beiden Faktoren durch 4 geteilt denselben Rest lassen, ein Dreieck der gewünschten Art ergeben, wenn auch bei vielen derselben die Maßzahlen der Seiten nicht relativ prim zu einander sind.

Uebrigens sind die Zerlegungen nur für gerade y auszuführen, weil für ein ungerades y eine Zerlegung in zwei Faktoren, die nach dem Modul 4 kongruent sind, unmöglich ist.

Für ein gerades y gibt die am nächsten liegende Zerlegung $3y^2 = 3y \cdot y$, weil aus ihr $a + 3d = 3y$, $a - d = y$, also $4d = 2y$, $d = \frac{1}{2}y$, $a = \frac{3}{2}y$ folgt, das pythagoreische Grunddreieck 3, 4, 5 in nichtreduzierter Form.

Beispiel: $y = 24$, also $3y^2 = 1728$.

Die brauchbaren Zerlegungen sind $432 \cdot 4$, $216 \cdot 8$, $144 \cdot 12$, $108 \cdot 16$, $72 \cdot 24$, $48 \cdot 36$.

Sie ergeben der Reihe nach die Dreiecke

111, 218, 325; 60, 112, 164; 45, 78, 111;
39, 62, 85; 36, 48, 60; 39, 42, 45.

Für das erste und vierte sind die Seitenzahlen reduziert, für die übrigen sind sie der Reihe nach auf 15, 28, 41; 15, 26, 37; 3, 4, 5 und 13, 14, 15 zu reduzieren.

Auf diese Weise kann man durch Einsetzen aller geraden Zahlen für y beliebig viele Dreiecke der gewünschten Art erhalten. Um Lösungen in allgemeinen Zahlen zu bekommen, zerlegt man die Gleichung zweiten Grades

$$(a + 3d)(a - d) = 3y^2$$

nach der Leslieschen Methode in zwei lineare Gleichungen. Das ist auf vielfache Arten möglich. Nach der schon erwähnten Zerlegung in $a + 3d = 3y$ und $a - d = y$ sind die einfachsten Zerlegungen die folgenden, in denen die Buchstabengrößen stets ganze Zahlen bedeuten mögen:

1) $$a + 3d = 3ny,\ a - d = \frac{y}{n}.$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Lösungen

$$a = \frac{3(n^2 + 1)y}{4n},\ d = \frac{(3n^2 - 1)y}{4n}.$$

Sie werden ganzzahlig zunächst für $y = 4n$ und heißen dann $a = 3n^2 + 3$, $d = 3n^2 - 1$. Weil ein ungerades n für a und d nichtreduzierte Werte liefern muß, für ein gerades aber reduzierte Werte liefern kann, setze man $n = 2k$. Dann ist

$$a = 12k^2 + 3, \quad d = 12k^2 - 1);$$

nach einfachen Umformungen findet man dann

$$\triangle = 12k(12k^2 + 1).$$

Die Lösungen werden ferner ganzzahlig, wenn n ungerade angenommen und $y = 2n$ gesetzt wird. Es sei also $n = 2k + 1$, so findet man nach kurzen Umformungen

$$a = 6k(k+1) + 3, \quad d = 6k(k+1) + 1;$$
$$\triangle = 6(2k+1)[3k(k+1)+1].$$

2) $$a + 3d = ny, \quad a - d = \frac{3y}{n}.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$a = \frac{(n^2+9)y}{4n}, \quad d = \frac{(n^2-3)y}{4n}.$$

Ganzzahlige Lösungen erhält man zunächst wieder für $y = 4n$, nämlich $a = n^2 + 9$, $d = n^2 - 3$.

Reduzierte Seitenzahlen kann man daraus nicht erhalten, wenn n ungerade oder durch 3 teilbar ist; n ist also $= 6k \pm 2 = 2(3k \pm 1)$ zu setzen. Dann erhält man

$$a = 4(3k \pm 1)^2 + 9, \quad d = 4(3k \pm 1)^2 - 3;$$
$$\triangle = 12(3k \pm 1)[4(3k \pm 1)^2 + 3],$$

mit Beziehungen der gleichen Vorzeichen aufeinander. Ganzzahlige Lösungen erhält man auch für $n = 2k + 1$ und $y = 2n$. Sie heißen

$$a = 2k(k+1) + 5, \quad d = 2k(k+1) - 1;$$
$$\triangle = 6(2k+1)[k(k+1)+1].$$

Für $k = 1, 4, 7, 10 \ldots$ sind diese Lösungen nicht reduziert.

3) Die Zerlegung in $a + 3d = \frac{3y^2}{n}$, $a - d = n$ liefert zunächst die Auflösungen

$$a = \frac{3y^2 + 3n^2}{4n}, \quad d = \frac{3y^2 - n^2}{4n}; \quad \triangle = \frac{(3y^2 + n^2)3y}{8n}.$$

Um zu erkennen, wann sie ganzzahlig sind, setze man $y = nz$, so wird

$$a = \frac{3n}{4}(z^2+1), \quad d = \frac{n}{4}(3z^2 - 1); \quad \triangle = \frac{3n^2 z(3z^2+1)}{8}.$$

Ganzzahlige Lösungen erhält man also entweder wenn $n \equiv 0 \mod 4$ und z beliebig, oder wenn $n \equiv 2 \mod 4$ und z ungerade angenommen wird. Ein ungerades n gibt keine ganzzahligen Lösungen.

4) Aus der Zerlegung $a + 3d = \frac{y^2}{n}$, $a - 3d = 3n$ folgen zunächst die Werte

$$a = \frac{y^2 + 9n^2}{4n}, \quad d = \frac{y^2 - 3n^2}{4n}; \quad \triangle = \frac{(y^2 + 3n^2)3y}{8n},$$

welche für $y = nz$ in

$$a = \frac{n}{4}(z^2+9), \quad d = \frac{n}{4}(z^2 - 3); \quad \triangle = \frac{3n^2 z(z^2+3)}{8}$$

übergehen. Auch hier erhält man ganzzahlige Lösungen, wenn $n \equiv 0 \mod 4$, z beliebig und wenn $n \equiv 2 \mod 4$ und z ungerade angenommen werden.

Bei der angenommenen Bezeichnung ist γ der größte Winkel des Dreiecks. Die bekannte Formel

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

geht für $b = a + d$, $c = a + 2d$ in

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + (a+d)^2 - (a+2d)^2}{2a(a+d)}$$

über, aus der man durch eine leichte Umformung

$$\cos\gamma = \frac{a - 3d}{2a}$$

erhält. Aus dieser Formel erkennt man sofort, daß $a > 3d$ ein spitzwinkliges, $a = 3d$ ein rechtwinkliges und $a < 3d$ ein stumpfwinkliges Dreieck gibt. Im zweiten Falle ist $a = 3d$, $b = 4d$, $c = 5d$. Man hat also das Ergebnis:

Unter allen reduzierten rationalen Dreiecken, deren Seiten-Maßzahlen eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, ist nur ein einziges rechtwinklig, nämlich das pythagoreische G r u n d d r e i e c k 3, 4, 5.

Für die Berührungskreise der vorher behandelten Dreiecke erhält man die Gleichungen

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+3d)(a-d)}{3}} \qquad \varrho_b = \frac{1}{2}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}$$
$$\varrho_a = \frac{a+d}{2}\sqrt{\frac{3(a-d)}{a+3d}} \qquad \varrho_c = \frac{a+d}{2}\sqrt{\frac{3(a+3d)}{a-d}},$$

aus denen sich u. a. die Beziehungen

$$\varrho : \varrho_b = 1 : 3 \text{ und } \varrho_a \varrho_c = \frac{3}{4}(a+d)^2$$

ergeben. Dieselben gelten auch für Dreiecke, deren Inhalt irrational ist.

Anmerkung. Die rationalen Dreiecke, deren Seiten-Maßzahlen drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, sind schon anderweitig, z. B. im Aufgabenrepertorium der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht behandelt worden.

Symmetrie-Dreiecke.

Von Prof. Dr. R. D e p è n e (Breslau).

Um einem Wunsche des Herrn Dr. R i c h a r d S c h r ö d e r, den er in Nr. 3 dieser Zeitschrift (S. 55) bei Angabe von neuen geometrischen Lehrsätzen ausgesprochen hat, nachzukommen, teile ich mit, daß sein Lehrsatz I schon in meiner Abhandlung zum Jahresbericht 1906 des Breslauer Johannes-Gymnasiums vorkommt.*) Die Fläche jedes der beiden Dreiecke, deren Seiten die drei Berührungspunkte des Inkreises und die drei Ankreisberührungspunkte verbinden, ist dort zu $\varrho \cdot \triangle : 2r$ berechnet worden.

Diese Gleichheit ist aber von im ganzen 32 Fällen nur einer; die übrigen erhält man, wenn man von den $3 \cdot 4$ Berührungspunkten immer je 3 zu einem Dreieck verbindet. Aber auch alle diese sind einem in dem Jahresbericht näher behandelten allgemeinen Falle untergeordnet:

„Dreieck und Symmetriedreieck sind gleich".

Die Lage der vier Berührungspunkte auf den drei Seiten eines Dreiecks, die durch In- und Ankreise entstehen, ist durch zwei hervorstechende Eigentümlichkeiten gekennzeichnet. Erstens entstehen durch die Art ihrer Verteilung mehrfach gleich lange und überhaupt nur vier verschieden große Strecken, nämlich s, $s - a$, $s - b$, $s - c$; zweitens liegen sie zu Paaren von der Mitte der Seite gleichweit ab — sie liegen zu ihr symmetrisch. Nur die letzte Eigenschaft wollen wir jetzt beibehalten; im übrigen aber mögen sich die Punkte auf den drei Seiten unabhängig von einander verteilen.

*) Hierauf macht auch eine von seiten des Herrn Direktors S c h r ö d e r an die Redaktion gerichtete Zuschrift aufmerksam, in der Herr Dr. S. „für die freundliche Zusendung der schönen Abhandlung auch an dieser Stelle dem Verfasser seinen verbindlichsten Dank ausspricht".

Es mögen also auf jeder Seite des Dreiecks ABC, dessen Seitenlängen wir passend mit $2a$, $2b$, $2c$ bezeichnen, vier Punkte 1, 2, 3, 4 in demselben Drehsinn geordnet so liegen, daß 1 und 4 außerhalb, 2 und 3 innerhalb sich befinden, jedes Paar aber zur Mitte symmetrisch ist. Ecke A hat demnach auf AB zu beiden Seiten 1 und 2 liegen, auf AC 4 und 3; B hat auf BC zu beiden Seiten 1 und 2. Die Lage der noch fehlenden Punkte ist dann durchaus bestimmt. Schreiben wir nun zwischen diesen Punkten Dreiecke so ein, daß auf jeder Seite eine Ecke liegt, so ist es noch vorteilhaft, die auf BC fallende Ecke mit A_1, die anderen entsprechend mit B_1 und C_1 zu bezeichnen, so daß also jede Ecke des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ vier verschiedene Stellen 1, 2, 3, 4 einnehmen kann. Die Entfernung des Punktes A_1 von der Mitte der Seite heiße, unbekümmert um den Platz, den A_1 einnimmt, x, die von B_1 y und die von C_1 z. Liegt A_1 innerhalb, so hat es von den Ecken B und C die Entfernung $a + x$ und $a - x$, liegt es außerhalb, $x + a$ und $x - a$.

Es werden sich nun im ganzen so viel verschiedene Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ einschreiben lassen, als sich aus 1, 2, 3, 4 Variationsformen zu drei Elementen bilden lassen, nämlich $4^3 = 64$. Die verschiedenen Variationsformen sollen die Benennungen für die verschiedenen Dreiecke sein, wobei wir nur daran festhalten, daß A_1 immer durch die erste Ziffer unter den dreien, B_1 durch die zweite, C_1 durch die dritte ausgedrückt wird.

Die Fläche $\triangle'$ jedes dieser Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ läßt sich stets aus den Flächen ABC, $AB_1 C_1$, $BA_1 C_1$, $CA_1 B_1$ zusammensetzen. So ist bei 222 — wir konnten auch von jedem beliebigen anderen ausgehen —

$$\triangle' = ABC - AB_1 C_1 - BA_1 C_1 - CA_1 B_1,$$

demnach unter Anwendung des Satzes: Die Flächen zweier Dreiecke mit gleichem oder supplementärem Winkel verhalten sich wie die Produkte der diese Winkel einschließenden Seiten

$$\triangle' = \triangle - \frac{(b+y)(c-z)}{4bc}\triangle - \frac{(c+z)(a-x)}{4ac}\triangle - \frac{(a+x)(b-y)}{4ab}\triangle$$

$$= \frac{\triangle}{4abc}(4abc - a(b+y)(c-z) - b(c+z)(a-x) - c(a+x)(b-y)),^{*)}$$

Die Klammergröße zieht sich zusammen zu

$$abc + ayz + bxz + cxy.$$

Nennen wir das Dreieck, dessen Ecken zu 222 symmetrisch liegen, also das Dreieck 333, das Symmetriedreieck, so wird dessen Fläche auf dieselbe Weise gefunden, nur daß wir statt $a - x$ zu nehmen haben $a + x$ und umgekehrt, $b + y$ statt $b - y$ und $c + z$ statt $c - z$, beidemal auch umgekehrt, im Grunde genommen also $+x$ statt $-x$, $+y$ statt $-y$, $+z$ statt $-z$ und umgekehrt. Davon wird aber die Form II gar nicht berührt, da dort immer zwei dieser Größen als Faktoren zusammenstehen. Beim Uebergang von irgend einem anderen Dreieck zum Symmetriedreieck ist offenbar dieselbe Schlußweise berechtigt, da das neue A_1 immer um $2x$ vom alten entfernt ist und ebenso bei B_1 und C_1 in bezug auf y und z. Vorausgesetzt nun, daß sich bei jedem Dreieck die äußere Form von II gar nicht, oder höchstens in den Vorzeichen der 4 Glieder ändert, kann jetzt schon die Gültigkeit des Satzes ausgesprochen werden:

*) Die Rechnung wird einfacher, wenn man abc aus dem Nenner in die Klammer bringt und $\frac{x}{a} = u$, $\frac{y}{b} = v$, $\frac{z}{c} = w$ setzt.

Jedes Dreieck ist seinem Symmetriedreieck gleich.

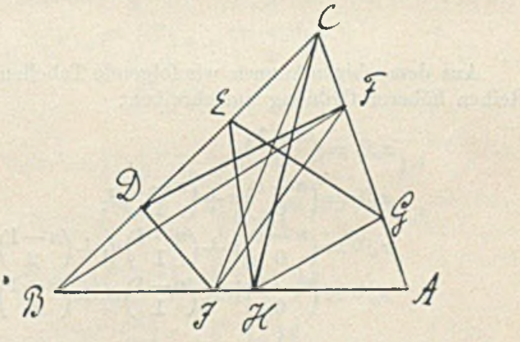
Wie nun aus einer Dreiecksform alle übrigen entstehen und wie der Hauptsatz durchweg seine Gültigkeit behält, ist dann in der Abhandlung weiter auseinandergesetzt. Ebenso ist dort gezeigt, daß je vier von diesen Dreiecken die Fläche des ursprünglichen ergeben. Das ganze gipfelt in dem Satze:

Wenn man auf jeder Seite eines Dreiecks, ganz gleichgültig ob innerhalb oder außerhalb aber symmetrisch zur Mitte, je zwei Punkte annimmt und Dreiecke in der Weise einbeschreibt, daß man zu Ecken derselben je einen Punkt auf jeder Seite wählt, so gibt es im ganzen acht solcher Dreiecke. Die vier Paare, von denen das Paar keine Ecke gemein hat — Symmetriedreiecke — sind einander an Fläche gleich, und eine gewisse algebraische Summe der Flächen von vier solchen, die nicht zwei Symmetriedreiecke enthalten, ergibt die Fläche des ursprünglichen Dreiecks.

Ein zweiter Teil der Abhandlung geht dann zurück zu den Dreiecken, welche die Berührungspunkte des In- und der Ankreise zu Ecken haben und bringt ihre Flächen ausgedrückt durch die Tangentenstücke und auch durch die Radien der berührenden Kreise und des Umkreises. Es ergeben sich hierbei eine Reihe von Identitäten zwischen den Radien.

Für die Gleichheit von Dreieck und Symmetriedreieck lassen wir noch einen zweiten jetzt erst gefundenen rein geometrischen Beweis folgen.

In ABC seien D und E, F und G, H und J von



den Mitten, also auch von den Ecken gleich weit entfernt. Es liegt demnach F so tief unter der Spitze als G über der Grundlinie usw.; E und F haben denselben Abstandsunterschied von AB als umgekehrt G und D usw.

Sicher ist 1, $\triangle BCJ = ACH$. Senkt sich nun BCJ mit C bis F, so wird BFJ daraus und BCJ hat an Fläche ein Dreieck eingebüßt, das BJ zur Grundlinie und den Höhenunterschied von C und F über AB zur Höhe hat. Hebt sich das andere Dreieck ACH mit A bis G, so wird aus ACH das Dreieck CGH und verliert somit ein ebenso großes Dreieck AGH. Es bleibt also 2, $BFJ = CGH$.

Hebt sich jetzt BFJ mit B bis D, so wird DFJ daraus, es hat BDJ eingebüßt und BDF gewonnen, d. h. es ist $DFJ = BFJ - (BDJ - BDF)$. Der Verlust $BDJ - BDF$ ist aber gleich einem Dreieck mit BD als Grundlinie und dem Höhenunterschied von J und F über BC als Höhe. Senkt sich das andere Dreieck CGH mit C bis Punkt E, so wird EGH daraus und CGH hat CEG verloren und CEH gewonnen, d. h. es ist $EGH = CGH - (ECG - ECH)$. Der Verlust $ECG - ECH$ ist hier gleich einem Dreieck mit EC als Grundlinie und dem Höhenunterschied von G und H über BC als Höhe. Nun ist $BD = CE$ und die Höhenunterschiede von J und F und von G und H sind gleich, daher ist $DFJ = EGH$, d. h. die Symmetriedreiecke sind gleich.

Liegen ihre Ecken alle oder zum Teil außerhalb, so ändert sich das Beweisverfahren nur insofern, als die benutzten Dreiecksflächen das andere Vorzeichen bekommen können.

Beiträge zur Lehre von den arithmetischen und geometrischen Reihen höherer Ordnung.

Von Prof. K. Dienger (Rastatt i. B.)

I.

Zu den arithmetischen Reihen zweiter Ordnung gelangt man durch das folgende leicht zu verstehende Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & d_2 & & d_2 & & d_2 & & d_2 & & d_2 \;\cdots\cdots \\
 & d_1 & & d_1+d_2 & & d_1+2d_2 & & d_1+3d_2 & & d_1+4d_2 & \cdots\cdots \\
a & & a+d_1 & & a+2d_1+d_2 & & a+3d_1+3d_2 & & a+4d_1+6d_2 & & a+5d_1+10d_2 \cdots\cdots
\end{array}$$

Hieraus kann man sofort anschreiben, wenn $z_n^{(2)}$ das n-te Glied oder kurz das Schlußglied und $s_n^{(2)}$ die Summe der n ersten Glieder bedeuten sollen:

$$z_n^{(2)} = a + \frac{n-1}{1} d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} d_2 = \binom{n-1}{0}\cdot a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2,$$

$$s_n^{(2)} = \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} d_2 = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2.$$

Zu den arithmetischen Reihen dritter Ordnung kommt man ganz ähnlich wie oben:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & d_3 & & d_3 & & d_3 & & d_3 & \cdots \\
 & & d_2 & & d_2+d_3 & & d_2+2d_3 & & d_2+3d_3 & & \cdots \\
 & d_1 & & d_1+d_2 & & d_1+2d_2+d_3 & & d_1+3d_2+3d_3 & & d_1+4d_1+6d_3 & \cdots \\
a & & a+d_1 & & a+2d_1+d_2 & & a+3d_1+3d_2+d_3 & & a+4d_1+6d_2+4d_3 & & a+5d_1+10d_2+10d_3 \cdots
\end{array}$$

Hieraus kann man auch sofort anschreiben:

$$z_n^{(3)} = a + \frac{n-1}{1} d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} d_3 = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3,$$

$$s_n^{(3)} = \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} d_3 = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3.$$

II.

Aus dem obigen können wir folgende Tabellen für die Schlußglieder und die Summen aller arithmetischen Reihen höherer Ordnung aufschreiben:

$$z_n^{(0)} = \binom{n-1}{0} a$$

$$z_n^{(1)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1$$

$$z_n^{(2)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2$$

$$z_n^{(3)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3$$

$$\vdots$$

$$z_n^{(r-1)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \cdots + \binom{n-1}{r-1} d_{r-1}$$

$$z_n^{(r)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \binom{n-1}{3} d_3 + \cdots + \binom{n-1}{r-1} d_{r-1} + \binom{n-1}{r} d_r,$$

$$s_n^{(0)} = \binom{n}{1} a$$

$$s_n^{(1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1$$

$$s_n^{(2)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2$$

$$s_n^{(3)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3$$

$$\vdots$$

$$s_n^{(r-1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3 + \cdots + \binom{n}{r} d_{r-1}$$

$$s_n^{(r)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d_1 + \binom{n}{3} d_2 + \binom{n}{4} d_3 + \cdots + \binom{n}{r} d_{r-1} + \binom{n}{r+1} d_r.$$

III.

Zu den geometrischen Reihen zweiter Ordnung gelangt man durch das folgende leicht zu verstehende Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & q_2 & & \dots \\
 & q_1 & & q_1 q_2 & & q_1 q_2^2 & & q_1 q_2^3 & & q_1 q_2^4 & & & \dots \\
a & & a q_1 & & a q_1^2 q_2 & & a q_1^3 q_2^3 & & a q_1^4 q_2^6 & & a q_1^5 q_2^{10} & & \dots
\end{array}$$

Hieraus kann man sofort anschreiben, wenn $t_n^{(2)}$ das n-te Glied oder kurz das Schlußglied und $p_n^{(2)}$ das Produkt der n ersten Glieder bedeuten sollen:

$$t_n^{(2)} = a q_1^{\frac{n-1}{1}} \cdot q^{\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}}, \qquad p_n^{(2)} = a^n \cdot q_1^{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}} \cdot q_2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}}.$$

Zu den geometrischen Reihen dritter Ordnung kommt man ganz ähnlich wie oben:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & q_3 & & q_3 & & q_3 & & q_3 & & & & \dots \\
 & & q_2 & & q_2 q_3 & & q_2 q_3^2 & & q_2 q_3^3 & & q_2 q_3^4 & & & \dots \\
 & q_1 & & q_1 q_2 & & q_1 q_2^2 q_3 & & q_1 q_2^3 q_3^3 & & q_1 q_2^4 q_3^6 & & & & \dots \\
a & & a q_1 & & a q_1^2 q_2 & & a q_1^3 q_2^3 q_3 & & a q_1^4 q_2^6 q_3^4 & & a q_1^5 q_2^{10} q_3^{10} & & & \dots
\end{array}$$

Hieraus kann man auch sofort anschreiben:

$$t_n^{(3)} = a q_1^{\frac{n-1}{1}} q_2^{\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}} q_3^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} =$$

$$= a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}},$$

$$s_n^{(3)} = a^n q_1^{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}} \cdot q_2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot q_3^{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} =$$

$$= a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}}.$$

IV.

Wir können auch hier aus dem Obigen folgende Tabellen für die Schlußglieder und die Produkte aller geometrischen Reihen höherer Ordnung aufschreiben:

$$t_n^{(0)} = a^{\binom{n-1}{0}}$$

$$t_n^{(1)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}}$$

$$t_n^{(3)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}}$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(r-1)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}} \dots q_{r-1}^{\binom{n-1}{r-1}}$$

$$t_n^{(r)} = a^{\binom{n-1}{0}} q_1^{\binom{n-1}{1}} q_2^{\binom{n-1}{2}} q_3^{\binom{n-1}{3}} \dots q_{r-1}^{\binom{n-1}{r-1}} q_r^{\binom{n-1}{r}},$$

$$p_n^{(0)} = a^{\binom{n}{1}}$$

$$p_n^{(1)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}}$$

$$p_n^{(2)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}}$$

$$p_n^{(3)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}}$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(r-1)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}} \dots q_{r-1}^{\binom{n}{r}}$$

$$p_n^{(r)} = a^{\binom{n}{1}} q_1^{\binom{n}{2}} q_2^{\binom{n}{3}} q_3^{\binom{n}{4}} \dots q_{r-1}^{\binom{n}{r}} \cdot q_r^{\binom{n}{r+1}}.$$

V.

Betrachten wir nun die folgenden arithmetischen Reihen höherer Ordnung, von denen jedes Glied der folgenden Reihe durch Summation aller früheren Glieder der zunächst vorhergehenden Reihe sich ergibt:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \quad a+5d \quad \dots\dots a + \frac{n-1}{1} d$$

$$a, \quad 2a+d, \quad 3a+3d, \quad 4a+6d, \quad 5a+10d, \quad 6a+15d \quad \dots\dots \frac{n}{1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d$$

$$a, \quad 3a+d, \quad 6a+4d, \quad 10a+10d, \quad 15a+20d, \quad 21a+35d \quad \dots\dots \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} a + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$

$$a, \quad 4a+d, \quad 10a+5d, \quad 20a+15d, \quad 35a+35d, \quad 56a+70d \quad \dots\dots \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} a + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d.$$

Hieraus ergeben sich sofort für die Schlußglieder und die Summen dieser einzelnen Reihen folgende Tabellen:

$$z_n^{(0)} = \binom{n-2}{0} d$$

$$z_n^{(1)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d$$

$$z_n^{(2)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d$$

$$z_n^{(3)} = \binom{n+1}{2} a + \binom{n+1}{3} d$$

$$z_n^{(4)} = \binom{n+2}{3} a + \binom{n+2}{4} d$$

$$\vdots$$

$$z_n^{(r-1)} = \binom{n+r-3}{r-2} a + \binom{n+r-3}{r-1} d$$

$$z_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1} a + \binom{n+r-2}{r} d,$$

$$s_n^{(0)} = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} d$$

$$s_n^{(1)} = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d$$

$$s_n^{(2)} = \binom{n+1}{2} \quad + \binom{n+1}{3} d$$

$$s_n^{(3)} = \binom{n+2}{3} a + \binom{n+2}{4} d$$

$$s_n^{(4)} = \binom{n+3}{4} a + \binom{n+3}{5} d$$

$$\vdots$$

$$s_n^{(r-1)} = \binom{n+r-2}{r-1} a + \binom{n+r-2}{r} d$$

$$s_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} a + \binom{n+r-1}{r+1} d.$$

VI.

Betrachten wir ebenso wie vorhin die folgenden geometrischen Reihen höherer Ordnung, von denen jedes Glied der folgenden Reihe durch Multiplikation aller früheren Glieder der zunächst vorhergehenden Reihe sich ergibt:

$$a,\quad a\,q,\quad a\,q^2,\quad a\,q^3,\quad a\,q^4,\quad a\,q^5\quad \ldots\ldots\quad a\,q^{\frac{n-1}{1}}$$

$$a,\quad a^2\,q,\quad a^3\,q^3,\quad a^4\,q^6,\quad a^5\,q^{10},\quad a^6\,q^{15}\ldots\ldots\quad a^{\frac{n}{1}}\,q^{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}}$$

$$a,\quad a^3\,q,\quad a^6\,q^4,\quad a^{10}\,q^{10},\quad a^{15}\,q^{20},\quad a^{21}\,q^{35}\ldots\ldots\quad a^{\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}}\,q^{\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}}$$

$$a,\quad a^4\,q,\quad a^{10}\,q^5,\quad a^{20}\,q^{15},\quad a^{35}\,q^{35},\quad a^{56}\,q^{70}\ldots\ldots\quad a^{\frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}}\,q^{\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}.$$

Hieraus ergeben sich sofort für die Schlußglieder und die Produkte dieser einzelnen Reihen folgende Tabellen:

$$\begin{array}{ll}
t_n^{(0)} = q^{\binom{n-2}{0}} & p_n^{(0)} = a^{\binom{n-1}{0}}\,q^{\binom{n-1}{1}} \\
t_n^{(1)} = a^{\binom{n-1}{0}}\,q^{\binom{n-2}{1}} & p_n^{(1)} = a^{\binom{n}{1}}\,q^{\binom{n}{2}} \\
t_n^{(2)} = a^{\binom{n}{1}}\,q^{\binom{n}{2}} & p_n^{(2)} = a^{\binom{n+1}{2}}\,q^{\binom{n+1}{3}} \\
t_n^{(3)} = a^{\binom{n+1}{2}}\,q^{\binom{n+1}{3}} & p_n^{(3)} = a^{\binom{n+2}{3}}\,q^{\binom{n+2}{4}} \\
t_n^{(4)} = a^{\binom{n+2}{3}}\,q^{\binom{n+2}{4}} & p_n^{(4)} = a^{\binom{n+3}{4}}\,q^{\binom{n+3}{5}} \\
\vdots & \vdots \\
t_n^{(r-1)} = a^{\binom{n+r-3}{r-2}}\,q^{\binom{n+r-3}{r-1}} & p_n^{(r-1)} = a^{\binom{n+r-2}{r-1}}\,q^{\binom{n+r-2}{r}} \\
t_n^{(r)} = a^{\binom{n+r-2}{r-1}}\,q^{\binom{n+r-2}{r}} & p_n^{(r)} = a^{\binom{n+r-1}{r}}\,q^{\binom{n+r-1}{r+1}}.
\end{array}$$

Die Gleichungen für $z_n^{(0)}$, $s_n^{(0)}$, $t_n^{(0)}$ und $p_n^{(0)}$ ergeben sich durch Analogieschlüsse.

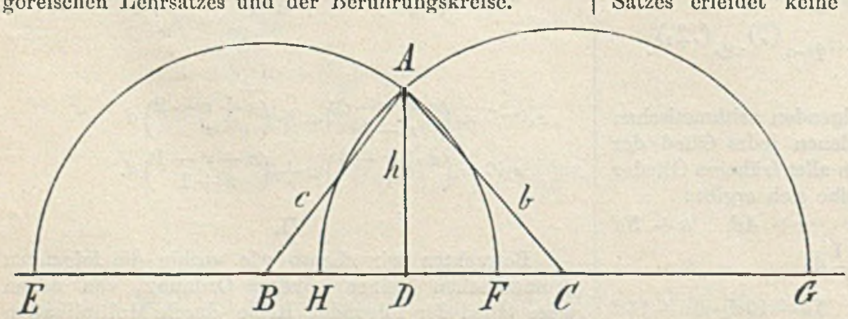
VII.

Betrachten wir nun noch die letzten Tabellen etwas genauer, so ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$\begin{array}{ll}
s_n^{(0)} = z_n^{(1)} & p_n^{(0)} = t_n^{(1)} \\
s_n^{(1)} = z_n^{(2)} & p_n^{(1)} = t_n^{(2)} \\
s_n^{(2)} = z_n^{(3)} & p_n^{(2)} = t_n^{(3)} \\
s_n^{(3)} = z_n^{(4)} & p_n^{(3)} = t_n^{(4)} \\
\vdots & \vdots \\
s_n^{(r-1)} = z_n^{(r)} & p_n^{(r-1)} = t_n^{(r)} \\
s_n^{(r)} = z_n^{(r+1)} & p_n^{(r)} = t_n^{(r+1)}.
\end{array}$$

Kleinere Mitteilungen.

Ableitung der Heronsformel für den Dreiecksinhalt ohne Zuhilfenahme des Allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatzes und der Berührungskreise.



Beschreibt man mit b und c um C und B die Kreise, so ist:

1) $EG = 2s$
$EH = 2(s-b)$
$FG = 2(s-c)$
$HF = 2(s-a)$

2) $h^2 = DE \cdot DF = DH \cdot DG.$

Aus 2) folgt:

$$\frac{DH}{DF} = \frac{DE}{DG} = \frac{DE - DH}{DG - DF} = \frac{HE}{FG} = \frac{s-b}{s-c}.$$

Es sind also $EG = 2s$ und $HF = 2(s-a)$ in dem Punkte D nach demselben Verhältnisse $(s-b):(s-c)$ geteilt. Hieraus findet sich

$$DE = 2s \cdot \frac{s-b}{a}$$

$$DF = 2(s-a) \cdot \frac{s-c}{a}$$

$$h = \sqrt{DE \cdot DF} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

und somit

$$J = \frac{a}{2} \cdot h = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

T. Plöttner (Rathenow).

* * *

Neue Ableitung des Eulerschen Polyedersatzes.

1. Bedeuten die Buchstaben e, f, k die Eckenzahl, die Flächenzahl und die Kantenzahl eines konvexen Polyeders, so soll nach dem Eulerschen Satze bekanntlich die Gleichung gelten

$$e + f - k = 2.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für die Vollpyramide, wie für den, das Prisma als Sonderfall einschließenden, Pyramidenstumpf ist leicht durch Abzählung nachzuweisen. In der Tat hat man für die n-seitige Pyramide

$$e = n + 1,\quad f = n + 1,\quad k = 2n,$$

für den n-seitigen Pyramidenstumpf

$$e = 2n,\quad f = n + 2,\quad k = 3n,$$

Zahlenwerte, die der Eulerschen Gleichung offenbar identisch für jeden Wert von n genügen.

Auch für das Prismatoid läßt sich die Richtigkeit der Gleichung direkt einsehen. Denn wenn dessen beide Grundflächen ein m-Eck und ein n-Eck sind, so ist offenbar

$$f = m + n + 2,\quad e = m + n,\quad k = m + n + (m + n)$$

und diese Werte befriedigen die Eulersche Gleichung ebenfalls identisch. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Seitenflächen des Prismatoids sämtlich Dreiecke sind, deren Zahl gleich $(m + n)$ ist. Aber die Richtigkeit des Satzes erleidet keine Einbuße, wenn ein Paar oder mehrere Paare der Seitenflächen in eine Ebene fallen, also zwei Seitendreiecke sich zu einem Trapez verschmelzen. Denn jedesmal, wenn dies geschieht, vermindert sich sowohl die Flächenzahl, wie die Kantenzahl um Eins, während die Eckenzahl ungeändert bleibt. Die Differenz $e + f - k$ behält also ihren Wert 2.

2. Stimmen zwei Körper, für die der Eulersche Satz gilt, in einer Begrenzungsfläche völlig überein,

so gilt dieser Satz auch für den Körper, der dadurch entsteht, daß man beide Körper mit den kongruenten Begrenzungsflächen aneinanderlegt.

Die Eckenzahl, Flächenzahl und Kantenzahl der beiden Körper mögen als $e_1\ f_1\ k_1$ und $e_2\ f_2\ k_2$ von einander unterschieden werden, für den aus beiden zusammengesetzten Körper e, f und k heißen; die, beiden Körpern gemeinsame, Fläche, welche bei der Zusammenlegung verschwindet, sei ein p-Eck. Dann ist

$$e_1 + f_1 - k_1 = 2$$
$$e_2 + f_2 - k_2 = 2.$$

Bei der Zusammenlegung verschwindet von jedem Körper eine Fläche, es ist also

$$f = f_1 + f_2 - 2.$$

Ferner fallen p mal je zwei Kanten und ebenso je zwei Ecken aufeinander, das ergibt

$$k = k_1 + k_2 - p$$
$$e = e_1 + e_2 - p.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} e + f - k &= (e_1 + e_2 - p) + (f_1 + f_2 - 2) - (k_1 + k_2 - p) \\ &= (e_1 + f_1 - k_1) + (e_2 + f_2 - k_2) - 2 \\ &= 2 + 2 - 2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

wie es der Eulersche Satz verlangt.

Auch hier wird an der Richtigkeit des Satzes dadurch nichts geändert, daß möglicherweise zwei, längs einer Kante des gemeinsamen p-Ecks zusammenstoßende, Flächen in eine Ebene fallen. Denn jedesmal, wo dies geschieht, hört diese Kante auf, Kante zu sein, es vermindert sich also k um Eins, während gleichzeitig die beiden erwähnten Begrenzungsflächen sich zu einer

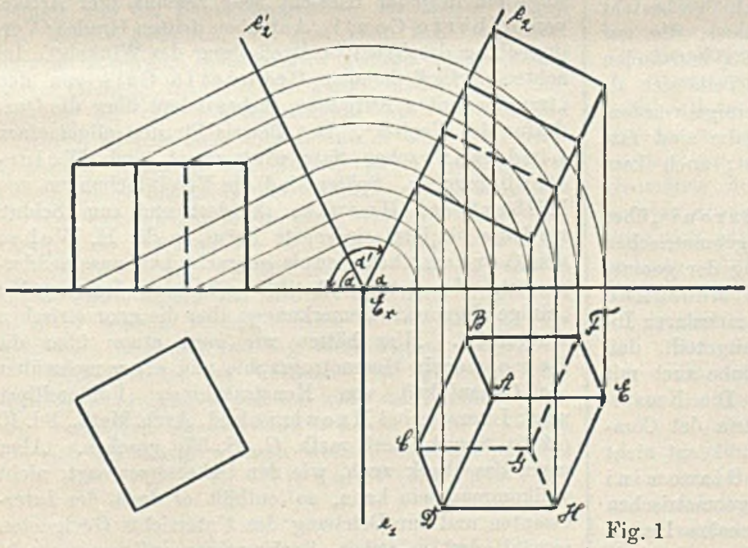


Fig. 1

verschmelzen, so daß auch f sich um Eins vermindert. Die Eckenzahl bleibt dabei gänzlich unberührt, die Differenz $e + f - k$ behält also ihren Wert Zwei.

Und diesen Wert verliert sie auch dann nicht, wenn der eben erwähnte Fall bei zwei Flächenpaaren eintritt, die längs zweier Nachbarkanten des gemeinsamen p-Ecks aneinandergrenzen. Dann fallen nämlich auch die beiden Kanten, die von dem jenen Nachbarkanten des p-Ecks gemeinsamen Eckpunkt aus in den Oberflächen der beiden Teilkörper verlaufen, in dieselbe Gerade, verschmelzen sich also zu einer Kante, so daß die Kantenzahl k sich um Eins vermindert. Zugleich aber verschwindet dann die in Rede stehende Ecke, es vermindert sich also auch e um Eins, während die Flächenzahl hierbei außer Spiel bleibt.

In jedem Falle also entsteht durch die gedachte Körperzusammenlegung ein neuer Körper, für den der Eulersche Satz ebenfalls gilt.

3. Ein beliebiges konvexes Polyeder falle mit einer seiner Begrenzungsflächen in die Horizontalebene. Eine zweite Ebene werde von der Horizontalebene aus parallel mit dieser nach oben (resp. nach unten, wenn die übrigen Flächen tiefer liegen) verschoben. Sobald sie bei dieser Verschiebung die am tiefsten über der Horizontalebene liegende Ecke (resp. mehrere in dieser Höhe liegende Ecken) erreicht, werde ein Horizontalschnitt durch den Körper geführt, durch diesen wird unten ein Prismatoid abgeschnitten. Das entsprechend fortgesetzte Verfahren führt dahin, daß, wenn die in vertikaler Richtung nächste Ecke erreicht wird, wieder ein Prismatoid abfällt, und so fort. Das ganze Polyeder wird auf diesem Wege in eine Folge von Prismatoiden zerlegt, aus denen es sich dann umgekehrt sukzessive wieder zusammensetzen läßt. Für diese Zusammensetzung kommt aber immer aufs neue der unter Nr. 2 bewiesene Satz zur Geltung. Damit ist die allgemeine Gültigkeit des Eulerschen Polyedersatzes erwiesen.

Dr. E. Sós (Budapest).

* * *

Projektion von Polyedern. Da in der darstellenden Geometrie die Projektion eines Polyeders in einer zu I und II speziellen Lage kein anschauliches Bild des Körpers liefert, erzeugt man solche Bilder gewöhnlich durch Drehung des Vielflaches gegen eine Projektionsebene. In der Figur 1 ist der in I aufstehende Würfel um die Achse $e_1 E_x$ so gedreht, daß die Ebene seiner Grundfläche in die Lage $e_1 E_x e_2'$ kam und dann der Körper, auf I projiziert, das anschauliche Bild $ABCDEFGH$ lieferte. Der Drehungswinkel ist dabei mit α' bezeichnet; sein Nebenwinkel α ist dann der Gesichtswinkel, unter welchem man den Körper auf I projiziert hat.

Nun kann man, anstatt den Körper samt der Ebene seiner Grundfläche erst zu drehen und ihn dann auf I zu projizieren, das Polyeder zuerst auf eine gedrehte oder geneigte Ebene projizieren und dann diese Ebene in die Lage von I drehen oder umlegen. Dabei wählt man den Drehungswinkel α zweckmäßig so groß, daß er das Supplement zu α' bildet. In dieser speziellen Lage $\alpha + \alpha' = 180^0$ ist dann durch die Fig. 1 der Beweis erbracht, daß man zu dem gleichen Bild $ABCDEFGH$ auf zwei verschiedenen Wegen gelangt, indem man entweder erst um α' dreht und dann auf I projiziert oder zuerst den Würfel auf eine unter α geneigte Ebene projiziert und dann diese Ebene mit dem in ihr befindlichen Projektionsbild durch Drehung um α' nach I umlegt.

Die letztere Methode ist zeichnerisch einfacher, weil sie die Konstruktion des kongruenten Bildes in II erspart; sie ist methodisch wertvoll, weil sie die Drehung um eine Achse ausschaltet und die Ebene $e_1\, e_2$ einführt, die nachher bei den Schnitten wiederkehrt; sie ist schließlich eleganter, weil nur mit Linienscharen gearbeitet wird, während bei der anderen Methode eine kongruente Figur konstruiert werden muß. Gerade diese Konstruktion führt bei komplizierter gebauten Polyedern leicht zu Ungenauigkeiten.

Figur 2 zeigt als Anwendung, wie man zwei spezielle Lagen der Tetraederprojektion dadurch erhalten kann, daß man die Projektionsebene $e_1 E_x e_2$ jedesmal parallel zu einer Kante wählt. Dabei ist nach der ersten Umlegung die Aufrißprojektion, nach der zweiten die Grundrißprojektion dazu gezeichnet. Selbstverständliche Projektionslinien sind fortgelassen, um die Uebersichtlichkeit zu erhöhen.

K. Brücher (Biebrich).

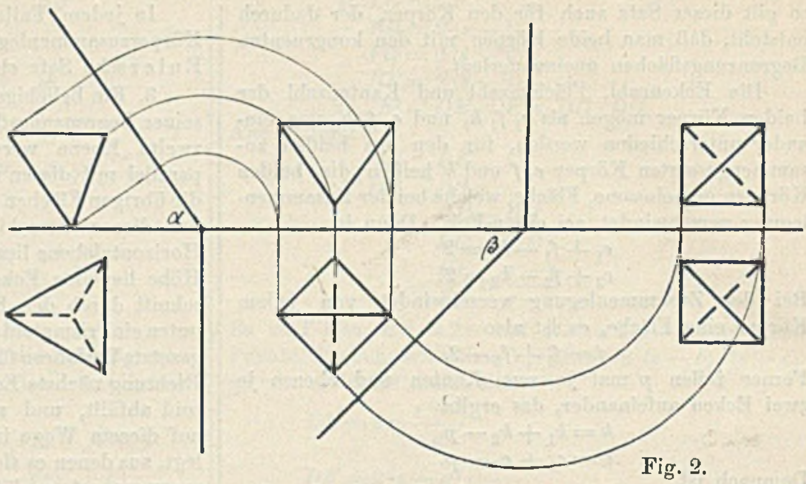


Fig. 2.

Bücher-Besprechungen.

Federigo Enriques, Fragen der Elementargeometrie. II. Teil: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsche Ausgabe von Dr. H. Fleischer. 348 S. 8⁰ mit 135 Figuren im Text. Leipzig 1907, B. G. Teubner. Preis geb. 9 M.

Das hier anzuzeigende Werk, dessen I. Teil in deutscher Ausgabe noch nicht erschienen ist, gibt sich als einen Ersatz und eine Ergänzung der „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" von F. Klein (Leipzig 1895), die vergriffen sind und nicht mehr neu aufgelegt werden sollen. Der II. Teil besteht aus neun Artikeln verschiedener Verfasser, die auf Anregung von F. Enriques im Jahre 1900 entstanden und von ihm zu einem Ganzen, dessen Teile sich als gut aufeinander bezogen erweisen, vereinigt wurden. Gegenüber der italienischen Originalausgabe sind fast alle Artikel erweitert oder umgearbeitet; auch kam ein Artikel (der neunte) neu hinzu.

Im ersten Artikel spricht Ettore Baroni „über die elementaren Methoden zur Lösung der geometrischen Aufgaben". Im zweiten „über die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Zirkel" von Ermenegildo Daniele wird auch der neue, mittels zirkularer Inversion geführte Adlersche Beweis mitgeteilt, daß jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe auch mit dem Zirkel allein gelöst werden kann. Die Neuausgabe von Mascheronis „La Geometria del Compasso" (Palermo, Cas. ed. „La nuova", 1901) ist nicht erwähnt. Artikel III von Amodeo Giacomini hat den Titel: „Ueber die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Lineal und den linealen Instrumenten: Betrachtungen vom Standpunkte der projektiven Geometrie". Er enthält insbesondere Anwendungen der Sätze von Desargues und Pappus, untersucht die Aufgaben, die linealer Art sind, wenn feste metrische Elemente (rechte Winkel, Kreis) in der Ebene gegeben sind, ferner Aufgaben, die durch Bestimmung der Doppelpunkte projektiver Punktreihen gelöst werden. Im vierten Artikel von Guido Castelnuovo „Ueber die Lösbarkeit der geometrischen Aufgaben mit den elementaren Instrumenten; Betrachtungen vom Standpunkte der analytischen Geometrie", werden die verschiedenen Möglichkeiten des Artikels III theoretisch untersucht. Grundlegend sind hier die Ausführungen über den Begriff Rationalitätsbereich. Der fünfte Artikel enthält einen Aufsatz vom Herausgeber selbst „über die durch Quadratwurzeln lösbaren algebraischen Gleichungen" und „über die Konstruierbarkeit der regulären Polygone". Bemerkenswert ist, daß hier auch auf die regulären Polygone mit zusammengesetzter Seitenzahl eingegangen wird. Zu diesem Artikel bildet der sechste eine Ergänzung. In ihm gibt E. Daniele drei wesentlich verschiedene „Konstruktionen des regulären Siebzehnecks" und zwar die von Serret-Bachmann, von v. Staudt und die Mascheronische von Gérard. Hervorzuheben ist die hier mitgeteilte Methode von A. Padoa zur Berechnung des Siebzehnecks ohne die Methoden der höheren Algebra. Es folgt ein in jeder Hinsicht sehr reichhaltiger Artikel von Alberto Conti „Aufgaben dritten Grades: Verdoppelung des Würfels, Dreiteilung des Winkels". Im achten Artikel handelt Benedetto Calò von den „transzendenten Aufgaben, insbesondere über die Quadratur des Kreises". Der Beweis für den allgemeinen Lindemannschen Satz wird zuerst nach Weierstraß gegeben. Später sind die Vereinfachungen von Hilbert und Hurwitz skizziert und zum Schluß wird die bis jetzt einfachste Form, in die H. Weber den Gordanschen Beweis gebracht hat, auseinandergesetzt. Im letzten Artikel gibt der Herausgeber „einige allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Aufgaben". Hier hätten wir gern etwas über die Lemoinesche Geometrographie und etwas mehr über die Genauigkeit von Konstruktionen (Fehlerellipse usw.; Literatur bei Haentzschel, Arch. Math., Bd. 10 (1906), Stzgsb. Berl. math. G., S. 55) gesehen. Aber wenn das Werk auch, wie der Uebersetzer sagt, nicht vollkommen sein kann, so enthält es doch des Interessanten und zur Belebung des Unterrichts Geeigneten so viel, daß es jedem Fachgenossen willkommen sein wird.

H. Wieleitner (Speyer).

* * *

H. Dressler, Professor am Seminar in Dresden-Plauen, Die Lehre von der Funktion, Theorie und Aufgabensammlung für alle höheren Lehranstalten. Leipzig 1908, Verlag der Dürrschen Buchhandlung. Preis M 1,60.

Es ist meines Wissens das erste Buch, welches die Lehre von den Funktionen schulmäßig behandelt und verdient schon deshalb unsere Beachtung. Da es nur die Lehre von den Funktionen enthält, nicht die gesamte Arithmetik, so ist es als Ergänzung eines etwa eingeführten Lehrbuches gedacht. Jeder einzelne Paragraph soll im Unterricht am Schlusse des zugehörigen Abschnittes im Lehrbuch eingefügt werden, z. B. der Paragraph mit $f(x) = y = \frac{x}{a} + b$ oder $\frac{a}{x}$ an den Schluß des Abschnittes: Division absoluter und relativer Zahlen.

Die Funktionen werden systematisch und methodisch mit der einfachsten $y = x + a$ beginnend Paragraph für Paragraph besprochen, an vielen Uebungsaufgaben erkennt der Schüler die Abhängigkeit des Wertes y von dem Werte für x. Das Vorkommen der Funktionen in Geometrie und Physik, im kaufmännischen Rechnen u. a. wird unausgesetzt an vielen Beispielen gezeigt. Neben der arithmetischen Form wird auch die algebraische Auffassung der Funktion und die Stellung der Lehre von den Gleichungen in der Arithmetik ausführlich behandelt. Alle in der Funktionenlehre nötigen Begriffe werden allmählich eingeführt. Die Aufgaben über Maxima und Minima werden zuerst algebraisch, dann durch graphische Darstellung gelöst.

Die größere zweite Hälfte des Buches behandelt die geometrische Veranschaulichung der Funktion. Es werden darin verschiedene Formen der Gleichungen einer Geraden, die Scheitelgleichung der Parabel, die Hauptachsengleichung der Ellipse und Hyperbel, abgeleitet. Aber auch einige sonstige Sätze aus der analytischen Geometrie über 1, 2 und 3 Gerade, die Gleichungen der Tangenten und Normalen, Koordinatentransformationen, Polarkoordinaten finden hier ihren Platz.

Wir sehen, alles in allem genommen, ist der Stoff ein sehr reichlicher. Ob der Verfasser mit der Verteilung und der Behandlungsweise des Stoffes überall das Rechte getroffen, soll und kann hier gar nicht untersucht werden. Einmal wird das immer Geschmacksache bleiben, dann ist die ganze methodische Einführung in die Funktionenlehre auf unteren und mittleren Klassen noch zu neu und es wird noch vieler ähnlichen Versuche, wie ein solcher in vorliegendem Buche unternommen worden, bedürfen, bis der einzelne für sich entschieden haben wird, was und wie es ihm zusagt. So vermisse ich die Einführung in die Infinitesimalrechnung, die im Rahmen des vorgefaßten Stoffes bei Maxima und Minima und beim Tangentenproblem bessere Dienste leisten würde als die gekünstelten Lösungen auf sog. elementarem Wege.

Immerhin ist der Verfasser sehr gründlich und planvoll vorgegangen und ich kann das Büchlein nicht nur Anfängern im Lehramt, sondern allen Kollegen, die sich der Sache widmen wollen, warm empfehlen.

E. Weighardt (Mannheim).

* * *

K. Düsing, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode. Ausgabe A. Hannover 1908, Verlag von M. Jänecke.

Das Heft bildet einen sehr wertvollen Beitrag zur Methodik der Differentialrechnung. Ich gestehe, daß mir diese Ableitung der Differentialquotienten neu war, und ich werde in Zukunft niemals verfehlen, meine Schüler mit ihnen bekannt zu machen. Die verblüffende Einfachheit, mit der manche Differentialformeln gefunden werden, hat etwas ungemein Bestechendes. Und doch möchte ich mich nicht entschließen, auf die, wenn auch umständlicheren, arithmetischen Ableitungen zu verzichten und glaube, daß diese stets voranzustellen sind. Die Lehre von den Funktionen, ihre graphische Darstellung, die Betrachtung des genaueren Verlaufes der Kurven, Steigung, Maxima und Minima nötigen uns zur Behandlung des Quotienten $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und die arithmetische Behandlung dieses Quotienten z. B. in der Form

$$\frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1}, \quad \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1}, \quad \frac{\log x_2 - \log x_1}{x_2 - x_1}$$

bietet nicht nur Gelegenheit zur bloßen Wiederholung, sondern zur Vertiefung mancher früheren Abschnitte. So wird die Grenzwertbestimmung von $\frac{\sin \delta}{\delta}$ dazu nötigen, sich die Beziehung zwischen sin, arc und tang viel gründlicher klar zu machen, als dies in O II schon geschehen ist. Ganz abgesehen davon versagt die geometrische Ableitung für $y = x^n$. Der Verfasser selbst glaubt, daß die algebraische Berechnung von $d\,(\lg x)$ und $d\,(a^x)$ der geometrischen vorzuziehen ist.

Recht geschickt ist die Einführung in die Lehre von den Integralen, die sich wohl an die Behandlung von Nernst und Schönfließ anlehnt, was dem Büchlein nur zum Lobe gereicht. Das Titelblatt führt den Vermerk Ausgabe A: Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, sowie zum Selbstunterricht. Ob und wozu eine Ausgabe B erschienen ist, habe ich nirgends entnehmen können.

E. Weighardt (Mannheim).

* * *

Fenkner, Hugo, Lehrbuch der Geometrie für den Unterricht an höheren Lehranstalten. In 4 Teilen. 3. Teil: Ebene Trigonometrie. Nebst einer Aufgabensammlung. Berlin 1908, Otto Salle. M 1,60.

Wenngleich kein Mangel an Lehrbüchern der Schulmathematik vorhanden ist, so ist es doch mit Freude zu begrüßen, daß Fenkner sein in Fachkreisen gut bekanntes und beliebtes Lehrbuch der Geometrie durch Hinzufügen der „ebenen Trigonometrie“ erweitert hat. Das Lehrtalent des Verfassers zeigt sich auch in diesem Teile, der sich den beiden anderen würdig anreiht. — Die Vorzüge der ebenen Trigonometrie Fenkners sind kurz folgende:

1. Der theoretische Teil ist zweckmäßig in zwei Stufen angeordnet, entsprechend dem Unter- und Obersekundapensum.
2. Im theoretischen Teile des Lehrbuches werden in einem besonderen Abschnitt die Hauptaufgaben über Höhen- und Horizontalstreckenberechnung mittels Meßkette und Theodolit ausführlich und methodisch behandelt; Einrichtung und Gebrauch des Theodoliten sind durch einige klare Figuren kurz erläutert.
3. Ein Anhang bringt eine reichhaltige Aufgabensammlung, die das Buch besonders empfehlenswert macht. Die Aufgaben sind methodisch angeordnet.
4. Den Schluß des Buches bilden goniometrische Gleichungen mit 1 und 2 Unbekannten unter Angabe der wichtigsten Lösungsmethoden.

Das ganze Material wird genügend erschöpft. Meist finden sich mehrere Ableitungen der betreffenden Formeln. Gute Figuren erläutern ihren geometrischen und analytischen Zusammenhang.

K. Bergwitz (Braunschweig).

* * *

Van't Hoff, J. H., Die Lagerung der Atome im Raume. Dritte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 28 Abbild. XI u. 147 S. gr. 8°. Braunschweig 1908. Vieweg & Sohn. Geh. 4,50 M.

Ueber die Bedeutung der van't Hoffschen Hypothese der räumlichen Atomlagerung für die Entwickelung der modernen Chemie ist man sich heute ohne Zweifel einig. Wurde sie doch schon 1894 von Johannes Wislicenus in seinem Vorwort zur zweiten Auflage des zu besprechenden Werkes mit folgenden, ihren Wert klar kennzeichnenden Worten gewürdigt: „Sie hat schon heute in vollem Maße geleistet, was überhaupt von einer Hypothese geleistet werden kann; denn sie hat vorher unverständliche, scheinbar außerhalb der chemischen Grundtheorien stehende Tatsachen organisch an jene angeschlossen und aus ihnen in einfachster Weise zu erklären vermocht; sie hat durch Stellung neuer Probleme die empirische Forschung vielseitig angeregt, das Tatsachenmaterial mächtig gehäuft, den Weg zur Erfindung neuer Beobachtungsmethoden gewiesen und ist damit der experimentellen Prüfung zugänglich und gleichzeitig zum Anstoß einer bedeutungsvollen Bewegung, im gewissen Sinne sogar einer neuen Epoche unserer Wissenschaft geworden." — Wenn nun der Begründer der so fruchtbaren Theorie selbst an die Herausgabe der dritten Auflage des grundlegenden Werkes herantritt, so darf man ohne weiteres eine hervorragende Leistung erwarten. Und man wird in seinen Hoffnungen beim Durchlesen der Schrift nicht enttäuscht, sondern in ganz besonders hohem Grade durch die trotz des doch nicht so ganz leichten Problems klare und lebhafte Darstellungsweise gefesselt. Nachdem der Autor sich mit der Entdeckung der Radioaktivität und den daraus für den Bestand der Atome zu ziehenden Schlußfolgerungen durch den sehr richtigen Hinweis, daß die mittlere Lebensdauer der Atome selbst bei dem vielleicht kurzlebigsten, dem Radium, nach der Rechnung eine so lange ist, daß sie für gewöhnliche chemische bezw. stereochemische Forschungen nicht in Betracht kommt, auseinandergesetzt hat, behandelt van't Hoff sofort in leicht verständlicher Weise die Grundlagen seiner Theorie, um diese dann in ihren Konsequenzen an der Hand der Versuche und des Tatsachenmaterials in den folgenden Kapiteln weiter auszubauen. Die Lektüre dieser Abschnitte bietet schon insofern einen hohen Genuß, als der Herr Autor stets strengste objektive Kritik an allen Forschungen und deren Bedeutung für seine Theorie übt und so der ganzen Darstellung eine wesentliche Vertiefung zuteil werden läßt. Alle Kapitel und ihren Inhalt hier anzuführen, würde sicherlich über den Rahmen einer kurzen Besprechung hinausgehen. Es genüge der besonders wichtige Hinweis, daß trotz des vorliegenden, gewaltigen Beobachtungsmateriales — füllen doch bekanntlich die Ergebnisse der Jahre 1894—1902 schon zwei stattliche Bände (90 M!) der „Materialien der Stereochemie in Form von Jahresberichten" von C. Bischoff aus — nichts von Bedeutung fortgelassen ist und trotzdem das Buch nur einen Umfang von 147 Seiten hat. Gerade diese gedrängte Zusammenfassung und Disposition des Stoffes wird das Buch auch in seiner neuen Gestalt zu einem höchst wertvollen Vademecum für jeden Jünger der Chemie machen.

W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Levin, Prof. Dr. W., und **Briecke, Prof. W.**, Methodischer Leitfaden der Chemie und Mineralogie für höhere Mädchenschulen sowie für den Anfangsunterricht in Studienanstalten. Mit 84 Abbild. Berlin 1909, Verlag von Otto Salle. Preis 2 M.

Das Buch weist eine Fülle methodischer Feinheiten auf. Die Verfasser sind mit Erfolg bestrebt, an der Hand geeigneter Beispiele die erforderlichen Anschauungen zu vermitteln, von denen sie dann allmählich fortschreiten zur Abstraktion. Besonderen Beifall verdient die Art ihrer Darstellung, die man als „psychologische Einführung in die wissenschaftliche Methode" bezeichnen könnte. Dadurch wirkt die Beschäftigung mit dem Buche äußerst anregend. Vor allen Dingen wird durch diese Art der Darstellung die wünschenswerte Klarheit erzielt, die bislang in verschiedenen Lehrbüchern der Chemie für höhere Mädchenschulen zu wünschen übrig ließ. Auch das Experiment findet die Stellung, die der moderne pädagogische Unterricht von ihm verlangt. Es beantwortet die Fragen, die sich im Verlauf des Unterrichts ergeben, so daß es gewissermaßen aus dem Unterricht herauswächst. Auch die Zeichensprache und die Formeln sind in verständiger Weise berücksichtigt. Sie finden erst Erwähnung, nachdem genügend Tatsachenmaterial entwickelt ist. Durch interessante Vergleiche (z. B. CO_2 und SO_2) werden besondere Eigenarten wichtiger Verbindungen vielseitig beleuchtet.

Die Anordnung des Stoffs gibt zu einigen Bemerkungen Veranlassung. So gelangen z. B. Kohlensäure, Salpetersäure und Ammoniak erst zur Besprechung, nachdem die Luft, das Wasser, Salzsäure, Verbindungsgewicht, Atom, Molekül, Schwefel, Eisen, Kochsalz und Gips behandelt worden sind. Schon mit Rücksicht auf die Pflanzenphysiologie, die zum Pensum der 2. Klasse gehört und tunlichst in Klasse 3 vorbereitet werden sollte, müßten die erwähnten Verbindungen möglichst früh Gegenstand der Betrachtung werden. Dagegen könnte die Behandlung des Eisens schon in Anbetracht der teils schwierigen Vorgänge weit hinausgeschoben werden. Ferner wäre eine Verteilung des Stoffs auf die einzelnen Klassen wünschenswert. Der Wert des Buches würde noch erhöht durch Einfügen von Denkfragen, in denen natürlich auch die übrigen naturwissenschaftlichen Disziplinen bis zu einem gewissen Grade berücksichtigt werden müßten. Die zahlreichen Berechnungen, die den einzelnen Abschnitten angegliedert sind, sind zur Befestigung und Klärung der gewonnenen Resultate unentbehrlich, wenn die Verfasser in ihren Anforderungen stellenweise auch etwas weit gehen, z. B. in folgender Aufgabe: „10 g Tricalciumphosphat sollen zur Gewinnung von Superphosphat mit Schwefelsäure aufgeschlossen werden. Wieviel Gramm Schwefelsäure sind erforderlich, und wieviel Gramm Monocalciumphosphat werden dabei gebildet?" (S. 114).

Von diesen kleinen Unregelmäßigkeiten abgesehen, wird die Beschäftigung mit dem Buche imstande sein, den Unterricht in der Chemie wesentlich zu beleben und die Anbahnung des Verständnisses für chemische Erscheinungen zu erleichtern. Dem Buche ist daher weiteste Verbreitung zu wünschen.

Dr. Bongardt (Hildesheim).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Bernhard, M., Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktion und der Perspektive. 3. Aufl. Stuttgart 1909, Enderle.

Beyer, R., Berliner Schulflora. Berlin 1909, Bornträger. M 2.80.

Buchner, H., Acht Vorträge aus der Gesundheitslehre. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 1.) 3. durchges. Aufl. von Prof. Dr. M. v. Gruber. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Buekers, P. G., Die Abstammungslehre. Leipzig 1909, Quelle & Meyer, M 4.40.

Crantz, P., Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen. II. Teil für Lyzeen. Mit 156 Fig. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 2.60.

Eckhardt, E., Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks. Mit 35 Fig. Ebenda. M 4.40.

Ernecke, F., Projektionen mit dem Universal-Schul-Projektions-Apparat Type No. 4. verm. Aufl. mit 122 Abb. Berlin-Tempelhof, Ringbahnstr. 4, Ernecke.

Frentzel, J., Ernährung und Volksnahrungsmittel. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 19.) Neubearbeitet von Prof. Dr. N. Zuntz. 2. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Frey, H., Mineralogie und Geologie für Schweizer Mittelschulen. 3. verb. Aufl. Mit 263 Abb. Wien 1909, Tempsky. geb. M 2.75.

Fritz. G., Das moderne Volksbildungswesen. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 266.) Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Gajdeczka, J., Mathematischer Lernstoff für Lehramtskandidaten der Bürgerschulen. Wien 1909, Deuticke.

Gilg, E. und Muschler, R., Phanerogamen. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 44.) Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Girndt, M., Bautechnische Chemie. (Der Unterricht an Baugewerkschulen, herausgeg. von Prof. M. Girndt.) 2. Aufl. Mit 35 Fig. Leipzig 1909, Teubner. M 1.20.

Glafey, H., Die Rohstoffe der Textilindustrie. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 62.) Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Goldschmidt, R., Die Fortpflanzung der Tiere. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 253.) Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Grißon, R., Einheitliches Naturgesetz. Berlin 1909, Grißon.

Gruner, P., Die Voraussetzungen und die Methoden der exakten Naturforschung. Leipzig 1909, Teubner. M 0.50.

Günther, S., Geschichte der Naturwissenschaften. (Bücher der Naturwissenschaft. 2. und 3. Bd.) Mit einem Bildnis des Verfassers, 4 farb. und 12 schwarzen Tafeln und einem Gesamtregister. Leipzig, Reclam jun.

Hauptmann, F., Methodik des Unterrichts in der Naturlehre. 3. umgearb. Aufl. Mit 10 Abb. Wien 1909, Hölder. M 0.80.

Heilermann-Diekmann, Algebra. Neubearbeitet von Dr. K. Knops. I. Teil: Die 4 Grundrechnungen. — Die linearen Gleichungen. — Die Potenzrechnungen. — Die quadratischen Gleichungen. Essen 1909, Baedeker. geb. M 2.80.

Hočevar, Arithmetik. Unterstufe. 7., nach den neuen Lehrplänen umgearb. Aufl. Mit 15 Fig. Wien 1909, Tempsky. geb. M 2.10.

v. Hoëgh, E., Elementarer Beweis des Fermatschen Satzes. Rostock 1909, Boldt.

Hoffmann, G., Fort mit dem griechischen Unterricht. Dresden-Blasewitz 1909, v. Grumbkow. M 0.75.

Holle, H. G., Leitfaden der Chemie und Biologie. I. Teil: Chemie, II. Teil: Allgem. Biologie. Bremerhaven 1909, v. Vangerow. I. Teil M 0.90, II. Teil M 0.60.

Hoppe, E., Freiwillige Schülerübungen im humanistischen Gymnasium. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 0.80.

Ist Mathematik Hexerei? Von einem preußischen Schulmeister. Freiburg i. Br. 1909, Herder. M 1.20.

Johannsen, W., Elemente der exakten Erblichkeitslehre. Deutsche wesentlich erweiterte Ausgabe. Mit 31 Fig. im Text. Jena 1909, Fischer. M 9.—.

John, G., Schulchemie. Große Ausgabe. Mit 180 Abb. und 1 Farbentafel. Kleine Ausgabe. Mit 121 Abb. und 1 Farbentafel. Leipzig 1909, Nägele. geb. M 2.40 und M 1.80.

Kambly-Roeder, Stereometrie. Neubearbeitet von Prof. Dr. A. Thaer. IV. Teil, Ausgabe B. 32. Aufl. Mit 294 Fig. Breslau 1909, Hirt. geb. M 3.—.

Kindermann, C., Volkswirtschaft und Staat. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 59.) Leipzig 1908, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Kleiber, J., Zur Einrichtung der physikalischen Schülerübungen. Mit 12 Abb. München 1909, Oldenbourg. M 1.—.

Kleinschmidt, M., Elementarer Beweis des Fermatschen Satzes. Rostock 1909, Boldt.

Knab, P., Lösungen zum Rechenbuch für die unteren Klassen höh. Lehranstalten. Freiburg i. Br. 1909, Herder. M 1.50.

Knops, K. und Meyer, E., Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Mathematik. Essen 1909, Baedeker. geb. à Heft M 1.20.

Koppe-Husmann, Lehrbuch der Physik. Ausg. B. I. Teil: Lehrg. f. d. Unterstufe d. höh. Lehranstalten. 10. Aufl. der neuen Bearbeitung von Prof. Dr. Knops. Mit 238 Holzschnitten und 1 farb. Sternkarte. Essen 1909, Baedeker. geb. M 2.20.

—„— Lehrbuch der Physik. Ausg. B. II. Teil: Lehrg. f. d. Oberstufe. 7. Aufl. der neuen Bearbeitung von Prof. Dr. Knops. Mit 354 Abb. Essen 1909, Baedeker. geb. M 5.20.

Kosmos, Handweiser für Naturfreunde. Herausgeg. v. Kosmos, Gesellschaft der Naturfreunde. Bd. VI 1909, Heft 5-9. Stuttgart 1909, Franckh.

Kraepelin, Einführung in die Biologie. 2. verb. Aufl. Mit 311 Abb. sowie 4 Tafeln und 2 Karten in Buntdruck. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 4.—.

Leick, E., Die biologischen Schülerübungen. Mit 2 Bildertafeln. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 1.20.

Lorenz, W., Die mathematischen Wissenschaften und die Formen. Sonderabdruck aus dem VIII. Jahrgang der Zeitschrift „Frauenbildung“. Leipzig 1909, Teubner.

Lorscheid, J., Lehrbuch der anorganischen Chemie. 18. Aufl. herausgeg. v. Dr. F. Lehmann. Mit 154 Abb. und 1 farb. Spektraltafel. Freiburg i. Br. 1909, Herder. geb. M 4.20.

Löwenhardt, E., Leitfaden für die chemischen Schülerübungen. Leipzig 1909, Teubner. M 1.80.

Lübsen, H. B., Elementar-Geometrie. 30. Aufl., neubearb. von Prof. Dr. A. Donadt. Mit 249 Fig. und einer Anleitung zum perspektiven Zeichnen. Leipzig 1909, Brandstetter. M 4.—.

Lutz, E., Analytische Geometrie der Ebene. Karlsruhe i. B. 1909, Braunsche Hofbuchdruckerei. geb. M 9.—.

Mangold, E., Unsere Sinnesorgane. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 26.) Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Martus, H., Entstehungsweise der Monde der Planeten. Mit 6 Figurentafeln. Dresden 1909, Koch. M 2.—

Menzer, A., Der menschliche Organismus. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 65.) Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Meyer, W. F., Allgemeine Formen- und Invariantentheorie. I. Bd.: Biron-Formen. (Sammlung Schubert XXXIII.) Leipzig 1909, Göschen. geb. M 9.60.

Minkowski, H., Raum und Zeit. Mit dem Bildnis Herm. Minkowskis sowie einem Vorwort von A. Gutzmer. Leipzig 1909, Teubner. M 0.80.

Močnik, Arithmetik für die I. und II. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. Bearbeitet von Dr. K. Zahradniček. 40. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Aufl. Wien 1909, Tempsky. geb. M 2.50.

—„— Anfangsgründe der Geometrie für die I. bis III. Klasse der Mittelschulen. Bearb. von Joh. Spielmann. 28. nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Aufl. Mit 148 Fig. Ebenda. geb. M 1.80.

Müller, H. und Mahlert A., Arithmetik und Algebra für höh. Mädchenschulen. Mit Figuren im Text. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 2.—.

—„— Planimetrie und Körperberechnungen für höh. Mädchenschulen. 2. nach den neuen Lehrplänen umgearb. Aufl. Mit 90 Fig. Ebenda. geb. M 2.—.

—„— Mathematisches Lehr- und Uebungsbuch für das Lyzeum. I. Teil: Arithmetik und Algebra. Mit Fig. im Text. II. Teil: Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie. Mit 71 Fig. Ebenda. I. Teil geb. M 2.—, II. Teil geb. M 2.40.

Müller, H. und Schmidt, O., Rechenbuch für höh. Mädchenschulen. 6 Hefte. Ebenda.

Naumann, Fr., Form und Farbe. Berlin-Schöneberg 1909, Buchverlag der „Hilfe“. M 3.—.

—„— Sonnenfahrten. Ebenda. M 3.—.

—„— Das Volk der Denker. Ebenda. M 0.25.

Nell, A., Fünfstellige Logarithmen. 13. völlig neubearb. Aufl. von Prof. L. Balser. Gießen 1909, Roth.

Neresheimer, E., Der Tierkörper. (Wissenschaft und Bildung. Bd. 49.) Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 1.25.

Ostwald, W., Wider das Schulelend. Ein Notruf. Leipzig 1909, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. M 1.—.

Otto, Rechenbuch für zehnklassige höh. Mädchenschulen. 7 Hefte. Neubearb. nach den ministeriellen Bestimmungen vom 18. Aug. und 12. Dez. 1908. Leipzig 1909, Hirt & Sohn.

Otto, F. und Siemon, P., Geometrie für zehnklassige höh. Mädchenschulen. Bearb. nach den ministeriellen Bestimmungen vom 18. Aug. und 12. Dez. 1908. Ebenda. geb. M 1.50.

Pitz, Geometrie. 2. verb. Aufl. Gießen 1909, Roth. M 0.80.

Plaßmann, J., Jahrbuch der Naturwissenschaften 1908—1909. (Herders Jahrbücher.) 24. Jahrgang. Mit einem Bildnis von Dr. Max Wildermann und 27 Abb. Freiburg 1909, Herder. geb. M 7.50.

Poincaré, L., Die Elektrizität. Uebersetzt von Prof. Dr. A. Kalähne. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 3.80.

Rausch, A., Elemente der Philosophie. Halle a. S. 1909, Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses. M 4.60.

Richarz, F., Anfangsgründe der Maxwellschen Theorie. Mit 69 Fig. Leipzig 1909, Teubner. M 7.—.

Riehl, A., Humanistische Ziele des mathem. und naturw. Unterrichts. Berlin 1909, Weidmannsche Buchhandlung. M 0.60.

Rippel, J., Leitfaden der Chemie und Mineralogie für Mädchenlyzeen. 2. verb. Aufl. Mit 1 farbigen Tafel und 115 Abb. Wien 1908, Deuticke. M 2.50.
Sajó, K., Unsere Honigbiene. Stuttgart 1909, Kosmos-Verlag (Franckh). M 1.—.
Schanz, J., Der Aufbau des komplexen Zahlengebiets auf der natürlichen Zahlenreihe. Berlin 1909, Weidmannsche Buchhandlung. M 1.—.
Scheid, K., Leitfaden der Chemie. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. geb. M 3.80.
Schiff, J., Die einfachsten chemischen Erscheinungen mit Berücksichtigung der Mineralogie. Mit 42 Textabb. Breslau 1909, Hirt. M 0.70.
Schlesinger, L., Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1868. Leipzig 1909, Teubner.
Schoenflies, A., Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 98 Textfig. Leipzig 1908, Teubner. M 2.20.
Schoenichen, W., Biologie und Physik. Mit 123 Abb. Leipzig 1909, Voigtländer. M 2.—.
Schrader, E., Aus dem Liebesleben der Tiere. Stuttgart 1909, Franckh. M 1.40.
Schroeder, J., Beiträge zur Anwendung des graphischen Verfahrens im mathematischen Unterricht. Beiträge zum Jahresbericht der Oberrealschule vor dem Holstentor in Hamburg, Ostern 1909, Progr. Nr. 983. Hamburg 1909. Schroeder & Jeve.
Schubert, H., und Schumpelick, A., Arithmetik für Gymnasien. 2. Heft: Für obere Klassen. 5. Aufl. Leipzig 1908, Göschen.
Schulz, Paul F. F., Unsere Zierpflanzen. Mit Taf. u. Textbildern. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 4.40.
Schulze, R., Hertzsche Wellen, drahtlose Telegraphie und Teslaströme. Leipzig 1908, Schlemminger.
Schumacher, J., Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes. Mit 2 Taf. München 1909, Lindauersche Buchhdlg. M 1.—.
Schurig, W., Biologische Experimente. Leipzig 1909, Quelle & Meyer. M 2.40.
Schuster, M., Stereometrie. 2. nach den preuß. Lehrplänen von 1901 umgearb. Aufl. Mit 2 Fig.-Taf. Leipzig 1908, Teubner. geb. M 1.80.
Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk f. höhere Lehranstalten. I. Bd.: Arithmetik u. Algebra. I. Teil: Für die mittl. Klassen sämtl. höh. Lehranstalten. Mit 16 Fig. im Text. Wien 1909, Tempsky. geb. M 2.80.
Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk für höh. Lehranstalten. I. Bd.: Arithmetik und Algebra. II. Teil: Für die mittleren Klassen. 2. durchges. Aufl. Mit 15 Fig. Wien 1909, Tempsky. geb. M 2.80.
—„— Mathematisches Unterrichtswerk für höh. Lehranstalten. 1. Bd. Arithmetik und Algebra. II. Teil; Ausg. A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Mit 26 Fig. Ebenda. geb. M 3.—.
Schwantes, G., Aus Deutschlands Urgeschichte. (Naturwissenschaftl. Bibliothek.) Mit Zeichn. von C. Schwantes u. zahlr. and. Abb. Leipzig, Quelle & Meyer. geb. M 1.80.
Schwering, K., Aufgaben aus der niederen Geometrie. 3. verb. Aufl. Mit 104 Abb. Freiburg i. Br. 1908, Herder.
Schwering, K., Lehrbuch der kleinsten Quadrate. Mit 3 Fig. Freiburg i. Br. 1909, Herder. M 2.40.
Schwering, K., Stereometrie. 3. Aufl. Mit 44 Fig. Ebenda. geb. M 1.40.
Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. neubearb. von G. Scheffers. 3. Bd.: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 63 Fig. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 10.—.
v. Seydlitz, E., Geographie. Ausgabe E. Für höh. Mädchenschule bearb. von Dir. Paul Gockisch. Neubearbeitung in 7 Heften. Mit vielen Karten und Profilen im Text, farb. Tafeln und Bildern in Photographiedruck. Breslau 1909, Hirt.
Smalian, K., Naturwissenschaftliches Unterrichtswerk für höh. Mädchenschulen. Bearb. nach den neuen Lehrplänen von K. Bernau. I. Teil: Lehrstoff der VII. Klasse. Mit 45 Abb. und 8 Farbentafeln. Wien 1909, Tempsky. geb. M 1.20.
—„— Leitfaden der Tierkunde für höh. Lehranstalten. Mit vielen Textabb. und Farbentafeln. Ebenda.
Smalian, K., Leitfaden der Tierkunde für höh. Lehranstalten. 1. Teil: Lehrstoff der Sexta. Mit 38 Textabb. u. 1 Farbentafel. 2. Teil: Lehrstoff der Quinta. Mit 55 Textabb. u. 10 Farbentaf. 3. Teil: Lehrstoff der Quarta. Mit 112 Textabb. u. 13 Farbentaf. Wien 1908, Tempsky. I. Teil geb. M 1.20; II. Teil geb. M 1.50; III. Teil geb. M 2.—.
Sprockhoff, A., Uebung im Bestimmen der Pflanzen. Hannover 1909, Meyer. M 0.50.
Steinmeyer, H., Schulwahl (u. Berufswahl) nach Lehrplan, Befähigung u. Berechtigungen. Braunschweig 1908, Limbach.
Strenger, E., Mathematische Aufgaben. 1. Teil. Leipzig 1908, Quelle & Meyer. M 1.25.
Tannery, J., Elemente der Mathematik. Autorisierte deutsche Ausg. von Dr. P. Klaeß. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Fig. Leipzig 1909, Teubner. M 7.—.
Tesar, L., Die Mechanik. Mit 111 Fig. Ebenda. M 3.20.
Thieme, H., Grundlehren der Mathematik. II. Teil, I. Bd.: Die Elemente der Geometrie. Mit 323 Fig. Ebenda. geb. M 9.—.
—„— Leitfaden der Mathematik. I. Teil: Die Unterstufe. Mit 127 Fig. 4. Aufl. Wien 1910, Tempsky. geb. M 1.80.
Trappe, Schul-Physik. 16. Aufl. Neubearb. von Prof. Dr. Th. Maschke. Nebst einem Anhang: Die einfachsten chemischen Erscheinungen mit Berücksichtigung der Mineralogie von Prof. Dr. J. Schiff. Mit 1 farb. Spektraltafel und schwarzen Abb. Breslau 1909, Hirt. geb. M 5.—.
Vater, R., Dampf und Dampfmaschine. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 63.) 2. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.
Vogelarten, Nützliche, und ihre Eier. 46.—51. Tausend. 48 Bilder auf 25 Tafeln m. Text. Halle a. S., Gesenius. geb. M 2.—.
—„— Schädliche. 19.—24. Tausend. 35 Bilder auf 24 Taf. m. Text. Mit einem Anhange: Vogelschutzgesetz vom 30. Mai 1908. Ebenda. geb. M 2.—.
Voigt, M., Die Praxis des naturkundlichen Unterrichts. Mit 92 Fig. Leipzig 1909, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung. geb. M 3.80.
Vom Urtier zum Menschen, Bilderatlas zur Abstammungs- und Entwicklungsgeschichte des Menschen. Zusammengestellt von Conr. Günther. Vollst. in 20 Lief. zu 1 M. Lief. 1. Stuttgart 1908, Deutsche Verlagsanstalt.
Voß, A., Ueber das Wesen der Mathematik. Leipzig 1908, Teubner. M 3.60.
Waeber, R., Lehrbuch der Chemie. 16. Aufl., neubearb. von E. Heinze u. Dr. K. Pappenheim. Mit 111 Abb. Leipzig 1908, Hirt & Sohn. geb. M 2.80.
Walland, H., Chemisches Praktikum. Wien 1909, Deuticke. geb. M 2.—.
Wallentin, J. G., Lehrbuch der Physik. Ausgabe C. für Realgymnasien. Mit 271 Fig. und 1 Spektraltafel. Wien 1909, Pichlers Witwe & Sohn.
Wangerin, A., Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Bd. I (Sammlung Schubert LVIII). Leipzig 1909. geb. M 6.60.
Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. (Aus Natur und Geisteswelt.) 3. Aufl. Mit 15 Textfig. Leipzig 1908, Teubner. geb. M 1.25.
Wehner, H., Das Innere der Erde und der Planeten. Mathematisch-physikalische Untersuchung. 27 Originalfig. Freiberg 1908. Craz & Gerlach. M 2.50.
Weill, A., Sammlung graphischer Aufgaben f. d. gesamten höheren Schulen. I. Mathematik. Gebweiler 1909, Boltze.
—„— Graphisches Heft I: Mathematik, Naturwissenschaften. II: Geographie, Wirtschaftslehre, Statistik. 3. Aufl. Ebenda.
Weismann, A., Die Selektionstheorie. Mit 1 farb. Tafel u. 3 Textfig. Jena 1909, Fischer. M 2.—.
Weitzel, C. G., Pädagogik für technische Lehranstalten. (Hartlebens Mechanisch-technische Bibliothek. Bd. 16.) Wien 1908, Hartleben.
Weitzenböck, K., Komplex-Symbolik. (Sammlung Schubert LVII.) Leipzig 1908, Göschen. geb. M 4.80.
v. Wettstein, R., Der naturwissenschaftliche Unterricht an den österreichischen Mittelschulen. Wien 1908, Tempsky. M 3.—.
Wieleitner, H., Spezielle ebene Kurven. Mit 189 Fig. im Text. (Sammlung Schubert LVI.) Leipzig 1908, Göschen. geb. M 12.—.
Wienecke, E., Ebene Trigonometrie für Seminare und gewerbliche Anstalten. 2. Aufl. Berlin 1909, Oehmigke. M 1.—.
—„— Die Grundlehren der Planimetrie für Lehrerbildungsanstalten. 2. Aufl. Ebenda. M 2.80.
Wildermann, M., Jahrbuch der Naturwissenschaften 1907/1908. (Herders Jahrbuch.) Mit 29 Abbild. 23. Jahrg. Freiburg 1908, Herder. geb. M 7.50.
Wolf, K., Grundzüge der Elektrotechnik zum Gebrauche an gewerblichen Lehranstalten. Mit 195 Abb. Wien 1909, Hölder. kart. M 1.20.
Wolff, H., Sätze und Aufgaben der Geometrie für Realanstalten. I. Teil: Unterstufe. Mit 157 Fig. im Text. Leipzig 1908, Teubner. kart. M 1.60.
—„— Sätze und Aufgaben der Geometrie für Realanstalten. II. Teil: Oberstufe. Mit 136 Fig. im Text. Ebenda. geb. M 2.—.
Wünsche, O., Die Pflanzen Deutschlands. Die höheren Pflanzen. 9. neubearb. Aufl. von Dr. Joh. Abromeit. Mit einem Bildnis O. Wünsches. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 5.—.
Wünsche-Schorler, Die verbreitetsten Pflanzen Deutschlands. 5. Aufl. Mit 459 Umrißzeichnungen. Ebenda. geb. M 2.60.
Wurm, W., Waldgeheimnisse. In 3. Aufl. bearb. von G. Schlenker und K. Könicke. Stuttgart 1909, Kosmos-Verlag (Franckh).
Young, G. C., und Young, W. H., Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe v. S. u. F. Bernstein. Mit 127 Textfig. u. 3 bunten Taf. Ebenda. geb. M 3.—.
Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. v. Franz Frisch. IV. Jahrg., Nr. 8, 9, 10; V. Jahrg., Nr. 1, 2, 6. Wien 1908/09, Pichlers Wwe. & Sohn.
Zenz, W., Methodik des naturgeschichtlichen Unterrichts in der Volks- und Bürgerschule. 4. umgearb. Aufl. Mit 10 Abb. Wien 1909, Hölder. M 1.40.
Zeppelin, Graf Ferd. jun., Die Luftschiffahrt. Stuttgart 1908, Franckh. M 1.60.
Ziegler, J., Soll und Haben der Neuen Mädchenschule. Leipzig 1909, Gerhard. M 1.—.

Wenden!

Technologie in der Schule!
Gebr. Höpfel, Lehrmittelanstalt
Berlin NW. 5, Birkenstraße 75
Verlag von Kagerah's u. unseren technologischen Lehrmitteln.
Vielfach prämiiert! Katalog gratis!


Achromatische
Schul-Mikroskope
erst. Güte hält stets a. Lager
F. W. Schieck
Optische Fabrik
Berlin SW. 11.
Preislisten kostenlos.

Analysen-Wagen
mit konstant. Empfindlichkeit, schnellschwingend, sowie **chem.-techn. Wagen** von anerkannt unübertroffener Genauigkeit, mit div. Neuerungen, vielfach prämiiert, empfehlen
A. Verbeck & Peckholdt, Dresden-A.
Lieferanten vieler Universitäts- und Hochschullaboratorien, sowie von Gymnasien, Realschulen, Seminaren usw.

Laboratoriums-Apparate
Demonstrations-Apparate
für Chemie, Physik usw.
Dr. Rob. Muencke
Berlin N. W. 6, Luisenstr. 58.

Apparate für elektrische Strom-Spannungs- u. Widerstandsmessungen
aller Systeme.
Komplette Schul-Schalttafeln
sowie Meßzimmer-Einrichtungen.
Spezialfabrik elektrischer Meßapparate
Gans & Goldschmidt
Elektrizitäts-Ges. m. b. H., Berlin N 65.

Max Kohl, A.-G., Chemnitz, Sachsen
Größtes Etablissement auf dem Kontinent für die Herstellung von
: : : **Physikalischen Apparaten** und : : :
: : : : **chemischen Gerätschaften** : : : :
kompl. Laboratoriums-Einrichtungen mit allen dazu erforderlich. Möbeln usw.
Man verlange ausführlichen Katalog und Kostenanschläge.

R. Winkel, Göttingen
Optische und mechan. Werkstatt.
Mikroskope
von den allerfeinsten bis zu den einfachen Schulmikroskopen
— **in erstklassiger Ausführung.** —
Preisliste frei und unberechnet.

Gülcher's Thermosäulen
mit Gasheizung.
Vorteilhafter Ersatz f. galv. Elemente. — Konstante elektromotorische Kraft. Ger. Gasverbrauch. — Hoh. Nutzeffekt. Keine Dämpfe. — Kein Geruch. — Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung. Betriebsstörungen ausgeschlossen.
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O. 27, Andreasstr. 71—73.

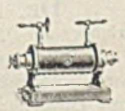
R. Jung, Heidelberg
Werkstätte für
wissenschaftl. Instrumente
Mikrotome
und Mikroskopier-Instrumente

Franz Hugershoff,
Leipzig.
Apparate für den
Chemie-Unterricht.
Einrichtung
chemischer Laboratorien.

Botanik
in der Schule
Kataloge kostenlos — **Linnaea** Berlin NW 21

G. Lorenz, Chemnitz.
Physikal. Apparate.
Preisliste bereitwilligst umsonst.

Botanische Modelle
in eigener Werkstatt hergestellt
liefert und empfiehlt
R. Brendel, Grunewald-Berlin.
Preisverzeichnisse
werden kostenlos zugesandt.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel

Induktorien mit Präzisions-Spiral-Staffelwicklung
— Patent Klingelfuss. —

Lehrmittel
für den
naturwissensch. Unterricht
liefert in anerkannt erstklassiger Ausführung zu mäßigen Preisen
Wilh. Schlüter, Halle a. S.
Naturwissensch. Lehrmittel-Institut.

Fr. Fuendeling, Friedberg i. H.
Werkstätten für Feinmechanik und Elektrotechnik
Apparate für den physikal. und chemischen Unterricht
Spezialität: **Neukonstruktionen.**

Robert Müller, Glasbläserei
und Fabrik chem.-phys. Apparate
Essen-Ruhr, Kaupenstraße 46—48
empfiehlt seine
Doppelthermoskope und **Apparate für strahl. Wärme** nach Prof. Dr. Looser.
Preislisten gratis und franko.

Richard Müller-Uri,
Braunschweig.
Glastechnische Werkstätte.
Physikalische und chemische Vorlesungs-Apparate.
Spezialitäten: Elektro-physikalische und Vakuumapparate bester Art.

Ehrhardt & Metzger Nachf.
Darmstadt.
Apparate für Chemie u. Physik.
Vollständige Einrichtungen.
Eigene Werkstätten.

E. Leitz, Wetzlar
Projektionsapparate
Mikroskope, Mikrotome
Mikrophotographische Apparate
Photographische Objektive
Prismen - Feldstecher.

Arno Haak, Jena
Carl Zeißstraße 12
Glastechnische Werkstätte.
Thermometer
und Glasinstrumente für Wissenschaft und Technik.

Sauerstoff
Wasserstoff
Leuchtgas
komprimiert in leichten Stahlzylindern
Sauerstoff-Fabrik Berlin, G. m. b. H.
Berlin N. 11, Tegeler Straße 15.
Ständige Musterausstellung. Besichtigung erbeten. — Bitten genau auf Firma zu achten!

Warmbrunn, Quilitz & Co.
Berlin NW. 40, Heidestrasse 55/57
Chemische u. physik. Apparate.
Grosse illustrierte Preislisten.

Vorzügl. Erwerbsquelle
für Pensionierte, Rentner, Damen ist ein **Original-Kaiser-Panorama,** das Ideal aller Anschauungsmittel, stereoplast. Urkunden, das Sehenswert. der Erde, 760 Zyklen, grösst. Archiv der Welt. An 1000 pädag. Anerkenn. 250 Filialen. Ca. 2500 M., erford. Prosp. gratis.
Hofl. **A. Fuhrmann, Berlin W,** Passage.
Lichtbilder mit Vorträgen leihweise.

Es wird höflichst gebeten, sich bei Bestellungen auf die „Unterrichtsblätter" zu beziehen.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.