Jahrgang XVI. 1910. No. 1.

Unterrichtsblätter
für
Mathematik und Naturwissenschaften.

Organ des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Begründet unter Mitwirkung von **Bernhard Schwalbe** und **Friedrich Pietzker**,
von diesem geleitet bis 1909, zurzeit herausgegeben von
Prof. Dr. **A. Thaer,**
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore in Hamburg.

Verlag von Otto Salle in Berlin W. 57.

Redaktion: Alle für die Redaktion bestimmten Mitteilungen und Sendungen werden nur an die Adresse des Dir. Thaer, Hamburg 30, erbeten.
Verein: Anmeldungen und Beitragszahlungen für den Verein (5 Mk. Jahresbeitrag) sind an den Schatzmeister, Professor Presler in Hannover, Königswortherstraße 47, zu richten.

Verlag: Der Bezugspreis für den Jahrgang von 6 Nummern ist 3 Mark, für einzelne Nummern 60 Pf. Die Vereinsmitglieder erhalten die Zeitschrift unentgeltlich; frühere Jahrgänge sind durch den Verlag bez. eine Buchhdlg. zu beziehen.
Anzeigen kosten 25 Pf. für die 3-gesp. Nonpar.-Zeile; bei Aufgabe halber od. ganzer Seiten, sowie bei Wiederholungen Ermäßigung. — Beilagegebühren nach Uebereinkunft.

An die Leser.

Der bewährte bisherige Leiter dieses Blattes, Herr Professor Pietzker, hat in der letzten Nummer des vorigen Jahrganges von den Lesern der Unterrichtsblätter als Herausgeber Abschied genommen. Dieser Rücktritt wird die Leser nicht weniger schmerzlich berührt haben als die Niederlegung des Vorsitzes im Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts die Mitglieder. Hier wurde Herrn Professor Pietzker durch Ernennung zum Ehrenvorsitzenden ein äußeres Zeichen der Dankbarkeit gegeben und der Wunsch ausgedrückt, daß er, so viel ihm möglich sei, auch fernerhin sich an den Arbeiten des Vereins beteiligen möge. Den gleichen Wunsch glaube ich in bezug auf die Unterrichtsblätter bei den Herren Mitarbeitern und Lesern voraussetzen zu dürfen.

Bei der schwierigen Aufgabe, die Leitung des Blattes würdig eines solchen Vorgängers zu führen, bitte ich um allseitige freundliche Unterstützung. A. Thaer.

Vereins-Angelegenheiten.

Die XIX. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts findet vom 16. bis 20. Mai in Posen statt. Der unter dem Vorsitz des Rektors der Königlichen Akademie Posen, Herrn Prof. Dr. Spies, gebildete Ortsausschuß setzt sich aus folgenden Herren zusammen:

1. Ehrenausschuß.

Bluhm, Direktor der Baugewerkschule; Dr. Bunk, Sanitätsrat (Bromberg), Vorsitzender der Aerztekammer; Dreßler, Oberpostdirektor; Franke, Rektor; Dr. Friebe, Geh. Reg.-Rat, Gymnasialdirektor; Exzellenz Wirkl. Geh. Rat Dr. Gryczewski, Oberlandesgerichtspräsident; Haegermann, Geh. Reg.-Rat; Kindler, Architekt; Exzellenz Graf von Kirchbach, Kommandeur des V. Armeekorps; Dr. Kummerow, Provinzialschulrat; Prof. Dr. Schröer, Geh. Reg.-Rat, Gymnasialdirektor; Schulze-Nickel, Eisenbahn-Direktions-Präsident; Exzellenz von Steinäcker, Generalleutnant und Kommandant von Posen; Prof. Dr. Thieme, Direktor des Königl. Realgymnasiums in Bromberg; Prof. Dr. Thümen, Geh. Reg.-Rat, Gymnasialdirektor; Exzellenz von Waldow, Oberpräsident von Posen, Kurator der Königl. Akademie; Dr. Wilms, Oberbürgermeister.

2. Geschäftsausschuß:

Obmann: Prof. Dr. Spies, Rektor der Königl. Akademie.

Mitglieder: Generalarzt Demuth; Bürgermeister Künzer; Stadtverordnetenvorsteher Justizrat Placzek; Stadtbaurat a. D. Grüder; Stadtrat Kronthal; Direktor der höheren Maschinenbauschule Braun; Professor Ratsch; Mittelschullehrer Czachowski; Direktor der Königl. Luisenschule Doblin; Schulvorsteherin Frl. Ridder; Lehrerin Frl. Kosser.

3. Sitzungsausschuß:

Obmann: Prof. Dr. Spies.

Mitglieder: Prof. Schacht; Prof. Dr. Mühle; Oberlehrer Karl Schulz (Oberrealschule); Mittelschullehrer Schwedler.

4. Presseausschuß:

Obmann: Prof. Langer.

Mitglieder: Oberlehrer Rossow (Höh. Maschinenbauschule); Redakteur Giersch (Pos. Zeit.); Redakteur Ginschel (Pos. Tageb1.); Redakteur Wagner (Pos. Neuest. Nachr.).

5. Besichtigungsausschuß:

Obmann: Prof. Dr. Pfuhl.

Mitglieder: Geh. Rat Prof. Dr. Wernicke; Direktor der höheren Maschinenbauschule Braun (auch in 2); Medizinalrat Prof. Dr. Busse; Direktor der Gas- und Wasserwerke Mertens; Direktor der Baugewerkschule Bluhm; Oberlehrer Rast; Prof. Dr. Mendelsohn; Oberlehrer Dr. Moritz; Mittelschullehrer Schubert.

6. Festausschuß:

Obmann: Prof. Könnemann.

Mitglieder: Oberingenieur Benemann; Oberlehrer an der Baugewerkschule Paur; Oberlehrer Bloedorn; Schulvorsteherin Frl. Knothe.

Von den folgenden Herren sind Vorträge zugesagt:

Direktor Prof. Grimsehl-Hamburg. Versuche für den physikalischen Unterricht (genauere Formulierung vorbehalten).

Prof. Dr. v. Hanstein-Berlin. Ueber die Bedeutung der Exkursionen für den naturwissenschaftlichen Unterricht (genauere Formulierung vorbehalten).

Geh. Bergrat Prof. Dr. Jentzsch-Posen. Geologie der norddeutschen Tiefebene (genauere Formulierung vorbehalten).

Prof. Dr. Könnemann-Posen. Theoretisches und Praktisches zur Tropfenbildung.

Prof. Dr. Lummer-Breslau. Ueber das Sehen im Hellen und Dunkeln.

Prof. Dr. Schülke-Königsberg. Ueber neuere Geometrie.

Prof. Dr. Spies-Posen. Moderne Röntgentechnik. Verflüssigung des Wasserstoffs.

Direktor Prof. Dr. Thieme-Bromberg. Mathematik in den oberen Klassen der Realanstalten.

Geh. Medizinalrat Prof. Dr. Wernicke-Posen. Die Wasserversorgung der Großstädte.

Prof. Dr. Witting-Dresden. Bericht über die Tätigkeit der internationalen mathematischen Unterrichtskommission. Mathematik in den oberen Klassen der Gymnasien.

Ferner besteht Aussicht auf Vorträge der Herren Prof. Dr. Busse-Posen, Prof. Dr. Mendelsohn-Posen (Die Perioden der Gebirgsbildung), Dr. Jansen-Hamburg (Statik der Flugmaschinen), Dr. Zühlke-Grunewald (Linearzeichnen und darstellende Geometrie).

Weitere Anmeldungen von Vorträgen werden erbeten unter der Adresse des Herrn Professors Dr. Spies (Posen, Helmholtzstraße 2) oder der des derzeitigen Vereinsvorsitzenden (Hamburg 36). Die genaue Tagesordnung mit eingehenderen Mitteilungen über die beabsichtigten Besichtigungen und Exkursionen wird in der nächsten Nummer veröffentlicht werden.

Folgende Besichtigungen sind in Aussicht genommen:

Physikalisches Institut der Königl. Akademie Posen unter Führung von Prof. Dr. Spies.

Pflanzengarten des Königl. Mariengymnasiums unter Führung von Prof. Dr. Pfuhl.

Wasserwerke der Stadt Posen unter Führung des Direktors des Hygienischen Instituts, Geh. Medizinalrat Prof. Dr. Wernicke.

Geologische Abteilung des Kaiser Friedrich-Museums unter Führung von Prof. Dr. Pfuhl.
Geologische Exkursion unter Führung des Geh. Bergrats Dr. Jentzsch.
Besuch eines Ansiedelungsdorfes, unter Führung eines Mitgliedes der Königl. Ansiedelungskommission.

Vorbehaltlich der Genehmigung des Königl. Ministeriums wird die Königl. Akademie folgende praktische Kurse am 20., 21., 23. und 24. Mai, täglich 4 bis 5 Stunden, abhalten:

I. Physikalisch-technische Uebungen in der Werkstätte (Prof. Spies und Mechaniker der Akademie O. Naumann).

II. Biologisch-mikroskopischer Kursus (Prof. Pfuhl).

III. Maßanalytische Uebungen für quantitative Schülerarbeiten (Prof. Mendelsohn).

Diese drei Uebungskurse sollen nebeneinander hergehen; es kann also kein Teilnehmer mehr als einen besuchen. Zugelassen werden zu jedem Kursus bis zu acht Teilnehmern.

Bericht über die Ausserordentliche Sitzung der Ortsgruppe Gross-Berlin am 9. Oktober 1909.

Von R. v. Hanstein (Groß-Lichterfelde).

Die Berliner Ortsgruppe unseres Vereins verhandelte in einer Außerordentlichen Sitzung am 9. Oktober 1909 eingehend über den derzeitigen Stand des biologischen Unterrichts in den oberen Klassen der Berliner höheren Lehranstalten, wie er sich seit dem Ministerialerlaß vom 19. März 1908 entwickelt hat. Der sehr zahlreich besuchten Sitzung wohnten als Gäste auch eine Anzahl der Mitglieder des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht bei.

In einem einleitenden Referat führte zunächst der derzeitige Vorsitzende der Ortsgruppe, Prof. v. Hanstein, aus, daß schon längere Zeit vor dem Holleschen Erlaß an einzelnen Berliner Schulen Versuche mit der Einführung biologischer Unterweisungen in die Oberklassen gemacht worden seien. Schon seit 1894 wurden am Falk-Realgymnasium in fakultativen Stunden teils anthropologische, teils biologische Kapitel behandelt. Nach der Veröffentlichung der Lehrpläne von 1901 wurde an zwei Gymnasien — dem Humboldt- und Lessinggymnasium — Gebrauch von der Ermächtigung gemacht, ein Semester des physikalischen Unterrichts in Unterprima z. T. für Physiologie zu benutzen. Die Schüler brachten diesem Gegenstande sehr lebhaftes Interesse entgegen, doch erwies sich die Zeit als zu beschränkt, um einen entsprechenden Erfolg zu zeitigen, während die Physiker diese Stunden andererseits nicht entbehren zu können glaubten. Ein schon früher vom Lessinggymnasium gestellter Antrag auf Einführung eines zweistündigen fakultativen Biologieunterrichts für Unter- und Oberprima hatte damals die Zustimmung der vorgesetzten Behörden nicht gefunden. Am Andreasrealgymnasium wurden seit 1902 für Primaner fakultative mikroskopische Uebungen eingerichtet, an denen allerdings aus äußeren Gründen nur eine beschränkte Zahl der Schüler sich beteiligen konnten. Es wurden hier teils botanische, teils zoologische Objekte behandelt, in gewisser Weise auch den besonderen Interessen der Teilnehmer Rechnung getragen. Fakultative biologische Schülerübungen für beide Primen führte im Jahre 1906 das Königstädtische Realgymnasium ein; an diesen beteiligten sich, mit wenigen vorübergehenden Ausnahmen, alle Primaner mit regem Eifer. Jede Klasse war in zwei Abteilungen geteilt, die in wöchentlichem Wechsel je zwei Stunden arbeiteten. Die Uebungen erstreckten sich auf Zoologie und Botanik und waren teils mikro- teils makroskopisch, auch physiologische Versuche wurden angestellt. In all diesen Fällen — mit Ausnahme der physiologischen Stunden in den beiden genannten Gymnasien — handelte es sich also um fakultative, außerhalb des eigentlichen Lehrplans liegende Stunden. Als nun im März 1908 der Hollesche Erlaß erschien, regte sich vielfach die Hoffnung, mit Hilfe der hier gegebenen Anregungen einen wesentlichen Schritt vorwärts zu kommen. Leider sollte sich diese Hoffnung als trügerisch erweisen. Vielfach lehnten die Direktoren ein Eingehen auf diese Frage von vornherein ab und in den Kollegien der weitaus meisten Anstalten fand sich auf keiner Seite Geneigtheit, zugunsten der Biologie auf eine oder gar zwei Wochenstunden zu verzichten. Auch das in dem Ministerialerlaß empfohlene Anleiheverfahren, das den verschiedenen Fächern abwechselnd eine einzelne Stunde entnimmt, stößt schon aus technischen Gründen — Aufstellung des Stundenplans — auf große Schwierigkeiten. Endlich erwies sich für viele Anstalten die Bestimmung als sehr hinderlich, daß der biologische Unterricht in Prima nur einem Lehrer übertragen werden dürfe, der außerdem noch andere Stunden in dieser Klasse erteilt. Gerade an den Gymnasien ist diese Forderung meist unerfüllbar, weil an diesen der biologisch vorgebildete Lehrer — falls ein solcher überhaupt vorhanden ist — mit seiner Tätigkeit auf die unteren und mittleren Klassen beschränkt zu sein pflegt. Ist auch in einzelnen Fällen — so

z. B. am Lessinggymnasium — von dieser Bedingung abgesehen worden, so ist doch an einer Reihe von Anstalten gerade diese Bestimmung ein Grund gewesen, einen Antrag auf Einführung solchen Unterrichts nicht zu stellen. So hat denn der Ministerialerlaß, so dankenswert die demselben zugrunde liegende Absicht war, in Berlin leider an den tatsächlichen Verhältnissen nicht viel geändert. Von den 14 Berliner Gymnasien hat nur eins, das Lessinggymnasium, einen zweistündigen fakultativen Biologieunterricht eingeführt; von den acht Realgymnasien hat, außer den beiden schon genannten (Andreas- und Königstädtisches Realgymnasium), die in der oben angegebenen Weise weiterarbeiten, noch das Dorotheenstädtische Realgymnasium wenigstens in einer Prima die Einrichtung getroffen, daß zeitweise — so z. B. in einem Quartal des letzten Sommersemesters — die der Chemie lehrplanmäßig zukommenden Lehr- und Uebungsstunden auf Biologie verwandt wurden. Vom Oktober 1909 an haben zwei weitere Anstalten, das Kgl. Kaiser Wilhelm-realgymnasium und das Falk-Realgymnasium Biologie in Prima eingeführt: ersteres in Form fakultativer Lehrstunden, letzteres in Form praktischer Uebungen. Von den Oberrealschulen hat die Friedrichswerdersche fakultative Uebungsstunden, die Luisenstädtische von Obersekunda bis Oberprima je eine wöchentliche obligatorische Unterrichtsstunde eingeführt, die in O II der Chemie genommen, in I aber als besondere neue Stunde eingeführt wurde, während die dritte, zurzeit noch unvollständige Oberrealschule die Einführung biologischer Unterweisung für Oktober 1910 in Aussicht genommen hat. Ohne jeden biologischen Unterricht in den Oberklassen sind zurzeit in Berlin 13 Gymnasien*) und drei Realgymnasien, also zwei Drittel der höheren Schulen. Die Gründe hierfür sind teils äußere (Mangel geeigneter Arbeitsräume, ungenügende Ausrüstung mit Mikroskopen), teils Fehlen einer zur Uebernahme geeigneten Lehrkraft, teils das Bedenken, die Schüler durch zu viel fakultative Stunden zu belasten, teils mangelndes Interesse der Schulleiter oder der Kollegien für diesen Gegenstand; auch die Anstalten, die Biologie in Prima eingeführt haben, arbeiten — mit alleiniger Ausnahme der Luisenstädtischen Oberrealschule — nach wie vor entweder mit fakultativen Stunden oder mit solchen, die der Chemie entzogen werden. Beides ist nicht im Sinne des ministeriellen Erlasses. Fakultative Stunden stellen eine Mehrbelastung der Schüler dar, wenn diese auch im vorliegenden Falle von den Schülern nicht schwer empfunden wird; eine Verkürzung der Chemie ist aber, namentlich an den Realgymnasien, auf die Dauer nicht angängig, da dies Fach ohnehin schon über die geringste Stundenzahl unter allen obligatorischen Fächern verfügt. So muß leider ausgesprochen werden, daß die Wirkungen des Erlasses bedeutend hinter den Erwartungen zurückbleiben, die man an denselben knüpfen zu können glaubte. Als erfreulich ist hervorzuheben das verständnisvolle Entgegenkommen der städtischen Behörden Berlins, die den biologischen Etat der höheren Lehranstalten wesentlich erhöht, die Mehrkosten für die neu eingeführten Stunden bewilligt und für die erste Einrichtung biologischen Unterrichts außerordentliche Beihülfen gewährt haben. Besonders erfreulich aber ist der rege Eifer und das lebhafte Interesse, das die Schüler dem Gegenstande entgegenbringen. An den Anstalten, die aus äußeren Gründen die Teilnehmerzahl einstweilen beschränken müssen, ist die Zahl der Meldungen erheblich größer, als die der zur Teilnahme Zugelassenen.

*) Das Gymnasium zum Grauen Kloster plant die Einrichtung biologischen Unterrichts in Unterprima für Ostern d. J.

Im Anschluß an dies Referat wies Dr. Bastian Schmid (Zwickau), der der Versammlung als Gast beiwohnte, zunächst kurz auf einige neuere einschlägige Schriften, namentlich auf die Arbeit Norrenbergs über die naturwissenschaftlichen Schülerübungen*) hin, der nachdrücklich die Wichtigkeit praktischer Uebungen auf allen Stufen des naturwissenschaftlichen Unterrichts betont und gleichfalls das lebhafte Interesse der Schüler an solchen Uebungen hervorhebt. Indem Redner die Ausführungen Norrenbergs als eine gewichtige Zustimmung zu den von biologischer Seite erhobenen Forderungen begrüßte, ging er weiter auf die gegenwärtige Lage des biologischen Unterrichts in Sachsen ein, und führte aus, wie hier durch das mehr und mehr an Boden gewinnende System der Gabelung der oberen Klassen in eine mehr sprachlich-historische und eine mehr mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung auch für die Biologie ein breiterer Raum gewonnen worden sei.

Hatten die beiden ersten Redner sich wesentlich mit den gegenwärtigen Verhältnissen beschäftigt, so erörterte Prof. Ohmann, der derzeitige Vorsitzende der biologischen Fachgruppe, nunmehr die Frage, wie in Zukunft für den biologischen Unterricht der oberen Klassen eine festere Grundlage sich gewinnen lasse. Er ging zunächst von einer Besprechung des Ministerialerlasses aus, der in gewissen Grundgedanken — so in der Forderung praktischer Uebungen, in der Warnung vor Einseitigkeit und zu weitgehenden theoretischen Erörterungen — eine durchaus gesunde Grundlage für die Fortentwicklung des biologischen Unterrichts

*) Monatsschr. f. d. höh. Schulen VIII, Heft 9/10.

biete. Der biologische Unterricht hat es in erster Linie mit feststehenden Tatsachen zu tun. Indem er aus der Fülle dieser Tatsachen eine zweckentsprechende Auswahl trifft, übermittelt er etwas Spezifisches, an sich Wertvolles, das durch nichts, auch nicht durch den idealsten physikalischen oder chemischen Unterricht einschließlich moderner Schülerübungen ersetzt werden kann. Die gründliche Einführung in einige wenige, durch eigene Arbeit erschlossene Gebiete befähigt auch besser, als rein theoretische Erörterungen, zu eigenem kritischem Urteil und erzieht zu bescheidener Zurückhaltung. Eine derartige, auf praktische Uebungen und eigene Beobachtungen sich gründende Unterweisung kostet aber Zeit, und es ist daher mit dieser Forderung unvereinbar, wenn der Erlaß event. auch die Einführung einer einzigen Wochenstunde für genügend erklärt. Eine sichere Grundlage für die Biologie kann vielmehr nur durch eine feste Eingliederung derselben in den Gesamtlehrplan der Oberklassen mit wenigstens zwei Wochenstunden geschaffen werden, eine Eingliederung, in der nichts fakultatives bleibt, vor allem nicht etwa die biologischen Schülerübungen. Daß die Biologie eine solche Stellung verdient, bedarf nach allem, was in den letzten zehn Jahren hierüber gesagt und geschrieben wurde, nicht mehr weiterer Ausführung. Der Redner weist nur auf die überzeugenden Aussprüche Verworns*) hin. Andererseits ist, gegenüber manchen anderen Anforderungen, die an die Ausgestaltung der Lehrpläne gestellt werden, daran zu erinnern, daß die Biologie wenigstens für die Realanstalten nur die Stundenzahl zurückfordert, die sie bis 1882 besessen hat, und daß die ganze neuere Reformbewegung, die die Gesellschaft Deutscher Naturforscher zur Einsetzung einer besonderen Unterrichtskommission — der Vorläuferin des heutigen „Deutschen Ausschusses" — veranlaßte, hervorging aus der von Hamburg aus angeregten Bewegung für Verstärkung des biologischen Unterrichts. So muß der Biologie in diesem Falle eine Art Vorzugs- oder Meistbegünstigungsrecht eingeräumt werden.

Für diese unbedingt notwendige feste Eingliederung der Biologie kann aber die Zeit auf keinen Fall durch Verkürzung der übrigen naturwissenschaftlichen Fächer, der Physik oder der Chemie, gewonnen werden. Die Physik ist im Begriff, zu einer neuen, von vornherein auf praktische Uebungen sich aufbauenden Lehrweise, überzugehen; dies kann bei verkürzter Unterrichtszeit nicht geschehen. Die Chemie ist in gleicher Weise dabei, die bisher meist locker neben dem Unterricht hergehenden Uebungen demselben fester einzugliedern. Hierzu kommt, daß die ganze neuere Entwicklung der chemischen Wissenschaft, namentlich der physikalischen und organischen Chemie, diesen Zweig der Naturwissenschaften zu einer Disziplin erhoben hat, die der Physik völlig ebenbürtig zur Seite steht und daher, namentlich am Realgymnasium, eine Einbuße nicht erleiden darf. Es wäre sogar völlig gerechtfertigt und würde einen Ehrentitel für die deutschen Regierungen bedeuten, wenn im Lande Liebigs der chemische Unterricht noch eine viel breitere Grundlage erhielte.

Der für die Biologie nötige Raum kann auf den Realgymnasien nur dadurch geschaffen werden, daß der zum Teil auch schon von Vertretern der sprachlich-historischen Fächer als unhaltbar erkannte gleichzeitige Betrieb dreier Fremdsprachen auf der Oberstufe aufgegeben wird. Der Referent schätzt als ehemaliger Gymnasialschüler den Wert des Lateinischen für die sprachliche Schulung sehr hoch ein, glaubt aber, daß diese Sprache ihren Schwerpunkt vor allem in den unteren und mittleren Klassen habe, und in den oberen stark zurücktreten könne. Da die Berechtigungsfrage jetzt eine von dem Betrieb der alten Sprachen ganz unabhängige Lösung gefunden hat, verliert die gerade durch die Rücksicht auf diese Frage begründete Verstärkung des Lateinischen auf den Realgymnasien ihre Berechtigung. Für die Oberrealschulen ist die Abgabe einer der drei chemischen Stunden zugunsten der Biologie in Vorschlag gebracht worden. Es wird aber noch ein zweites Fach auf eine Stunde zu verzichten haben. Ob auch an dieser Anstalt eine sprachliche Stunde entbehrt werden kann, darüber enthält der Redner sich des Urteils. Auch das humanistische Gymnasium wird sich der Forderung einer Reduktion des altsprachlichen Unterrichts zugunsten der Chemie und der Biologie auf die Dauer nicht entziehen können. Eventl. könnte hier auch das Prinzip der Gabelung Anwendung finden. Mit Rücksicht darauf, daß geeignete Lehrkräfte zurzeit an den Realanstalten eher als an den Gymnasien sich finden dürften, empfiehlt der Redner, zunächst an jenen die feste Eingliederung vorzunehmen. Namentlich sollte dies möglichst sofort an all den Anstalten, realistischen sowie humanistischen, geschehen, die schon jetzt durch Einführung biologischen Unterrichts den Beweis für das Vorhandensein geeigneter Lehrkräfte erbracht hätten.

Die sehr lebhafte und eingehende Diskussion, an der auch mehrere Mitglieder des „Deutschen Ausschusses" sich beteiligten, ergab Einstimmigkeit in der Auffassung, daß das bisher Erreichte durchaus unzureichend, und daß nur durch neue, ergänzende Bestimmungen im Sinne einer

*) Beiträge zur Frage des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen. Jena 1907, Fischer.

festen, nicht von der Zustimmung der Vertreter anderer Fächer abhängigen Einfügung der Biologie in den Lehrplan ein entsprechender Erfolg zu erwarten sei. Es wurde schließlich einstimmig die nachstehende Resolution angenommen und weiterhin der Beschluß gefaßt, eine Kommission von fünf Mitgliedern zur Ausarbeitung einer die Resolution begründenden, eingehenden Denkschrift zu wählen, die Sr. Exzellenz dem Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten zuzustellen sei.

Die Resolution lautet in der von der Kommission redigierten Fassung:

„Der Ministerialerlaß vom 23. April 1908*) hat in dankenswerter Weise die Möglichkeit gegeben, biologische Unterweisungen und Uebungen an einer Anzahl höherer Lehranstalten versuchsweise einzuführen. Es hat sich dabei herausgestellt, daß diesem Lehrgegenstande, namentlich auch den praktischen Uebungen, seitens der Schüler ein sehr lebhaftes Interesse entgegengebracht wird; auch die Teilnahme an dem fakultativ eingerichteten Biologie-Unterricht ist eine sehr große. Es ist dies ein weiterer Beweis, daß für die Aufnahme der Biologie in den Lehrplan der oberen Klassen ein entschiedenes Bedürfnis vorliegt. Dagegen hat die in dem Ministerialerlaß gegebene Anregung, durch Abgeben einzelner Lehrstunden von anderen Fächern Unterrichtszeit für die Biologie zu gewinnen, eine Unterstützung seitens der Direktoren und der Vertreter der übrigen Lehrgegenstände bisher wohl nirgends gefunden, beispielsweise nicht an irgendeiner Berliner Lehranstalt. Weder auf sprachlicher noch auf mathematischer Seite besteht irgendwelche Geneigtheit, zugunsten der Biologie auf eine oder zwei wöchentliche Lehrstunden zu verzichten. Wo demnach biologischer Unterricht zurzeit eingerichtet ist, wird dieser entweder fakultativ erteilt oder auf Kosten eines Teiles der dem chemischen Unterricht zugewiesenen Lehrstunden. Daß dies den Intentionen der Ministerial-Verfügung nicht entspricht, liegt auf der Hand. Denn der für das moderne Leben so bedeutungsvolle chemische Unterricht, der noch die neuerdings immer wichtiger werdenden Unterweisungen in der Mineralogie und Geologie mit zu erledigen hat, kann, wenigstens am Realgymnasium, eine dauernde Einschränkung unter keinen Umständen auf sich nehmen, zumal ihm noch die neue Aufgabe erwächst, die Belehrungen aus der organischen Chemie zu erweitern, sobald erst der biologische Unterricht eingerichtet sein wird. Als eine große Erschwerung des biologischen Unterrichts macht sich auch die Lücke fühlbar, die durch die zeitweilige Unterbrechung in Obertertia bis einschließlich Obersekunda entsteht. Sehr hinderlich ist ferner, namentlich für Gymnasien, die Bestimmung des Erlasses, daß der biologische Unterricht in Prima nur von einem Lehrer erteilt werden darf, der schon anderen Unterricht in dieser Klasse gibt. Wo am Gymnasium ein für Biologie vorgebildeter Lehrer wirkt, ist dieser in der Regel nur in den mittleren Klassen beschäftigt, da der mathematisch-physikalische Unterricht in den oberen Klassen von dem speziellen Mathematiker erteilt wird.

„Ein wirklich befriedigender Erfolg des biologischen Unterrichts ist demnach nur dann zu erwarten, wenn — unter gleichzeitiger Aufhebung der letzterwähnten Bestimmung — dieser Lehrgegenstand mit zwei verbindlichen Wochenstunden durch alle Klassen der höheren Lehranstalten durchgeführt wird. Bei dem starken Ueberwiegen des sprachlich-historischen Unterrichtsstoffes wird sich die erforderliche Zeit im wesentlichen nur durch eine gewisse Beschränkung des fremdsprachlichen Unterrichts gewinnen lassen, was aber nicht auf dem im Ministerialerlaß empfohlenen Wege gegenseitiger Uebereinkunft, sondern nur auf dem Wege direkter Verfügung erreichbar ist.

„Es wird beschlossen, die Kgl. Unterrichtsbehörde zu bitten, die dringliche Sache des biologischen Unterrichts vorweg zu regeln und zu dem Ministerialerlaß vom 23. April 1908 Ergänzungsbestimmungen zu treffen, die dahin gehen,

„1. daß an allen Realvollanstalten, an denen zurzeit biologischer Unterricht in den Oberklassen erteilt wird — wodurch also der Beweis vorliegt, daß eine Lehrkraft dafür vorhanden ist — dieser Unterricht, wenn möglich schon von Ostern 1910 an als verbindliches Fach mit zwei Wochenstunden (wie in der Realschule I. Ordnung bis 1882) dem Lehrplan eingegliedert werde;

„2. daß allen übrigen Realvollanstalten, die über eine zur Uebernahme des Unterrichts geeignete Lehrkraft verfügen, die Einführung desselben in der unter Nr. 1 bezeichneten Form nicht nur gestattet, sondern zur Pflicht gemacht werde, und daß, wo diese Voraussetzung nicht zutrifft, auf die möglichst baldige Einstellung einer solchen Lehrkraft hinzuwirken sei;

„3. daß entsprechende Maßnahmen auch für die humanistischen Gymnasien getroffen werden und zwar unter Aufhebung der Bestimmung, welche die Heranziehung einer sonst nicht in Prima beschäftigten Lehrkraft zu diesem Unterricht ausschließt."

*) Der Ministerialerlaß trägt das Datum des 19. März, die denselben begleitende Verfügung des Prov. Schul-Kollegiums zu Berlin das des 23. April.

Die von der Kommission — der Prof. v. Hanstein, Prof. Ohmann, Direktor Wetekamp, Oberlehrer Dr. Fedde und Verlagsbuchhändler Dr. Salle angehörten — ausgearbeitete Denkschrift, die außer einem eingehenden Referat über die Sitzung die vorstehende Resolution enthält, schließt mit dem Hinweis darauf, daß durch die hier beantragte Eingliederung der Biologie die humanistischen Ziele der höheren Lehranstalten keine Beeinträchtigung, sondern im Gegenteil eine Förderung erfahren werden, und gibt der Ueberzeugung Ausdruck, daß die Kgl. Unterrichtsbehörde einen weiteren Aufschub in der Angelegenheit des biologischen Unterrichts nicht zulassen werde.

Die Denkschrift wurde mit einem Begleitschreiben am 25. November v. J. durch die beiden erstgenannten Mitglieder der Kommission dem vortragenden Rat im Kultusministerium, Herrn Geh.-Rat Norrenberg, übergeben und am 3. Dezember auch Herrn Provinzialschulrat Geh.-Rat Vogel zur Uebermittelung an das Kgl. Provinzialschulkollegium überreicht.

Dem Vorsitzenden der Ortsgruppe ging am 4. Januar d. J. als Antwort folgendes Schreiben zu:

„Von den Ausführungen der Denkschrift, betreffend die endgültige Eingliederung der Naturgeschichte in den Lehrplan der Oberstufe der höheren Lehranstalten, habe ich mit Interesse Kenntnis genommen.

Ich bin aber erst dann in der Lage, zu den von der Ortsgruppe vorgelegten Anträgen Stellung zu nehmen, wenn sich auf Grund längerer Erfahrungen ein Urteil darüber gewinnen läßt, wie sich die nach Maßgabe des Erlasses vom 19. März 1908 — U II 668 — angestellten Versuche bewährt haben.

Ew. Hochwohlgeboren ersuche ich ergebenst, die Mitunterzeichner der Eingabe hiervon in Kenntnis zu setzen.

(gez.) Trott zu Solz."

Der Satz, daß eine weitere Verfügung erst auf Grund „längerer Erfahrungen" getroffen werden könne, schien geeignet, schwere Besorgnis um die Zukunft des biologischen Unterrichts hervorzurufen. Von authentischer Seite wurde jedoch dem Vorsitzenden der Ortsgruppe mitgeteilt, daß hiermit in keiner Weise eine Vertagung ad calendas graecas beabsichtigt sei. Es sei jedoch der Unterrichtsbehörde die bisher verstrichene Frist namentlich deshalb noch als zu kurz erschienen, weil die meisten Anstalten, die auf Grund des Holleschen Erlasses biologischen Unterricht eingeführt haben, hiermit erst Ostern 1909 begonnen, also noch kein volles Jahr eigene Erfahrung hinter sich hätten. Der immerhin weitere Schritte für jetzt ablehnende Bescheid der Unterrichtsbehörde wurde in der Sitzung der Ortsgruppe vom 19. Januar 1910 mit dem Ausdruck größten Bedauerns entgegengenommen.

Hat sonach unsere Eingabe zurzeit zu einem positiven Erfolge leider nicht geführt, so scheint es um so dringender geboten, daß an möglichst zahlreichen Anstalten, wo es die Verhältnisse irgend gestatten, mit der Einführung biologischer Unterweisungen wenigstens im Rahmen des Erlasses von 1908, trotz der entgegenstehenden großen Schwierigkeiten, weiter vorgegangen wird. Es ist demgemäß auch zu wünschen, daß diejenigen wertvollen, aber jetzt brach liegenden Unterrichtskräfte, welche unter den jetzigen erschwerenden Umständen überhaupt nicht gewillt sind, an den biologischen Unterricht heranzutreten, ihren Standpunkt entsprechend ändern. Dies alles wird hoffentlich mit dazu beitragen, die Unterrichtsbehörde von der Notwendigkeit einer möglichst baldigen durchgreifenden Regelung der Angelegenheit zu überzeugen.

Ueber den wissenschaftlichen Charakter des elementaren Mathematik-Unterrichts.

Von F. Pietzker (Nordhausen).

Durch unser Schulwesen, insbesondere auf dem Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, geht seit einigen Jahren ein frischer Zug, über den sich jeder von Herzen freuen muß, der die größte Gefahr, wie für jeden Bereich menschlicher Tätigkeit, so insbesondere auch für den Unterricht und die Erziehung in der Stagnation erkennt. Einen besonders augenfälligen Ausdruck hat dieser frische Zug in der Niedersetzung der Körperschaften gefunden, die von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte mit dem speziellen Auftrag betraut worden sind, Vorschläge zur Verbesserung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auszuarbeiten. Wie bekannt, nahm diese praktische Verwirklichung der bereits schon länger in den beteiligten Kreisen herrschend gewesenen Bestrebungen ihren Ausgang von der Hamburger Naturforscher-Versammlung 1901, in der eine Reihe von angesehenen Vertretern der biologischen Wissenschaften und des biologischen Schulunterrichts die Wiedereinführung dieses Unterrichts in die oberen Klassen der höheren Schulen forderten. Nachdem dann insbesondere auch der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auf seiner Düsseldorfer Versammlung 1902 sich den Hamburger Thesen angeschlossen hatte, erfuhr die dadurch eingeleitete Bewegung eine bedeutsame Erweiterung durch das Eingreifen Felix Kleins auf der Kasseler Naturforscher-Versammlung 1902, die auf seine Anregung den Beschluß faßte, das Gesamtgebiet der mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrfächer zum Gegenstand einer eingehenden Prüfung auf deren Verbesserungsmöglichkeit und Verbesserungsbedürftigkeit zu machen. In Ausführung dieses Beschlusses wurde dann auf der Breslauer Naturforscher-Versammlung 1903 eine zwölfgliedrige aus Vertretern der Hochschulen, der höheren Lehranstalten und der Technik bestehende Kommission eingesetzt.

die nach dreijähriger angestrengter und umfassender Tätigkeit durch den deutschen Ausschuß für den naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht abgelöst wurde. Dieser Ausschuß, der neben Vertretern der unmittelbar beteiligten Unterrichtskreise Vertreter einer großen Zahl wissenschaftlicher Vereinigungen zu seinen Mitgliedern zählt, steht zurzeit noch mitten in seiner Arbeit, die sich mehr und mehr auf alle Zweige des Unterrichts und namentlich auf die sämtlichen Klassen der Unterrichtsanstalten, an denen die mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrfächer eine Rolle spielen, auszudehnen im Begriff ist. Eine reiche von der Tätigkeit der genannten beiden Körperschaften, wie von der Stellungnahme der beteiligten Kreise zu dieser Tätigkeit Zeugnis gebende Literatur liegt bereits vor und ist in fortwährendem Wachsen begriffen.

Wie schon bemerkt, ist die ganze Bewegung hocherfreulich, und besonders erfreulich in ihr ist namentlich auch das eine Moment, daß in dieser Bewegung Gelegenheit gegeben ist, zwischen verschiedenen Interessenkreisen und verschiedenen Auffassungssphären eine lange Zeit vermißt gewesene Fühlung neuzuschaffen. Das gilt z. T. von den beiden Interessenkreisen der mitten im Leben stehenden Männer der Praxis einerseits und der an der wissenschaftlichen Forschung und dem wissenschaftlichen Unterricht arbeitenden Männer der Theorie andererseits. Es gilt aber noch ganz besonders von der Fühlung zwischen den Vertretern der wissenschaftlichen Forschung, die ja zugleich die Lehrer der an der Hochschule studierenden Jugend sind, und den Lehrern an den für die Hochschulen vorbereitenden höheren Mittelschulen, gerade hier haben die genannten Körperschaften eine nur mit großer Genugtuung zu begrüßende Annäherung vermittelt.

Indessen läßt sich nicht verkennen, daß bei diesem Zusammenarbeiten der wissenschaftlichen Forscher mit den an den sog. höheren Schulen tätigen Fachlehrern auch eine gewisse Gefahr besteht, die in dem natürlichen Uebergewicht der Hochschule gegenüber den für sie vorbereitenden Lehranstalten begründet ist. Gerade die Zusammensetzung des deutschen Ausschusses, in den, wie oben erwähnt, alle wissenschaftlichen, in der Pflege der einzelnen Disziplinen (Mathematik, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie usw.) ihre Aufgabe sehenden Vereinigungen ihre Vertreter, die naturgemäß größtenteils Hochschullehrer sind, entsendet haben, gerade diese Zusammensetzung legt es nahe, daß das Schwergewicht bei der geplanten Reform auf die Seite fällt, die vom Standpunkte der wissenschaftlichen Forschung aus ja ganz natürlich als die Hauptseite erscheint, nämlich die Erhaltung und Steigerung des wissenschaftlichen Gepräges auch für den erst für das Hochschulstudium vorbereitenden Unterricht, der dabei möglichst der Entwicklung der wissenschaftlichen Forschung folgen solle.

Ich möchte mich schon hier gegen den Vorwurf verwahren, als ob ich der Forderung der Wissenschaftlichkeit für den eben genannten Unterricht feindlich gegenüberstände, ich wünsche in meinen Ausführungen nur darauf hinzuweisen, daß dieses Moment — wie jedes Einzelmoment überhaupt — seine natürliche Einschränkung durch gewisse andere gleichfalls bedeutsame und gar nicht außer acht zu lassende Momente findet.

Um die Gesichtspunkte, die ich dabei vorzugsweise im Auge habe, deutlicher hervortreten zu lassen, möchte ich dabei gleich von vornherein angeben, worin nach meiner Auffassung der spezifisch wissenschaftliche Charakter der menschlichen Geistestätigkeit begründet ist. Es ist das allerdings eine nicht ganz einfache Sache; wie schwer allein es ist, einen festen, der allgemeinen Zustimmung sicheren Boden zu gewinnen, kam mir u. a. auf der schon genannten Düsseldorfer Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zum Bewußtsein, zu deren Beratungsgegenständen damals auch die Frage der Schaffung einer Enzyklopädie der Elementar-Mathematik gehörte. Dabei spielte die Frage, was man eigentlich unter Elementar-Mathematik zu verstehen habe, eine Hauptrolle, diese Frage aber ist im Grunde mit der nach der Stelle, wo der allgemein verständliche, jedem zugängliche Betrieb der Mathematik aufhört und die wissenschaftliche Behandlung mathematischer Probleme beginnt, identisch. Wo aber diese Stelle zu suchen sei, was das eigentliche, die höhere, d. h. wissenschaftliche Mathematik von der Elementar-Mathematik unterscheidende Merkmal sei, darüber gingen die Meinungen in der auf der Düsseldorfer Versammlung veranstalteten Diskussion sehr auseinander.

Ich habe mich damals (s. Unt.-Bl. VIII, S. 100) dahin geäußert, daß ich das entscheidende Kennzeichen der eigentlich wissenschaftlichen Behandlung in „der strengen, alle Einzelheiten aus einem Grundprinzip ableitenden Systematik“ und umgekehrt in dem Verzicht auf diese Systematik das Kennzeichen des elementaren Charakters erblickte. Dabei habe ich mich zugleich gegen ein mögliches Mißverständnis verwahrt, indem ich den innerlichen Charakter der von mir als Kennzeichen der Wissenschaftlichkeit hingestellten Systematik betonte, denn eine gewisse äußere Systematik ist ja bei jeder Stoffbehandlung im Unterricht überhaupt ganz unerläßlich.

Aber gerade die innere Systematik, die die Wissenseinzelheiten unter allgemeinen, aus der Natur der Sache selbst folgenden Gesichtspunkten zusammenfaßt, um jede einzelne eben durch den auf diese Weise vermittelten Zusammenhang mit allen anderen zu ihr in Beziehung stehenden Einzelheiten tiefer und vollständiger zu erfassen, gerade diese Art der Stoffbehandlung bedingt nach meiner Meinung eben das wissenschaftliche Gepräge. Und an dieser Auffassung möchte ich auch heute noch festhalten, ich möchte dies gerade in dem Zusammenhange, über den ich mich an dieser Stelle äußere, auch deswegen, weil die von mir vertretene Auffassung es ganz von selbst mit sich bringt, daß der wissenschaftliche Charakter der Stoffbehandlung abgestuft werden kann, daß er verschiedener Grade fähig ist.

Denn die Tragweite der Gesichtspunkte, unter denen man den behandelten Stoff betrachtet, kann ja eben selbst sehr verschieden sein, so daß man sie je nach dem Standpunkte dessen, den man in diesen Stoff einführen will, verschieden bemessen kann. Für den Maßstab aber, den man dabei anzulegen hat, gibt es, wie ich glauben möchte, auch eine ganz klar zutage liegende Norm, die ich so formulieren möchte:

Durch die zusammenfassende Behandlung des Stoffes im ganzen darf die Fähigkeit, die verschiedenen, in die behandelten Stoffgebiete fallenden Einzelheiten je nach ihrer Eigenart zu begreifen, nicht ertötet werden.

Oder mit anderen Worten: die Wissenschaftlichkeit darf nicht soweit getrieben werden, daß sie Gefahr läuft, zum Doktrinarismus zu verführen. Wo der Punkt zu suchen ist, an dem diese Gefahr eintritt, das ist keine sachlich wissenschaftliche, sondern vielmehr eine psychologische Frage. Je höher das Geistesniveau eines Menschen ist, um so mehr wird er in der Lage sein, über dem umfassenden Hinblick auf die Gesamtheit der Erscheinungen das Verständnis für die Einzelerscheinung nicht zu verlieren.

Ein Unterricht, der bei dem Bestreben der wissenschaftlichen Stoffbehandlung das geistige Vermögen der zu unterrichtenden Schüler überschätzt, läuft Gefahr, statt einer vertiefenden Einsicht in den Zusammenhang der Dinge ein unfreies Hantieren mit äußerlichen, in ihrem Wesen nicht voll begriffenen Regeln zu erzeugen, wenn er nicht — und das kommt auch vor — überhaupt gänzlich erfolglos bleibt.

Und darum möchte ich sagen, das Maß der wissenschaftlichen Verallgemeinerung, die der Unterricht bietet, muß sich der Schulstufe anpassen, es muß mit der zunehmenden Geistesreife der Schüler und zwar sehr allmählich ansteigen, auf den tieferen Stufen muß die Behandlung der Einzelerkenntnisse im Vordergrunde stehen, um dann mehr und mehr durch die zusammenfassende, auf Prinzipien von allgemeinerer Tragweite gegründete Stoffbehandlung abgelöst zu werden.

Das entspricht ja auch durchaus der Anschauung, daß die Entwickelung des einzelnen Individuums eine verkürzte Wiederholung des Entwickelungsganges der ganzen Gattung sein müsse — eine Anschauung, der ich — allerdings in gehöriger, alle Uebertreibungen abweisender Einschränkung — meinerseits durchaus zustimmen möchte. Denn auch die menschliche Erkenntnis in ihrer allmählichen geschichtlichen Gesamtentwickelung hat ja nirgends mit den Prinzipien angefangen, vielmehr sich innerhalb jedes einzelnen der von ihr in Besitz genommenen Gebiete auf einer an Breite immer zunehmenden Basis von Einzelerkenntnissen aufgebaut.

Wenn man nun die Art ins Auge faßt, in der die eben aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkte in den einzelnen Zweigen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zur Verwirklichung zu bringen sind, so finden sich für jedes Spezialgebiet besondere, aus der Natur dieses Gebiets entspringende Schwierigkeiten, die nirgends so groß sind wie auf dem Gebiete der Mathematik, wo der deduktive Charakter der mathematischen Wissenschaft zusammen mit der Schwierigkeit der von ihr fortwährend geübten Begriffsabstraktion es mit sich bringt, daß zwischen dem wissenschaftlichen System, in welches der Hochschulunterricht einführt, und dem auf der „höheren Lehrerstelle“ verarbeiteten Wissensstoff eine weite, in keinem anderen Wissensfach eine ähnliche Tiefe aufweisende Kluft besteht.

Indem ich mir vorbehalte, bei anderer Gelegenheit von dem hier von mir eingenommenen Standpunkte aus mich auch über den Unterricht in den eigentlich naturwissenschaftlichen Fächern zu äußern, will ich mich darum heute auf eine Reihe von Bemerkungen über den Mathematikunterricht beschränken, die naturgemäß einen stark aphoristischen Charakter tragen und in keiner Weise den Anspruch erheben, das behandelte Thema zu erschöpfen.*)

Ich beginne diese Bemerkungen mit einer kurzen Skizzierung der gegen den gegenwärtigen Zuschnitt des mathematischen Unterrichts von seiten der Hochschulkreise oder wenigstens einiger, eine besonders hervortretende Stellung einnehmender Hochschullehrer erhoben werden, es ist ja nur begreiflich, daß der erwähnte Gegensatz zwischen dem Charakter des Hochschulunterrichts und dem des Elementarunterrichts in diesen Kreisen besonders stark als Uebelstand empfunden wird; ob diese Empfindung ihre gehörige Berechtigung hat, ist freilich eine andere Frage.

Hier wird nun dem Elementarunterricht direkt vorgeworfen, daß er der Entwickelung der Wissenschaft zu wenig gefolgt sei, daß er großenteils noch auf dem Standpunkte stehe, den die mathematische Wissenschaft etwa vor anderthalb Jahrhunderten eingenommen habe, daß er sich mit Einzelheiten befasse, die nur im Zusammenhange mit anderen Einzelheiten Bedeutung besäßen, daß diese Einzelheiten unter Gesichtspunkten betrachtet würden, die inzwischen von der Wissenschaft längst überholt seien u. dergl. m.

So befinde sich denn der zum Studium der Mathematik übergehende Jüngling in der bedauerlichen Lage, geradezu umlernen zu müssen, wenn er sein Hochschulstudium beginne, eine Reihe von Begriffen, mit denen er bis dahin vorzugsweise operiert habe, völlig aufgeben und andere, ihm völlig neu entgegentretende Gesichtspunkte in sich aufnehmen zu müssen. Im Zusammenhange damit stehe es, daß der Unterricht unserer höheren Schulen sich auch jetzt noch nicht dazu aufzuschwingen wisse, die Verknüpfungspunkte zwischen den einzelnen Gebieten gehörig zu beachten und auszunutzen, er trage vielmehr meist einen partikularistischen Charakter, vermöge dessen er das ganze Wissensgebiet in eine Reihe wohl abgegrenzter Teile zu zerlegen und in jedem einzelnen von diesen Teilen mit einem Minimum von Hilfsmitteln unter möglichster Vermeidung von Anleihen aus den Nachbargebieten auszukommen suche.

Alle diese Gesichtspunkte haben, wie bekannt, eine besonders ausgeprägte Vertretung in den — auch in dieser Zeitschrift (von mir selbst) besprochenen — Vorlesungen über die Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*) aus gefunden, die F e l i x K l e i n in den letzten Jahren durch ihre Veröffentlichung weiteren Kreisen zugänglich gemacht hat.

Ich möchte die mächtige Anregung, die die K l e i n schen Ausführungen geben, auch an dieser Stelle dankbar begrüßen, was mich aber nicht abhalten kann, diese Ausführungen unter die kritische Lupe zu nehmen und ihnen nicht bloß in verschiedenen Einzelheiten, sondern auch hinsichtlich der für sie grundlegenden Gesichtspunkte wenigstens zum Teil entschieden zu widersprechen. Es ist notwendig, daß zu diesen Ausführungen sich auch Männer äußern, die tatsächlich lange im Schulbetrieb stehen und die — ohne persönlich die Fühlung mit den Fortschritten der Wissenschaft zu verlieren — doch ihr Auge vor den Bedingungen nicht verschließen, an die die Praxis des

---

*) Eine gewisse Ergänzung finden die Ausführungen dieses Artikels in Bemerkungen, die ich bei anderem Anlaß gleichfalls von dem hier vertretenen Standpunkt aus gemacht habe, wie in dem von mir der Hamburger Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts erstatteten Bericht über die darstellende Geometrie im Lehrplan der höheren Schulen (Unt.-Bl. VI, S. 101) und in meiner Besprechung der weiterhin besonders in Bezug genommenen K l e i n schen Vorlesungen über die Elementarmathematik (Unt.-Bl. XV, S. 89).

*) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Vorlesungen von F. K l e i n, ausgearbeitet von E. Hellinger. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis; Teil II: Geometrie. — Leipzig 1908/09, Teubner.

Schulunterrichts nun einmal unvermeidlicherweise gebunden ist.

Diese Bedingungen kann ja der Hochschullehrer nicht aus eigener Erfahrung kennen, wenn er nicht wenigstens selbst einige Zeitlang Gymnasiallehrer gewesen ist. Und auch in dem letzteren Falle liegt die Gefahr vor, daß die Erinnerungen an die Zeit seiner Tätigkeit an einer höheren Schule allmählich verblassen gegenüber den lebendigen Eindrücken, die er im Verkehr mit den Studierenden immer neu empfängt.

Diese Studierenden unterscheiden sich aber von den Schülern der höheren Schulen nach zwei Richtungen in sehr bemerkenswerter Weise. Sie besitzen erstens vermöge ihres höheren Lebensalter eine größere geistige Reife und sie stellen zweitens eine Elite aus den Schülern der höheren Schulen vor, die ja, auch wenn sie die Reifeprüfung bestehen, doch nur zum Teil zum Hochschulstudium überhaupt und zu einem sogar sehr kleinen Teile zum Studium der Mathematik übergehen.

Von dem geistigen Niveau, das man an diesen Studierenden beobachtet, kann man unmöglich die Normen ableiten, die für den den höheren Schulen obliegenden allgemeinbildenden Unterricht maßgebend sind. In diesem hat man es zum größten Teil mit Elementen zu tun, die dem Stoff des Unterrichts ein nur geringes Interesse und Verständnis entgegenbringen, während zugleich ihre Fähigkeit der wissenschaftlichen Auffassung überhaupt erst erweckt und entwickelt werden muß.

Dazu gehört auch ein geeigneter Stoff, dessen Wert man nun nicht nach seiner Bedeutung für das wissenschaftliche System beurteilen darf, den man vielmehr vor allem daraufhin prüfen muß, inwiefern er den natürlichen psychologischen Bedingungen des jugendlichen Geistes konform ist. Und in diesem Lichte erscheint manches als berechtigt und angemessen, was für die wissenschaftliche Fassung geradezu belanglos ist.

So möchte ich doch für solche Gebiete, wie die elementaren Kreis- und Dreiecks-Konstruktionen, oder die Lösung algebraischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten eine Lanze brechen, ohne zu verkennen, daß man davon wenig praktische Anwendungen machen kann und daß sie für die Beschäftigung mit der höheren Mathematik keinen direkten Nutzen haben. Das schließt nicht aus, daß der mathematische Sinn, die Fähigkeit, die wechselseitige Abhängigkeit verschiedener sich untereinander nach Maß und Zahl bedingender Faktoren an solchen, innerhalb des Schülergesichtskreises bleibenden Aufgaben in sehr fruchtbarer Weise geübt werden kann. Es kommt nur darauf an, wie man es macht, aber es läßt sich solchem Unterricht sehr wohl eine Gestalt und ein Inhalt geben, daß er auch für den von Nutzen ist, der sich nachher spezifisch mathematischen Studien zuwenden will. Natürlich sind alle künstlich herausgetiftelten Aufgaben solcher Art auszuschließen, ich will auch nicht verkennen, daß da noch viel geschehen kann, in den gangbaren Aufgabensammlungen findet sich da noch viel toter Stoff, ebenso ist es zu verwerfen, wenn die Beschäftigung mit solchen Aufgaben zur mechanischen Eindrillung spezieller, im übrigen nicht verwendbarer Lösungsformen ausgenutzt wird. Das sind aber Gesichtspunkte, die mit der Wahl des Stoffes an sich nichts zu tun haben. Es ist nur die eine Forderung zu erheben, daß die Stoffbehandlung mit der Beweglichkeit und Freiheit erfolgt, die überhaupt für einen erfolgreichen, wirklich bildenden Unterricht unumgänglich ist. Und dazu ist allerdings eine Vorbedingung die, daß der Lehrer aus dem Vollen schöpft, daß er selbst über seinem Stoff steht. Der Wert der Kleinschen Vorträge liegt in der eindringlichen Mahnung, die sie nach dieser Richtung hin tatsächlich an jeden Fachlehrer richten, um dessentwillen muß man ihr Erscheinen mit Freude begrüßen, auch wenn man hinsichtlich der prinzipiellen Gesichtspunkte über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen wesentlich anderer Ansicht ist.

In der Hand eines Lehrers, der dieser Forderung einigermaßen genügt, während er zugleich sich durch seine Beschäftigung mit den Denkformen der höheren Mathematik das feine und sichere Gefühl für die Grenzen, die der Auffassung des Schülers durch dessen Lebensalter und Geistesreife gestellt sind, sich nicht hat verkümmern lassen, in der Hand eines solchen Lehrers können passend gewählte geometrische Aufgaben sehr wohl dazu dienen, einerseits die Beweglichkeit, Vielseitigkeit und Schnelligkeit der räumlichen Anschauung zu steigern, andererseits das Gefühl für die Grundelemente des kausalen Denkens, für die etwaige Unvollständigkeit der in Betracht kommenden Bestimmungen, wie für die Ueberbestimmung und für die gegenseitige Verträglichkeit der vorkommenden Bedingungen zu schärfen. Das sind alles auch Dinge, die weit über die Sphäre des mathematischen Unterrichts hinaus für die allgemeine Geistesschulung von Bedeutung sind, ihre ausgiebige Verwertung wird um so mehr gesichert sein, je mehr sich dabei der Lehrer von pedantischer Schablone frei erhält, je größeren Wert er auf die Sache selbst, statt auf die Wortfassung legt, dabei denke ich z. B. ganz besonders an den für die eindringende Raumanschauung so bedeutsamen Begriff der Symmetrie. Und in dieser Weise betrieben werden sie auch ihren didaktischen Wert nicht völlig verlieren, wenn die Geometrie eine Umgestaltung nach der Richtung hin erfahren wird, zu der namentlich die Anwendungen auf physikalische Sachverhältnisse drängen, nämlich durch eine elementare Ausbildung der Vektorenrechnung, die übrigens ja in einer Reihe von elementaren geometrischen und geometrisch-mechanischen Deduktionen schon jetzt gewissermaßen latent auftritt und ohne, oder vielleicht auch hier und da mit Nennung des Namens, zu einiger Geltung gebracht wird. Auch dann wird ein gewisser Reichtum an geometrischen Vorstellungen, wie er durch einen vernünftigen Betrieb elementar-geometrischer Konstruktionen geschaffen wird, von Wert sein.

Und ebenso wird eine gewisse Gewandtheit in der Handhabung der algebraischen Umformungen, wie sie die Frucht einer vernünftig betriebenen Schulung im Lösen von Gleichungen ist, reinen sowohl wie auch angewandten, der Richtung nicht sowohl entgegenwirken, als vielmehr Vorschub leisten, die jetzt so lebhaft, nicht zum wenigsten auch von Klein selbst, betont wird, nämlich der Pflege des funktionalen Denkens oder wie es vielleicht besser zu bezeichnen sein wird, der Erweckung und Steigerung des instinktiven Gefühls für die wechselseitige Abhängigkeit veränderlicher Zustände.

Jede Lösung einer algebraischen Aufgabe zeigt ja doch die vorher unbekannte Größe als Funktion der anderen in der Aufgabe auftretenden Größen, und auf diese Seite der Sache ist gewiß schon längst von einer großen Zahl einsichtiger Lehrer immer wieder hingewiesen worden. Vermutlich ist dieser Punkt einer von denen, die zu der vielfach aufgestellten Behauptung Anlaß geben, die sog. Meraner Vorschläge brächten ja gar nichts neues, sie seien in der Praxis des Unterrichts an vielen Orten bereits verwirklicht.

Natürlich kommt die eben erwähnte Ausnutzung der Gleichungsbehandlung vor allem bei den eingekleideten Aufgaben zur Geltung, die aber — das darf man wohl sagen — schon seit geraumer Zeit im Vordergrunde stehen, die Forderung der Zurückdrängung künstlich ausgetiftelter algebraischer Umformungen zugunsten der Anwendung auf konkrete Verhältnisse ist längst vor den Meraner Vorschlägen mannigfach erhoben und in verschiedenen Aufgabensammlungen mehr oder weniger deutlich zur praktischen Verwirklichung gebracht worden. Sie ist z. B. auch in dem sog. Braunschweiger Beschluß enthalten, den auf Anregung von Richter (Wandsbek) der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts im Jahre 1891 gefaßt hat, einem Beschluß, der vielfach mißverstanden und darum angefeindet, doch, wenn man ihn ohne Voreingenommenheit betrachtet, nichts anderes enthält, als was gegenwärtig für die Mehrzahl der Fachlehrer als selbstverständlich gilt. Uebrigens wird man dabei nicht verkennen dürfen, daß die in der Schule zur Behandlung kommenden Einkleidungen doch immer von der Wirklichkeit sich etwas entfernen werden, weil gewisse Vereinfachungen des Sachverhalts durch die Rücksicht auf die Fassungskraft und namentlich das Uebersichtsvermögen des jugendlichen Geistes geradezu geboten sind. Und man wird darum auch die Aufgaben nicht völlig abweisen dürfen, deren Einkleidungen eine unmittelbare praktische Bedeutung nicht besitzen. Für die Erwerbung und Steigerung der Fähigkeit, in einem dargelegten Sachverhalt den Punkt herauszufinden, an dem die mathematische Formulierung der Aufgabe anzusetzen hat, können auch solche Aufgaben sehr nützlich sein, es kommt auch hier alles auf die zielbewußte, über dem Stoff stehende freie Behandlung der Aufgabe durch den Lehrer an.

Eine weitere Ausgestaltung des Unterrichts nach dieser Richtung wird dabei auch niemals der Pflege des Sinnes für die mathematischen Eigenschaften der algebraischen Ausdrücke Eintrag tun. Denn auf die Darstellung der Abhängigkeit eines veränderlichen Faktors von anderen sich gegenseitig mit ihm bedingenden Faktoren durch die Form des algebraischen oder analytischen Ausdrucks läuft doch auch bei den Anwendungen jede Aufgabenlösung immer hinaus. Und jedes mathematisch formulierte physikalische oder überhaupt naturwissenschaftliche Gesetz hat die Gestalt der analytischen Formel, die von selbst dazu auffordert, die einzelnen Momente des in ihr zur Darstellung kommenden natürlichen Vorgangs als Folgerungen aus der mathematischen Eigenart der darstellenden Formel zu erkennen, d. h. also die Behandlung der einer mathematischen Fassung zugänglichen naturwissenschaftlichen Probleme in eine gewisse Parallele zu der Behandlungsart zu setzen, von der die analytische Geometrie beherrscht wird.

Das ist auch geradezu unabweislich, wenn man einer Gefahr vorbeugen will, auf die ich gelegentlich schon an anderer Stelle hingewiesen habe. Wenn in der Forderung der Pflege des funktionalen Denkens, wie sie in den „Meraner Vorschlägen“ erhoben wird, wirklich etwas Neues liegt, so dürfte das hauptsächlich insofern zutreffen, als diese Vorschläge die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeit besonders betonen. Das hat ja gewiß seine große Berechtigung namentlich in unserer Zeit, wo die graphische Darstellung auf so vielen, mit den Bedürfnissen des praktischen Lebens unmittelbar in Beziehung stehenden Gebieten eine so große Rolle spielt. Aber es ist auch nicht ohne eine gewisse Gefahr, die nämlich, daß dabei die Sache selbst mit ihrem äußerlichen, über die inneren Gründe des Zusammenhangs keinerlei Aufschluß gebenden Ausdruck verwechselt wird. Wenn man von den eigentlichen geometrischen Sachverhältnissen, wie sie in der Koordinatengeometrie auftreten, absieht, bietet die graphische Darstellung niemals den Sachverhalt selbst, sondern nur eine räumliche Analogie dazu, die sogar unter Umständen (wenn es sich z. B. um die gegenseitige Abhängigkeit gewisser geometrischer Größen handelt) das wirkliche Abhängigkeitsverhältnis eher verdunkelt, als aufhellt.

Den wirklichen inneren Zusammenhang gibt die graphische Darstellung niemals, wohl aber kann ihn die algebraische Formel soweit aufdecken, wie er sich überhaupt mathematisch erfassen lässt. Und darum wird auch die Lösung von Gleichungen unter Verwendung der graphischen Darstellung m. E. immer nur als Ergänzung, niemals als Ersatz der algebraischen Lösung gelten können.

Aber als solche wird sie allerdings ihren berechtigten Platz behaupten, namentlich für die Aufgabe der annähernden Lösung numerischer Gleichungen, die man auf der Schule überhaupt mehr pflegen sollte, als es bisher meist geschehen zu sein scheint. Dafür wird man neben einer ganzen Reihe von Gleichungen besonderer Form, wie z. B. den reziproken Gleichungen namentlich auch die formelmäßige Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades zweckmässiger Weise ausmerzen, da eine unter allgemeinen Gesichtspunkten erfolgende Behandlung der Gleichungen höheren Grades, wie sie Klein im Anschluß an seine eigenen Untersuchungen auch in seinen oben erwähnten Vorlesungen behandelt, m. E. aus den Grenzen der Schule völlig herausfällt.

Fallen lassen muß man überhaupt vieles, was zurzeit in den geltenden Lehrplänen auftritt, das ist wohl Niemandem zweifelhaft, aber allerdings gehen die Ansichten über das, was auszuscheiden sein würde, weit auseinander.

M. E. sollte vor allem die Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der Gaußschen Zahlenebene der Schule fernbleiben. Ich behandle dieses Kapitel selbst seit einigen Jahren, seitdem es dem Lehrplan eingefügt worden ist, und kann mit dem Erfolge meiner Behandlung äußerlich sehr wohl zufrieden sein. Aber von einer innerlichen Wirkung auf die ganze Auffassung und Anschauungsweise habe ich immer nur bei den spezifisch mathematisch beanlagten Schülern etwas bemerkt, für die Mehrzahl der Schüler beschränkte sich die Wirkung auf die äußerliche Aufnahme des neuen Wissensstoffes und mußte dies m. E. auch, weil das ganze Kapitel mit dem sonstigen Inhalte des mathematischen Schulunterrichts zu wenig Berührungspunkte bietet.

Indem ich in meinen, wie schon betont, notwendig von einer erschöpfenden Behandlung des Themas absehenden Ausführungen auf eine Reihe anderer Einzelheiten verzichte, möchte ich mich von meinem Standpunkte aus auch hier noch über die Frage äußern, ob und inwieweit es angezeigt sei, die Elemente der Infinitesimal-Analysis in den Schulunterricht hineinzuziehen.

Für diese Hineinziehung wird vielfach und gerade auch von Klein der Grund ins Feld geführt, daß man ja auch jetzt schon versteckte Infinitesimal-Analysis triebe, gewisse Flächen- und Körper-Berechnungen in der Geometrie, die Herleitung einzelner physikalischer Gesetze, wie z. B. des Fallgesetzes seien Beispiele einer versteckten Infinitesimalbehandlung, die sich nur vor dem Namen scheue, gewisse Begriffe wie Geschwindigkeit und Beschleunigung seien doch nichts weiter als Differentialquotienten, hierhin gehöre ferner auch die elementare Behandlung der Maxima und Minima, wie sie nach Schellbachs Vorgang oder ähnlich mannigfach geübt werde u. dergl. m.

Das muß ich alles als tatsächlich zutreffend einräumen, kann mich aber gerade von dem hier meinerseits vertretenen Standpunkte aus trotzdem nicht zu der offiziellen Einführung der Infinitesimal-Analysis bekennen.

Gerade darin, daß man bei den eben angeführten Anlässen sich nicht auf die allgemeinen, von der Infinitesimal-Analysis systematisch zusammengestellten Normen beruft, darin liegt m. E. das Bildende, was die Behandlung der genannten und anderer ihnen verwandter Aufgaben im Schulunterricht mit sich bringt. Man wird dabei der Eigenart des jeweils behandelten Problems besser gerecht, als wenn man es nach dem allgemeinen Rezept behandelt. Da liegt wirklich die Gefahr vor, daß man den Schülern nur eine neue Technik beibringt, die sie mit einer gewissen Gewandtheit handhaben können, ohne doch ihre innerliche Bedeutung zu erfassen.

Die Zusammenfassung aller solcher Einzelmethoden zu dem System der Infinitesimal-Analysis würde m. E. dann die der Hochschule vorzubehaltende Befriedigung des Bedürfnisses sein, das sich bei den spezifisch mathematisch beanlagten Schülern — aber auch nur bei diesen — als Folge jenes Einzelunterrichtes ganz von selbst einstellen würde.

In der Meinung, daß die Befriedigung dieses Bedürfnisses nicht der „höheren Schule", sondern der Hochschule zufallen muß, haben mich die Ausführungen Kleins selber gerade nur bestärken können.

Denn die Einführung in die Elemente der Infinitesimal-Analysis könnte zugleich doch nicht ohne Eingehen auf die prinzipielle Auffassung von den Grundlagen der ganzen Rechnung erfolgen. Wie sehr aber in dieser Hinsicht die Ansichten gerade auch bei den bedeutendsten Fachvertretern auseinandergegangen, welche grundsätzlichen Bedenken gerade bei den Grundbegriffen von vornherein auf verschiedenen Seiten laut geworden sind, das kann man aus der so schönen geschichtlichen Darstellung, die Klein von der Entstehung der Infinitesimal-Analysis gibt, deutlich ersehen.

Und da möchte ich meinerseits noch einiges ganz besonders betonen. Der Leibnizschen Bezeichnung der Differentialquotienten wie des Integrals vermag ich die Vorzüge, die Klein an ihm rühmt, nicht zuzusprechen. Im Gegenteil finde ich, daß diese Bezeichnungen selbst noch ganz besonders geeignet sind, für nachdenkliche Naturen Schwierigkeiten von schwer zu überwindender Art zu schaffen. Der Differentialquotient, der die Grenze sein soll, der sich der Differenzenquotient bei stetigem Abnehmen der Differenzen nähert, hat nach Leibniz die Form des Quotienten zwischen zwei Größen behalten, deren jede doch für sich in der Rechnung geradezu als eine Größe vom Werte Null gilt. Ebenso erscheint das Integral nicht als das, was es sein soll, die Grenze, der sich eine Summe von schmalen Streifen bei immer abnehmender Streifenbreite unter gleichzeitiger Zunahme der Streifenzahl nähert, sondern geradezu als Summe von lauter unendlich schmalen Streifen selbst, deren jeder einzelne an sich doch als eine Größe vom Werte Null gilt. Aehnliche Anstände ergeben sich bei den physikalischen Deutungen der Differentialquotienten und Integrale.

Und da sei es mir erlaubt, auch noch der vielleicht sehr ketzerisch erscheinenden Meinung Ausdruck zu geben, daß diese Schwierigkeiten in der ganzen Stoffbehandlung selbst begründet sind, die in der Infinitesimal-Analysis zum wissenschaftlichen System ausgebaut worden ist. Diese Systematik sucht die Schwierigkeit der stetigen Wandlung dadurch zu bewältigen, daß sie solche Wandlung als eine Folge von unendlich vielen unendlich kleinen Sprüngen auffaßt.

Ich verkenne gar nicht, daß man zurzeit kein anderes Mittel hat, um dem Problem der Stetigkeit beizukommen, aber das ändert doch an der Tatsache nichts, daß diese Art seiner Bewältigung im Grunde nur ein Notbehelf ist.

Aus diesem Notbehelf hat die Infinitesimal-Analysis ein Prinzip gemacht.

Wie sehr dabei aber die Sache selbst hinter der äußeren Form zurücktritt, zeigt sich schon in dem Namen „Infinitesimal-Analysis". Denn an sich hat das Problem, um das es sich handelt, das Problem der Stetigkeit mit der Unendlichkeit gar nichts zu tun. Die Differentialquotienten, wie die Integrale sind im allgemeinen endliche Größen, die nur im Einzelfalle unendliche Werte annehmen. Nur aus der Auffassung der stetigen Wandlung als einer Folge von unendlich lich vielen unendlich kleinen Sprüngen erklärt es sich, daß eine Analysis, die ihrem eigentlichen Gegenstande nach Analysis der stetigen Veränderungen oder vielleicht kürzer Stetigkeits-Analysis heißen sollte, als Infinitesimal-Analysis, Analysis des Unendlichen bezeichnet wird, was sie tatsächlich gar nicht ist.

Ich glaube, daß hier noch eine große Aufgabe vorliegt, nämlich die der Auffindung eines begrifflichen Zusammenhanges zwischen zwei Funktionen, deren eine der Differentialquotient der anderen ist, in der Weise, daß die gesetzmäßige Aenderung jeder dieser beiden zu einander gehörenden Funktionen in einer durch eine allgemein gültige Formel ausdrückbaren Beziehung zu der gesetzmäßigen Aenderung der anderen Funktion steht, gewissermaßen durch eine Steigerung des Funktionsbegriffes über die gegenseitige Abhängigkeit zweier Variablen hinaus zu der gegenseitigen Verknüpfung zweier Abhängigkeitsformen, oder zweier Veränderungsgesetze. Vielleicht lag eine Empfindung dieser Art der (auch von Klein angeführten) Auffassung der Infinitesimal-Analysis zugrunde, die statt des Ausdruckes Differentialquotient den der abgeleiteten (derivierten) Funktion vorzog.

Die herrschende Definition des Differentialquotienten sagt nicht sowohl was er eigentlich ist, als sie vielmehr einen Weg angibt, auf dem man zu ihm gelangen kann, einen Weg (den Grenzübergang), der am Schluß immer einen Salto mortale in sich schließt, der aber — auch abgesehen hiervon — an und für sich, rein logisch betrachtet — das Bedürfnis nach einer begrifflichen Definition nicht befriedigen kann.

In engem Zusammenhange mit dem Vorstehenden steht die Frage der Behandlung der Lehre von den Reihen, die als Unterstützungsmoment für die Hineinziehung der Infinitesimalrechnung in den Unterricht insofern angeführt zu werden pflegt, als sie die Entwickelung der in der Schule durchzunehmenden Reihen sehr vereinfacht. Das ist ja richtig, aber die eben genannte Folgerung aus diesem Sachverhalt vermag ich doch nicht zuzugeben. Allerdings erkenne ich als wesentlichen Grund für die Aufnahme der Reihen in den Schulunterricht auch nur den an, daß den Schülern gezeigt werden muß, wie man Funktionen von solcher Bedeutung für den Schulunterricht, wie die goniometrischen, den Logarithmus usw. wirklich zahlenmäßig berechnen kann. Aber auch hierbei scheint es mir doch wesentlich, diese Berechnung möglichst in der Weise vorzuführen, daß sie vom Schüler auch wirklich begriffen wird. Und das ist, wie mir vorkommt, eher verbürgt, wenn jede Reihenentwickelung aus der Eigenart der Funktion heraus hergeleitet wird, als wenn alle Entwickelungen nur als spezielle Anwendungen einer einzigen vorgelegten Formel, wie der der Taylorschen Reihe auftreten. Nun wird freilich eingewendet, das statt dessen früher übliche und m. E. auch jetzt noch im Schulunterricht durchaus berechtigte Verfahren nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten sei zu künstlich, es beginne mit der ohne jede Begründung aufgestellten Annahme, daß eine Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar sei. Da meine ich aber, ohne daß von vornherein diese Annahme gemacht wird, kommt man auch bei der Herleitung der Taylorschen Reihe nicht aus, mag man sie auf dem älteren (im Grunde mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten sehr verwandten) Wege bewirken, oder mag man sich der Schmiegungsparabeln bedienen, deren Heranziehung doch ohne den Gedanken, daß man durch Erhöhung ihrer Ordnungszahl der eigentlich in Rede stehenden Funktion immer näher komme, ganz unmotiviert sein würde. Deswegen würden m. E. die Schmiegungsparabeln nicht sowohl zur Herleitung, als zur nachträglichen Veranschaulichung der Berechnung mittels Reihen am Platze, hierfür allerdings auch ein sehr geeignetes Mittel sein.

Und tatsächlich gibt es für die Vermutung, daß die im Schulunterricht auftretenden Funktionen mittels der unendlichen Potenzreihe berechenbar sein können, auch eine sehr natürliche Anknüpfung, nämlich den auf beliebige Exponenten ausgedehnten binomischen Satz. Ich glaube, da entspringt ganz von selbst und ungezwungen aus der Tatsache der Wurzelberechnung mittels der unendlichen Binomialreihe die Frage, ob nicht noch für andere Formen der Abhängigkeit von einer Variablen die Form der Berechnung durch eine unendliche Potenzreihe möglich sein sollte.

Bei dieser Stoffbehandlung bleibt man durchaus innerhalb des Gedankenkreises, der der Mehrzahl der Schüler geläufig ist, und dabei kommen auch die Schüler nicht zu kurz, die sich vermöge ihrer speziellen Beanlagung späterhin den eigentlich mathematischen Studien zuwenden wollen. Es besteht auch gar kein Hindernis, auf die Bedürfnisse dieser Minderheit dadurch einige Rücksicht zu nehmen, daß man durch gelegentliche, dem Unterricht eingefügte Bemerkungen ihnen gewisse, über den Horizont der Schülermehrheit hinausgehende Ausblicke in weitere Gebiete oder in eine tiefer in die Sache eindringende Behandlungsart eröffnet. Daß an sie dabei die Forderung herantritt, sich den Einblick in diese Gebietserweiterung und diese vertiefende Stoffbehandlung durch eigene Tätigkeit selbst, wenigstens zum Teil zu erarbeiten, das will mir nicht als ein Mangel, sondern eher als ein Vorzug erscheinen.

Zur Einführung in die Integralrechnung.

Von A. Thaer (Hamburg).

Durch Herrn M. Pasch wurde ich zuerst mit der Methode der Einführung in die Integralrechnung bekannt, die vom bestimmten Integral ausgeht. Mein Sohn, Dr. C. Thaer in Jena, machte mich auf eine für Schulzwecke wohl erlaubte Vereinfachung des Verfahrens aufmerksam, auf die er durch graphische Integrationen gekommen war. Statt, wie üblich, mit

$$\int_a^b y\,dx$$

zu beginnen, löst man zuerst die Aufgabe

$$\int_a^b y'\,dx.$$

Im folgenden ist der Gang des Unterrichts, wie ich ihn in Oberprima befolgt habe, angegeben. Die Ausführung einer größeren Zahl von Beispielen ist dabei fortgelassen.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis der Differentialrechnung, insbesondere der Definition nicht nur des Differentialquotienten, sondern auch des Differentials, des Zeichens Σ, der gewöhnlichsten algebraischen und transzendenten Kurven.

Vorgelegt sei die Stammkurve $y = \sin x$ und die abgeleitete Kurve $y' = \cos x$ im Intervall $x = 0$ bis $x = \pi$. Es genügt eine rohe Skizze, bei der man $\pi = 3$ setzen kann. Die Zufügung der Gradzahlen empfiehlt sich, ebenso der Maßstab 20 : 1, wenn man mm-Papier benutzt.

Man bilde

$$\sum_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} \triangle y,$$

wobei man $\triangle x = 2{,}5$ mm nehmen kann,

$$\sum_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} \triangle y = \triangle y_1 + \triangle y_2 + \triangle y_3 + \triangle y_4$$

$$= (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + (y_4 - y_3) = y_4 - y_0,$$

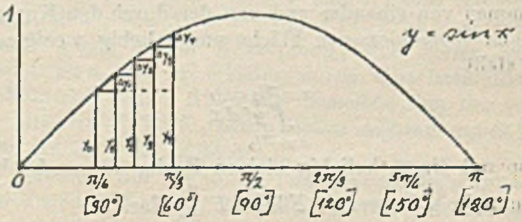

Fig. 1.

d. h. die Summe der Ordinatenzuwächse ist gleich der Differenz der Ordinate der „oberen Grenze“ vermindert um die Differenz der „unteren Grenze“.

Geht man, wie in der Differentialrechnung, von den $\triangle x$ zu den hinreichend kleinen, aber von Null verschiedenen dx über, so gehen die $\triangle y$ in die dy über. Die Anzahl der Glieder vermehrt sich dadurch auf eine entsprechend große Zahl. Eine Summe von solchen Gliedern wird durch ein lang gezogenes s $\int$

und mit dem Namen Integral bezeichnet. Es ist also

$$\sum_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} \triangle y = \int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} dy = y_{\pi/3} - y_{\pi/6}.$$

Nun ist nach der in der Differentialrechnung gegebenen Definition

$$dy = y'\,dx,$$

also kann man schreiben

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'\,dx = y_{\pi/3} - y_{\pi/6}.$$

Für die Größe

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'\,dx$$

kann man eine geometrische Deutung aus Fig. 2, d. i. die Darstellung der Kurve $y' = \cos x$, entnehmen.

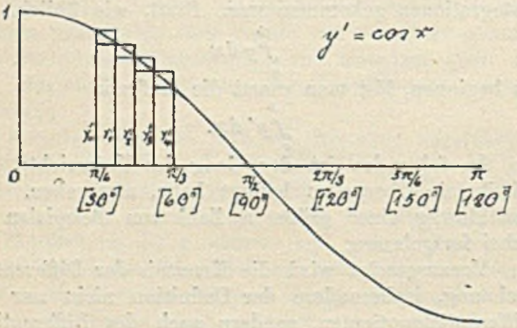

Fig. 2.

Bildet man

$$\sum_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'\triangle x,$$

so kann man darunter entweder

$$y_0'\triangle x + y_1'\triangle x + y_2'\triangle + y_3'\triangle x$$

oder

$$y_1'\triangle x + y_2'\triangle x + y_3'\triangle + y_4'\triangle x$$

verstehen. Jedes dieser Produkte $y'\triangle x$ stellt ein Rechteck dar, die Summe der ersten Rechtecke ist größer als die Fläche, die von der Abszissenachse, den beiden Grenzordinaten und dem Kurvenbogen zwischen ihren Endpunkten begrenzt wird, die Summe der zweiten Rechtecke ist kleiner als diese Fläche. Die Fläche werde mit $F'^{\pi/3}_{\pi/6}$ bezeichnet.

Geht man von den $\triangle x$ zu den hinreichend kleinen dx über, so unterscheiden sich die beiden Rechteckssummen von einander und von der durch den Kurvenbogen abgeschlossenen Fläche um beliebig wenig und es stellt

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'\,dx$$

also mit einem beliebig kleinen Fehler die nach oben krummlinig begrenzte Fläche $F'^{\pi/3}_{\pi/6}$ dar.

Da nun

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'\,dx = \int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} dy = y_{\pi/3} - y_{\pi/6}$$

war, ist die gekennzeichnete Fläche der abgeleiteten Kurve gleich der entsprechenden Ordinatendifferenz der Stammkurve

$$F'^{\pi/3}_{\pi/6} = y_{\pi/3} - y_{\pi/6}.$$

Hiernach ist die Bestimmung eines Flächenstückes, das von der Abszissenachse, zwei Ordinaten und einem ihre Endpunkte verbindenden Kurvenbogen begrenzt wird, zurückgeführt auf die Bestimmung einer Ordinatendifferenz und zwar gehören die Ordinaten zu zwei Punkten einer zweiten Kurve, deren abgeleitete Kurve den ersten Kurvenbogen geliefert hat und ferner gehören die entsprechenden Ordinaten beider Kurven zu gleichen Abszissen.

Hierbei sind allerdings die Dimensionen der Gebilde unberücksichtigt geblieben. Man wird also genauer sagen: die Fläche enthält soviel Flächeneinheiten, wie die Ordinatendifferenz Längeneinheiten.

Da in dem vorliegenden Fall

$$y = \sin x, \qquad y' = \cos x$$

war, ist

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} y'dx = \int_{x=\pi/6}^{x=\pi/3} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}866 - 0{,}5 = 0{,}366$$

Da es Brauch ist, die Grenzen nach den Abszissen bezw. nach der Variabeln anzugeben, deren Differential unter dem Integralzeichen steht, so schreibt man

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\,dx,$$

in allen anderen Fällen muß unzweideutig angegeben werden, auf welche Variable sich die Grenze bezieht.

Aus Fig. 2 ergibt sich, daß die Fläche

$$\int_0^{\pi/3} \cos x\,dx$$

aus den Teilen

$$\int_0^{\pi/6} \cos x\,dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\,dx$$

besteht, es ist demnach

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\,dx = \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/6} \cos x\,dx,$$

d. h. man kann ein Integral durch geeignete Einschiebung einer Zwischengrenze als eine Summe, oder durch Annahme einer neuen Untergrenze als eine Differenz darstellen. Daß die Grenze 0 nicht wesentlich ist, ersieht man aus den Gleichungen

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\,dx,$$

nur muß stets dieselbe Untergrenze gewählt werden und der Minuendus muß die alte Obergrenze, der Subtrahendus aber die alte Untergrenze als Obergrenze enthalten.

Setzt man nun fest, daß die Gleichung

$$\int_\alpha^\beta y'\,dx = y_\beta - y_\alpha$$

stets gelten soll, solange sowohl die Stammkurve als auch die abgeleitete Kurve zwischen α und β endlich und stetig bleiben, so ersieht man, daß

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = \sin\pi - \sin\pi/2 = -1$$

wird, daß also ein unterhalb der Abszissenachse liegendes Flächenstück negativ zu nehmen ist. Man darf demnach, wenn es sich um absolute Werte von Flächenstücken handelt, nicht über eine Grenze integrieren, deren $y' = 0$ ist.

Andererseits ermöglicht die Einführung der negativen Integrale, daß man mit den Grenzen entsprechend verfährt wie mit den Punkten einer Geraden.

Dem Satz $AB = -BA$ entspricht der Satz

$$\int_\alpha^\beta y'\,dx = y_\beta - y_\alpha = -(y_\alpha - y_\beta) = -\int_\beta^\alpha y'\,dx,$$

d. h. durch Vertauschung der Grenzen erhält das Integral den entgegengesetzten Wert.

Dem Satz $AB = AC + CB$, auch wenn C nicht zwischen A und B liegt, entspricht der Fall

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi/3} \cos x\,dx$$

$$= (\sin{}^{\pi}/_2 - \sin{}^{\pi}/_6) + (\sin{}^{\pi}/_3 - \sin{}^{\pi}/_2) = \sin{}^{\pi}/_3 - \sin{}^{\pi}/_6.$$

Man darf also ein Integral in die Summe zweier Integrale zerlegen, deren erstes die Untergrenze und deren zweites die Obergrenze enthält, wenn nur die Obergrenze der ersten mit der Untergrenze der zweiten identisch ist und y' sowohl wie y in dem ganzen Bereich eindeutig und endlich, die zugehörigen Kurven stetig bleiben.

Die bisher behandelten bestimmten Integrale waren sowohl von der unteren wie von der oberen Grenze abhängig. Der Satz

$$\int_\alpha^\beta y'\,dx = \int_\alpha^\gamma y'\,dx + \int_\gamma^\beta y'\,dx = \int_\gamma^\beta y'\,dx - \int_\gamma^\alpha y'\,dx$$

bietet aber die Möglichkeit, jedes Integral in zwei Integrale zu zerlegen, deren untere Grenze γ konstant ist, die also nur von der oberen Grenze abhängen.

Nimmt man in unserem Fall ${}^{\pi}/_2$ als feste untere Grenze und läßt die obere Grenze variabel, was man durch die Grenzbezeichnung x ausdrückt, so ist

$$\int_{\pi/2}^{x} \cos x\,dx = \sin x - \sin{}^{\pi}/_2 = \sin x - 1.$$

Hier wird das Integral, je nach dem Wert von x, verschiedene Werte annehmen, allen wird aber dieselbe Konstante -1 beigefügt sein. Wäre man von einer anderen Grenze c ausgegangen, so würde bei jedem Wert dieselbe Konstante C, die positiv oder negativ sein könnte, hinzugefügt sein

$$\int_c^x y'\,dx = y + C.$$

Ein solches Integral nennt man ein unbestimmtes und läßt bei ihm die Grenzen fort, die obere weil sie stets x ist, die untere weil sie eine willkürliche Konstante ist. Diese Willkür kann man aber ebensogut in C legen.

Man schreibt also

$$\int y'\,dx = y + C$$

und definiert dadurch eine Funktion y wenn y' bekannt ist.

Da das Differential einer Konstanten Null ist, erhält man bei beiderseitiger Differentiation

$$d\int y'\,dx = dy.$$

Da aber $y'\,dx = dy$ ist, so werden hierdurch Differentiation und Integration als entgegengesetzte Operationen definiert, jedoch mit einer Einschränkung: Es ist nämlich

$$\int dy = y + C,$$

d. h. wenn man erst differenziert, dann integriert, so enthält das Ergebnis noch eine unbestimmte Konstante. Wird aber erst integriert, dann differenziert

$$d\int y'\,dx = dy,$$

so fällt die Konstante fort. Allgemein gültig ist die Regel also in der Form: Differentiation und Integration heben einander auf, abgesehen von einer etwa hinzutretenden oder wegfallenden Konstanten.

Aus der Definition

$$\int y'\,dx = y + C$$

folgt nun, daß das Integral aus dem Produkt einer abgeleiteten Funktion mit dem Differential des Arguments gleich ist der Stammfunktion der betreffenden Funktion, vermehrt um eine beliebige Konstante. Da aber die Ableitung dieselbe bleibt, welche Konstante auch zu einer Funktion hinzugefügt wird, so hat jede Funktion beliebig viele Stammfunktionen und man sagt deshalb auch abgekürzt, das Integral einer Funktion ist „eine" ihrer Stammfunktionen. Die unter bezw. hinter dem Integralzeichen stehende Funktion $y'\,dx$ nennt man den Integranden.

Nach der hier gegebenen Definition kann man eine Integration also nur dann ausführen, wenn man eine Stammfunktion der unter dem Integralzeichen stehenden abgeleiteten Funktion kennt. Auf diese Fälle wird man sich aber in der Schule beschränken können.

Die Berechnung der unbestimmten Integrale bildet die Vorarbeit für die Berechnung der bestimmten Integrale, denn es war

$$\int_a^b y'\,dx = \int_c^b y'\,dx - \int_c^a y'\,dx = \left[\int_c^x y'\,dx\right]_{x=a} - \left[\int_c^x y'dx\right]_{x=b}$$

$$= \left[\int y'\,dx\right]_{x=a} - \left[\int y'\,dx\right]_{x=b}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\int y'\,dx$ zwar eine unbestimmte Konstante enthält, daß hier aber in beiden Fällen dieselbe Konstante zu nehmen ist, da die eingeführte Zwischengrenze c zwar beliebig, aber doch für beide Integrale die nämliche ist, also auch die von ihm abhängige Konstante C in beiden Fällen dieselbe sein muß. Auch ist darauf zu achten, daß sowohl y wie y' in dem Intervall eindeutig und endlich, die sie darstellenden Kurven aber stetig bleiben.

Bemerkung zu: Dr. Richert, die ganzen rationalen Wurzeln der kubischen Gleichung.

Von Dr. E. Haentzschel (Berlin).

Herr Prof. Dr. Richert erhebt, wie die einleitenden Sätze seines Aufsatzes auf S. 130 (XV, 1909, Nr. 6) dartun, für den auf S. 36 des vorigen Jahrganges (XV, 1909, Nr. 2) von ihm aus 12 Zahlenbeispielen gefundenen Satz: „Für den Fall, daß die kubische Gleichung $x^3 - 3b_1^2 x - 2c_3 = 0$ lauter reelle, ganzzahlige, rationale Wurzeln hat, muß $3b_1^2$ von der Form $3r^2 + s^2$ sein, worin r und s ganze rationale Zahlen sind", den Anspruch der Priorität; er polemisiert gegen meine Behauptung, daß dieser Satz nicht neu sei; er erkennt durch eine irrtümliche Schlußweise meine Ableitung desselben aus der von mir zitierten E. E. Kummerschen Abhandlung (XV, 1909, Nr. 3, S. 53) nicht an.

Nunmehr bin ich in der Lage, meiner Behauptung eine zweite Stütze zu geben, so daß jede Diskussion ausgeschlossen ist. Ich betone, daß Herr Dr. Richert die Form des Koeffizienten $2c_3$ zum ersten Male auf S. 130, aber ohne Beweis, angibt; von dem Inhalt, den er dieser Form gibt, soll keinesfalls die Rede sein. Demgegenüber richte ich die Aufmerksamkeit auf eine ältere Abhandlung, deren genauer Titel lautet: „Elementare Auflösung der numerischen Gleichungen des 2., 3. und 4. Grades. Ein Beitrag zu dem Osterprogamm des Gymnasiums zu Hirschberg in Schlesien des Jahres 1853. Von dem Kollegen Dr. Exner." (4^0, 28 Seiten.)

Dr. Exner legt seiner Untersuchung die Gleichung $x^3 - px - q = 0$ zu Grunde; er leitet auf S. 13 in einer ihm eigentümlichen Weise die Cardanische Formel ab und macht darauf aufmerksam, daß für $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$ in dieser Ausdrücke von der Form

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + ri} \text{ bezw. } \sqrt[3]{\frac{q}{2} - ri}$$

entstehen. Auf S. 14 oben fährt er wörtlich so fort:

„Könnte man nun auf elementarem Wege diese Ausdrücke auf die Form

$$(a + \beta i) \text{ und } (a - \beta i)$$

bringen, so würde für diesen sogenannten casus irreducibilis die allgemeine Gleichung sein

$$(x \pm 2a)[x \mp a - \beta \sqrt{3}][x \mp a + \beta \sqrt{3}] = x^3 - 3(a^2 + \beta^2)x \pm 2a(a^2 - 3\beta^2) = 0, \text{ [1]}$$

in welcher, nach unserer Annahme, weder a noch β im allgemeinen rational ist.

Wenn also Formel (A) des § 21 einen imaginären Ausdruck darbietet, so enthält die Gleichung drei reelle Wurzeln.

1. Anmerkung. Sind alle drei Wurzeln rational, so muß $\beta = \beta' \sqrt{3}$ sein, und die allgemeine Gleichung ist für diesen Fall:

$$(x \pm 2a)[x \mp a - 3\beta'][x \mp a + 3\beta'] = x^3 - 3(a^2 + 3\beta'^2)x \pm 2a(a^2 - 9\beta'^2) = 0.\text{“}$$

Setzen wir hier in Dr. Exners Abhandlung

$$a = r \text{ und } 3\beta' = s,$$

so erhält man

$$3a^2 + 9\beta'^2 = 3r^2 + s^2$$
$$2a(a^2 - 9\beta'^2) = 2r(r^2 - s^2).$$

Es entstehen also genau die von Herrn Prof. Dr. Richert in seinen beiden Aufsätzen angegebenen Werte von $3b_1^2$ und $\pm 2c_3$; während sie aber bei Herrn Dr. Richert ganzzahlig sein müssen, erkennen wir hier auch gebrochene rationale Zahlen für r und s als richtig an. Es liegt nämlich ein allgemeines Prinzip diesen Untersuchungen zu Grunde, dem ich in meinem Aufsatze auf S. 53 (XV, 1909, Nr. 3) durch die Gleichung 6) Ausdruck gegeben habe; es lautete die von mir aus E. E. Kummers Gleichung hergeleitete Gleichung 6):

$$z^3 - 3mnz - (m^3 + n^3) = 0.$$

Setzen wir

$$a^2 + 3\beta'^2 = mn = (a + \beta' \sqrt{3} \cdot i)(a - \beta' \sqrt{3} \cdot i),$$

so folgt

$$2a(a^2 - 9\beta'^2) = m^3 + n^3 = (a + \beta' \sqrt{3} \cdot i)^3 + (a - \beta' \sqrt{3} i)^3.$$

Ich schließe mit dem Hinweis, daß die Entwickelungen auf S. 12 und 13 von Dr. Exners Abhandlung genaue Auskunft darüber geben, wie die Größen $3b_1^2$ und $2c_3$ aus der Cardanischen Formel bezw. den Wurzeln der kubischen Gleichung herzuleiten sind.

Die ganzen rationalen Wurzeln der kubischen Gleichung.

Von Dr. Richert (Berlin).

(Fortsetzung).

In Nr. 6 des vorigen Jahrganges habe ich unter dem obigen Titel zwei merkwürdige Sätze über diejenigen ganzen Zahlen angegeben, welche als numerische Faktoren des zweiten Gliedes der kubischen Gleichung $x^3 - 3b_1^2 x - 2c_3 = 0$ auftreten können, wenn die Wurzeln ganze Zahlen sein sollen. Handelte es sich zunächst um Primzahlen, die durch die quadratische Form (3, 0, 1) darstellbar sein sollten, so mußten sie die Form $6n + 1$ haben:

$$1) \quad P = 6n + 1 = 3r^2 + s^2.$$

Hatte man es aber mit einer zusammengesetzten Zahl zu tun, die sich in zwei Primfaktoren der soeben gekennzeichneten Art zerlegen lassen, so daß $P = 3r^2 + s^2$ und $P' = 3r'^2 + s'^2$ ist, so konnte

$$2) \quad P \cdot P' = 3(rs' \pm r's)^2 + (3rr' \mp ss')$$

gesetzt werden, was abermals die Form $3R^2 + S^2$ hat.

Hiermit sind nun aber noch keineswegs alle Zahlen erschöpft, welche an die Stelle von $3b_1^2$ gesetzt werden können. Wenigstens gibt es Zahlen, die nicht unter die Form $6n + 1$ fallen und doch durch die Form $3r^2 + s^2$ darstellbar sind. Ein Beispiel ist die Zahl 3, welche zwar durch $3r^2 + s^2$ dargestellt werden kann, wenn man $r = 1$ und $s = 0$ setzt, aber durch kein ganzzahliges n aus $6n + 1$ gewonnen werden kann. In der Tat ist für $3b_1^2 = 3 = 3 \cdot 1^2 + 0^2$ das x-freie Glied $2c_3 = 2r(r^2 - s^2)$*) $= 2$, so daß die Gleichung $x^3 - 3x - 2 = 0$ gilt, welche die positive Wurzel 2 und die negative Doppelwurzel -1 hat. Diese Eigenschaft, eine Doppelwurzel zu besitzen, kommt nun aber nicht bloß den Gleichungen mit dem Koeffizienten 3 zu, sondern überhaupt allen Gleichungen mit jeder anderen zusammengesetzten Zahl, die sich in zwei Faktoren derart zerlegen läßt, daß der eine Faktor 3 und der zweite irgend eine Quadratzahl ist, also allen Zahlen von der Form $3r^2$, worin r eine ganze rationale Zahl ist. Und zwar ist für sie alle $2c_3 = 2r^3$. Alle kubischen Gleichungen von der Form $x^3 - 3r^2 \cdot x - 2r^3 = 0$ haben also die Doppelwurzel $-r$ und die positive Wurzel $2r$. Ist umgekehrt die Doppelwurzel positiv und die davon verschiedene Wurzel negativ, so hat die kubische Gleichung die Form $x^3 - 3r^2 \cdot x + 2r^3 = 0$.

Ein zweites Beispiel, das ebenfalls nicht unter $6n + 1$ fällt, wohl aber durch $3r^2 + s^2$ darstellbar ist, bildet die Zahl 4, welche die genannte Form annimmt, wenn $r = s = 1$ gesetzt wird. Für sie ist also $4 = 3 \cdot 1^2 + 1^2$ und daher $2c_3 = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$. Die einzige für $3b_1^2 = 4$ mögliche Gleichung lautet also $x^3 - 4x = 0$ und das ist eine Gleichung, die man wegen der Wurzel $x = 0$ eigentlich nicht mehr zu den Gleichungen dritten Grades zählt. Dasselbe Schicksal erleidet aber die kubische Gleichung wieder nicht nur, wenn $r = s = 1$ ist, sondern überhaupt stets, wenn $r = s$ ist. Es wird dann $3b_1^2 = 3r^2 + r^2 = 4r^2$, $2c_3 = 0$, und daher ist dann immer $x^3 - 4r^2 \cdot x = 0$ und daher $x = \mp 2r$.

Von ganz besonderem Interesse sind nun aber diejenigen Zahlen, welche aus der Multiplikation einer Primzahl von der Form $6n + 1$ mit der 3 oder der 4 gebildet werden können. Zur ersteren Kategorie gehören Zahlen wie $21 = 3 \cdot 7$, $39 = 3 \cdot 13$, $57 = 3 \cdot 19$ usw., die sämtlich die Form $3r^2 + s^2$ annehmen können und nicht unter $6n + 1$ fallen. Es ist ja $21 = 3 \cdot 2^2 + 3^2$, $39 = 3 \cdot 1^2 + 6^2$, $57 = 3 \cdot 4^2 + 3^2$ usw. Nun, diese Zahlen fallen sämtlich unter das zweite der eingangs erwähnten Gesetze, wenn man setzt

$$\left|\begin{matrix} 7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2 \\ 3 = 3 \cdot 1^2 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} 13 = 3 \cdot 2^2 + 1^2 \\ 3 = 3 \cdot 1^2 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} 19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2 \\ 3 = 3 \cdot 1^2 \end{matrix}\right|$$

usw. und in den beiden Gleichungen

---

[1]

*) Diese Gleichung ergibt sich leicht aus der Bemerkung, daß ja das konstante Glied einer Gleichung gleich dem Produkte der drei Wurzeln, daß also (nach S. 37)

$$2c_3 = x_1 x_2 x_3 = -2r_1(r_1 - \sqrt{r_2})(r_1 + \sqrt{r_2}) = -2r_1(r_1^2 - r_2) = -2r(r^2 - s^2)$$

sein muß.

$$\left|\begin{array}{l} P = 3r^2 + s^2 \;|\; r' = 1 \\ P' = 3r'^2 + s'^2 \;|\; s' = 0 \end{array}\right.$$

setzt. Dann wird $PP' = 3(rs' \mp r's)^2 + (3rr' \pm ss')^2 = 3s^2 + 9r^2 = 3s^2 + (3r)^2$, d. h.: das *s* tritt an die Stelle von *r* und das $3r$ an die Stelle von *s*. Zu demselben Resultate kann man auch sehr einfach durch die Betrachtung gelangen, daß aus $P = 3r^2 + s^2$ infolge von Multiplikation mit 3 folgt:

$$3P = 9r^2 + 3s^2 = 3s^2 + (3r)^2.$$

Eine ganz merkwürdige Sonderstellung nimmt die 4 ein und zwar einmal in ihrer Eigenschaft als Quadratzahl und dann insofern, als sie durch die Form $3 \cdot 1^2 + 1^2$ darstellbar ist. Was zunächst die letztere Eigenschaft anbetrifft, so läßt sich natürlich der Satz (2) der Einleitung anwenden, indem man zunächst allgemeiner $r' = s'$ setzt. Alsdann wird, wenn wieder

$$\left.\begin{array}{l} P = 3r^2 + s^2 \\ 4r'^2 = 3 \cdot r'^2 + r'^2 \end{array}\right\}$$

gesetzt wird,

$$3) \quad 4Pr'^2 = 3(r \mp s)^2 r'^2 + (3r \pm s)^2 r'^2$$

und das läßt im allgemeinen wieder zwei abgeleitete Darstellungen als möglich erkennen, wie wir das in Nr. 6 auf S. 131 für das Beispiel 91 auseinandergesetzt haben. Insbesondere aber, wenn man $r' = 1$ setzt, so daß die obige Gleichung zu

$$4P = 3(r \mp s)^2 + (3r \pm s)^2$$

wird, geht diese Eigenschaft auch für die 4 selber nicht verloren. Obwohl also, wie oben gesagt wurde, die 4 als Koeffizient von *x* nur uneigentlich eine Gleichung dritten Grades lieferte, so hat sie doch in Kombination mit Primzahlen von der Form $6n + 1$ die Eigenheit, zwei Darstellungen von $4P$ zu ergeben. Wählen wir als Beispiel die Zahl $28 = 4 \cdot 7$, so ist $4 \cdot 7 = 3(r \mp s)^2 + (3r \pm s)^2$, worin wegen $7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2$ das $r = 1$ und das $s = 2$ zu setzen ist. Es ist also $28 = 3 \cdot 1^2 + 5^2 = 3 \cdot 3^2 + 1^2$; und ebenso folgt aus $19 = 3 \cdot 1^2 + 4^2$, daß $r = 1$ und $s = 4$ und daher $4 \cdot 19 = 76 = 3 \cdot 3^2 + 7^2 = 3 \cdot 5^2 + 1^2$.

Was dagegen die Eigenschaft der 4 als Quadratzahl anbelangt, so gestattet sie, wie jede andere Quadratzahl, die zu einer Primzahl von der Form $6n + 1$ als Faktor hinzutritt, daß sowohl zu *r* als auch zu *s* die Wurzel aus dieser Quadratzahl als Faktor hinzugefügt werden kann. In der Tat folgt aus der Gleichung (3) ohne weiteres:

$$4Pr'^2 = 3(r'(r \mp s))^2 + (r'(3r \pm s))^2.$$

Daher kann sowohl 28 als auch 76 außer den soeben genannten Darstellungen auch die folgenden erfahren:

$$28 = 7 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 + 4^2, \quad 76 = 19 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 + 8^2.$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß auch das Quadrat jeder Primzahl von der Form $6n + 1$ durch $3r^2 + s^2$ dargestellt werden kann; und zwar kann dies nur auf *eine* Art geschehen. Aus Satz (2) folgt, weil hier $r = r'$, $s = s'$ ist,

$$\left|\begin{array}{l} P = 3r^2 + s^2 \\ P = 3r^2 + s^2 \end{array}\right|$$

und daraus zwar die Formel mit doppeltem Vorzeichen: $P^2 = 3(rs \mp rs)^2 + (3r^2 \pm s^2)^2$. Aber die oberen Vorzeichen liefern nichts neues, während die unteren Vorzeichen $P^2 = 3(2rs)^2 + (3r^2 - s^2)^2$ ergeben.

Zur kubischen Gleichung.

Von Prof. Dr. Eckhardt (Homburg v. d. Höhe).

1. Im Jahrgang XIV, S. 13 d. Ztschr. hat Herr Prof. Dr. Richert die Gleichungen dritten Grades mit drei *reellen* Wurzeln betrachtet und für die *positive* Wurzel x_3 der Gleichung

$$x^3 - 3b_1^2 x - 2|c_3| = 0$$

die in seiner Programmabhandlung von 1907, Nr. 138, bewiesenen Ungleichungen

$$b_1 \cdot \sqrt{3} \leqq x_1 \leqq 2b_1, \quad b_1 > 0$$

angeführt.

Hierzu möchte ich bemerken, daß die obere Grenze $2b_1$ bereits im Jahre 1902 im XXXIII. Jahrgang der Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht in einfachster Weise von mir abgeleitet wurde in der Arbeit: „Elementare Ableitung der Realitätsbedingungen für die Gleichungen dritten Grades ohne Auflösung dieser Gleichungen.“

Für die Gleichung

$$x^3 + bx + c = 0$$

sind daselbst S. 449 für den Fall dreier reeller Wurzeln die Intervalle

$$-2\sqrt{-\frac{b}{3}} \cdots -\sqrt{-\frac{b}{3}} \cdots +\sqrt{-\frac{b}{3}} \cdots +2\sqrt{-\frac{b}{3}},$$

$b < 0$, angeführt. Ersetzt man *b* durch $-3b_1^2$, so ist die *obere* Grenze für die positive Wurzel $2|b_1|$. Die untere Grenze dieser Wurzel ist bei mir $|b_1|$. Für sie ist also der von Herrn Richert gegebene Wert der bessere.

2. Die im Jahrgang XV, S. 36, für den Fall dreier rationaler ganzer Wurzeln mitgeteilte Darstellung von $3b_1^2$ in der Form $3r^2 + s^2$, wo *r* und *s* ebenfalls rational und ganz sind, ist nur ein besonderer Fall der von mir S. 450 a. a. O. aufgestellten Beziehung

$$2b = -\left\{\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2\right\},$$

in der α die stets vorhandene reelle Wurzel bedeutet. Im übrigen gilt diese Beziehung für ganz beliebige Werte der Wurzeln α, β, γ.

Sind diese Wurzeln *sämtlich* rational, so kann an die Stelle von α sowohl β als auch γ treten, und man hat also für den Fall dreier reeller Wurzeln die Darstellungen

$$-b = 3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)^2,$$

$$-b = 3 \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right)^2,$$

$$-b = 3 \cdot \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2.$$

Sind alle drei Wurzeln rationale *gerade* Zahlen, so sind $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta - \gamma}{2}$ u. s. f. lauter rationale ganze Zahlen, und es sind dann immer *drei Darstellungen* von der Form

$$-b = 3a_1^2 + \delta_1^2$$

vorhanden, in denen a_1 und δ_1 rational und ganz sind.

Daher erklärt es sich auch, daß der von Herrn Richert angeführte Koeffizient 28 der Gleichung

$$x^3 - 28x + 48 = 0$$

mit den Wurzeln 6, -4, -2 die *drei* Darstellungen zuläßt:

$$28 = 3 \cdot 3^2 + 1^2,$$
$$28 = 3 \cdot 2^2 + 4^2,$$
$$28 = 3 \cdot 1^2 + 5^2.$$

Kommt eine Doppelwurzel vor, so ist die entsprechende Darstellung doppelt zu zählen.

Sind *nicht* alle drei Wurzeln *gerade*, so muß wegen der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 0$ wenigstens *eine* derselben *gerade* sein. Die beiden anderen sind dann ungerade. Wählt man α als die gerade Wurzel, so ist auch $\beta - \gamma$ gerade, und wenn $\alpha = 2a_1$, $\beta - \gamma = 2\delta_1$, so ist von den auch jetzt möglichen *drei* Darstellungen nur die erste

$$-b = 3\,a_1^2 + \delta_1^2$$

der Art, daß a_1 und δ_1 ganz und rational sind, während die beiden anderen gebrochene rationale Zahlen mit dem Divisor 2 enthalten.

Nimmt man z. B. die Gleichung $x^3 - 7\,x - 6 = 0$ mit den Wurzeln 3, —1, —2, so ist $\alpha = -2$, $-b = +7$, und es gilt:

$$7 = 3 \cdot 1^2 + 2^2,$$
$$7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$
$$7 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Die beiden Fälle über die drei reellen Wurzeln lassen sich in einen zusammenfassen, wenn man schreibt:

$$-4\,b = 3\,\alpha^2 + (\beta - \gamma)^2,$$
$$-4\,b = 3\,\beta^2 + (\gamma - \alpha)^2,$$
$$-4\,b = 3\,\gamma^2 + (\alpha - \beta)^2.$$

Hiernach kann man sagen: „Wenn eine reduzierte kubische Gleichung drei rationale ganze Wurzeln hat, so läßt sich der absolut genommene vierfache Koeffizient der ersten Potenz der unbekannten auf dreifache Weise durch die Wurzeln der Gleichung in der Form $3\,r^2 + s^2$ darstellen, wo r und s rationale ganze Zahlen sind."

3. Die Darstellung von $3\,b_1^2$ oder $|\,b\,|$ ist auch ein besonderer Fall der Form

$$a = -(2\,u^2 + v^2 + w^2),$$

die ich in der Arbeit: „Ableitung der Realitätsbedingungen für die biquadratische Gleichung ohne Auflösung der Gleichung" im Archiv der Mathematik und Physik, (3), Bd. 7, S. 87 von dem Koeffizienten a der Gleichung

$$x^4 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

veröffentlicht habe. Die Wurzeln dieser Gleichung sind dort dargestellt in der Form

$$\alpha = u + v, \quad \beta = u - v, \quad \gamma = -u + w, \quad \delta = -u - w.$$

Ist nun $u = v$, so wird $\beta = 0$ und $c = 0$. Die Gleichung vierten Grades zerfällt also in

$$x = 0 \text{ und } x^3 + a\,x + b = 0$$

und für den Koeffizienten a der letzten Gleichung gilt daher allgemein:

$$-a = 3\,u^2 + w^2.$$

Sind jetzt α, γ, δ rationale ganze Zahlen, so sind u und w rationale Zahlen, die bei geraden Werten von α, γ, δ immer ganze Zahlen sind, im übrigen nur dann, wenn man die wegen $\alpha + \gamma + \delta = 0$ sicher vorhandene gerade Wurzel gleich α setzt.

* *
*

Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatze.

Von Prof. Dr. Richert (Berlin).

Zu 1 bemerke ich, daß meine Ergebnisse nicht nur für die dritte Wurzel, sondern auch für die beiden ersten Wurzeln engere Grenzen ergeben als die von Herrn Prof. Dr. Eckhardt angegebenen. Ist nämlich c_0 negativ, so gilt nach § 45, da nach § 39 des *P* 07 $\gamma \leqq 30^0$ ist, für die absolut kleinste, d. h. x_2, die Doppelungleichung $-1 < x_2 < 0$ und für die erste Wurzel $-\sqrt{3} < x_1 < -1$ und mit Benutzung von b_1: $-b_1 < x_2 < 0$ die erste Wurzel $-b_1\sqrt{3} < x_1 < -b_1$.

Zu 2: Hier verweise ich auf S. 130 der Unt.-Bl. vom vorigen Jahre, auf einige Bemerkungen von Herrn Prof. Dr. Häntzschel, sowie auf meine Fortsetzung in dieser Nummer.

Bücher-Besprechungen.

Sigmund Günther, Geschichte der Naturwissenschaften. Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr. Sigmund Günther. 2. und 3. Band. Mit dem Bildnisse des Verfassers, 4 farbigen und 12 schwarzen Tafeln und einem Gesamtregister. Leipzig, Ph. Reclam jun. 186 u. 290 S. Kl. 8⁰. Geb. M 1.50.

Die Anregung der Verlagsfirma, in der weltberühmten Reclam-Bibliothek eine Serie von Bändchen eigens den Naturwissenschaften zu widmen, wird gewiß von vielen mit Beifall begrüßt werden. Bei dem neuerdings angewendeten größeren Druck ist deren Lektüre auch manchem ermöglicht, dessen Augen dem ursprünglichen Typensatz nicht gewachsen waren. Die Reihe der in Frage stehenden Bändchen leitete ein W. Ostwald mit einem sehr klar und faßlich geschriebenen „Grundriß der Naturphilosophie", der nur in den späteren Teilen den energetischen Standpunkt des Verfassers stark hervortreten läßt.

Der vorliegende Band hat einen der Altmeister geschichtlicher Forschung auf exakt-wissenschaftlichem Gebiete zum Verfasser. Wer möchte es sonst auch wagen, über das Gesamtgebiet der Naturwissenschaften von den metallurgischen und astronomischen Kenntnissen der Chaldäer an bis zur Elektronenforschung unserer Zeit einen auf so knappen Raum zusammengedrängten Ueberblick geben zu wollen? Ueber 2100 Namen von Gelehrten sind hier (alle mit genauen Angaben ihrer Lebenszeit) wie Glieder einer Kette oder besser eines Netzes von Ketten aneinandergereiht und nur die außerordentliche Sprachgewandtheit Günthers konnte dabei die Klippe der Gleichförmigkeit glücklich meiden. Leider sind schon wieder einige der verdienstvollen Männer, von denen hier nur das Geburtsjahr angegeben ist, mit Tod abgegangen. Wir erwähnen G. v. Neumayer und A. Dohrn.

Einige Druckfehler wird der Leser leicht verbessern. Auch wird man in Behauptungen wie II, S. 67, daß Luft ein Gemenge aus „Wasserstoff und Sauerstoff" sei, oder II, S. 164, daß Röntgenstrahlen ohne erhebliche Schwächung auch durch Metalle gehen, nur Versehen erblicken, die einem Vielbeschäftigten leicht auch bei der Korrektur entgehen. Das Buch wird gewiß großen Nutzen stiften, insbesondere trotz seiner Kleinheit auch als Nachschlagewerk, da ein vorzügliches Autorenregister beigegeben ist. Auf den vorne beigehefteten Tafeln befinden sich die Bildnisse von Theophrast, Coppernicus, Newton, Linné, A. v. Humboldt und Ch. Darwin, eine Röntgenaufnahme eines menschlichen Brustkorbes mit Revolverkugel, eine mittelalterliche chemische Küche, im Vergleich dazu ein chemisches Laboratorium der technischen Hochschule München u. a. m.

H. Wieleitner (Pirmasens).

* *
*

Eversheim, Dr. P., Privatdozent. Die Elektrizität als Licht- und Kraftquelle. 18. Bändchen der Sammlung „Wissenschaft und Bildung", VI u. 121 S. Leipzig 1907. Quelle & Meyer. Geh. 1 M, geb. 1,25 M.

Der Verfasser wendet sich, offenbar von der richtigen Ansicht ausgehend, daß sich ein Gebiet, wie die Elektrizität, ganz voraussetzungslos nicht populärwissenschaftlich behandeln läßt, an ein bis zu einem gewissen Grade physikalisch geschultes Leserpublikum. Seine Darlegungen sind äußerst klar und behandeln auf 121 Seiten so ziemlich alles, was von Anwendungen der Elektrizität als Licht- und Kraftquelle in Betracht kommt. Daß dabei ein tieferes Eingehen auf die einzelnen Dinge nicht möglich ist, kann man voraussehen, wenn man sich das inhaltsreiche Inhaltsverzeichnis ansieht. Immerhin sei das Büchlein jedem empfohlen, der sich schnell über einzelne Punkte orientieren will. Ebenso eignet es sich wegen seiner klaren Diktion auch für den schon über ein gutes Quantum physikalischer Ergebnisse verfügenden Primaner.

Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Ahrens, Dr. Felix B., Professor an der Universität Breslau. Lebensfragen, Die Vorgänge des Stoffwechsels. 18. Bändchen der Sammlung „Wissenschaft und Bildung“, V u. 153 S. mit 8 Abbildg. Leipzig 1907. Quelle & Meyer.

Ein umfangreiches Gebiet (Nahrung und Ernährung, Enzyme und ihre Wirkung, das Fleisch, Eier, Molkereiprodukte, pflanzliche Nahrungsmittel, Zucker, Stärke, Frischerhaltung und Konservierung von Lebensmitteln, künstliche Nährmittel, alkoholische Genußmittel, die gesteigerte Beschaffung von Nährmitteln unter dem Einflusse der Chemie) wird in gehaltvoller Rhetorik dem Laien vorgetragen und seinem Verständnisse näher gebracht. Wie lebendig und wissenschaftlich die Auseinandersetzungen auch sonst sind, so scheinen doch die pflanzenphysiologischen Fragen, wie die bei der Stärke behandelten, mit den neuesten Anschauungen nicht im Einklang zu stehen; ein Vergleich des vom Verfasser Vorgetragenen mit dem, was in dem bekannten Lehrbuche von Straßburger, Schimper und Noll darüber gesagt ist, läßt die Beanstandung sofort berechtigt erscheinen. Auf der anderen Seite soll aber voll und ganz anerkannt werden, daß der Herr Verfasser besonders in dem Kapitel mit der umfassenden Ueberschrift: „Die gesteigerte Beschaffung von Nährmitteln unter dem Einflusse der Chemie“ auch die neuesten Errungenschaften der künstlichen Düngerfabrikation, wie den Birkelandschen elektrischen Salpetersäure-Ofen, ausführlich behandelt. Daß trotzdem auch hier einige Neuheiten fehlen, ist bei dem großen Stoffumfange nicht zu verwundern, sondern durchaus nötig.

Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

Börnstein, Prof. Dr. R. Die Lehre von der Wärme. Gemeinverständlich dargestellt. 172. Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“, IV u. 126 S. mit 33 Abbildungen im Text. Leipzig 1907. B. G. Teubner.

Wenn auf einem so engen Raume und in einem an die weitesten Kreise sich wendenden Buche auch stofflich nichts neues geboten werden kann, so ist die Durchsicht dieses Büchleins doch auch dem Fachmann wegen der interessanten didaktischen Darstellungsweise sehr wohl zu empfehlen, und ein Primaner oder Student wird in ihm eine angenehme, wertvolle Lektüre finden. Einzelne Figuren wären allerdings wohl durch neuere zu ersetzen gewesen, u. a. die der Lindeschen Luftverflüssigungsmaschine, wenn man auch wohl zugeben kann, daß die ältere hier wiedergegebene Skizze für den Laien oder Rißzeichnungen nicht leicht verstehenden Anfänger durchsichtiger ist. Die gleichzeitige Wiedergabe beider Figuren hätte das Verständnis sicherlich erhöht.

Dr. W. Brüsch (Lübeck)

* * *

Brunswig, Dr. H. Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge. 158 S. mit 6 Abbildg. und 12 Tab. Sammlung Göschen. Bd. 333. Leipzig 1907. G. J. Göschen. 0,80 M.

Der Herr Verfasser hat mit vollem Recht seinem Buche noch den Untertitel „Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge“ gegeben; denn gerade die chemischen und physikalischen Vorgänge der Explosion werden in übersichtlicher Weise dem allgemeinen Verständnis des einem so speziellen Gebiete natürlich etwas ferner stehenden allgemeinen Chemikers und Physikers näher gebracht. Zur Erhärtung des Behaupteten seien die Hauptkapitel angeführt: „Begriffsbestimmung von einem explosiven Vorgange; Bedingungen, an die explosive Vorgänge geknüpft sind; Geschwindigkeit explosiver Vorgänge; der Explosionsdruck; die Explosionstemperatur; die Explosionsgase; der Explosionsstoß; die Explosionsflamme; die physikalische und chemische Beständigkeit der Explosionsstoffe. Die am Schlusse angegebene Literaturübersicht wird vielen willkommen sein.

Dr. W. Brüsch (Lübeck).

* * *

G. Wertheim, Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik. 2. verb. Auflage. VIII und 68 S. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. Preis 3 M.

Ueber dieses schon ältere Buch, das aber noch nicht in den „Unt.-Bl.“ besprochen wurde, schreibt Herr Prof. Wiedemann-Erlangen: „Mir scheinen die Textaufgaben eine wesentliche Bereicherung unserer Schulliteratur zu bilden, da sie zugleich kulturhistorisch anregend sind, besonders wenn sich der Lehrer noch die zahlreichen Hinweise auf ältere Aufgaben zunutze macht“. Ein kurzer Einblick in das fesselnd geschriebene Büchlein wird den Leser zu derselben Ansicht führen. Interessant ist, wie einzelne Aufgaben Misrachis, der um 1500 Oberrabbiner in Konstantinopel war, seit jener Zeit zum eisernen Bestand unserer Aufgabensammlungen gehören, andere und zum Teil die originellsten, ganz verschwunden sind. Aber auch bei den bekannteren Aufgaben ist die Lösung Misrachis so eigenartig, daß es sich der Mühe lohnt, sie einmal vor Schülern (etwa der Sekunda) mit den heutigen Auflösungsmethoden zu vergleichen. Wenn Misrachi z. B. aus dem Gewicht einer Kugel ihren Durchmesser sucht, so benutzt er spezifische Gewichte, die auf Gold als Einheit bezogen sind. Die Röhrenaufgaben verbindet er mit dem Versinken eines Steines von gegebenen Dimensionen in der Wassermenge. Auch abgesehen von den Aufgaben bietet das Buch besonders durch zahlentheoretische Erläuterungen des auf diesem Gebiete rühmlich bekannten, inzwischen leider verstorbenen Herausgebers nicht nur historisch, sondern auch methodisch Wertvolles.

A. T.

Zur Besprechung eingetroffene Bücher.

(Besprechung geeigneter Bücher vorbehalten.)

Bork, H., Mathem. Hauptsätze, herausgeg. von M. Nath. Ausg. f. Gymnasien, I. Teil: Pensum der Unterstufe, 6. Aufl.; geb. M 2.10. II. Teil: Pensum der Oberstufe, 4. Aufl.; geb. M 3.75. Leipzig 1909, Dürr.

Böttcher, J. E., Beweise f. die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden. Festschrift als Beilage z. Jahresbericht der Petrischule zu Leipzig 1909. Leipzig 1909, Teubner.

Busemann, L., Der Pflanzenbestimmer. Stuttgart 1909, Kosmos-Verlag (Franckh). geb. M 3.80.

Dette, W., Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 45 Fig. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 4.40.

Deutsche Zentrale für Jugendfürsorge. Verhandlungen des ersten deutschen Jugendgerichtstages 15. bis 17. März 1909. Ebenda. M 2.80.

Eckart, R., Abraham Gotthelf Kästners Selbstbiographie und Verzeichnis seiner Schriften nebst Heynes Lobrede auf Kästner. Hannover, Geibel. M 1.—.

L'Enseignement Mathématique, Revue internationale dirigée par C. A. Laisant et H. Fehr avec la Collaboration de A. Buhl. XIme Année, Nr. 3—6. Paris 1909, Gauthier-Villars et Genève, Georg & Cie.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie f. d. Unterricht an höh. Lehranstalten. M. ein. Vorwort v. Dr. W. Krumme. Ausg. A f. Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen. In 4 Teilen. 1. Teil: Ebene Geometrie. 6. verbess. Aufl. Berlin 1910, Salle. M 2.20.

—„— Lehrbuch der Geometrie f. d. Unterricht an höh. Lehranstalten. M. ein. Vorwort v. Dr. W. Krumme. Ausg. B für Realschulen. In 2 Teilen. 1. Teil: Ebene Geometrie. M 2.—. — 2. Teil: Raumgeometrie und Trigonometrie. Nebst einer Aufgabensammlung. M 1.40. Ebenda.

Flöricke, K., Kriechtiere und Lurche Deutschlands. Stuttgart 1909, Verlag des Kosmos. M 1.—.

Frick, J., Physikalische Technik. 7. völlig umgearb. und stark verm. Aufl. von O. Lehmann. 2. Bd. 2. Abteil. Braunschweig 1909, Vieweg & Sohn. M 40.—.

Gruhn, P., Mathematische Formelsammlung. Hannover 1909, Jänecke. geb. M 1.20.

Hachet-Souplet, P., Untersuchungen über die Psychologie der Tiere. Deutsche Ausgabe von Friedr. Streißler. Leipzig, Ungleich. M 3.—.

Hahn, H., Leitfaden für Physikalische Schülerübungen. Mit 225 Textfig. Berlin 1909, Springer. geb. M 3.—.

Heise, E., Methodik des erdkundlichen Unterrichts nebst ausführl. Lehrbeispielen der Heimatskunde, der Vorbegriffe der Himmelskunde, der Länderkunde sowie der mathem. Erdkunde. Mit 1 Zeichnung, 1 Grundriß, 1 Plan und 1 Karte. Hannover-List 1909, Meyer. M 2.50.

Holtze, A., Kleine geometrische Untersuchungen. Beil. z. Jahresbericht d. Domgymn. zu Naumburg a. S. 1909. Progr. 333. Naumburg, Druck von H. Sieling.

Hoppe, E., Unser Wissen vom Werden der Welt. Bielefeld 1909, Anstalt Bethel. geb. M 5.—.

Kambly, L., Mathem. Unterrichtswerk, neu bearb. v. A. Thaer. 2. Teil: Planimetrie, Ausg. B für Realanstalten und Gymnasien m. mathem. Reformunterr. Breslau 1909, Hirt. M 2.50.

Kleiber, J., u. Siepert, P., Elementarphysik mit Chemie f. höhere Mädchenschulen. Teil I für die III. Klasse, mit 82 Fig. Teil II für die II. Klasse, mit 86 Fig. Teil III für die I. Klasse, mit 94 Fig. München 1909, Oldenbourg. geb. 3 Teile à M 1.— = M 3.—.

Kosmos, Handweiser für Naturfreunde. Herausgeg. v. Kosmos, Gesellsch. d. Naturfreunde 1909. Bd. VI, Heft 7—10. Stuttgart 1909, Verlag d. Kosmos (Franckh). Preis d. einzelnen Heftes M 0.30.

Kraepelin, K., Naturstudien. Ein Buch f. d. Jugend. Volksausgabe. 2. Aufl. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.—.

Krüger, E., Biologische Schülerübungen. Ein Leitfaden f. d. Oberklassen höh. Lehranstalten. Mit 113 Abb. Hamburg 1909, Voß. geb. M 3.—.

Krüß, G. u. H., Kalorimetrie u. quantitative Spektralanalyse. 2. Aufl., bearb. von Hugo Krüß und Paul Krüß. Ebenda. M 8.—.

Lampert, K., Die Welt der Organismen. M. 52 Fig. (Sammlung Aus Natur u. Geisteswelt.) Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Löb, W., Einführung in die chemische Wissenschaft. Mit 16 Fig. (Samml. Aus Natur u. Geisteswelt.) Ebenda. geb. M 1.25.

Meins, E., Strebe zum Ewigen. I. Der gegenwärtig statthabende Schöpfungsakt ist endlich. Alle Planeten sind bewohnt. 1. Aufl. Konstantinopel, Selbstverlag. M 2.25.

Meyer, E., u. Braun, R., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen nach Westrick und Heines Rechenbüchern. Heft 1—5, Kl. X bis VI. Münster 1910, Aschendorff.

Mikrokosmos, Zeitschr. f. d. praktische Betätigung aller Naturfreunde. Herausgeg. von A. Reitz. Jahrg. III, Heft 6/7. Stuttgart 1909, Franckh.

Möller, J., Nautik. Mit 58 Fig. (Samml. Aus Natur u. Geisteswelt). Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Müller, H., Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. II. Teil: Die Oberstufe. Lehraufgabe f. Obersekunda u. Prima. Ausgabe A: Für Gymnasien. 3. Aufl. Ebenda. geb. M 3.40.

Müller, H., u. Kutnewsky, M., Samml. von Aufgaben a. d. Arithmetik, Trigonometrie u. Stereometrie. II. Teil: Ausg. A, für Gymnasien. 3. Aufl. Ebenda. geb. M 2.80.

Müller, H., u. Mahlert, A., Lehr- u. Uebungsbuch d. Geometrie f. Studienanstalten. Ausg. A für gymnas. Kurse. Teil I: Planimetrie bis zur Lehraufgabe d. Klasse IV. M. 100 Fig. geb. M 2.—. — Ausg. B (Oberrealschulen u. realgymnas. Kurse). Teil I: Planimetrie bis zur Lehraufgabe d. Klasse IV. M. 118 Fig. geb. M 2.40. — Lehr- u. Uebungsbuch d. Arithmetik u. Algebra f. Studienanstalten. Ausg. B f. Oberrealschule u. realgymnas. Kurse. Teil I bis Kl. IV. M. 10 Fig. geb. M 2.40. — Ausg. A für gymnas. Kurse. Teil I bis Klasse IV. M. 10 Fig. Ebenda. geb. M 2.40.

Müsebeck, C., Auflösungen z. d. Aufgaben f. d. Unterricht in der analyt. Geometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III des Leitfadens der Elementarmathematik von Lieber & Lühmann. Berlin 1909, Simion Nf. M 1.—.

Müsebeck, C., Aufgaben f. d. Unterricht in der Stereometrie u. sphär. Trigonometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III des Leitfadens der Elementarmathematik von Lieber & Lühmann. Ebenda.

—„— Aufgaben für den Unterricht in der Goniometrie und ebenen Trigonometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III: Ebene Trigonometrie des Leitfadens der Elementarmathem. von Lieber & Lühmann. Ebenda. geb. M 1.50.

—„— Aufgaben f. d. Unterricht in der Planimetrie, enthalt. Aufgaben zu Teil I: Ausgabe A des Leitfadens der Elementarmathematik von Lieber & Lühmann. Ebenda. geb. M 1.50.

—„— Aufgaben für den Unterricht in der analyt. Geometrie, enthaltend Aufgaben zu Teil III des Leitfadens d. Elementarmathematik von Lieber & Lühmann. geb. M 1.50.

Nagel, O., Die Welt als Arbeit. Grundzüge einer neuzeitlichen Welt- und Lebensanschauung. 2. Aufl. Stuttgart 1909, Franckh. M 1.80.

Natur u. Erziehung, Monatsschrift z. Verbreit. u. Pflege der Naturwissenschaften in Schule u. Haus. M. d. Beilage „In meinen Mussestunden". Herausgeg. von F. Dannemann u. K. Smalian. Jahrg. I 1909/1910, Heft 1, 2. Ebenda. Halbjährl. Bezugspreis M 4.—.

Ostwald, W., Einführung i. d. Chemie. Ebenda. geb. M 3.—.

Pöschl, V., Die Härte der festen Körper und ihre physik.-chem. Bedeutung. Mit 4 Fig. u. 1 Taf. Dresden 1909, Steinkopff. M 2.50.

Ranck, Ch., Geschichte der Gartenkunst. M. 41 Abb. (Sammlung Aus Natur u. Geisteswelt). Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

Realschule, Die neue städt., (Oberrealschule in Entwickel.) zu Braunschweig. M. 13 Abb. I. Zur Geschichte d. Realschulwesens i. d. Stadt Braunschweig von Direktor Dr. Wernicke. II. Das Gebäude der neuen Anstalt v. Baurat Osterloh. III. Die Lehrmittel der neuen Anstalt von Direktor Dr. Levin. Beilage z. Jahresbericht d. Städt. Oberrealschule zu Ostern 1909. Braunschweig 1909, Meyer.

Reishauer, H., Die Alpen. Mit 26 Bild. u. Fig. u. 2 Alpenkarten (Samml. Aus Natur u. Geisteswelt). Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. (Rédakteur F. Marotte.) 3me année, Nr. 20—29. Paris 1909, Le Soudier.

Schenkling, K., Taschenbuch für Käfersammler. Mit 1200 Käferbeschr. u. 13 Taf. 6. Aufl. Leipzig, Leiner. geb. M 3.50.

Schmid, B., Biologisches Praktikum für höhere Schulen. Leipzig 1909, Teubner. geb. M 2.50.

Schwab, K., Lehr- u. Uebungsbuch der Geometrie. I. Teil. Ausg. A. M. 257 Fig. Wien 1910, Tempsky. geb. M 4.—.

Smalian, K., Leitfaden der Pflanzenkunde f. höhere Lehranstalten. I. Teil (Sexta) m. 36 Abb. u. 8 Taf. geb. M 1.—. II. Teil (Quinta) m. 37 Abb. u. 8 Taf. geb. M 1.25. III. Teil (Quarta) m. 50 Abb. u. 9 Taf. geb. M 1.30. IV. Teil (Untertertia) m. 45 Abb. u. 14 Taf. geb. M 2.25. V. Teil (Obertertia) m. 86 Abb. u. 10 Taf. geb. M 2.—. Ebenda.

Sonne, J., Praktischer Lehrgang der Arithmetik. Ein Hilfsbuch in ausführl. Darstell. für Lehrende u. Lernende. M. viel. Fig. im Text. Berlin 1910, Salle. M 2.40.

Spies, Physikalische Entwickelungsmöglichkeiten. Leipzig 1909, Teubner. M 0.50.

Stein, A., Die Lehre von der Energie. M. 13 Fig. (Sammlung Aus Natur u. Geisteswelt). Ebenda. geb. M 1.25.

Stock, A., u. Stähler, A., Praktikum der quantitativen anorganischen Analyse. Mit 37 Textfig. Berlin 1909, Springer. geb. M 4.—.

Straßburger, E., Jost, L., Schenk, H., Karsten, G., Lehrbuch der Botanik für Hochschulen. 10. Aufl. Mit 782 z. T. farb. Abb. Jena 1910, Fischer. M 8.—.

Thaer, Cl., Eine Ausdehnung der Galoisschen Theorien auf Gleichungen mit mehrfachen Wurzeln. Habilitationsschr. der philos. Fakultät d. Universität Jena vorgel. Leipzig 1909, Teubner.

Thiede, J., Die Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten i. d. Gymnasialprima. Beil. z. Jahresbericht d. Kgl. Gymn. z. Köslin 1909, Progr. 199. Köslin, Druck v. Hendep.

Unger, u. Trescher, A., Gewerbl. Rechnen (nach Sachgebieten). Ausg. B in 1 Hefte. Leipzig 1909, Klinkhardt. M 0.90.

—„— Gewerbl. Rechnen f. Holzarbeiter. Ausg. C. Ebenda. M 1.20.

—„— Gewerbl. Rechnen f. Bauhandwerker. Ausg. C. Ebenda. M 1.20.

Vater, R., Einführung in die Theorie u. d. Bau d. neueren Wärmekraftmaschinen. M. 33 Abb. 3. Aufl. (Sammlung Aus Natur u. Geisteswelt.) Leipzig 1909, Teubner. geb. M 1.25.

—„— Neuere Fortschritte a. d. Gebiete d. Wärmekraftmaschinen. 2. Aufl. Mit 48 Abb. (Sammlung Aus Natur u. Geisteswelt.) Ebenda. geb. M 1.25.

Walther, F., Geometrie u. Arithmetik f. d. Oberstufe d. höh. Mädchenschule (Walther-Janson, Mathem. Lehr- u. Uebungsgang, Abt. B). Leipzig 1910, Brandstätter. geb. M 4.60, einzeln M 3.— und 2.—.

Werth, E., Das Eiszeitalter (Sammlung Göschen). M. 17 Abb. u. 1 Karte. Leipzig 1909, Göschen. geb. M 0.80.

Wien, W., Ueber Elektronen. 2., die Fortschritte der Wissenschaft berücksichtigende Aufl. Leipzig 1909, Teubner. M 1.40.

Zeitschrift f. Lehrmittelwesen und pädagogische Literatur. Herausgeg. von Franz Frisch. Jahrg. V, Nr. 1—9. Wien 1909, Pichlers Wwe. & Sohn.

Druck von H. Sievers & Co. Nachf., Braunschweig.