Jahrgang XVI. 1910. No. 2.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer**,
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 36, erbeten.

Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen. Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

Inhalt:

Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Tagesordnung der XIX. Hauptversammlung zu Posen, Pfingsten 1910.

Montag, 16. Mai, 8 Uhr abends: Begrüßung der Teilnehmer in Mylius' Hotel, Wilhelmstraße. (Der Weg vom Bahnhof führt an dem Bureau [Königl. Akademie] vorbei.)

Dienstag, 17. Mai, 8 Uhr: Rundfahrt durch die Stadt (siehe Bemerkungen).

10 Uhr: Eröffnungssitzung im Auditorium maximum der Königlichen Akademie. Ansprachen und geschäftliche Mitteilungen. Anschließend Vorträge.

Prof. Dr. Poske-Berlin: Die humanistischen Elemente im realistischen Unterricht.

Prof. Dr. Spies-Posen: Führung durch das Akademiegebäude; mit physikalischen Demonstrationen.

Prof. Dr. Witting-Dresden: Bericht über die Tätigkeit der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. — Mathematik in den oberen Klassen der Gymnasien; mit anschließender Diskussion.

1—3 Uhr: Mittagspause.

3 Uhr: Naturwissenschaftliche Abteilung.
Prof. Dr. v. Hanstein-Berlin: Ueber die Bedeutung der Exkursionen für den naturwissenschaftlichen Unterricht; mit anschließender Diskussion.

Mathematische Abteilung.
Prof. Dr. Gebhardt-Dresden: Das Geschichtliche im mathematischen Unterricht.
Oberlehrer Brücher-Biebrich: Die Anschauung in der Algebra.

4 Uhr: Geheimer Medizinalrat Prof. Dr. Wernicke-Posen: Die Wasserversorgung der Großstädte. Anschließend: Besichtigung der städtischen Wasserwerke.

7½ Uhr: Festmahl im Hotel de Rome.
(Preis des trockenen Gedeckes 3 M. Anzug: Ueberrock.)

Mittwoch, 18. Mai, 9 Uhr: Vorträge.

Prof. Dr. Lummer-Breslau: Ueber das Sehen im Hellen und Dunklen.

Medizinalrat Prof. Dr. Busse: Ueber Schilddrüse und Nebennieren; mit Demonstrationen.

$10^3/_4$—11 Uhr: Frühstückspause.

11 Uhr: Prof. Dr. Mendelsohn-Posen: Die Perioden der Gebirgsbildung.

12 Uhr: Geschäftliche Sitzung: Kassenbericht, Wahl von Vorstandsmitgliedern, Bestimmung des Ortes der nächstjährigen Hauptversammlung. Bericht über den deutschen Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

3 Uhr: Prof. Grimsehl-Hamburg: Physikalische Unterrichtsversuche.

Dr. Jansen-Hamburg: Stabilität der Flugmaschinen.

Prof. Dr. Schülke-Königsberg: Ueber neuere Geometrie.

5 Uhr: Besichtigung der naturkundlichen Sammlungen des Kaiser-Friedrich-Museums und des Pflanzengartens des Königlichen Mariengymnasiums.

Führer: Prof. Dr. Pfuhl.

8 Uhr: Auf Einladung der städtischen Behörden: Untersuchung von Ungarweinen in den Kellereien von Goldenring (alter Markt).

Donnerstag, 19. Mai, $8^1/_2$—$9^1/_4$ Uhr: Geh. Bergrat Prof. Dr. Jentzsch: Die Geologie im Schulunterricht.

A. $9^1/_2$ Uhr: Aufbruch von der Endstation der Posener Straßenbahn am Gerberdamm aus zur geologischen Exkursion. Wanderung bis zu den Kiesgruben am Schilling (etwa 25 Minuten). Darauf Fahrt nach Golenhofen (Wagen sind gütigst zur Verfügung gestellt worden). Weg am Fort vorüber nach der Wolfsmühle (Frühstück). Dann nach Neudorf, Morasko, Suchylas, Zlotnik. Grundmoränenlandschaft, Endmoränen, Alluvium, Diluvium, Tertiär.

Führer: Geh. Bergrat Prof. Dr. Jentzsch-Berlin.

B. 10 Uhr: Aufbruch von der Königl. Akademie aus zur zoologischen Exkursion nach dem Eichwalde bei Posen.

Führer: Prof. Schulz-Posen.

Fahrt nach Golenhofen ab Bahnhof Posen 2^{35}.

A. und B. Mittagessen in Golenhofen. Sodann Besichtigung des Ansiedelungsdorfes Golenhofen unter Führung eines Herrn von der Königlichen Ansiedelungskommission. Ankunft in Posen abends 6^{50}.

(Zug nach Berlin über Kreuz geht ab um 7 Uhr, Ankunft in Berlin abends 11^{49}.)

Bemerkungen: Das Bureau befindet sich in der Königl. Akademie (Erdgeschoß) und ist geöffnet am Montag, den 16. Mai, von 12—9 Uhr; an den folgenden Tagen von $7^1/_2$—$1^1/_2$ und von $2^1/_2$—7 Uhr.

Die Teilnehmerkarte kostet 3 M und berechtigt zum Besuche aller Veranstaltungen; ferner zur Fahrt auf allen Linien der Posener Straßenbahn in der Zeit vom 16. bis zum 19. Mai einschließlich.

Zur Rundfahrt sind für die Auswärtigen von Posener Bürgern Wagen kostenlos zur Verfügung gestellt, für die Einheimischen nur, soweit der Platz reicht.

Versammlung zur Rundfahrt $7^3/_4$—8 Uhr vor dem Lehrgebäude der Königl. Akademie (vor dem Berliner Tor).

Ort der Vorträge: Königliche Akademie; etwaige Ausnahmen werden durch Aushang in der Eintrittshalle der Akademie mitgeteilt.

Für die Damen, die am Nachmittage des 18. Mai den Vorträgen nicht mehr beiwohnen wollen, ist ein Ausflug nach den Seen bei Ludwigshöhe in Aussicht genommen.

Empfehlenswerte Gasthöfe: Mylius Hotel, Wilhelmstraße 23, Fernsprecher 16. Hotel de Rome, Wilhelmsplatz 1, Fernsprecher 572. Hotel Monopol, Viktoriastraße 21, Fernsprecher 422. Hotel Deutsches Haus, St. Martinstraße 40, Fernsprecher 480. Christliches Hospiz, Vor dem Berliner Tor 18/19 (gegenüber der Akademie), Fernsprecher 2395.

1 Zimmer mit 1 Bett einschließlich Frühstück . . . . 3,25 bis 3,50 M

1 Zimmer mit 2 Betten einschließlich Frühstück . . . . 6,50 „ 7,00 „

Wie alljährlich, wird der Vereinsvorstand sich auch in diesem Jahre an die Unterrichtsverwaltungen der Staaten, in denen die Pfingstwoche nur teilweise schulfrei ist, mit der Bitte wenden, daß die Leitungen der einzelnen Anstalten zu wohlwollender Berücksichtigung der behufs Teilnahme an der Versammlung eingehenden Urlaubsgesuche angewiesen werden. Nach den bisherigen Erfahrungen darf auf die Gewährung dieser Bitte überall mit Sicherheit gerechnet werden.

Anmeldungen zur Teilnahme an der Versammlung, zu dem Festessen und zur Rundfahrt werden bis zum 8. Mai an den Unterzeichneten, Prof. Dr. Spies, erbeten.

Professor Dr. Thaer,
Vorsitzender des Vereins.

Professor Dr. Spies,
Vorsitzender des Ausschusses.

Im Anschluß an die Tagung veranstaltet die Königliche Akademie am 20. und 21. Mai einen technischen Kursus und zwar:

I. Physikalisch-technische Uebungen in der Werkstätte (Prof. Dr. Spies und Mechaniker der Akademie O. Naumann).

II. Biologisch-mikroskopischer Kursus (Prof. Dr. Pfuhl).

Diese beiden Uebungskurse gehen nebeneinander her; es kann also kein Teilnehmer beide zugleich besuchen. Zugelassen werden zu jedem Kursus bis zu acht Teilnehmern. Die Teilnahme ist unentgeltlich. Anmeldung durch das Königliche Provinzial-Schulkollegium.

Zur Posener Hauptversammlung.

Von P. Bode (Frankfurt a. M.).

Die 19. Hauptversammlung unseres Vereins naht; auf dringende Einladung einberufen nach dem Osten unseres Vaterlandes, nach der Provinzialhauptstadt Posen, dem Sitz der jungen Königl. Akademie. Ein Blick auf die in der letzten Nummer veröffentlichte Tagesordnung zeigt, welches Interesse die Versammlung in den dortigen wissenschaftlichen Kreisen erweckt hat, wie sorgsam die Vorbereitungen getroffen sind.

Nun ist es an uns Mitgliedern zu beweisen, daß auch wir an der schwierigen Kulturarbeit gegen das vordringende Polentum mit geistigen Waffen teilnehmen wollen, daß deutsche Bildung der stärkste Damm gegen nationalistische Umtriebe ist und bleiben wird. Aber nicht dieser Gesichtspunkt allein mahnt zur zahlreichen Beteiligung; auch sonst verspricht gerade diese Versammlung für die Ziele des Vereins höchst bedeutungsvoll zu werden.

Die fruchtbaren Anregungen, die die Unterrichtskommission auf dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts gegeben hat, dürfen nicht im Sande verlaufen, sie müssen in freier, persönlicher Aussprache in immer weitere Kreise gebracht werden, damit die höheren Schulen in ganz Deutschland daraus Nutzen ziehen können. Für den mathematischen Unterricht werden die Vorträge von Thieme und Witting den gewünschten Anlaß zum Meinungsaustausch geben.

Die Schwierigkeiten, die sich der Einführung des biologischen Unterrichts entgegenstellen, sind bekannt. Herr Prof. v. Hanstein hat ja noch in der letzten Nummer unserer Zeitschrift so treffend darauf hingewiesen, wie unzureichend der Hollesche Erlaß gewesen ist. Auch über diesen Punkt wird sich im Anschluß an den angekündigten Vortrag des Herrn Kollegen v. Hanstein eine fruchtbare Diskussion herbeiführen lassen.

Zu diesen so überaus wichtigen Fragen kommen noch die anderen wertvollen Vorträge und die Besichtigungen; ich erwähne nur die Vorträge von dem Rektor der Akademie, Herrn Prof. Dr. Spies, und von Herrn Prof. Dr. Lummer, die sicher viel Neues bieten. Die geplanten praktischen Uebungen sind eine Neuerung auf unserer Versammlung, die großen Beifall und Zuspruch finden wird.

So sehen wir mit guter Zuversicht einer anregenden Tagung entgegen und wünschen nur, daß der Besuch ein den mühevollen Vorbereitungen und der Wichtigkeit der Verhandlungen entsprechender sein möge. Jeder, der wirkliches Interesse an den erzieherischen Fragen der Gegenwart hat, werbe deshalb persönlich bei Fachgenossen und Freunden zur Teilnahme, damit die deutsche Warte an der Ostgrenze eine stattliche Zahl von Besuchern aus allen Gauen des deutschen Vaterlandes in ihren Mauern sieht.

Ueber den wissenschaftlichen Charakter des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen.

Von F. Pietzker (Nordhausen).

In einem längeren, in dieser Zeitschrift (Jahrgang XVI, Heft 1, S. 7) zum Abdruck gekommenen Artikel habe ich die Grenzen näher beleuchtet, die meiner Meinung nach dem wissenschaftlichen Charakter des auf den höheren Schulen zu erteilenden Unterrichts in der Mathematik durch die Rücksicht auf den allgemeinen von diesen Schulen verfolgten Bildungszweck und durch die Schranken des Fassungsvermögens der nicht besonders mathematisch beanlagten Schüler gezogen werden.

Ich hatte mir damals vorbehalten, den naturwissenschaftlichen Unterricht an unseren höheren Lehranstalten unter denselben Gesichtspunkten eingehender zu betrachten; daß ich mich zunächst auf die Mathematik beschränkt hatte, lag, wie ich kurz ausführte, an den eigenartigen Verhältnissen dieses Wissensfaches, innerhalb dessen zwischen dem Charakter der wissenschaftlichen Forschung und des mit dieser im engen Zusammenhange stehenden Hochschulunterrichts und dem des Unterrichts auf den der Allgemeinbildung dienenden höheren Lehranstalten ein erheblich größerer Abstand besteht, als auf dem Gebiete der eigentlichen Naturwissenschaften.

Das Moment, das ich in dem genannten Artikel als das eigentliche Kennzeichen der wissenschaftlichen Stoffbehandlung hingestellt hatte, die Zusammenfassung der Wissenseinzelheiten unter möglichst allgemeinen, aus der Natur der Sache selbst folgenden Gesichtspunkten, tritt in der Mathematik vermöge ihres deduktiven Charakters und der von ihr fortwährend geübten Begriffsabstraktion in der Tat in weit größerer Schärfe auf, als in der Naturwissenschaft, in der die Induktion eine so maßgebende Bedeutung besitzt. Die Bemessung des Grades, bis zu dem der Schulunterricht dieses Moment berücksichtigen kann, ist darum wesentlich schwieriger als in den eigentlich naturwissenschaftlichen Disziplinen.

Immerhin kommt ihm auch hier eine erhebliche Bedeutung zu, die allerdings für die einzelnen naturwissenschaftlichen Fächer verschieden ist; man darf sagen, daß das genannte Moment um so mehr in den Vordergrund tritt, je mehr die Stoffbehandlung sich der mathematischen Denk- und Ausdrucks-Formen bedient. Demgemäß erweist sich auch der Abstand des Hochschulunterrichts von dem auf den höheren Lehranstalten erteilten Unterricht um so größer, je mehr die mathematische Stoffbehandlung zur Geltung gelangt.

Wenn nun das mir als Ausgangspunkt dienende Kriterium des wissenschaftlichen Charakters an sich bei dem naturwissenschaftlichen Unterricht gegenüber der Mathematik mehr zurücktritt, so rücken dafür einige Momente in den Vordergrund, die ihrerseits auch wieder dem mathematischen Unterricht zwar nicht ganz fremd sind, indessen in ihm eine mehr sekundäre Rolle spielen, im übrigen aber mit dem vorerwähnten Hauptgesichtspunkt doch eng zusammenhängen.

Das erste dieser Momente betrifft die Berechtigung der allgemeinen Gesichtspunkte, unter denen der Stoff zusammenzufassen ist. Diese Berechtigung bedarf ja auf dem Gebiete der Mathematik meist gar keiner Prüfung, die Strenge der mathematischen Deduktion bringt es mit sich, daß die allgemeinen, für den Zusammenhang des Stoffes maßgebenden Begriffe ganz unmittelbar aus der Stoffbehandlung selbst herauswachsen und ihre Zulässigkeit durch diese ihre Entstehung ganz unmittelbar beweisen. Nur bei der Behandlung der Fragen, die auf dem Grenzgebiete zwischen Mathematik und Philosophie liegen, kann die Berechtigung der grundlegenden Begriffe Gegenstand des Zweifels und Meinungsstreites sein, aber das auf diesen Grundlagen errichtete Wissenschafts-System trägt seine Normen in sich selbst, darin liegt seine Stärke und auch seine Beschränkung.

In der Naturwissenschaft ist die Tendenz unverkennbar, für sie die Stärke und Sicherheit zu gewinnen, deren sich die Mathematik erfreut, daß das ganze Gebäude sich mit logischer Notwendigkeit auf einer kleinen Zahl grundlegender Prinzipien aufbaut, aber von der Durchführung dieser Tendenz sind wir ja noch himmelweit entfernt.

In der Hauptsache ist die Naturwissenschaft Erfahrungswissenschaft, die ihren Stoff und damit zugleich die allgemeinen Gesichtspunkte, unter denen dieser Stoff zusammenzufassen ist, von außen her erhält. Und das rückt bei der Naturwissenschaft eben das Moment in den Vordergrund, das bei der Mathematik fast völlig zurücktritt, nämlich die Frage nach der Zulässigkeit und der inneren Berechtigung der allgemeinen die Wissenseinzelheiten zum wissenschaftlichen System zusammenschweißenden Begriffe.

Diese Begriffe, die sich zum guten Teile mit dem Stoffe selbst von außen her als scheinbar selbstverständlich dem Geiste aufdrängen, sind eben wegen dieser anscheinenden Selbstverständlichkeit verhältnismäßig viel leichter erfaßbar, als die grundlegenden Begriffe der Mathematik, um so nötiger ist ihre Untersuchung daraufhin, ob und inwieweit sie innerlich sicher begründet sind oder nicht. Die Prüfung der grundlegenden Begriffe auf den Grad ihrer Gewißheit, die scharfe Scheidung dessen was logische Notwendigkeit, von dem, was nur hypothetische Geltung besitzt, das ist es, was dem Betriebe der Naturwissenschaften das wissenschaftliche Gepräge gibt, und zwar sowohl der naturwissenschaftlichen Forschung wie auch dem naturwissenschaftlichen Unterricht.

Und innerhalb dieses Rahmens findet ja dann auch die Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaft ihre gehörige Stelle, die Berechtigung wie die Tragweite der mathematischen Formulierung, in der die Gesetze der Naturerscheinungen auftreten, beides bedarf der sorgfältigsten Prüfung, die um so notwendiger erscheint, je mehr das mathematische Gewand, in das ein Naturgesetz sich kleidet, dazu verleitet, die Form mit der Sache zu verwechseln, die Unanfechtbarkeit, die der mathematischen Deduktion zukommt, ohne weiteres auch dem naturwissenschaftlichen Sachverhalt an sich beizumessen, der der mathematischen Behandlung ja doch selbst erst durch die Einführung gewisser durchaus nicht selbstverständlicher Voraussetzungen fähig wird. Da machen sich dann die Schwierigkeiten, die den mathematischen Begriffen an sich beiwohnen, und die Schwierigkeiten, die die Prüfung dieser Begriffe auf ihre etwaige Anwendungsfähigkeit mit sich bringt, vereinigt geltend.

Mit der Untersuchung der grundlegenden Begriffe auf das ihnen zukommende Maß von Berechtigung hängt nun aber noch ein weiteres Moment zusammen, das innerhalb der reinen Mathematik auch naturgemäß eine weit weniger bedeutsame Rolle spielt, nämlich die Rücksicht auf die Vollständigkeit des zu behandelnden Stoffes.

Zweifellos ist die Rücksicht auf solche Vollständigkeit überhaupt ein notwendiges Moment der wissenschaftlichen Behandlung überhaupt, die Beherrschung der allgemeinen Gesichtspunkte, unter denen der Stoff zusammenzufassen ist, fordert von selbst die Heranziehung aller der Einzelgebiete, die der Behandlung unter solchen Gesichtspunkten fähig sind. Und das gilt für die Mathematik so gut wie für jedes andere wissenschaftlich zu betreibende Fach. Indessen liegt trotzdem die Sache für die Mathematik doch noch etwas anders als für die Naturwissenschaft und zwar eben vermöge des verschiedenen Charakters der grundlegenden Prinzipien. Während diese in der Mathematik ihre Berechtigung durch sich selbst erweisen, bringt es ihr hypothetischer Charakter in der Naturwissenschaft ganz von selbst mit sich, daß ihre Gültigkeit durch neue Tatsachen eingeschränkt oder gar in Frage gestellt wird. Der Umfang, in dem der Stoff betrieben wird, ist also für die Entscheidung, inwieweit die für die Zusammenfassung des gesamten Tatsachenmaterials heranzuziehenden allgemeinen Gesichtspunkte zulässig sind oder nicht, von wesentlicher Bedeutung.

Dazu kommt aber noch außerdem das praktisch wichtige Moment, daß der in der Schule zu verarbeitende Stoff auf das Engste mit den Eindrücken zusammenhängt, die der moderne Mensch auf Schritt und Tritt in der ihn umgebenden Welt von selbst empfängt. Der in der Mathematik nicht zur Verarbeitung kommende Stoff bleibt größtenteils der Schule völlig fern, die Mehrzahl der Schüler ahnt kaum etwas von seiner Existenz. Aber die Fragen und Aufgaben der Naturwissenschaft drängen sich einem Jeden schon von selbst auf und sind an sich so bedeutsam und geeignet, das natürliche Interesse anzuregen, daß es manchmal kaum möglich erscheint, sie aus dem Unterricht einfach auszuschließen.

So ergibt sich auch nach dieser Seite hin für den naturwissenschaftlichen Unterricht eine wesentlich verschiedene Sachlage gegenüber dem Unterricht in der Mathematik. Zwischen der Hochschule und der für sie vorbildenden höheren Schule besteht auf dem Gebiete der Naturwissenschaften hinsichtlich des dem Unterricht zu verleihenden wissenschaftlichen Charakters ein weit geringerer Abstand als auf dem Gebiete der Mathematik. Zugleich aber ergibt sich daraus, daß die verschiedenen naturwissenschaftlichen Fächer in dieser Hinsicht nicht gleich stehen, man darf wohl sagen, daß dieser Abstand sich bei jeder einzelnen Disziplin um so größer erweisen muß, je näher sie sich mit der Mathematik berührt.

Am größten erweist sich demgemäß der erwähnte Abstand in der Physik, wo in der Tat auch der Punkt, der für die wissenschaftliche Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts entscheidend sein muß, nämlich die Zusammenfassung der Einzelerscheinungen unter allgemeinen Gesichtspunkten, für den ganzen Zuschnitt des Unterrichts von Bedeutung ist. Die Tendenz der einheitlichen Auffassung aller Naturvorgänge übt ja in unseren Tagen eine offensichtliche Herrschaft. In der Physik hat sie insbesondere die Form angenommen, daß man alles physikalische Geschehen im Lichte des Energieprinzips zu betrachten bemüht ist. Dieses Prinzip hat unfraglich etwas Einleuchtendes, womit ich übrigens nicht sagen will, daß es selbstverständlich sei, obwohl die Bereitwilligkeit, mit der die Philosophie sich vielfach zur prüfungslosen Annahme dieses Prinzips verstanden hat, den Schein solcher Selbstverständlichkeit leicht hervorrufen konnte.

Jedenfalls aber kommt der einleuchtende Charakter dem Prinzip nur in seiner allgemeinsten Fassung zu, die spezielle Form, in der es in der Physik verwandt wird, besitzt die Eigenschaft, dem natürlichen Verstande ohne weiteres plausibel zu erscheinen, in keiner Weise, für diese Form muß vielmehr durch den Unterricht selbst erst eine eingehende Begründung gegeben werden. Und da gibt es Punkte, deren Schwierigkeit zur Zeit noch nicht überwunden ist, wie z. B. das Problem des unelastischen Stoßes, über dessen Widersprüche mit dem Energieprinzip man sich nur durch eine äußerlich in die Sachlage hineingetragene Hilfsbetrachtung künstlich hinwegzuhelfen pflegt.*) Aber auch abgesehen davon finden sich sowohl in der Fassung des Prinzips wie in der Anwendung auf die physikalischen Einzelgebiete eine Reihe von Momenten, die einem etwas kritisch veranlagten Gemüte fortwährend Stoff zu allerhand Bedenken geben — solchen Gemütern begegnet man aber auch unter den Schülern gar nicht so selten.

Und dementsprechend möchte ich von dem Standpunkte aus, den ich hier vorzugsweise vertrete, die Forderung nachdrücklichst erheben, daß man mit der energetischen Betrachtung der Naturvorgänge nicht zu früh einsetzt, jedenfalls daß man sie nicht zum Ausgangspunkt nimmt, daß man mit ihnen vielmehr erst dann auf dem Plan erscheint, wenn durch eine möglichst eingehende Einzelbetrachtung, die dem jedesmaligen Vorgang aus seiner eigenen Natur heraus sein Recht zuteil werden läßt, eine gewisse Fülle von Vorstellungen geschaffen worden ist, die dann im Lichte des Energieprinzips miteinander in tieferen Zusammenhang gebracht werden. Diese, bei richtigem Betrieb des Unterrichts als Befriedigung eines ganz von selbst herausgebildeten Bedürfnisses eintretende Behandlung würde m. E. den Schluß des Physik-Unterrichts bilden müssen, der gegenwärtig eines solchen Abschlusses entbehrt, denn die in den preußischen Lehrplänen der Oberprima zugewiesene Optik stellt ja selbst nur ein einzelnes, wenn auch sehr wichtiges Gebiet dar. Diese zusammenfassende Behandlung würde ja ihrer Natur nach mechanischer Art sein, sie würde auf das Tatsachenmaterial, was in den verschiedenen Sondergebieten früher verarbeitet ist, zurückgreifen, wobei der Unterricht übrigens keineswegs bloß theoretisch zu sein brauchte, gewisse Dinge, wie z. B. die experimentelle Bestimmung der Fundamentaleinheiten, insbesondere der elektrischen Fundamentalmaße u. a. m. könnten diesem Schlußunterricht vorbehalten bleiben, während natürlich die außer dem Arbeitsbegriff auftretenden mechanischen Fundamentalbegriffe schon in einem früheren Kursus der Mechanik erledigt sein müßten.

Bei der Forderung eines so gestalteten Abschlusses für den ganzen Physik-Kursus befinde ich mich bis zu einem gewissen Grade in Uebereinstimmung mit den Meraner Vorschlägen, die in ihrem Lehrplan-Entwurf auch als abschließendes Kapitel einen „zusammenfassenden Rückblick auf die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen unter dem Gesichtspunkte der Energieverwandlung“ aufführen. Ich gehe darüber nur insofern noch hinaus, als ich sogar die eingehende Behandlung des Energiebegriffes und des mit ihnen zusammenhängenden Arbeitsbegriffes diesem Kursus-Abschluß vorbehalten möchte, natürlich ohne dagegen Protest zu erheben, daß von diesen Begriffen schon gelegentlich und nebenher an geeigneten Stellen die Rede gewesen ist. Im Gegenteil liegt eine derartige vorangehende Einzelbehandlung an den Stellen, wo sie sich ganz natürlich und ungezwungen ergibt, gerade in der Tendenz meiner Ausführungen überhaupt.

Nur die systematische, begriffliche und formelmäßige Verwertung der genannten Begriffe möchte ich möglichst spät ansetzen, diese Begriffe sind gerade vermöge ihrer allmählichen Herausbildung unter dem Einfluß der Analogie mit gewissen Verhältnissen des menschlichen Gemeinschaftslebens geeignet, zu sehr mißverständlichen, grobsinnlichen Auffassungen zu verführen, bei ihrer Verwertung im Unterricht ist darum Vorsicht geboten, es muß eine gewisse Reife und Freiheit der Auffassung vorausgesetzt werden, ebenso wie ihre Einführung auch nur auf Grund eines nicht zu dürftigen Materials erfolgen darf. Das steht ja auch im Einklang mit der tatsächlichen Entwickelung, die unsere physikalische Einsicht überhaupt im Laufe der Zeit genommen hat. Viele große und bedeutsame Fortschritte

*) S. hierüber Ztschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure. Bd. XXXXII. Heft 12, S. 337/338.

unserer Erkenntnis sind viel älteren Datums als die energetische Betrachtung, zu der sich der Mensch selbst erst hat allmählich durchringen müssen.

Als Beleg dafür, wie diese Behandlung sehr wohl des rein theoretischen Charakters entkleidet und mit einer experimentellen Ausrüstung versehen werden könnte, führte ich oben die Bestimmung der elektrischen Fundamentaleinheiten an, die ja zum Teil durch den Arbeitsbegriff miteinander verknüpft sind. Aber auch an sich ist die Bestimmung dieser Einheiten unter Verwendung des einheitlichen absoluten Maßsystems ein Kapitel, von dem sich Aehnliches sagen läßt, wie vom Energiebegriff, auch das Bedürfnis nach einheitlichen Normen für die Messung der untereinander in Beziehung stehenden Naturwirkungen ist verhältnismäßig jungen Datums, die Gewinnung der allgemeinen verständnisvollen Einsicht in den inneren Zusammenhang der Einzelvorgänge ist von der Anwendung des absoluten Maßsystems unabhängig, die Einführung dieses Systems sollte also der tatsächlichen Entwickelung der physikalischen Wissenschaft entsprechend füglich der obersten, den Abschluß bildenden Stufe des Schulunterrichts vorbehalten bleiben. Ich will dabei keineswegs verkennen, daß viele Formulierungen durch frühzeitige Einführung des absoluten Maßsystems an Einfachheit gewinnen, aber diese Einfachheit ist nur äußerlich und vielfach rein fiktiv, die dabei auftretenden „Einheiten" sind für die Schüler, wenn sie zu früh auftreten, leere Worte ohne den erforderlichen materiellen Inhalt.

Welche Schwierigkeiten außerdem bei dem Operieren mit dem Dimensionsbegriff erwachsen, dessen ja die Durchnahme des absoluten Maßsystems gar nicht entraten kann, ist allgemein bekannt, ich darf mich auf meine eigenen verschiedenen Aeußerungen hierzu anläßlich eines vor längeren Jahren z. T. in dieser Zeitschrift durchgefochtenen Meinungsstreites berufen*).

Das führt mich aber noch auf eine zweite Seite des Gegenstandes. Der physikalische Unterricht der obersten Stufe kann seiner Natur nach eines philosophischen Hauches nicht entbehren, handelt es sich ja doch um nicht weniger als um die Versuche, die der menschliche Geist immer wieder vornimmt, einen Einblick in das innerste Geschehen der Natur zu gewinnen. Bei dieser philosophischen Behandlung wird man fortwährend Anlaß haben, das zweite Moment zu betonen, das ich oben als das Kennzeichen der wissenschaftlichen Behandlung hinstellte, nämlich die kritische Unterscheidung dessen, was in den zur Erklärung der einzelnen Vorgänge aufgestellten Begriffen auf Denknotwendigkeit beruht, von dem, was nur bedingte hypothetische Gültigkeit besitzt.

Ich möchte sagen, dies Moment gibt dem Physik-Unterricht gerade gegenüber dem Mathematik-Unterricht sein besonderes Gepräge. Im Mathematik-Unterricht fehlt es ja nicht ganz; z. B. beim Eingehen auf die Grundlagen der Geometrie, das m. E. auch nur ausnahmsweise und dann auch nur auf der höchsten Stufe stattfinden sollte, kommt es zur Geltung. Aber es spielt dort doch nur eine verhältnismäßig geringe Rolle. In der Physik aber ist es von hervorragender Bedeutung, namentlich für den Lehrer, der seinen Schülern nicht bloß den Besitz eines gewissen Tatsachenmaterials, sondern eine wirkliche innere Geistesbildung vermitteln will.

*) S. Unt.-Bl. Jahrg. IV, Nr. 4, S. 66; Jahrg. V, S. 55, 78. — Verhandl. der 70. Versamml. der Gesellsch. Deutscher Naturf. u. Aerzte, (Düsseldorf) 1898, II. Teil, Erste Hälfte, S. 30. — Poskes Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, Jahrg. XII, Heft 4, S. 208.

Und bei solch philosophischer Behandlung, die übrigens zwar dem abschließenden Unterricht auf der obersten Stufe einen wesentlichen Teil seines Gepräges geben, darum aber den unteren Stufen nicht fehlen, sondern mit jeder höheren Stufe mehr zur Geltung kommen sollte, wird von besonderer Wichtigkeit der Hinweis auf die Rolle sein müssen, die bei allen physikalischen Theorien fortwährend die Analogie spielt. In der Schärfung des Gefühls für diese Seite unseres physikalischen Denkens und Schließens liegt zugleich eine Wirkung, die weit über das Gebiet des Physik-Unterrichts hinausgreift; denn faktisch bedienen wir uns ja des Analogieschlusses auch sonst im allerweitesten Umfange. Das lebendige Bewußtsein hierfür ist eines der sichersten Kennzeichen der Geistesfreiheit.

Der Forderung, den Unterricht in dieser Weise von Stufe zu Stufe immer mehr zu einer Schulung der geistigen Kraft zu gestalten, wie sie von keiner anderen Disziplin gleich gut geleistet werden kann, entsprechen nun die geltenden Lehrpläne nur unvollkommen. Und zwar liegt das daran, daß daneben immer noch eine Forderung auftaucht, die die Frage dieses Unterrichts so sehr kompliziert, nämlich die der Ausrüstung des Schülers mit einem gewissen Maß positiver Kenntnisse, ohne die ein moderner Mensch ja allerdings tatsächlich nicht bestehen kann.

Hier liegt in der Tat eine Schwierigkeit vor, die durch die geringe Zahl der dem Physik-Unterricht zugewiesenen Lehrstunden gesteigert wird. Aber sie würde auch bei einer höheren Bemessung der Unterrichtszeit nicht beseitigt sein, weil ja der physikalische Lehrstoff fortwährend eine außerordentlich große Vermehrung erfährt. Und angesichts dessen entsteht die Frage, inwieweit die Forderung, daß der Physik-Unterricht notwendig ein gewisses Wissensquantum überliefern müsse, überhaupt berechtigt ist.

Das berührt sich ja eng mit dem Gesichtspunkt, von dem meine Betrachtungen überhaupt ausgehen, wie groß das Maß von Wissenschaftlichkeit, das dem Unterricht unentbehrlich ist, zu bemessen sei. Denn, wie schon oben betont, zu einer im eigentlichen Sinne wissenschaftlichen Behandlung gehört auch die Vollständigkeit. Auf diese wird darum auch der Hochschulunterricht nicht verzichten können, die Aufgabe, den Studierenden ein Gesamtbild von dem jeweiligen Stande der Wissenschaft zu geben, wird den Hochschulen namentlich auf dem Gebiete der Physik immer verbleiben.

Aber für die höheren Lehranstalten liegt die Sache wesentlich anders. Die bloße Rücksicht auf die vorhandene Zeit muß dahin führen, daß die Forderung der Vollständigkeit mindestens sehr eingeschränkt, vielleicht auf einzelne Gebiete beschränkt, vielleicht auf allen Gebieten überhaupt fallen gelassen wird.

Die Frage, was da geschehen soll, ist in der Tat brennend. Sie ist infolgedessen auch innerhalb der Fachkreise bereits erörtert worden, insbesondere auf der XVII. Hauptversammlung des Vereins, dessen Organ die Unt.-Bl. sind, in Göttingen 1908.*) Ich habe mich an dieser — von mir selber angeregten — Diskussion damals nicht beteiligt, weil mir besonders daran lag, namentlich die Herren zum Wort kommen

*) S. Unt.-Bl. XIV, S. 117-127.

zu lassen, die auf dem Gebiete des physikalischen Unterrichts eine führende Stellung einnehmen. Deren Ansichten aber gingen, wie die Diskussion zeigte, zum Teil recht auseinander, worin man freilich vielleicht ein Zeichen dafür erblicken kann, daß die ganze Frage schwierig und für eine allseitig befriedigende Lösung noch nicht reif ist. M. E. trat in dieser Debatte noch viel zu sehr das Bestreben zutage, dem Schüler ein lückenloses, nicht zu gering bemessenes Quantum von positivem Wissen zu sichern, ein Bestreben, das auch in dem übrigens ja so sorgfältig durchdachten Lehrplan-Entwurf der Meraner Vorschläge seine Spuren deutlich zeigt. Demgegenüber bekenne ich mich für meine Person durchaus zu den Gesichtspunkten, die der damalige Referent (Bohnert-Hamburg) in seinem Referat und in den von ihm der Versammlung vorgelegten Leitsätzen zum Ausdruck brachte, natürlich ohne mich auf jede Einzelheit einzuschwören. Aber mit dem Referenten bin ich durchaus der Ansicht, daß das Fortbleiben mancher von anderer Seite für unentbehrlich gehaltener Abschnitte bei einem im übrigen sachgemäß gestalteten Unterrichtsbetrieb kein Bedenken hat, weil ein solcher Unterricht, wenn er in der richtigen Hand liegt, ganz von selbst in dem Schüler die Neigung, den Drang sowohl als auch die Fähigkeit erzeugen muß, zur Ausfüllung der von der Schule gelassenen Lücken die mannigfachen Hilfsmittel zu benutzen, die neben dem Unterricht noch vorhanden sind, z. B. das offiziell eingeführte Schullehrbuch, das — wie in der Diskussion mit Recht von mehreren Seiten hervorgehoben wurde — sich ohnehin nicht auf das gerade von dem einzelnen Lehrer in seinem Unterricht behandelte Maß von Wissensstoff beschränken darf.

Eine besondere Rolle spielte in jener Diskussion die Frage der Schülerübungen, deren Einführung in den Unterricht ja allseitig mit Recht gefordert wird, auch die Meraner Vorschläge tun dies mit allem Nachdruck. Ohne zu den Fragen Stellung zu nehmen, die in der Diskussion hierüber am meisten in den Vordergrund traten, möchte ich glauben, daß ich mich nach einer besonderen Seite hin mit dem Referenten in Einklang befinde. Ueber diese Uebungen sagte der Referent in dem letzten seiner Leitsätze, daß sie auf gewissen Stufen das Fundament des Unterrichts bilden sollten, während sie an anderen Stellen zurücktreten könnten und eher auf der Oberstufe als auf der Unterstufe eine Beschränkung vertrügen.

Er läßt in diesen Worten der sonst zum Teil ohne jede Begrenzung erhobenen Forderung der Schülerübungen eine gewisse Einschränkung zuteil werden, darin offenbart sich vielleicht ein Gefühl für eine gewisse Gefahr, die den Schülerübungen anhaftet, nämlich der, daß durch eine zu weitgehende Pflege dieser Uebungen der Sinn für die allgemeinen Gesichtspunkte, die im physikalischen Unterricht vermittelt werden sollen, leidet. Es ist sehr leicht möglich, daß über der auf die technische Seite dieser Uebungen gerichteten Aufmerksamkeit der Sinn für die allgemeinen, aus dem Unterricht zu gewinnenden Begriffe nicht ganz zu seinem Rechte kommt, ich möchte ferner sagen, daß auch noch eine weitere Gefahr in der Verführung zu der Meinung liegt, man könne die Einsicht in einen physikalischen Zusammenhang durch eine geringe Zahl von Einzelbeobachtungen, vielleicht nur eine einzige solche Beobachtung gewinnen. Im übrigen glaube ich, daß diese Gefahren sehr wohl überwunden werden können, es ist dies die Sache des Geschicks, mit dem die Schülerübungen geleitet werden, immerhin bin ich der Ansicht, daß der Gewinn für die physikalische Einsicht aus diesen Uebungen in der Hauptsache ein indirekter ist, der teils auf der ethischen Seite liegt, insofern die Schüler dadurch zu der Lehraufgabe des Physikunterrichts in ein engeres persönliches Verhältnis treten, teils sich in der Steigerung der Neigung und auch der Fähigkeit zeigt, sich über die Schule hinaus mit physikalischen Problemen zu beschäftigen.

Es ist ganz natürlich, daß die Laboratoriumsübungen in der Chemie, zu der ich mich jetzt wende, viel früher eine Rolle spielten, als in der Physik, das liegt an der verhältnismäßig viel einfacheren Art der Begriffe, mit denen die Chemie arbeitet. Die Aufgaben, die dem Laboranten dort gestellt wurden, konnten im allgemeinen einfacher sein, als in der Physik, weil die Schlußfolgerungen auf dem Gebiete der Chemie dem natürlichen Verstande wesentlich näher liegen, als in der Physik. Demgemäß traten auch die eben erwähnten, den physikalischen Schülerübungen anhaftenden Gefahren für die chemischen Laboratoriums-Uebungen in weit geringerem Grade auf.

Inzwischen hat sich der Charakter der chemischen Wissenschaft sehr geändert oder vielmehr er ist in einer stetigen Umwandlung begriffen, die von der Tendenz beherrscht wird, die chemischen Vorgänge auf physikalischem Wege verständlich zu machen. Ueber das Maß, in dem die Theorien dieser physikalischen Chemie, durch die nach Ansicht mancher Fachmänner der ganzen Disziplin überhaupt erst der Charakter einer Wissenschaft im engeren Sinne verliehen wird, für den Schulunterricht verwendbar sind, gehen die Ansichten in den Fachkreisen noch einigermaßen auseinander, man kann dies u. a. auch daran erkennen, daß die Vorbildung der Lehramtskandidaten auf diesem Gebiete nicht überall in gleichem Umfange und mit dem gleichen Nachdruck gefordert wird. Der Bericht, den die seitens der Naturforscher-Gesellschaft eingesetzte Unterrichts-Kommission der Stuttgarter Naturforscher-Versammlung erstattet hat, stellt die Forderung einer ausreichenden Bekanntschaft der Lehramtskandidaten mit der physikalischen Chemie nicht ganz mit der gleichen Entschiedenheit auf, wie es seitens der Fachlehrer selbst auf der Dresdener Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts geschehen ist. Allerdings führt der Meraner Lehrplan für den Chemie-Unterricht an den neunklassigen Realanstalten am Schlusse auch die Lehre von der elektrolytischen Dissoziation, und die Jonenlehre in ihrer Anwendung auf Elektrolyse und qualitative Analyse ausdrücklich auf.

In welchem Umfange aber und an welcher Stelle diese Theorien zur Geltung gelangen, jedenfalls wird man verlangen müssen, daß die hypothetischen Voraussetzungen dieser noch dazu in ständiger Wandlung begriffenen Theorien in ihrer Tragweite gehörig aufgezeigt werden, dann und nur dann kann die wissenschaftliche Durchbildung der Schüler von der Berücksichtigung dieser Theorien einen wirklichen Nutzen haben.

Im allgemeinen wird der Kern der wissenschaftlichen Stoffbehandlung der Chemie noch immer in der Gruppierung der chemischen Vorgänge nach gewissen dabei auftretenden Analogien liegen, dabei habe ich das Gefühl, daß die hier in Betracht kommenden Analogien vielfach nicht sowohl vom Schüler heraus-gefunden, als ihm vom Lehrer dozierend mitgeteilt werden; daß überhaupt das formelle System in der Praxis des chemischen Unterrichts häufig zu früh einsetzt, daß demgemäß auch die chemische Zeichensprache mehr als wünschenswert schon in den Anfangsgründen des Unterrichts zur Geltung gebracht wird. Ich glaube, man sollte dem Unterschied zwischen gewissen, durch den gesunden Menschenverstand an die Hand gegebenen Schlußfolgerungen, zu denen jeder einzelne chemische Vorgang Anlaß gibt, und den zusammenfassenden, nur auf der Basis eines reichen Materials aufzurichtenden Formulierungen der chemischen Wissenschaft einen größeren Einfluß einräumen und darum sich der chemischen Zeichensprache erst wesentlich später bedienen, als es allgemein zu geschehen pflegt.

Das ergibt sich geradezu aus der Auffassung, die ich hier in meinen Bemerkungen überhaupt vertrete, ich möchte es aber noch besonders durch den Hinweis auf eine Gefahr unterstützen, die eine allzufrühe Einführung der Zeichensprache mit sich bringt, ich glaube, daß dadurch die Meinung unterstützt wird, die Lehre von der atomistischen Konstitution der Materie sei eine ganz zweifellose Wahrheit. Hier sollte ein echt wissenschaftlicher Betrieb der Chemie vielmehr das Gefühl dafür schärfen, daß die Annahme einer Zusammensetzung der sichtbaren Körper aus den niemals von Jemandem beobachteten Elementarkörpern, die wir mit den an den sichtbaren Körpern beobachteten Eigenschaften ausstatten, zwar ein außerordentlich bequemes, für die übersichtliche Erfassung der Erscheinungen überaus nützliches Vorstellungsschema, aber doch eben nur ein Vorstellungsschema liefert, dem eine reale Existenz zuzuschreiben seine großen Bedenken hat. Die Notwendigkeit eines diese Seite der Sache immer wieder betonenden Betriebes wird übrigens durch die Richtung, in der sich die Entwickelung der Elektrizitätslehre und der Elektrochemie tatsächlich vollzieht, noch besonders nahe gelegt.

Ich habe hier von der Mineralogie abgesehen, die durch die geltenden Lehrpläne in eine enge unterrichtliche Verbindung mit der Chemie gesetzt ist, weil gerade unter den hier von mir in den Vordergrund gestellten Gesichtspunkten die Mineralogie vielmehr mit den biologischen Fächern auf derselben Stufe steht, mit denen sie ja früher unter dem Gesamtnamen der beschreibenden Naturwissenschaften zusammengefaßt zu werden pflegte.

Die Frage, inwieweit der Unterricht einer wissenschaftlichen Behandlung fähig ist, nimmt für diese Fächer in der Tat einen wesentlich anderen Charakter an, als für Mathematik, Physik und auch Chemie, hier wird zwischen dem Charakter der Behandlung auf der Hochschule und dem der Behandlung, wie sie in der Folge auf den obersten Stufen unserer höheren Lehranstalt geübt werden wird, wenn die Forderung der Wiedereinführung an dieser Stelle zur vollen Verwirklichung gelangt ist, kein sehr erheblicher Unterschied mehr sein. Das liegt einmal daran, daß eine Vermehrung des zu verarbeitenden Stoffes durch das Auftreten ganz neuer Gedanken und ganz neuer mit den bisherigen Erklärungsmethoden gar nicht zu fassender Erscheinungsarten wenigstens bei weitem nicht in dem Grade denkbar ist, wie in der Mathematik und der Physik, mehr noch aber daran, daß die Begriffe, mit denen man den Vorgängen auf dem Gebiete der „Naturbeschreibung" beizukommen sucht, dem natürlichen Verständnis viel näher liegen, als die weit mehr an die Abstraktion sich wendenden Begriffe der Mathematik und der Physik.

Man kann den wissenschaftlichen Charakter, dessen der Unterricht in der Naturbeschreibung fähig ist, in drei verschiedenen Richtungen finden, in der äußerlichen Systematik, die in die unermeßliche Fülle der zu betrachtenden Objekte Ordnung und Uebersichtlichkeit hineinbringt, in der Zergliederung der an diesen Objekten fortwährend sich vollziehenden Prozesse, die man als Wirkungen der allgemeinen dem Naturgeschehen zu Grunde liegenden Ursachen zu erkennen sucht und in der Untersuchung der Momente, die für die fortwährende Wandlung der ganzen aus diesen Objekten sich zusammensetzenden Welt bestimmend sind, und dadurch namentlich die allmähliche Herausbildung des gegenwärtigen Zustandes für uns begreiflich machen.

Die Begriffe, mit denen die äußerliche Systematik arbeitet, sind jedem Menschen mit offenen Augen und einiger Geistesgewandtheit zugänglich, jedenfalls wird von dieser Systematik eine Vermehrung des Begriffsschatzes weder gefordert noch herbeigeführt. Anders liegt die Sache auf den beiden letztgenannten Gebieten insofern, als hier neben den für den gesunden Menschenverstand selbstverständlichen Begriffen und Vorstellungen weitere Begriffe und Vorstellungen auftreten, die von gewissen anderen Wissenschaften, nämlich Physik und Chemie an die Hand gegeben werden. Aber diese Begriffe und Vorstellungen werden eben hier nicht erzeugt oder erweitert, sie werden einfach übernommen. Und das Schwergewicht liegt überall auch hier auf den Vorstellungen und Begriffen, die der Mensch seinen alltäglich gemachten Beobachtungen und Erfahrungen verdankt. Das gilt ganz besonders bei den Versuchen, die zur Erklärung des allmählichen Werdens des gegenwärtigen Weltzustandes gemacht worden sind und noch gemacht werden. Sie arbeiten sämtlich damit, daß sie die Wandlungen in der vor unserer Erfahrung liegenden Zeit auf Faktoren von der Art derer zurückzuführen zu suchen, deren Wirkung wir alltäglich beobachten. Das gilt für die geologischen Theorien wie für die verschiedenen Theorien über die Entwickelung auf organischem Gebiete.

Das könnte vielleicht den Eindruck machen, als ob die in Rede stehenden Wissensfächer gegenüber solchen Disziplinen wie Mathematik und Physik als minderwertig hingestellt werden sollten. Aber die Seite der Sache, die eine solche Auffassung vielleicht begünstigen könnte, gibt den beschreibenden Naturwissenschaften nach anderer Richtung hin wieder ein besonderes Uebergewicht. Gerade weil sie vorzugsweise mit Begriffen arbeiten, die dem natürlichen Denken besonders nahe liegen, treten sie in eine engere Beziehung zu der ganzen Weltanschauung, der ganzen sittlichen Anschauungsweise des einzelnen Menschen, sie berühren sich mit dem persönlichen Verhältnis, in dem der Einzelne zu der ganzen ihn umgebenden Welt steht. Und das gibt ihnen ihre besondere Bedeutung, die der Forderung ihrer Wiedereinführung in die oberen Klassen eine so große Berechtigung und eine so zwingende Gewalt verlieh.

Durch die Einfachheit der Begriffe, mit denen die Naturbeschreibung arbeitet, werden ja auch die Schwierigkeiten, die bei ihrer Anwendung auf die einzelnen Probleme und Fragen auftreten, nicht behoben. Und diese Schwierigkeiten sind eben darum noch besonders groß, weil dabei die ganze Denkrichtung und Anschauung des Einzelnen in Frage kommt. Da gilt es den Geist zu der Objektivität zu erziehen, die sich durch vorgefaßte Meinungen und Lieblingsideen die ruhige Würdigung der tatsächlichen Verhältnisse nicht beeinträchtigen läßt, da gilt es, sich den Mut der Wahrheit anzueignen und fortwährend zu betätigen.

Und diese Aufgabe, die der Beschäftigung mit den biologischen (und auch den ja vielfach damit zusammenhängenden geologischen) Fragen ihre ganz besondere ethische Bedeutung verleiht, erwächst auch der Schule, in der die genannten Lehrfächer gerade auch aus diesem Grunde den ihnen lange vorenthaltenen Platz mit Recht beanspruchen.

Es ist auch sehr wünschenswert, daß die Erziehung zu solch objektiver Betrachtung der Veränderungen in der organischen Welt schon auf der Schule erfolgt, denn wie groß die Gefahr ist, vorgefaßten Meinungen und willkürlichen Gesichtspunkten zu liebe den Tatsachen Gewalt anzutun, das lehrt nicht nur ein Blick auf die so umfangreiche einschlägige, z. T. inhaltlich sehr anfechtbare populäre Literatur, sondern auch der Charakter mancher zum Teil sogar sehr verbreiteter Lehrbücher, in denen gelegentlich auch direkte tatsächliche Unrichtigkeiten unterlaufen.

Allerdings erklärt sich dieser Umstand auch durch eine an sich in gewissem Grade berechtigte Erscheinung, nämlich die Reaktion gegen die früher übliche öde und unfruchtbare Stoffbehandlung, in der die formelle Systematik und die Morphologie den Ton angaben. Daß diese Behandlungsart, die dem Kredit der beschreibenden Naturwissenschaften als geistbildender Fächer viel Eintrag getan hat, jetzt nicht mehr im Vordergrunde steht, ist gewiß mit Freuden zu begrüßen, freilich besteht auf manchen Seiten und gerade unter den Fachgelehrten selber die Befürchtung, daß man zurzeit vielfach geneigt ist, in das entgegengesetzte Extrem zu verfallen und die doch ganz unentbehrliche systematische und morphologische Grundlage der biologischen Naturbetrachtung allzusehr zu vernachlässigen.

Aber daß das biologische Moment zurzeit an erster Stelle steht, wie es sich ja auch schon in dem mehr und mehr eingebürgerten Namen anstelle der alten Bezeichnung kundtut, das kann man nur mit Freude begrüßen, auch im Interesse des dem naturwissenschaftlichen Unterricht zu erhaltenden wissenschaftlichen Gepräges. Alle Gesichtspunkte, von denen die Stoffbetrachtung zu erfolgen hat, sollen ja doch aus der Natur des Stoffes selbst heraus erwachsen und in der Natur des Stoffes ihre Berechtigung finden. Und da wird gerade die Betrachtung der organischen Natur im Gegensatz zu Physik und Chemie dem Gesichtspunkt eine entscheidende Bedeutung zugestehen müssen, daß es sich bei ihr um Individuen handelt.

In diesem Umstande liegt ja auch die Anziehungskraft, die die Beschäftigung mit der lebendigen Natur auf jedes unverbildete Gemüt ganz von selbst ausübt, und daran muß auch der Unterricht anknüpfen, der eben so zu betreiben ist, daß er die natürliche Freude an der Betrachtung des überall uns umflutenden Lebens in der Natur nicht ertötet, sondern steigert und vertieft, letzteres auch namentlich durch Anregung des Nachdenkens über die Gesetze, die in der ewigen Wandlung dieses Lebens zur Wirkung kommen.

Eine tiefere Einsicht in diese Gesetze ist ja natürlich nur dann möglich, wenn das Leben der Individuen auf die Funktionen ihrer einzelnen Organe zurückgeführt und aus diesen Einzelheiten heraus begriffen wird, die biologische Forschung kann darum ohne tatsächliche Zergliederung einzelner Versuchsindividuen gar nicht auskommen. Aber der biologische Unterricht wird solche Zergliederungen wenigstens auf das äußerste Maß einschränken müssen, wenn er nicht Gefahr laufen will, die verständnisvolle Freude an der lebendigen Natur, die doch die Grundlage aller von dem biologischen Unterricht zu erwartenden Bildungswirkung ist, zu beeinträchtigen oder zu untergraben.

Ich möchte das namentlich angesichts der Frage der biologischen Schülerübungen betonen. Die Gründe, die für die Einrichtung solcher Uebungen sprechen, sind ja natürlich im wesentlichen dieselben, die für physikalische und chemische Schülerübungen maßgebend sind, das Bedürfnis, den Schüler in ein persönliches Verhältnis zum Unterrichtsstoff zu setzen, und in ihm die Lust an selbständiger weiterer Beschäftigung mit diesem Stoff über die Zeit der Schule hinaus zu erzeugen.

Im einzelnen aber muß der Charakter dieser Uebungen sich doch dem Geiste anpassen, der in der betreffenden Disziplin lebendig ist. Und da scheint mir auf dem biologischen Gebiete die Sache eben dadurch ein besonderes Gesicht zu gewinnen, daß es sich da um Individuen handelt, nicht um totes Material. Ich möchte mich nicht mit der Praxis befreunden, die in der anatomischen Zergliederung und Präparierung eine Aufgabe des allgemein bildenden biologischen Unterrichts erblickt, solche Uebungen sollten m. E. der spezifischen Fachbildung vorbehalten bleiben, die die Hochschule gewährt. Daß sie wenigstens nicht für alle Schüler geeignet sind, wird ja auch von solchen Fachlehrern zugegeben, die sie im übrigen befürworten. Diese Uebungen würden bei solchen Schülern die Freude an der Natur ertöten, bei manchen anderen sie, wie ich glaube, wenigstens beeinträchtigen und die ganze Stellungnahme zur Natur verschieben. Darum, meine ich, die biologischen Schülerübungen sollten sich in der Hauptsache an das ungeteilte lebende Objekt halten, d. h. sie sollten vorzugsweise beobachtender Natur sein. Dabei würden auch Beobachtungen zu ihrem Rechte kommen, die sich auf die Wirkungen der physikalischen und chemischen Gesetze in der organischen Natur beziehen, solche könnten namentlich bei botanischen Sachverhältnissen angestellt werden, auf botanischem wie auf zoologischem Gebiete würden aber vor allem die Lebensgewohnheiten geeigneter Individuen zum Gegenstand der Beobachtung und auch der verständnisvollen Pflege zu machen sein, ganz besonders auch hinsichtlich der gegenseitigen Beziehungen zwischen Tierwelt und Pflanzenwelt. Ich könnte mir da mancherlei hübsche und interessante Aufgaben denken, die auch noch einen gewissen pädagogischen Wert dadurch erhalten würden, daß solche Beobachtung und solche Pflege sich meist auf einen längeren Zeitraum erstrecken und dadurch den jugendlichen Geist auch in einer sehr mit Freude zu begrüßenden Weise zur Stetigkeit, zur planmäßigen Verfolgung eines einmal ins Auge gefaßten Zieles erziehen würde.

Damit wäre zugleich eine klare Scheidung zwischen der Aufgabe des Hochschulunterrichts und der des Unterrichts an den höheren Lehranstalten auf dem Gebiete der praktischen Uebungen gegeben. Die eben von mir für den letzten Unterricht abgelehnten anatomischen Uebungen werden auf der Hochschule nicht nur unerläßlich, sondern auch vermöge des Umstandes, daß dazu nur reifere Persönlichkeiten mit ausgeprägter

Neigung und Anlage heranzuziehen sein würden, ungefährlich sein, die Bedenken, daß dadurch die verständnisvolle Freude an der Natur leiden könnte, verlieren dort ihr Gewicht.

Im übrigen aber lehrt ein flüchtiger Blick auf die Fülle der Aufgaben, die der biologische Unterricht an den höheren Schulen zu übernehmen hat, daß von irgendwelcher systematischer Selbständigkeit grundsätzlich, nicht nur im ganzen, sondern auch auf den Einzelgebieten abgesehen werden muß. Die Erzielung eines umfassenden Gesamtüberblicks über das ganze Gebiet wird ganz unvermeidlich dem Hochschulunterricht vorbehalten bleiben müssen, die höhere für die Hochschule vorbildende Lehranstalt wird sich unter allen Umständen mit einer Stoffauswahl begnügen müssen, die natürlich in sehr verschiedener Weise möglich ist, dabei sollte dem unterrichtenden Lehrer eine weitgehende Freiheit gewährt werden.

Ein Unterricht, der in gehöriger Weise sowohl nach dem Umfange des von ihm verarbeiteten Stoffes wie nach der Tragweite der in ihm zur Geltung gebrachten Gesichtspunkte der Fassungskraft der Schüler Rechnung trägt, aber eben auch nach Maßgabe des sich von Stufe zu Stufe steigernden geistigen Vermögens hinsichtlich seines Umfangs wie hinsichtlich der Tiefe und Allgemeinheit der von ihm verwerteten Begriffe fortwährend aufsteigt, wird vor allem auch der Gefahr entgehen, daß er auf die Mitteilung eines gewissen gedächtnismäßig aufzunehmenden Quantums von Einzelkenntnissen hinausläuft. Leider spielt das Bestreben, den Schülern nur möglichst viel von solchen Einzelkenntnissen beizubringen, zurzeit noch eine viel zu große Rolle, zum Teil unter dem Einfluß des Zuschnitts, den die Praxis der Reifeprüfungen tatsächlich aufweist. Prüfen ist ja in der Tat eine besondere Kunst, nämlich seine Prüfung so einrichten, daß man von dem geistigen Niveau des Examinanden auch wirklich ein Bild erhält, viel bequemer und darum auch viel beliebter ist das Abfragen von Wissenseinzelheiten, die gedächtnismäßig eingepaukt werden können. Dabei will ich gar nicht behaupten, daß das ein rein mechanisches Einlernen sein müsse, die Einzelerkenntnis als solche kann sehr wohl für sich begriffen und doch insofern recht wertlos sein, als sie eben eine Einzelerkenntnis geblieben ist.

Und gerade darauf, daß alle Einzelerkenntnisse zu einem lebendigen Ganzen verschmolzen werden, das in gewissem Sinne zu einem Teile des eigenen Selbst wird, darauf muß der ganze Unterricht abzielen, das ist das eigentlich bildende Moment, insofern stellt der wissenschaftliche Charakter des Unterrichts die Vollendung, die Krönung der Bildungsarbeit dar, die von der Schule geleistet wird.

Und hierfür kommt es eben weit weniger auf das „Was“ und das „Wieviel“, als auf das „Wie“ an. Der richtig betriebene Unterricht muß eben darin seine Wirkung zeigen, daß er in dem Schüler sowohl das Bedürfnis, als auch die Fähigkeit erzeugt, den auf der Schule empfangenen Anregungen weiter nachzugehen, alle Anknüpfungspunkte, die sich ihm für die Erweiterung der während seiner Schulzeit empfangenen Bildung darbieten, aufzufinden und auszunutzen.

Weit wichtiger hierfür, als der Stoff, ist dabei die Persönlichkeit des Lehrers, der durch sein eigenes lebendiges Beispiel zeigen muß, was bei der Beschäftigung mit dem von ihm im Unterricht behandelten Stoff für die ganze Persönlichkeit herauskommt. Ich habe mich über die Bedeutung der Lehrerpersönlichkeit gerade auch im exaktwissenschaftlichen Unterricht schon einmal in diesen Blättern ausgesprochen*), ich darf wohl im allgemeinen auf meine damaligen Ausführungen verweisen. Nur das eine möchte ich in dem Zusammenhange meiner gegenwärtigen Auseinandersetzungen auch an dieser Stelle betonen: der Lehrer, der durch sein ganzes Wesen unmittelbar anschaulich zeigt, daß ihm die Beschäftigung mit dem Spezialgebiet seiner Unterrichtsfächer die Empfänglichkeit für den Reichtum und die Vielgestaltigkeit des umgebenden Lebens, die eigene Menschlichkeit nicht verkümmert, daß sie vielmehr ihm die Kraft und die Freiheit des Geistes gesteigert, seinen ganzen Persönlichkeitswert gehoben hat, ein solcher Lehrer wird ganz von selbst durch sein lebendiges Vorbild die im Schüler schlummernden Geisteskräfte zu eigener fruchtbarer Betätigung wachrufen. Und wenn ihm dies gelungen ist, dann wird er es ruhig ertragen können, daß das durch seine Lehrstunden den Schülern vermittelte positive Wissen vielleicht hier und da in den Augen mancher Fachgenossen Lücken aufweist, er wird trotzdem glauben dürfen, daß er an der Erfüllung der von seinen eigenen Lehrfächern zu lösenden besonderen Bildungsaufgabe, wie an der dem exaktwissenschaftlichen Unterricht auch zu seinem Teile obliegenden allgemeinen Aufgabe der Erziehung zu freier charaktervoller Menschlichkeit in ersprießlicher Weise mitgearbeitet hat.

Eine kubische Ellipse im Unterricht.

Von C. Hoffmann (Schorndorf).

1.

Die kubischen Raumkurven, die als Schnittlinien zweier Flächen zweiter Ordnung, die eine Gerade gemeinsam haben, erzeugt werden können, dürften im Unterricht selten berücksichtigt werden. Am zugänglichsten sind sie hier der deskriptiven Behandlung, und wo darstellende Geometrie zu den Unterrichtsfächern zählt, wird man diese Linien gelegentlich als teilweisen Schnitt zweier Kegel oder eines Kegels und eines Zylinders zweiter Ordnung zeichnen lassen. Wird mit dem Unterricht in darstellender Geometrie die hier so naheliegende Einführung in die projektive Geometrie verbunden, so kann man ohne zu große Schwierigkeit einige geometrische Eigenschaften dieser Kurven ableiten**). Die üblichen Methoden zum Studium dieser Gebilde liegen aber außerhalb des Rahmens der Mittelschulmathematik.

Doch kann man einiges über die Natur dieser Linien auch im Unterricht der analytischen Geometrie, wo solche des Raumes eingeführt ist (wie z. B. an den württembergischen Oberrealschulen), aus den Projektionen derselben ergründen, wenn man die Lage der erzeugenden Flächen zum Koordinatensystem passend wählt, um einfache Gleichungen zu erhalten. Für Schüler, die in die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung eingeweiht sind, lassen sich einige Aufgaben für dieses Gebiet anschließen. so daß man eine Gruppe

---

*) S. Unt.-Bl. XI, S. 45.

**) Vgl. etwa Böklen, Die Methode des Unterrichts in der projektiven Geometrie an der Oberrealschule. Reutlingen 1894, Progr. 598. — Doch pflegte dieser hervorragende Mathematiker in seinem Unterricht, den ich selbst genossen habe, sich meist mit dem Zeichnenlassen der Kurven zufrieden zu geben.

zusammengehöriger Aufgaben erhält, die dadurch das Interesse des Schülers fesselt.

Im folgenden wird gezeigt, wie insbesondere die auf einem Kreiszylinder verlaufende kubische Ellipse sich derart ausnützen läßt und zu Aufgaben führt, die die Gebiete der analytischen Geometrie, der darstellenden Geometrie und der höheren Analysis verknüpfen. Ich füge hinzu, daß mir nicht bekannt ist, ob diese Linie schon von anderer Seite auf diese Art behandelt worden ist. Sollte dies der Fall sein, so bietet die vorliegende, jedenfalls unabhängige Behandlung doch vielleicht einiges, was in dieser Zusammenstellung neu und dem Unterricht förderlich sein mag; insbesondere sei auf die elementaren Konstruktionen der Projektionskurven dritter Ordnung und ihrer Tangenten hingewiesen.

2. Die Gleichungen.

Die kubische Ellipse Γ soll durch Schnitt eines senkrechten Kreiszylinders mit einem schiefen Kreiskegel erzeugt werden, die eine Erzeugende gemein haben. Der Kreiszylinder C vom Grundkreisradius r werde derart gelegt, daß er die yz-Ebene längs der z-Achse berührt; ihm kommt somit die Gleichung

$$C \equiv (x-r)^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{1}$$

zu. Der Kegel K soll seine Spitze im Ursprung und als Leitkurve einen Kreis haben, der parallel zur xy-Ebene verläuft und die xz-Ebene in einem Punkt der z-Achse berührt; dann wird dieser Kreis durch die Gleichungen

$$z = c, \quad x^2 + (y - c \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 - c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$$

dargestellt, wobei α den Winkel zwischen der z-Achse und dem Ursprungstrahl des Kreismittelpunktes bezeichnet. Die Gleichung des Kegels wird daher

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2\,yz \operatorname{tg} \alpha = 0; \tag{2}$$

die simultanen Gleichungen $C = 0$ und $K = 0$*) stellen somit die kubische Ellipse Γ dar. Diese Kurve geht durch den Ursprung, d. i. die Kegelspitze hindurch, verläuft im $(+x, +y, +z)$- und $(+x, -y, -z)$-Oktanten und zwar je ins Unendliche, wobei die Gerade $y = 0$, $x - 2r = 0$ Asymptote ist.

Bezeichnet φ den Winkel, den eine durch die Zylinderachse $y = 0$, $x - r = 0$ gelegte Ebene mit der xz-Ebene bildet, so erhält man aus (1) und (2) leicht die Parametergleichungen;

$$x = r(1 + \cos\varphi), \quad y = r \sin\varphi, \quad z = r \cot\alpha \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}; \tag{3}$$

$\varphi = 0$ bezw. $= 2\pi$ gibt den unendlich fernen Punkt $(2r, 0, \pm\infty)$, $\varphi = \pi$ den Ursprung bezw. den Halbierungspunkt von Γ. Aus (3) kommt für die Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z) von Γ:

$$\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = -\frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\alpha \frac{(\zeta - z)\sin^2\varphi}{1 + \cos\varphi}; \tag{4}$$

für $\varphi = \pi$ erhält man aus (4) die Gleichungen $\xi = 0$ wegen $\lim\limits_{\varphi=\pi} \dfrac{\sin^3\varphi}{1 + \cos\varphi} = \dfrac{0}{0} = 0$ und $\eta = 2\zeta \operatorname{tg}\alpha$ wegen $\lim\limits_{\varphi=\pi} \dfrac{\sin^2\varphi}{1 + \cos\varphi} = \dfrac{0}{0} = 2$, d. h. die Tangente von Γ im Ursprung ist die Spurgerade des Kegels K in der yz-Ebene. Die Elimination von x, y, z, φ aus (3) und (4) würde zur Gleichung der Tangentenfläche führen, die bekanntlich 4. Ordnung ist; doch sei dies wegen der Schwierigkeit der Rechnung hier unterdrückt.

*) Man kann hier zur Vereinfachung $\operatorname{tg}\alpha = 1$, also $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ setzen.

3. Darstellend geometrische Behandlung.

Man erhält (s. Fig. 1) Punkte für die Durchdringungskurve Γ von C und K am besten, indem man Hilfsebenen durch die gemeinsame Erzeugende, die zur Horizontalebene senkrecht gelegte z-Achse, verwendet, wie es in der Figur für einige Punkte geschehen ist. Insbesondere kann man auch leicht die Punkte erhalten, in denen Aufriß und Seitenriß von Γ die Umrisse von C und K berühren. Man kann aber auch Parallelebenen zur Horizontalebene verwenden, die beide Flächen in Kreisen schneiden; von dieser Konstruktion, die an sich etwas umständlicher ist, wird unter 4 und 5 Gebrauch gemacht werden, in der Zeichnung ist sie für den Punkt P durchgeführt. Da die Tangente an Γ in einem Punkt P die Schnittlinie der Tangentialebenen von C und K längs der durch P gehenden Erzeugenden ist, die Horizontalspuren dieser Ebenen aber die Spurkreise der Flächen berühren, so kann man die Tangente in einfacher Weise einzeichnen. Die Figur weist die Tangente in P auf; die zugehörige Konstruktion ist strichpunktiert gezeichnet.

$\alpha = 30^0$.

$r = 2{,}5$ cm.

4. Die xz-Projektion.

Die xy-Projektion Γ_z von Γ ist selbstverständlich der Grundkreis des Zylinders C und bietet daher kein Interesse. Die Gleichung der xz-Projektion Γ_y erhält man durch Elimination von y aus (1) und (2), und zwar nach Absonderung des Faktors $x = 0$ in der Form

$$\Gamma_y \equiv (2r - x) z^2 \operatorname{tg}^2\alpha - r^2 x = 0. \tag{5}$$

Γ_y verläuft zwischen den Parallelen $x = 0$ und $x - 2r = 0$ und ist 3. Ordnung; als Richtungsfaktor der Tangente erhält man wegen $z = r\cot\alpha \sqrt{\dfrac{x}{2r - x}}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r^2 \cot\alpha}{\sqrt{x(2r - x)^3}}. \tag{6}$$

Zur Bestimmung der beiden im Endlichen gelegenen Wendepunkte hat man die Relation:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{r^2 \cot\alpha\,(2x - r)}{\sqrt{x^3 (2r - x)^5}} = 0; \tag{7}$$

somit folgt aus (7) für die Koordinaten der Wendepunkte $x = \dfrac{r}{2}$, $z = \pm \dfrac{r}{3}\sqrt{3} \cdot \cot\alpha$, und für die Wendetangenten wird nach (6) $\dfrac{dz}{dx} = \pm \dfrac{4}{9}\sqrt{3} \cdot \cot\alpha$. Für den Krümmungsradius ϱ kommt:

$$\varrho = \pm \frac{[x(2r - x)^3 - r^4 \cot^2\alpha]^{\frac{3}{2}}}{r^2 \cot\alpha\,(2r - x)^3}; \tag{8}$$

dies gibt für den Scheitel $(0,0)$: $\varrho = \dfrac{1}{8} r \cot^2\alpha$, was leicht zu konstruieren ist, so daß man den Verlauf der Kurve leicht zeichnen kann.

Bezeichnet man die Fläche von Γ_y vom Ursprung bis zur Abszisse x mit F_x, so erhält man:

$$F_x = r\cot\alpha \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = r\cot\alpha \cdot \left[\frac{r\pi}{2} - \sqrt{2rx - x^2} + r \cdot \arcsin\frac{x - r}{r}\right]; \tag{9}$$

hieraus folgt im besonderen $F_r = r^2 \cot\alpha \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$, $F_{2r} = r^2 \pi \cdot \cot\alpha$, d. h. die Fläche von Γ_y zwischen Symmetrielinie und Asymptote ist das

$\cot\alpha$-fache des Grundkreises von C. — Dreht man Γ_y um die x-Achse, so hat der erzeugte Rotationskörper das Volumen

$$\begin{aligned} V_x &= r^2\pi\cot^2\alpha\int\limits_0^x \frac{x\,dx}{2r-x} \\ &= -r^2\pi\cot^2\alpha\cdot\left[x+2r\,\mathrm{Lg}\,\frac{2r-x}{2r}\right]; \end{aligned} \tag{10}$$

um die Scheiteltangente erzeugten Körpers, so liefert die Guldinsche Regel hierfür:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2F_{2r}\cdot 2\pi(2r-\xi) = 2r^3\pi^2\cot\alpha, \\ V_2 &= 2F_{2r}\cdot 2\pi\xi = 6r^3\pi^2\cot\alpha. \end{aligned} \tag{12}$$

Da $2r^3\pi^2$ das Volumen desjenigen Wulstes ist, den der Grundkreis von C bei der Rotation um eine seiner Tangenten erzeugt, so lassen sich die Formeln (12) leicht in Worte kleiden.

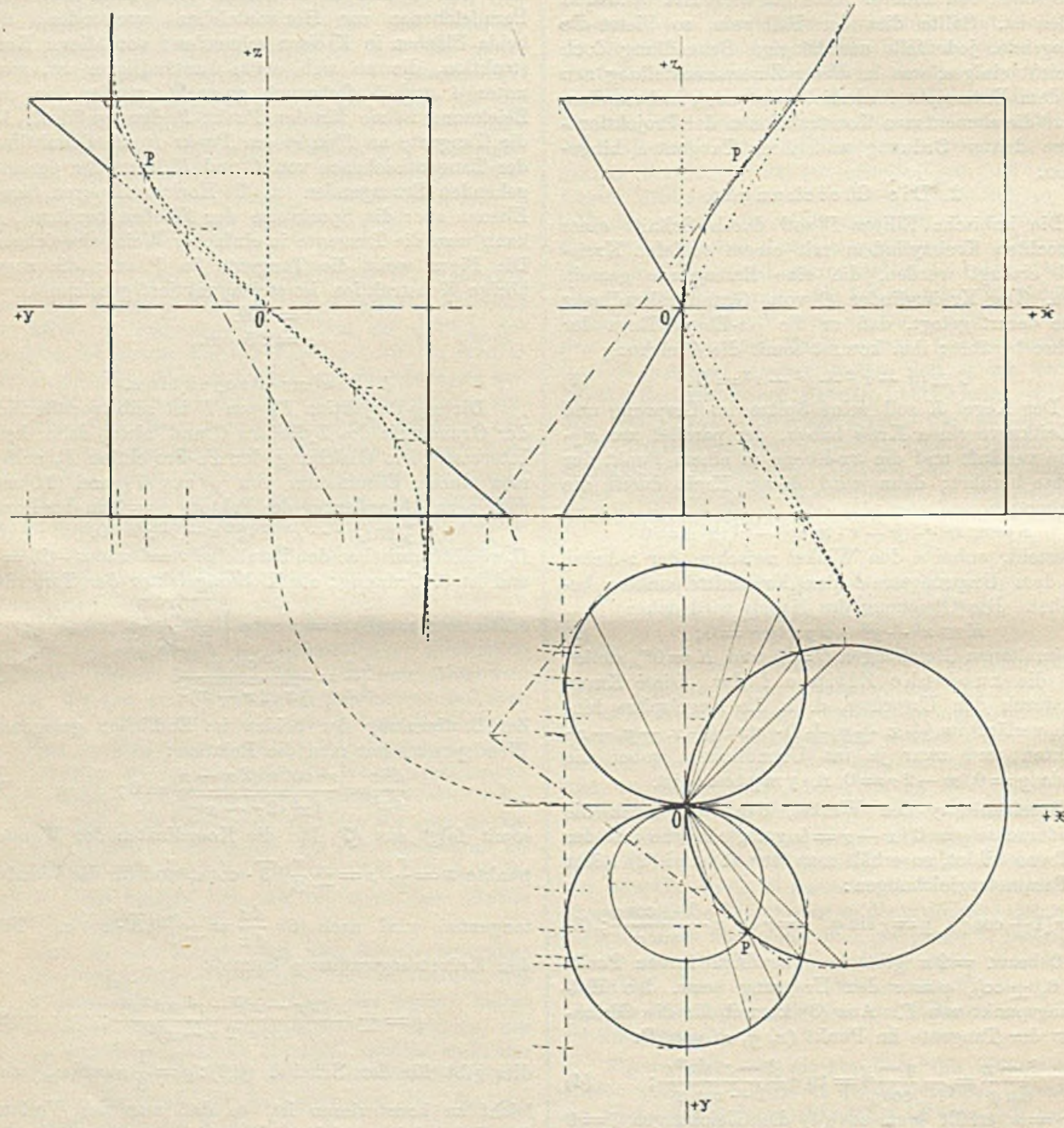


Fig. 1.

aus (10) resultiert

$$V_r = r^3\pi\cot^2\alpha\,(2\,\mathrm{Lg}\,2-1) = \sim 0{,}386\,r^3\pi\cot^2\alpha,$$

während $V_{2r} = \infty$. Für die Abszisse ξ des Schwerpunktes von F_{2r} bekommt man

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{r\pi}\int\limits_0^{2r}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} \\ &= \frac{1}{r\pi}\cdot\left[-\frac{x+3r}{2}\sqrt{2rx-x^2}+\frac{3}{2}r^2\arcsin\frac{x-r}{r}\right]_0^{2r} = \frac{3}{2}r; \end{aligned} \tag{11}$$

bezeichnet nun V_1 das Volumen des bei der Rotation um die Asymptote, V_2 dasjenige des bei der Rotation

Man kann durch Kombination der Konstruktionen unter 3 in Grund- und Aufrißebene eine punktweise Konstruktion von Γ_y mit Zirkel und Lineal herleiten. Es sei (Fig. 2) ein senkrechtes Achsenkreuz xOz gegeben, auf Ox über $OA = 2r$ als Durchmesser der Kreis und die Gerade OB, so daß $\sphericalangle\, zOB = \alpha$. Beschreibt man um einen beliebigen Punkt C auf Oz den Kreis durch O, der den Kreis über OA in D schneidet, zieht $CE // OA$ (E auf Kreis C), $EF // OC$ (F auf OB), $DP // Oz$, $FP // Ox$, so ist der geometrische Ort von P die Kurve Γ_y. Der Schnittpunkt B des Kreises über OA mit

OB gehört ebenfalls der Kurve an. Die Richtigkeit der Behauptung folgt sowohl aus dem Vergleich mit der deskriptiven Konstruktion, als auch unabhängig durch Elimination von $OC = \varrho$ aus den Gleichungen $FP = z - \varrho \cot \alpha = 0$ und $DP = x - \dfrac{2 r \varrho^2}{r^2 + \varrho^2} = 0$, die auf (5) zurückführt. — Auch eine elementare Konstruktion der Tangente in einem Punkt P von Γ_y läßt sich aus 3 gewinnen, indem man sich eines festen Hilfskreises um einen beliebigen Punkt M von Oz, der durch O hindurchgeht, bedient; man ziehe noch $MN // Ox$ (N auf diesem Kreise), $NQ // Oz$ (Q auf OB) und $QR // Ox$. Um jetzt die Tangente in P zu erhalten, ziehe man OD bis G auf dem Kreis um M, in G an diesen Kreis und in D an den Kreis über OA die Tangenten (die zweite geht durch C hindurch), die sich in H treffen, ziehe $HJ // Oz$ (J auf QR), so ist JP die Tangente.

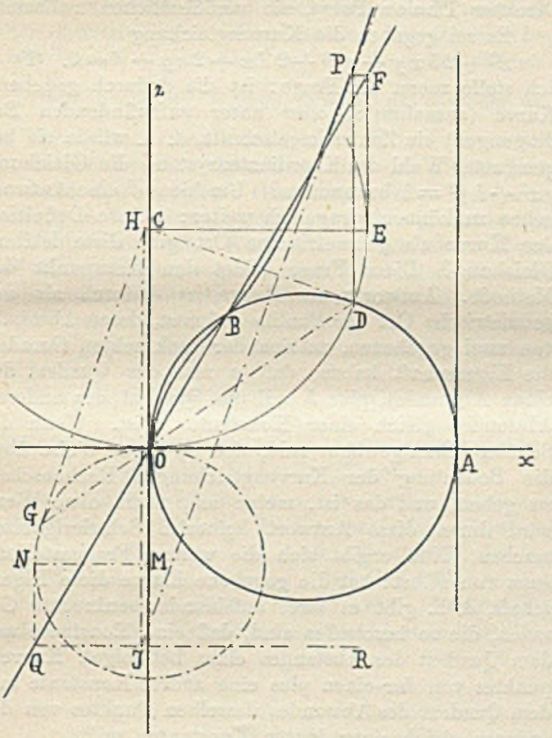


Fig. 2.

5. Die yz-Projektion.

Die Gleichung der Projektion Γ_x von Γ auf die yz-Ebene erhält man durch Elimination von x aus (1) und (2) nach Absonderung des Faktors $y = 0$ in der Form:

$$\Gamma_x \equiv y\,(r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) - 2 r^2 z \operatorname{tg} \alpha = 0. \tag{13}$$

Demnach ist auch Γ_x eine Kurve 3. Ordnung, die im ersten und dritten Quadranten verläuft; aus

$$z = r \cot \alpha \, \frac{r \pm \sqrt{r^2 - y^2}}{y}$$

folgt, daß sie zwischen den Geraden $y - r = 0$ und $y + r = 0$ liegt und diese bezw. im Punkt $y = \pm r$, $z = \pm r \cot \alpha$ berührt; ferner ergibt sich hieraus, daß die Halbierungspunkte der zur Asymptote $y = 0$ parallelen Sehnen auf der gleichseitigen Hyperbel der Gleichung $yz = r^2 \cot \alpha$ liegen. Durch Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= 2 r^2 \operatorname{tg} \alpha \, \frac{r^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -4 r^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \, \frac{z\,(3 r^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}; \end{aligned} \tag{14}$$

hieraus resultiert, daß (0,0), $\left(\pm \frac{r}{2}\sqrt{3}, \pm r \cot \alpha \cdot \sqrt{3}\right)$ die drei reellen Wendepunkte von Γ_x sind. Für den Krümmungsradius ϱ kommt:

$$\varrho = \pm \frac{\left[(r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^4 + 4 r^4 \operatorname{tg}^2 \alpha \,(r^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{4 r^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot z\,(3 r^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)\,(r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^3};$$

für den Punkt $y = r$, $z = r \cot \alpha$ gibt dies $\varrho = r \cot^2 \alpha$, was leicht zu konstruieren ist. Da man für die Wendetangenten aus (14) die Richtungsfaktoren $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2} \cot \alpha$ bezw. $= -4 \cot \alpha$ erhält, so läßt sich die Kurve mit Hilfe der drei Wendetangenten, der Asymptote und den Krümmungsradien der beiden äußersten Punkte in ihrem Verlauf leicht festlegen.

Für die Fläche F_z zwischen Γ_x und der Asymptote bis zur z-Koordinate ergibt sich

$$F_z = 2 r^2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^z \frac{z\,dz}{r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = r^2 \cot \alpha \cdot \operatorname{Lg} \frac{r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{r^2}, \tag{15}$$

für die Fläche $F_{r \cot \alpha}$ bis zum höchsten Punkt gegen die z-Achse liefert (15) den Wert

$$F_{r \cot \alpha} = r^2 \cot \alpha \cdot \operatorname{Lg} 2 = \sim 0{,}693\, r^2 \cot \alpha,$$

d. h. diese Fläche ist das Lg 2-fache des den zugehörigen Kurvenbogen einschließenden Rechtecks der Endpunktskoordinaten.

Auch für Γ_x kann man aus der darstellend-geometrischen Konstruktion eine unmittelbare punktweise Konstruktion mit Lineal und Zirkel herleiten. Ist (Fig. 3) das rechtwinklige Achsenkreuz yOz, die Gerade OB mit $\angle zOB = \alpha$ und über $OA = 2r$ auf Oz der Kreis gegeben, so beschreibe man um einen beliebigen Punkt C auf Oy mit CO den Kreis, der den gegebenen in D treffe; hierauf ziehe man $CE // Oz$ (E auf OB), $EP // Oy$, $DP // Oz$, so ist P ein Punkt von Γ_x.

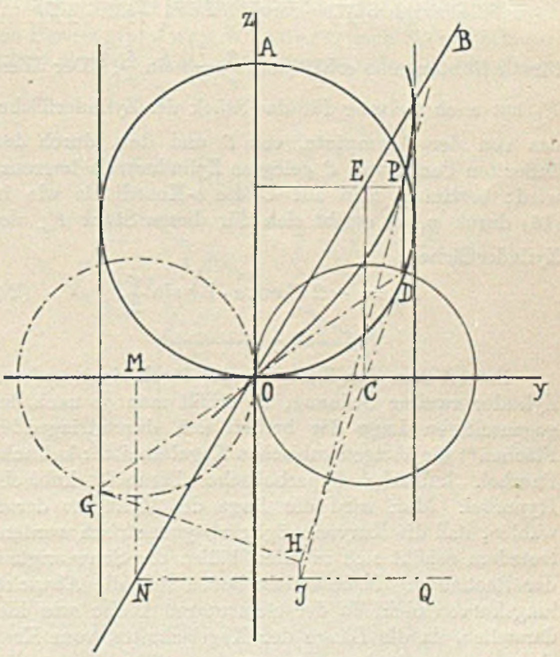


Fig. 3.

Analytisch folgt dies daraus, daß die Elimination von $CO = \varrho$ aus den Gleichungen $DP = y - \frac{2r^2\varrho}{r^2+\varrho^2} = 0$ und $EP = z - \varrho \cot\alpha = 0$ auf (13) zurückführt. — Die Tangente in P findet man mittels des beliebigen Hilfskreises um M durch C (M auf Oy) und der Geraden $NQ // Oy$, wobei $MN // Oz$ ist; man zieht OD bis G auf dem Kreis um M, in G an diesen Kreis und in D an den gegebenen die Tangenten (wovon die zweite durch C hindurchgeht), die sich in H treffen, mache $HJ // Oz$ (J auf NQ), dann ist PJ Tangente an Γ_x in P.

6. Die Abwickelung.

Aus Gleichung (3) erhält man für Γ in Zylinderkoordinaten:

$$z = r\cot\alpha \cdot \cot\frac{\varphi}{2}; \tag{16}$$

denkt man sich den Zylinder C längs der Asymptote von Γ aufgeschnitten und in die yz-Ebene ausgebreitet, so erhält man die Abwickelung der Zylinderfläche. Es werde für die Abwickelung ein $\xi\eta$-System angenommen, wobei $\eta = z$ und $\xi = r(\pi - \varphi)$ sei, dann erhält man als Gleichung der Abwickelungskurve Γ von Γ aus (16):

$$\eta = r\cot\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\xi}{2r}, \tag{17}$$

Γ ist also eine Tangenskurve. Somit hat man für die Fläche F_ξ von Γ von 0 bis ξ in bekannter Weise

$$F_\xi = r\cot\alpha \int_0^\xi \operatorname{tg}\frac{\xi}{2r} \cdot d\xi = -2r^2\cot\alpha \cdot \operatorname{Lg}\cos\frac{\xi}{2r} \tag{18}$$

und für das Volumen V_ξ des von Γ bei der Rotation um die ξ-Achse erzeugten Körpers

$$V_\xi = \pi r^2\cot^2\alpha \int_0^\xi \operatorname{tg}^2\frac{\xi}{2r} d\xi = 2\pi r^3\cot^2\alpha\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2r} - \frac{\xi}{2r}\right); \tag{19}$$

für die Subtangente erhält man $\frac{\eta}{\eta'} = r\sin\frac{\xi}{r}$. Der Wert F_ξ hat auch Geltung für das Stück der Zylinderfläche, das von der Asymptote, von Γ und dem durch den äußersten Punkt von Γ gelegten Zylinderkreis begrenzt wird; bestimmt man auf C die z-Koordinate wie in (16) durch φ, so ergibt sich für dieses Stück F_φ der Zylinderfläche:

$$F_\varphi = -2r^2\cot\alpha \cdot \operatorname{Lg}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{20}$$

7.

Ersetzt man den Kreiszylinder durch einen anderen Zylinder zweiter Ordnung, so erhält man je nach der gegenseitigen Lage der beiden sich durchdringenden Flächen*) die übrigen kubischen Kegelschnitte: kubische Parabel, kubische hyperbolische Parabel, kubische Hyperbel. Man wird die Lage des Zylinders derart wählen, daß die Kurven möglichst symmetrisch werden; trotzdem erhöht sich in allen Fällen die Schwierigkeit der Rechnung. Insbesondere lassen sich die Abwickelungskurven nicht in der elementaren Weise wie hier darstellen, da die Länge der Kegelschnitte, vom Kreis abgesehen, auf höhere Transzendente führt.

*) Vergl. v. Drach, Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte. Leipzig 1867, S. 57.

Zur allgemeinen Kegelschnittsgleichung.

Von A. Alexander (Skien, Norwegen).

Herr Direktor Thaer hat in 1902 ein kleines Heft „Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnittes aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinatentransformation" herausgegeben, in welcher er zwei Wege zu dem vorgesetzten Ziele angibt. Seit einigen Jahren habe ich neben der Koordinatentransformation eine andere, sehr einfache Methode vorgetragen und mich dabei des größten Interesses und des besten Erfolges bei meinen tüchtigeren Schülern erfreuen können. Diese Methode liegt eben darum sehr nahe, weil sie der Methode der Koordinatentransformation gänzlich parallel (aber entgegengesetzt) geht, so daß die Rechnungen sich ganz analog gestalten, nur daß die Auffassung eine verschiedene ist. Ich habe aber nie gesehen oder gehört, daß sie jemand benutze, und leiste daher mit Dankbarkeit dem Vorschlage des Herrn Direktor Thaer Folge, sie veröffentlichen zu lassen.

Es sei gegeben die Kurvengleichung

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + 2 d x + 2 e y + f = 0. \tag{1}$$

Ich stelle zuerst die Frage: ist die dadurch gegebene Kurve (ausnahmslos oder unter aufzufindenden Bedingungen) ein Zentralkegelschnitt, d. h. würde sie bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die Gleichung $g x^2 + h y^2 = k$ bekommen? Um hierauf eine Antwort geben zu können, frage ich weiter: welche Definition der Kurve als geometrischen Ort gibt diese letztere Gleichung? Diese Frage bildet den Kernpunkt der Methode. Antwort: die Kurve ist dadurch als der geometrische Ort der Punkte definiert, deren Abstände von zwei gegebenen, aufeinander senkrechten Geraden die Eigenschaft haben, daß g mal das Quadrat des einen Abstandes, plus h mal das Quadrat des anderen Abstandes gleich einer Konstanten k ist. Wenn die Schüler daran gewöhnt sind, sich in dieser Weise über die Bedeutung der Kurvengleichungen Rechenschaft zu geben, und das ist, meine ich, nicht ohne Wert, wird ihnen diese Antwort keinerlei Schwierigkeiten machen. Nun ergibt sich die weitere Fragenstellung ganz von selbst: hat die gegebene Kurve diese Eigenschaft, d. h. gibt es zwei aufeinander senkrechte Geraden, die so beschaffen sind, daß eine Konstante mal dem Quadrat des Abstandes eines beliebigen Kurvenpunktes von der einen plus eine andere Konstante mal dem Quadrat des Abstandes desselben Punktes von der anderen gleich einer dritten Konstanten sei?

Wenn die Schüler mit der Hesseschen Normalform vertraut sind, werden sie wissen, daß dieselbe eben hier nützlich sein muß. Schreiben wir demnach die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$x\sin\alpha + y\cos\alpha - p = 0$ und $x\cos\alpha - y\sin\alpha - q = 0$.

Die Aufgabe ist dann rechnerisch festgestellt. Es ist zu untersuchen, ob die gegebene Kurvengleichung (1) bei geeigneter Wahl der Konstanten g, h, k, p, q, α so geschrieben werden kann:

$$g(x\sin\alpha + y\cos\alpha - p)^2 + h(x\cos\alpha - y\sin\alpha - q)^2 = k. \tag{2}$$

Die Aufgabe ist im allgemeinen eine mögliche, denn wir haben 5 wesentliche unbekannte Parameter durch die 5 wesentlichen Konstanten der Gleichung (1) zu bestimmen. Die Vergleichung der Koeffizienten ergibt zuerst:

$$g\sin^2\alpha + h\cos^2\alpha = a$$
$$g\cos^2\alpha + h\sin^2\alpha = c$$
$$(g - h)\sin 2\alpha = 2b.$$

In ganz analoger Weise wie bei der Koordinatentransformation bestimmt man hieraus zuerst $\operatorname{tg} 2\alpha$, woraus

$\cos 2\alpha$ folgt. Die Ausdrücke, die man für $g+h$ und $g-h$ herleitet, ergeben dann die Werte von g und h. Indem man weiter $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ herleitet, finden sich durch weitere Koeffizientenvergleichungen p, q und k. Die Rechnungen werden theoretisch so einfach, daß sie den Schülern als Uebungen überlassen werden können. Hierdurch sind dann Achsenlagen und Dimensionen des Zentralkegelschnittes sowie auch die Asymptotengleichungen sofort zu ermitteln.

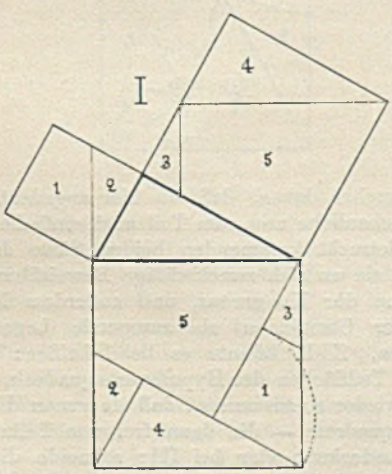
Ausnahmefall wird $b^2 = ac$. Dann ist entweder g oder $h = 0$. Nehmen wir zum Beispiel $h = 0$ an. Die weitere Koordinatenvergleichung wird dann für hq einen endlichen, im allgemeinen von 0 verschiedenen Wert ergeben: $hq = -d\cos\alpha + e\sin\alpha$, also q und folglich k unendlich. Schreibt man dann: $hq = r$, $f = gp^2 + 2rs$, nimmt die Gleichung (2) die Form an: $g(x\sin\alpha + y\cos\alpha - p)^2 = 2r(x\cos\alpha - y\sin\alpha - s)$, wodurch wir auf die Parabel zurückgeführt sind. Es ist kaum erforderlich, die Rechnungen hier umständlicher durchzuführen. Man beachte, daß der hier benutzte Winkel α von dem bei der Koordinatentransformation benutzten Drehungswinkel um $\frac{\pi}{2}$ (oder um das Vorzeichen) verschieden ist.

Obiges ist eine Spezialisierung des allgemeinen Problems, die allgemeine Gleichung zweiten Grades in x und y in der Form: Summe zweier Quadrate linearer Ausdrücke gleich einer Konstanten zu schreiben. Wenn auch nähere Ausführungen in den Schulunterricht nicht hineinpassen, so unterlasse ich doch nicht, die Schüler darauf und auf den Zusammenhang mit der Theorie der konjugierten Durchmesser aufmerksam zu machen.

Ueber Zerlegungsbeweise zum Pythagoreischen Satz.

Von Chr. Nielsen (Varel).

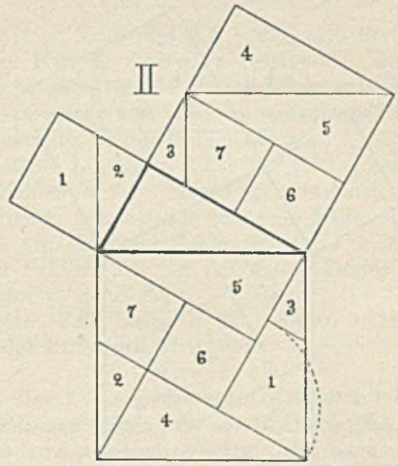
Im nachfolgenden sind nur solche Zerlegungsbeweise berücksichtigt, bei welchen die drei Quadrate das Dreieck von außen einschließen und mittels gerader Linien so in Teilflächen zerlegt werden, daß den Stücken der beiden Kathetenquadrate ebenso viele kongruente Flächenstücke im Hypotenusenquadrat entsprechen.



I

I. Diesen in mehreren älteren und neueren Lehrbüchern enthaltenen Beweis glaube ich hier durch Umlegung von Schnittlinien so verbessert zu haben, daß die Teilflächen der Kathetenquadrate jetzt in eine parallele Lage gebracht sind zu den entsprechenden Flächen im Hypotenusenquadrat. Die Schnittlinien liegen im Hypotenusenquadrat parallel zu den Katheten und in den Kathetenquadraten parallel bezw. senkrecht zur Hypotenuse.

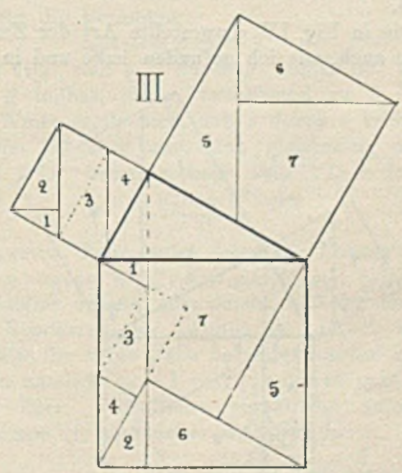
II. Fügt man in Fig. I im Viereck 5 noch zwei Teilungslinien hinzu, so entsteht Fig. II. Verschiebt



II

man in dieser das große Kathetenquadrat längs seiner Kathete bis zur äußeren Ecke des kleinen Kathetenquadrats, so erhält man die Figur zum indischen Beweis, bei welchem sowohl das aus den beiden Kathetenquadraten gebildete Sechseck, als auch das Hypotenusenquadrat in vier dem gegebenen Dreieck kongruente Dreiecke und ein Quadrat, dessen Seite gleich dem Unterschied der beiden Katheten ist, zerlegt erscheinen. Im Hypotenusenquadrat sind dabei die Teilungslinien zwischen 1 und 3 sowie 2 und 7 überflüssig.

III. Diesen den Euklidischen Satz mit einschließenden Beweis gibt Jury Wipper*) nach E. v. Littrow (1839) wieder. Auch bei diesem habe ich die Lage



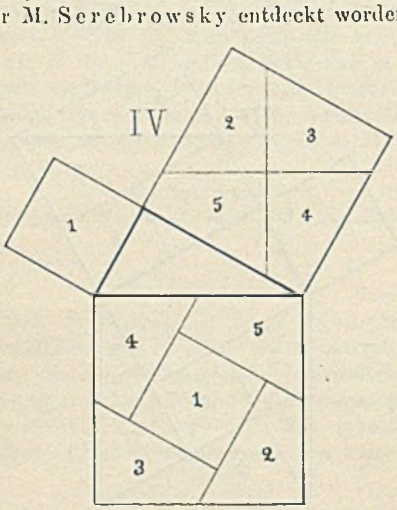
III

der Teilungslinien so geändert, daß jetzt die entsprechenden Begrenzungslinien der mit gleichen Zahlen bezeichneten Teilflächen einander parallel sind, was die Uebersicht sowie den Beweis der Kongruenz dieser Flächen wesentlich erleichtert. Die punktierten Linien zeigen teils die Art der Konstruktion an, und teils kommen sie bei den Kongruenzbeweisen zur Anwendung. Die

*) Sechsundvierzig Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes usw., aus dem Russischen von F. Graap, Leipzig 1880, Rob. Friese.

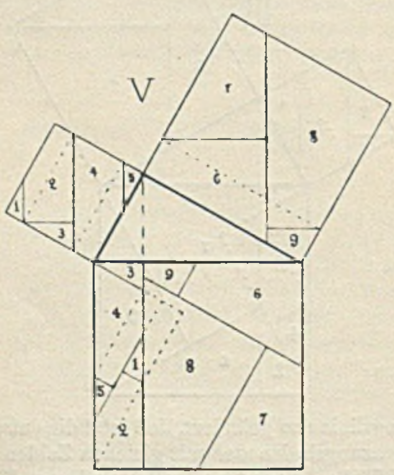
Schnittlinien liegen in den Kathetenquadraten parallel bezw. senkrecht zur Hypotenuse und in den Rechtecken parallel zu den Katheten.

IV. Dieser Beweis ist nach Jury Wipper (s. a. a. O. S. 50) im Jahre 1877 vom russischen Volksschulinspektor M. Serebrowsky entdeckt worden. Er ist



m. E. der einfachste und schönste aller Pythagorasbeweise überhaupt. Wenn er bisher keine Beachtung gefunden hat, so liegt das vielleicht daran, daß bei jener Veröffentlichung der Durchschnittspunkt der Teilungslinien im großen Kathetenquadrat, der beliebig liegen kann, nicht wie hier in der Mitte, sondern daneben angenommen worden ist, wodurch natürlich die Symmetrie im großen Katheten- und im Hypotenusenquadrat verloren geht. Die Schnittlinien liegen im Kathetenquadrat parallel bezw. senkrecht zur Hypotenuse und im Hypotenusenquadrat parallel zu den Katheten durch die Mitten der Seiten. Die Zerlegung I ist nur als ein besonderer Fall des Serebrowskyschen Beweises anzusehen.

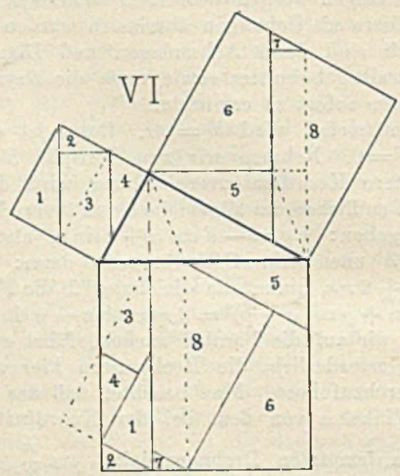
V. Die in Fig. IV dargestellte Art der Zerlegung kann man auch, wie ich gefunden habe und in Fig. V



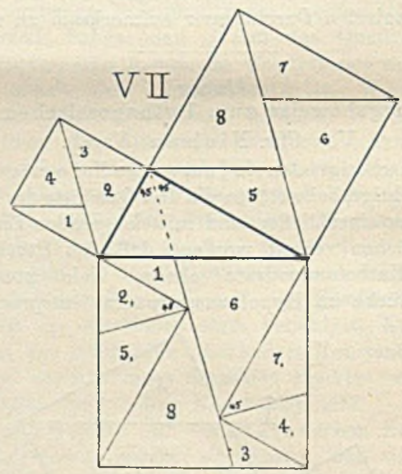
zeige, anwenden, um zugleich den Euklidischen Satz abzuleiten. Die punktierten Linien haben hier und bei den folgenden Figuren wieder die unter 3 angegebene Bedeutung.

VI. Die Fig. VI zeigt zwei von mir gefundene Varianten und zwar auf der linken Seite zu III, links, und auf der rechten zu V, rechts.

VII. Auch bei diesem von Paul Epstein (1898) herrührenden Beweis (vergl. Zeitschrift f. mathem. u. naturw. Unterr., 1906, S. 27) habe ich in den Kathetenquadraten die Teilungslinien umgelegt und damit eine



größere Uebersichtlichkeit erreicht. Man erkennt jetzt mit einem Blick, daß sowohl 2 und 5, als auch 4 und 7 zusammengeschoben das gegebene Dreieck bilden, das auch im Hypotenusenquadrat zweimal vorkommt, während die übrigen vier Teilstücke als mittelst Parallelverschiebung ins Hypotenusenquadrat gebracht erscheinen.



Abgesehen davon, daß die hier angedeuteten Beweise anschauliche und zum Teil auch einfache Beweise der in Betracht kommenden beiden Sätze darstellen, enthalten sie an sich zweckmäßige Beweisübungen zur Lehre von der Kongruenz, und außerdem lassen sie sich unter Umständen als anregende Legeaufgaben verwenden. Z. B. könnte es bei I heißen: schneide die fünf Teilflächen des Hypotenusenquadrats aus und lege sie wieder so zusammen, daß sie genau die beiden Kathetenquadrate — die dann frei von Teilungslinien sind — bedecken; oder bei III: schneide die sieben Teilflächen der beiden Kathetenquadrate aus und lege sie zum Hypotenusenquadrat — dieses dabei ohne Teilungslinien — wieder zusammen.

Kleinere Mitteilungen.

Bemerkungen zu dem Artikel „Ganzzahlige Lösungen der Gleichung (E. Schulte) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$."

Von A. Tafelmacher.

1. Die von dem Herrn Verfasser in Nr. 6, Jahrgang XV, S. 133, angegebene Lösung ist nicht allgemein, da $a + b$ als gerade $(= 2n)$ vorausgesetzt wird. Eine allgemeine Lösung der vorgeschlagenen Gleichung erhält man, wenn man setzt

$$1)\quad a + b = k$$
$$2)\quad a\,b = k\,c,$$

worin k irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Es ergeben sich dann nacheinander, wie auf S. 133, die Gleichungen

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4kc}}{2}$$

$$3)\quad k^2 - 4kc = m^2$$

$$4)\quad a = \frac{k + m}{2}$$

$$5)\quad b = \frac{k - m}{2}$$

$$k = 2c \pm \sqrt{4c^2 + m^2}$$

und
$$6)\quad (2c)^2 + m^2 = s^2.$$

2. Setzt man noch, um die pythagoreischen Zahlen zu erhalten, in bekannter Weise

$$7)\quad \begin{cases} 2c = 2uv \\ m = u^2 - v^2 \\ s = u^2 + v^2, \end{cases}$$

worin u und v beliebige ganze Zahlen bedeuten, so ergibt sich aus 4), 5) und 7)

$$k = 2uv \pm (u^2 + v^2)$$
$$a = u(u + v) \text{ oder } a = v(u - v)$$
$$b = v(u + v) \quad " \quad b = u(v - u)\ .$$
$$c = uv.$$

Dies sind die allgemeinen Lösungen der vorgeschlagenen Gleichung, welche mit Hilfe von u und v die beiden Formen annimmt

$$\frac{1}{u(u+v)} + \frac{1}{v(u+v)} = \frac{1}{uv}$$

und
$$\frac{1}{v(u-v)} - \frac{1}{u(u-v)} = \frac{1}{uv}.$$

Beispiel: $u = 3$, $v = 2$ gibt

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

und
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

* * *

Herr E. Schulte schreibt in bezug auf die obigen Bemerkungen:

„Ich gebe die allgemeine Lösung der gestellten Aufgabe durch Herrn Direktor Tafelmacher gern zu, bemerke indes, daß der eigentliche Zweck meines kleinen Artikels die Zurückführung der Lösung auf die bekannte Berechnung pythagoreischer Dreiecke bezw. Zahlen war. Deshalb brach ich nach Erreichung dieses Zieles die allgemeinen Betrachtungen ab.

Die Lösung durch Herrn Schilling in Hoffmanns Zeitschrift XXVI, S. 491 ff., auf die Herr Dr. Zühlke verweist, war mir nicht bekannt."

* * *

Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Von A. Flechsenhaar (Frankfurt a. M.)

Die Frage, welche ganzen Zahlen a, b, c der Gleichung

$$\text{(I)}\qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

genügen, hat in Nr. 6 des XV. Jahrgangs der Unterrichtsblätter Herr E. Schulte behandelt. Gelegentlich einer Aufgabe für die Reifeprüfung habe ich mir die Frage vorgelegt und habe ein einfacheres Ergebnis gefunden, das ich hier mitteilen möchte.

Eigentliche Lösungen nenne ich solche, bei denen die drei Zahlen a, b, c keinen gemeinsamen Faktor haben. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle: 1. c hat mindestens mit einer der Zahlen a oder b keinen gemeinsamen Faktor; 2. c hat mit a den Faktor ϱ_1, mit b den Faktor ϱ_2 gemeinsam.

Im ersten Falle seien z. B. c und b teilerfremd. Aus (I) folgt leicht die Gleichung

$$\text{(II)}\qquad (b - c)\,a = b \cdot c.$$

Nun kann aber $b - c$ weder einen Faktor mit b, noch mit c gemeinsam haben, da sonst dieser Faktor zugleich in b und c enthalten wäre. Also ist $b - c = 1$, $b \cdot c = a$; daher sind alle Lösungen des ersten Falles enthalten in

$$\text{(III)}\qquad c = p;\ b = p + 1;\ a = p\,(p + 1),$$

wo p irgend eine ganze Zahl ist.

Im zweiten Falle ist zu setzen:

$$\text{(IV)}\qquad a = \varrho_1 \alpha;\ b = \varrho_2 \beta;\ c = \varrho_1 \varrho_2 \gamma.$$

Dabei ist ϱ_1 teilerfremd zu $\varrho_2 \beta$, ϱ_2 teilerfremd zu $\varrho_1 \alpha$ und γ teilerfremd zu α und β. (I) nimmt hierdurch die Gestalt an

$$\text{(V)}\qquad \frac{1}{\varrho_1 \alpha} + \frac{1}{\varrho_2 \beta} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \gamma} \text{ oder}$$
$$(\varrho_1 \alpha + \varrho_2 \beta)\,\varrho_1 \varrho_2 \gamma = \varrho_1 \alpha \cdot \varrho_2 \beta \text{ oder}$$
$$(\varrho_1 \alpha + \varrho_2 \beta)\,\gamma = \alpha \cdot \beta.$$

Da ferner γ teilerfremd zu α und β ist, ist $\gamma = 1$, also besteht die Beziehung:

$$\text{(VI)}\qquad \varrho_1 \alpha + \varrho_2 \beta = \alpha \cdot \beta.$$

Aus (VI) folgt, daß $\varrho_1 \alpha$ durch β teilbar ist, also ist α durch β teilbar, da ϱ_1 teilerfremd zu β ist. In gleicher Weise ergibt sich, daß β durch α teilbar sein muß. Dies ist aber nur dann gleichzeitig möglich, wenn $\alpha = \beta$ ist. Dann erscheint aber (VI) in der Form

$$\varrho_1 \alpha + \varrho_2 \alpha = \alpha^2 \text{ oder}$$
$$\text{(VII)}\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \alpha.$$

Im zweiten Falle lautet daher die Lösung:

$$\text{(VIII)}\quad a = \varrho_1 (\varrho_1 + \varrho_2);\ b = \varrho_2 (\varrho_1 + \varrho_2);\ c = \varrho_1 \varrho_2.$$

Schließlich erkennt man leicht, daß der erste Fall nur ein Sonderfall des zweiten ist. (Auch die Ableitung hätte für beide Fälle vereinigt werden können.) Setzt man nämlich $\varrho_2 = 1$ und $\varrho_1 = p$, so geht (VIII) in (III) über. Sämtliche eigentliche ganzzahlige Lösungen von (I) sind daher enthalten in:

$$\text{(IX)}\qquad \frac{1}{\varrho_1 (\varrho_1 + \varrho_2)} + \frac{1}{\varrho_2 (\varrho_1 + \varrho_2)} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2},$$

wobei ϱ_1 und ϱ_2 irgendwelche ganze teilerfremde Zahlen sind.

* * *

Nachtrag zur Lösung der Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Von E. Schulte (Bonn).

Ganzzahlige Lösungen dieser in Nr. 6 des XV. Jahrganges der Unterrichtsblätter behandelten Gleichung lassen sich auch in einfacherer Weise, allerdings mit geringerer Vollständigkeit, gewinnen durch die identische Gleichung $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}$, in der n eine ganze Zahl bedeutet. Aus ihr folgt nämlich $\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}+1\right) = \frac{1}{n}$, oder $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}$.

Man setze daher $c = n$, $b = n+1$ und $a = n(n+1)$.

Von Interesse sind noch die ganzzahligen Lösungen der auch in Nr. 5, Jahrgang XIII dieser Blätter, von J. Schacht schon besprochenen Gleichung

$$\text{I)} \quad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho},$$

in der die verschiedenen ϱ die Radien der Berührungskreise des Dreiecks bezeichnen. Durch die Substitution

$$\text{II)} \quad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{\sigma}$$

wird aus Gleichung I)

$$\text{III)} \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}.$$

Die Gleichungen III) und II) sind aber nach beiden angegebenen Verfahren leicht zu lösen.

Es soll hier die Lösung nach der letzten Methode ausführlicher behandelt werden.

In Gleichung III) sei

$$\varrho = n = 2,$$
$$\varrho_c = n + 1 = 3,$$

so ist $\sigma = n(n+1) = 6$, also

$$\varrho_b = n(n+1) + 1 \qquad \text{und}$$
$$\varrho_a = n(n+1)[n(n+1)+1].$$

Aus der allgemeinen Lösung:

$$\text{IV)} \quad \frac{1}{n(n+1)(n^2+n+1)} + \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}$$

wird daher für unser Zahlenbeispiel

$$\frac{1}{42} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Demnach ist $\varrho = 2$, $\varrho_c = 3$, $\varrho_b = 7$ und $\varrho_a = 42$.

Aus IV) folgt ferner allgemein

$$J = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c} = n(n+1)(n^2+n+1).$$

J wird also, was für die Wahl von Aufgaben Beachtung verdient, stets rational. Gleiches gilt dann für s, $s-a$, $s-b$ und $s-c$, somit auch für a, b und c, sowie für h_a, h_b und h_c.

In dem gewählten Beispiel wird

$$J = 42; \quad s - a = 1; \quad s - b = 6; \quad s - c = 14; \quad s = 21.$$

Also $a = 20; \quad b = 15; \quad c = 7$

$$h_a = 4{,}2; \quad h_b = 5{,}6; \quad h_c = 12.$$

Die Anwendung der von den Herren Tafelmacher und Flechsenhaar gegebenen allgemeinen Lösung der Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ zur Bestimmung der Radien der Berührungskreise ergibt, dem obigen Verfahren entsprechend durchgeführt, die Gleichungen:

$$1) \quad \frac{1}{u(2u+v)} + \frac{1}{(u+v)(2u+v)} + \frac{1}{v(u+v)} = \frac{1}{u \cdot v},$$

$$2) \quad \frac{1}{u(v-2u)} + \frac{1}{(v-u)(2u-v)} + \frac{1}{v(u-v)} = \frac{1}{u\,v}$$

(u und v sind wieder ganze Zahlen).

Diese gestatten ganz die aus Gleichung IV gezogenen Folgerungen.

Vereine und Versammlungen.

Der Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht tagte unter dem Vorsitz von Herrn Gutzmer-Halle am 21. und 22. März im Reichsgesundheitsamt in Berlin. Aus dem Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses im Jahre 1909 ist hervorzuheben, daß die Sitzung am 6. März 1909 dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an höheren Mädchenschulen gewidmet war und daß die auf der Versammlung am 8. und 9. Oktober gehaltenen Vorträge von Herrn Cramer-Göttingen („Pubertät und Schule") und Herrn Poske-Berlin („Ueber die Notwendigkeit der Errichtung einer Zentralanstalt für den naturwissenschaftlichen Unterricht") unter den Schriften des Deutschen Ausschusses erschienen sind. Hauptgegenstand der Verhandlungen der diesjährigen Versammlung war die Ausbildung der Volksschullehrer in Mathematik und Naturwissenschaften, wobei sich der Deutsche Ausschuß der Mitarbeit der Herren Muthesius-Weimar und Umlauff-Hamburg erfreute. In Bezug auf die Verwendung von Mittelschullehrern in den Unterklassen höherer Lehranstalten wurde folgende Resolution angenommen: „Zur Frage der Verwendung von Mittelschullehrern erinnert der Deutsche Ausschuß zunächst an den Leitsatz der früheren Unterrichtskommission: Die U.-K. muß besonderen Wert darauf legen, daß der Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften an den höheren Schulen in allen seinen Teilen nur von wirklich Sachverständigen erteilt wird, d. h. von Lehrern, welche hinsichtlich des in Betracht kommenden Lehrstoffes über volle akademische Vorbildung verfügen. Nachdem nun durch die neue Verfügung eine beschränkte Verwendung von Mittelschullehrern in den Unterklassen höherer Lehranstalten zugelassen, erklärt der Deutsche Ausschuß, daß für die Erteilung des Unterrichts in den wissenschaftlichen Fächern auch in den Unterklassen neben der erforderlichen pädagogischen Ausbildung genügende wissenschaftliche Ausbildung der Lehrkräfte jedenfalls unerläßlich ist." A. T.

* * *

Die Ortsgruppe Gross-Berlin des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hat in ihrer Sitzung vom 14. März die folgende Resolution gefaßt:

> „Die Berliner Ortsgruppe des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts sieht in der in das Belieben der Patronate gestellten Heranziehung nicht akademisch vorgebildeter Lehrer zur Erteilung mathematischer und insbesondere naturwissenschaftlicher und erdkundlicher Lehrstunden eine schwere Gefährdung des Unterrichtserfolges für diese Fächer und spricht sich einmütig gegen einen derartigen Versuch aus."

Begründung.

1. Der naturwissenschaftliche, erdkundliche und mathematische Unterricht an höheren Lehranstalten verfolgt andere Ziele als der der Mittelschulen und muß diese von der untersten Stufe an bewußt im Auge behalten. Es bedarf hierzu für den Lehrer einer gründlichen Fachvorbildung, die für sich allein ein mehrjähriges, eingehendes Studium mit ausgedehnten praktischen Uebungen erfordert und nicht nebenher, neben der Vorbereitung für die zahlreichen anderen

Fächer des Mittelschulunterrichts, etwa in Verbindung mit Ferienkursen, erworben werden kann.

2. In letzter Zeit haben in zahlreichen Vereinen, Körperschaften und Zeitschriften Erörterungen über eine zeitgemäße Reform des mathematischen, naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterrichts stattgefunden. Hierbei wurde stets die Frage nach der Vorbildung der Lehrer als eine besonders wichtige anerkannt. Selbst der heutige Universitätsunterricht wurde in mehreren Punkten als verbesserungsbedürftig bezeichnet. Es wäre daher geradezu unverständlich, wenn nun für den grundlegenden Unterricht in unseren Fächern die akademische Vorbildung als entbehrlich angesehen werden sollte.

3. Erschwerend fällt für Naturgeschichte und Erdkunde ins Gewicht, daß von der Maßregel nahezu ihr gesamter — an sich schon überaus geringer — Stundenbestand getroffen werden würde, der sich zurzeit fast ganz auf die unteren und mittleren Klassen verteilt.

4. Die beträchtlichen methodischen Schwierigkeiten, die gegenwärtig infolge der angestrebten Umgestaltung in den genannten Fächern mehr als auf anderen Gebieten bestehen, lassen gerade für unsere Gegenstände das Wagnis, welches die geplante Maßregel darstellen würde, noch weitaus bedenklicher erscheinen, als für andere, in ihren Methoden schon seit Jahrzehnten gefestigte Unterrichtsgebiete.

5. Durch die Heranziehung von Mittelschullehrern müßte die praktische Bedeutung der Oberlehrerprüfung für unsere Fächer eine so starke Einbuße erfahren, daß ein akademisches Studium kaum noch Aussicht auf Verwertung im höheren Schulwesen bieten würde. Die Gewinnung tüchtiger Lehrkräfte, wie sie gerade jetzt bei der angestrebten Reform besonders wünschenswert ist, würde hierdurch wesentlich erschwert werden.

I. A. der Ortsgruppe
Der Vorstand.
Prof. Dr. v. Hanstein. Prof. Ohmann. Dr. Fedde.
Prof. Dr. Born. Direktor Prof. Dr. H. Fischer.
Freese. Dr. Quelle.

Bücher-Besprechungen.

W. Briecke und A. Mahlert. Leitfaden der Physik für höhere Mädchenschulen und die Unterklassen von Studienanstalten für Mädchen. Berlin 1910, Salle. Preis 2.40 M.

Das Buch ist nach den Grundsätzen des Leitfadens der Chemie und Mineralogie von Levin und Briecke bearbeitet, der in kurzer Zeit eine weite Verbreitung gefunden hat. Die Verfasser gehen in ihren methodischen Entwickelungen vom Erfahrungskreise der Schülerinnen aus oder wählen den geschichtlichen Gang. Dadurch werden die Darstellungen äußerst anschaulich. Den Schülerinnen wird der Weg gezeigt, auf dem sie selbständig Probleme zu lösen befähigt werden. Daher wirkt selbst die Behandlung solcher Stoffe anregend, denen die Schülerinnen im allgemeinen wenig Interesse entgegenbringen. Auch ist es den Verfassern gelungen, das Wesentliche vom Unwesentlichen scharf zu trennen und ersteres vielseitig zu beleuchten. Dadurch wird ein besonderer Grad der Klarheit erreicht, eine Tatsache, die für die Bewertung eines Physikbuches, das Schülerinnen in die Hand gegeben werden soll, von größter Bedeutung ist.

Durch zahlreiche Aufgaben, die dem Lehrstoff eingefügt sind, findet eine Anwendung der entwickelten Gesetze statt. Auch die Versuche sind geschickt ausgewählt; die meisten lassen sich mit einfachen Mitteln ausführen. Die Abbildungen sind gut.

Die Anordnung des Stoffes entspricht den modernen pädagogischen Grundsätzen. Doch sind einige Abschnitte in das Pensum der Chemie zu verweisen (S. 5, 125, 193). Ebenso gehört die anatomisch-physiologische Seite der Sinnesorgane (Auge, Ohr) in den Biologieunterricht, zumal der menschliche Körper in Klasse II in genügender Weise berücksichtigt wird. Dagegen dürfte die Besprechung des Spektralapparates kaum fehlen. Die „Wetterbestimmung" (S. 78) würde durch Einfügen einer Wetterkarte wesentlich an Klarheit gewinnen, ebenso die Besprechung des Regenbogens durch entsprechende Abbildungen. Auch auf die Anwendungen der Wärmestrahlung, auf die Bedeutung der hohen spezifischen Wärme des Wassers für den Haushalt der Natur und auf die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche hätten die Verfasser näher eingehen können, ebenso auf elektrische Maße, auf die Bedeutung des Unterbrechers für die Technik, auf die Funkentelegraphie und Röntgenstrahlen.

Der Ausdruck ist stellenweise nicht einwandfrei. „Im Glase wandert der Strahl zur nächsten Fläche" (S. 203). „Kupferdrahtnetz erzeugt grünes Licht" (S. 206). „Descartes erklärte den Regenbogen durch eine Wolkenwand erzeugt" (S. 207). „Ein Mikroskop bauen wir uns, indem wir als Objekt ein Drahtnetz nehmen, oder ein lockeres Gewebe" (S. 209). „Eine auf dem Tische rollende Kugel wird langsamer" (S. 5). Diese und verschiedene andere Unregelmäßigkeiten könnten jedoch in einer neuen Auflage leicht beseitigt werden. Im übrigen ist dem mit großem Geschick bearbeiteten Büchlein weiteste Verbreitung zu wünschen.

Dr. Bongardt (Hildesheim).

* * *

K. Fuss und Gg. Hensold. Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterricht, mit vielen Uebungsaufgaben, einer Spektraltafel in Farbendruck und 448 in den Text gedruckten Abbildg. 8. verb. u. verm. Aufl. Freiburg i. Br. 1908, Herdersche Verlagshandlung.

Anpreisungen, wie für den Schul- und Selbstunterricht, machen mich stets stutzig und ganz besonders bei einem Physikbuch. Physik wird niemand ohne Anleitung aus einem Buche lernen wollen, wenigstens sollte ein Physiker niemandem dazu raten. Nach dem Vorwort der 5. Auflage haben die Verfasser die Lehrpläne norddeutscher Lehrerbildungsanstalten bei der Ausarbeitung vorzugsweise berücksichtigt. Wie weit sich das Buch für solche Anstalten eignet, kann ich freilich nicht beurteilen. Dem Titel und Umfange nach zu schließen, reflektiert der Verlag jedoch auch auf die Benutzung an anderen höheren Schulen. Allein gerade dazu scheint es mir nicht geeignet. Vor allem sind die mathematischen Vorkenntnisse, die das Buch voraussetzt, zu gering. Werden doch gar die trigonometrischen Funktionen erst definiert. Das erscheint mir zum mindesten überflüssig, denn wer mit diesen noch nicht umzugehen versteht, dem wird das Verständnis eines Stoffes, bei dem sie angewendet werden, kaum erleichtert werden. Den geringen mathematischen Vorkenntnissen entsprechend sind auch alle Teile, die Mathematik verlangen, dürftig behandelt, so z. B. die Lehre von den Drehmomenten, der Bewegung im allgemeinen, dem Wurf und der Zentralbewegung. Ich will einige Beispiele herausgreifen.

Bei der Wage werden die Umstände angeführt, von denen ihre Empfindlichkeit abhängt, aber ohne jede Begründung, die ja leicht mathematisch formuliert werden kann. Dem Leser wird hier also nur Memorierstoff geboten. Und darauf wird es im Physikunterricht immer herauskommen, wenn man nicht genügend Mathematik voraussetzen kann. Beim schiefen Wurf müssen die Verfasser auf die Behandlung der Fragen verzichten: unter welchem Winkel erreicht ein Geschoß seine größte Wurfweite, und der noch viel wichtigeren: unter welchem Winkel muß ein Geschoß mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit geschleudert werden, um eine bestimmte Weite zu erzielen. Von der Wellenbewegung heißt es, daß sie eine wichtige Rolle in der Physik spiele. Aber schon bei der Ableitung der Reflexions- und Brechungsgesetze wird sie nicht herbeigezogen. Ob ein mathematisch ungeschulter Leser, wie er hier vorausgesetzt wird, die Abschnitte über Interferenz oder Polarisation, zumal diese doch nur sehr kurz sind, verstehen kann, möchte ich sehr bezweifeln.

Noch einige Einzelheiten will ich anführen, die mir störend oder als Mängel aufgefallen sind. Zunächst drei Figuren, nämlich 25 und 26, in denen die Resultante doch einigermaßen gleich der Summe der Parallelkomponenten erscheinen sollte, und Fig. 114 mit den drei Gefäßen mit gleichem Volumen, die alles andere, nur nicht inhaltsgleich sind. Unklar ist die Erläuterung zu Fig. 16 (Keil). Bei dem zeitgemäßen Beispiel für Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften der Flugdrachen sind nur der Wind und die Schwere des Drachens berücksichtigt, die Kraft, die den Drachen treibt, der Zug durch eine Schnur, oder die Triebkraft durch Motor fehlt. Die Gleichgewichtslagen sind keineswegs einwandfrei besprochen. Ob der Körper nur einen oder mehrere Unterstützungspunkte hat, ist unwesentlich, auch ein Tisch, der auf der einen Seite ein wenig gehoben wird, ist im stabilen Gleichgewicht. Ueber die richtige Definition der Gleichgewichtslagen sind vor nicht sehr langer Zeit in mathematischen oder physikalischen Zeitschriften Berichtigungen erschienen.

Bei der schiefen Ebene ist die Reibung auch in keinem Beispiel berücksichtigt, und doch braucht man, um einen Wagen eine ansteigende Straße hinaufzuziehen, mehr als die doppelte Kraft, die nötig wäre, um den Wagen im Gleichgewicht zu halten. Der in Fig. 168, S. 193, abgebildete Perkussionsapparat dürfte zur Veranschaulichung der Fortpflanzung der Wellenbewegung kaum geeignet sein. Die Kalorimetrie wird behandelt, aber die Beschreibung eines Kalorimeters sowie die Berücksichtigung des Wasserwertes fehlt. Auch vermisse ich die Flemingsche Dreifingerregel und ganz besonders die Lenzsche Regel, die das Verständnis der Induktionsströme vermittelt.

Das Buch ist seit 1890 bereits in 8. Auflage erschienen, wird also doch vielfach verwendet. Es hat gewiß mancherlei Vorzüge: viele Uebungsaufgaben und Beispiele, von denen einige (für schwache Mathematiker) ausführlich durchgerechnet sind, zahlreiche brauchbare Abbildungen, gute Disposition im ganzen wie in den einzelnen Abschnitten und Paragraphen. Trotzdem kann ich mich den durchaus lobenden Urteilen der Presse, die dem Buch mitgegeben sind, nicht ganz anschließen. E. Weighardt (Mannheim).

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Arendt, R., Doermer, L., Leitfaden für den Unterricht in der Chemie und Mineralogie. 11. Aufl. Mit 144 Abb., 1 Buntdrucktafel. Hamburg 1909, Voß. geb. M 1.60.

Bösche, W., Der Mensch der Vorzeit. der Mensch in der Tertiärzeit und im Diluvium. Stuttgart 1909, Kosmos-Verlag (Franckh). M 1.—.

Brion, G., Die technischen Strom- und Spannungsmesser. Mit 23 Abb. Leipzig 1909, Hachmeister & Thal.

Bützberger, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 4. verbesserte u. vermehrte Aufl. Zürich 1909, Art. Institut Orell Füßli. M 2.—.

Decker, H., Auf Vorposten im Lebenskampfe. Biologie der Sinnesorgane. 1. Fühlen u. Hören. Stuttgart 1910, Kosmos-Verlag (Franckh). M 1.—.

Dingeldey, H., Etymologisches Fachwörterbuch zur Mathematik, Physik, Chemie u. Mineralogie. Breslau 1910. Hirt. M 1.60.

L'Enseignement Mathématique, Revue Internationale dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr. XIIme Année, No. 1, 2. Paris 1910, Gauthier-Villars et Genève, Georg & Cie.

Fischer, K., Technische Instrumentarien zur Prüfung und Ueberwachung des Betriebszustandes von elektrischen Anlagen. Mit 40 Abb. Leipzig 1909, Hachmeister & Thal.

Gerhardt, U., Das Kaninchen. Zugleich eine Einführung in die Organisation der Säugetiere. Mit 60 Abb. Leipzig 1909, Klinkhardt.

Graetz, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. Mit 627 Abb. 15. Aufl. Stuttgart 1910, Engelhorn. geb. M 9.—.

Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen u. zum Selbststudium. Mit 1091 Fig., 2 farb. Tafeln u. einem Anhange, enthaltend Tabellen physikal. Konstanten u. Zahlentab. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 16.—.

Gubler, S. E., Aufgaben aus der Allgemeinen Arithmetik u. Algebra für Mittelschulen. Heft IV. Zürich, Art. Institut Orell Füßli. 1910.

Günther, K., Der Naturschutz. Mit 54 Abb. Freiburg i. Br. 1910, Fehsenfeld.

Hausrath, H., Die Galvanometer. Mit 42 Abb. Leipzig 1909. Hachmeister & Thal.

Henrici, J., u. Treutlein, P., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. I. Teil: Gleichheit der Gebilde in einer Ebene und deren Abbildung ohne Maßänderung (nebst einer Aufgabensammlung). Mit 192 Fig. 4. Aufl. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 2.40.

Henseling, R., Sternbüchlein für das Jahr 1910. Stuttgart, Kosmos-Verlag (Franckh) 1910. kart. M 0.75.

Kambly-Roeder, Planimetrie, bearb. von A. Thaer. Ausgabe B: Für Realanstalten u. Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht. 148–151. Aufl. der Kamblyschen Planimetrie. Mit 300 Fig. Breslau 1909, Hirt. geb. M 2.50.

Killing, W., Hovestadt, H., Handbuch des mathematischen Unterrichts. I. Bd. Mit 32 Fig. Leipzig 1910, Teubner. geb. M 10.—.

Koelsch, A., Von Pflanzen zwischen Dorf und Trift. ein Buch für Schönheitssucher. Stuttgart 1910, Verlag des Kosmos (Franckh). M 1.—.

Kommerell, V., Kommerell, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. I. Bd. 2. Aufl. Mit 19 Fig. (Sammlung Schubert). Leipzig 1909. Göschen. geb. M 4.80.

Kosmos, Handweiser für Naturfreunde, herausg. v. Kosmos, Gesellschaft der Naturfreunde 1909, Band VI, Heft 11/12: 1910, Band VII, Heft 1, 2, 3. Stuttgart 1910. Verlag des Kosmos (Franckh). à Heft M 0.30.

Lampert, K., Das Leben der Binnengewässer. 2. verb. Aufl. Liefer. 15 u. 16. Leipzig, Tauchnitz. je M 1.—.

Lassar-Cohn, Prof. Dr., Die Sicherstellung der Ernährung der Menschheit. Vortrag im Keplerbund. Hamburg und Leipzig 1910, Voß. M 0.80.

Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Mit einem Einführungswort von F. Klein. Leipzig 1909, Teubner. M 2.—.

Liewald, K., Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht. Mit 17 Fig. Sonderabdruck aus dem 40. Jahrgange der Zeitschrift f. mathem. u. naturw. Unterricht. Ebenda. M 0.80.

Carl von Linnés Bedeutung als Naturforscher und Arzt. Schilderungen, herausgeg. von der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften anläßlich der 200jährigen Wiederkehr des Geburtstages Linnés. Jena 1909, Fischer. M 20.—.

Matzdorff, C., Tierkunde. Ausgabe B: Für Realanstalten (in 6 Teilen). Breslau 1910. Hirt. I. Teil: Für Sexta. 2. Aufl. Mit 32 Bildern u. einer farbigen Tafel. geb. M 0.60. — II. Teil: Für Quinta. Mit 40 Bildern u. 2 farbigen Tafeln. geb. M 0.80. — III. Teil: Für Quarta. Mit 81 Bildern u. 3 farbigen Tafeln. geb. M 1.50. — IV. Teil: Für Untertertia. Mit 67 Bildern u. 6 farbigen Tafeln. geb. M 1.50.

Mikrokosmos, Zeitschr. f. d. praktische Betätigung aller Naturfreunde. Herausgeg. von A. Reitz. Jahrg. III. Heft 8/10. Stuttgart 1909/10, Franckh.

Nimführ, R., Die Luftschiffahrt. 2. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt, 300. Band). Leipzig 1910, Teubner. geb. M 1.25.

Noodt, G., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. Ausgabe A. 2. Aufl. Mit 105 Fig. u. d. Modell einer Parabel. Bielefeld 1910, Velhagen & Klasing. geb. M 2.30.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.