ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 63 Mechanika z.13 1962

N.A. KIŁCZEWSKIJ

(Kijów, ZSRR)

NIEKTÓRE UOGÓLNIENIA DOTYCZĄCE FORMUŁOWANIA I METOD ROZWIĄZYWANIA STATYCZNYCH I DYNAMICZNYCH ZAGADNIEŃ KONTAKTOWYCH[x)]

Streszczenie: Zagadnienie rozkładu nacisków kontaktowych, sformułowane jako zagadnienie wariacyjne dla całki (1.1), zostało rozpatrzone dla przypadku zetknięcia początkowego w jednym punkcie oraz wzdłuż odcinka prostej.

W przypadku pierwszym odnośne nieliniowe równanie całkowe sprowadzono do układu nieliniowych równań algebraicznych, które rozwiązuje się metodą częściowej linearyzacji.

W przypadku drugim podano metodą liczbowego rozwiązania przy użyciu elektronowych maszyn liczących.

Rozpatrzono pewne zjawiska falowe, towarzyszące zderzeniu ciał sprężystych (w ujęciu quasistatycznym).

1. WSTĘP

Źródłowa praca H.Hertza na temat kontaktowego ściskania ciał sprężystych wywołała późniejsze ukazanie się licznych prac teoretycznych.

Nie będziemy tu dokonywali szczegółowej analizy prac w tej dziedzinie mechaniki, wykonanych w ciągu 75 lat, które upłynęły od czasu opublikowania pracy H.Hertza, lecz zatrzymamy się na niektórych wynikach, uzyskanych przez radzieckich uczonych, którzy przyczynili się do dalszego rozwoju teorii kontaktowego oddziaływania ciał sprężystych. Omawiać będziemy jedynie zagadnienia przestrzenne. Nie będziemy tu rozpatrywać zagadnień kontak-

x) Jest to rozszerzony tekst referatu wygłoszonego w dniu 5.X. 1960 r. na sesji naukowej Wydziału Mechanicznego (sekcja mechaniki technicznej) z okazji XV-lecia Politechniki Śląskiej towych na płaszczyźnie i zagadnień dotyczących działania matryc, zbadanych w ZSRR w pracach Ł.A.Galina, N.I.Głagolewa, N.I. Muscheliszwili i jego uczniów, M.J.Leonowa, A.I.Łurie, W.I.Mossakowskiego, G.N.Sawina, I.J.Sztajermana i innych uczonych radzieckich.

W pracach I.J.Sztajermana, opublikowanych w latach 1936-1949, teoria kontaktowego oddziaływania ciał sprężystych dotyczy zagadnień statycznego oddziaływania wzajemnego ciał sprężystych, pod warunkiem ścisłego, początkowego przylegania ich nieodkształconych powierzchni.

W 1940 r. A.I.Łurie i I.J.Sztajerman stwierdzili niewyznaczalność matematycznego przedstawienia zagadnienia sformułowanego przez H.Hertza i zaproponowali metodę uzupełnienia wyznaczalności tego przedstawienia, w przypadku początkowego stykania się powierzchni ciał w jednym punkcie.

W 1958 roku określiliśmy minimalną właściwość nacisków kontaktowych, wynikającą z zasady Gaussa. Właściwość ta brzmi następująco: na zbiorze funkcji, określających rozkład kontaktowych nacisków $p(M,t)$ i kształt konturu obszaru ściskania ω w pewnej chwili t zgodnie z klasycznymi równaniami zagadnienia kontaktowego, całka

$$J = \iint_{(\omega)} p^2(M,t)\, dS_M \tag{1.1}$$

posiada minimum dla istniejących w rzeczywistości kontaktowych nacisków i kształtu konturu obszaru ściskania.

Minimalna właściwość nacisków kontaktowych zezwala, jak to wykażemy niżej, na dodatkowe określenie zagadnienia kontaktowego.

Niniejsze opracowanie składa się z dwóch części: w pierwszej rozpatruje się zagadnienie elastoplastyki, w drugiej - elastodynamiki.

Rozpatrywać będziemy statyczne i dynamiczne kontaktowe oddziaływanie ciał sprężystych, poruszających się ruchem postępowym wzdłuż wspólnej normalnej, przeprowadzonej prostopadle do nieodkształconych powierzchni ciał w jednym z punktów ich początkowego stykania się. Tarcie pomijamy. Początkowe stykanie się nieodkształconych powierzchni występuje w jednym punkcie, lub wzdłuż odcinka prostej. Zakłada się, że znany jest układ klasycznych równań elastostatycznego zagadnienia kontaktowego.

2. ZETKNIĘCIE POCZĄTKOWE W JEDNYM PUNKCIE

Rozpatrzymy, posługując się ogólnie przyjętymi oznaczeniami, równania zagadnienia kontaktowego, wypisane dla przypadku początkowego zetknięcia powierzchni ciał w jednym punkcie:

$$\iint\limits_{(\omega)} p\,(x',y')\,dx'dy' = P, \tag{2.1}$$

$$(\theta_1 + \theta_2)\iint\limits_{(\omega)} \frac{p(x',y')}{R}\,dx'dy' = \alpha - Ax^2 - By^2. \tag{2.2}$$

Dokonamy zamiany współrzędnych:

$$x = rF(\varphi)\cos\varphi; \qquad y = \lambda rF(\varphi)\sin\varphi. \tag{2.3}$$

Tutaj φ jest kątem biegunowym; zmienna r zmienia się w przedziale $[0,1]$. Wartość $r=1$ odpowiada punktom na konturze $\mathcal{L}$ obszaru ściskania. Wielkość λ jest pewnym stałym parametrem.

Równanie konturu $\mathcal{L}$ obszaru zetknięcia we współrzędnych biegunowych posiada następującą postać:

$$\varrho_L = F(\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi + \lambda^2\sin^2\varphi}\,. \tag{2.4}$$

Zakładając następnie

$$(\theta_1 + \theta_2)\,p(r,\varphi)\,F^2(\varphi) = \alpha^{3/2}\Phi(r,\varphi,\lambda); \quad F^2(\varphi) = \alpha\psi(\varphi,\lambda) \tag{2.5}$$

sprowadzimy równanie (2.2) do następującej postaci:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\Phi(r',\varphi',\lambda)}{\bar{\bar{R}}}\,r'dr'd\varphi' + r^2\psi(\varphi,\lambda)\left[A\cos^2\varphi + B\lambda^2\sin^2\varphi\right] = 1 \tag{2.6}$$

Z równania (2.1) wynika:

$$\alpha = k\, P^{2/3}, \tag{2.7}$$

gdzie:

$$k = (\theta_1 + \theta_2)^{\frac{2}{3}} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi(r', \varphi', \lambda)\, r' dr' d\varphi' \right]^{-\frac{2}{3}}. \tag{2.8}$$

W ten sposób, przy dowolnym kształcie obszaru zetknięcia zbliżenie α jest proporcjonalne do $P^{2/3}$. Od kształtu konturu obszaru zetknięcia zależy jedynie współczynnik proporcjonalności k.

Tak samo, w przypadku ścisłego początkowego przylegania typu q, rozpatrzonego przez I.Ja. Sztajermana, otrzymamy:

$$\alpha = k_1\, P^{\frac{2q}{2q+1}}, \tag{2.9}$$

gdzie:

$$k_1 = (\theta_1 + \theta_2)^{\frac{2q}{2q+1}} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi(r', \varphi', \lambda)\, r' dr' d\varphi' \right]^{-\frac{2q}{2q+1}}. \tag{2.10}$$

Przekształcone równania zostały zastosowane przez nas do liczbowego rozwiązania zagadnienia kontaktowego na elektronowej maszynie liczącej.

Równanie (2.6) jest nieliniowym równaniem całkowym z niewiadomymi funkcjami $\Phi(r,\varphi,\lambda)$ i $\Psi(\varphi,\lambda)$. Obszarem całkowania jest pojedyncze koło. W celu liczbowego rozwiązania równania (2.6) podzielimy pojedyncze koło na elementy i przedstawimy całkę, występującą z lewej strony równania, jako sumę całek wziętych dla poszczególnych elementów. W celu uzyskania przybliżonego rozwiązania każdą z tych całek, z wyjątkiem całki elementu zawierającego $M(r,\varphi)$, przedstawimy w przybliżeniu jako iloczyn funkcji podcałkowej w środku ciężkości elementu i powierzchni elementu.

Jest zrozumiałe, że dobranie punktu wewnątrz elementu akurat w jego środku ciężkości jest warunkowe, ponieważ podobieństwo procesów, analogicznych do rozpatrywanego, nie zależy od takiego doboru.

Całkę na obszarze elementu, zawierającego punkt $M(r,\varphi)$, obliczymy według wzoru przybliżonego:

$$J = 2(\pi\Delta S)^{\frac{1}{2}}\left[\lambda\Psi(\varphi;\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}\Phi(r,\varphi;\lambda). \qquad (2.11)$$

Tu ΔS jest powierzchnią elementu, zawierającego punkt $M(r,\varphi)$. Zakłada się, że ten punkt pokrywa się ze środkiem ciężkości powierzchni elementu.

Tym sposobem równanie (2.6) zastępuje się układem nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi wartościami funkcji Φ w środkach ciężkości powierzchni elementów i Ψ na promieniach przeprowadzonych przez środki symetrii. Układ ten jest nieokreślony, ponieważ ilość niewiadomych przekracza ilość równań o liczbę równą ilości promieni, przeprowadzonych przez środki ciężkości elementów.

W celu uzupełnienia wyznaczalności układu, zakładamy podobnie jak A.I.Łurie i I.J.Sztajerman, że nacisk kontaktowy zeruje się na konturze obszaru ściskania:

$$\Phi(1,\varphi;\lambda) = 0 \qquad (2.12)$$

Warunek (2.12) czyni wyznaczalnym przedstawione zagadnienie. Dokonamy częściowej linearyzacji układu, zakładając w celu uzyskania wyjściowego przybliżenia $\bar{R}$

$$\Psi \cong C^2, \qquad (2.13)$$

tzn. aproksymując kontur obszaru ściskania przez elipsę.

Zakładając pewną konkretną wartość λ, rozwiązujemy ułożony w ten sposób, układ liniowych równań algebraicznych względem funkcji Ψ i $C^{-1}\Phi$ we wskazanych wyżej punktach. Uzyskujemy pierwsze przybliżenie. Stałą C można wyznaczyć z warunku równości powierzchni ω w wyjściowym i w pierwszym przybliżeniu.

Podstawiając otrzymaną w pierwszym przybliżeniu wartość Ψ do $\bar{R}$ znowu sprowadzimy zagadnienie do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych itd. Zbieżność procesu kolejnych przybliżeń wymaga specjalnego badania.

Równanie (2.6) jest nieliniowe. Sprowadziliśmy przybliżone rozwiązanie tego równania do kolejnego rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych. Naturalnie powstaje zagadnienie odszukania wszystkich rzeczywistych pierwiastków równania (2.6).

W tym celu skorzystamy z dowolności doboru parametru λ. Przypisując mu szereg dodatnich wartości, zbadamy zbieżność wyżej opisanego procesu do określonych wartości Φ i Ψ, tzn. do określonej wartości ciśnienia kontaktowego i do określonego równania konturu obszaru zetknięcia ω. Jest zrozumiałe, że ta metoda rozwiązywania problemu kontaktowego wymaga zastosowania nowoczesnych maszyn liczących.

3. ZETKNIĘCIE POCZĄTKOWE WZDŁUŻ ODCINKA PROSTEJ

Analiza oddziaływania kontaktowego w zazębieniach o zębach skośnych ewolwentowych opiera się na niedostatecznie dotychczas zbadanej teorii ściskania kontaktowego ciał sprężystych, ograniczonych liniowymi powierzchniami.

Poniżej zostanie sformułowane to zagadnienie oraz podana będzie metoda liczbowego rozwiązania, umożliwiająca zastosowanie elektronowych maszyn liczących. Zakłada się, że w stanie nieodkształconym powierzchnie ciał stykają się wzdłuż odcinka prostej wspólnej tworzącej ciał. Przypadek początkowego zetknięcia wzdłuż odcinka zwykłej tworzącej jest znacznie bardziej skomplikowany. Przypadek ten wykracza daleko poza granice podstaw klasycznego zagadnienia kontaktowego. Wpływ tarcia i smarowania pomijamy.

Bada się ściskanie ciał o dostatecznie dużej sztywności, zapewniającej możliwość pominięcia w strefie obszaru ściskania ciał wszystkich rodzajów ich odkształceń nielokalnych.

Przy poczynionych wyżej założeniach odniesiemy obszar ściskania ω do prostokątnego układu współrzędnych (y,x). Współrzędna mierzona jest wzdłuż tworzącej, od końca odcinka początkowej linii styku, leżącego bliżej tworzących, x - współrzędna mierzona wzdłuż określonego dodatniego kierunku normalnej do tworzącej, leżącej na wspólnej powierzchni styczności w odniesieniu do nieodkształconych powierzchni ciał ściskanych. Opierając się na znanych założeniach, można doprowadzić do następującego układu równań, słusznych w przypadku ściskania ciał sprężystych ograniczonych powierzchniami liniowymi, przy istnieniu początkowej styczności wzdłuż odcinka prostej tworzącej ogólnej:

$$\iint\limits_{(\omega)} p(v',x';\ s_1,s_2)dv'dx' = P, \tag{3.1}$$

$$(\theta_1+\theta_2)\iint\limits_{(\omega)} \frac{p(v',x';\ s_1,s_2)}{\sqrt{(v-v')^2+(x+x')^2}}dv'dx' = \alpha(v,s_1,s_2) - F(v,s_1,s_2)x^2. \tag{3.2}$$

Tu $p(v,x;\ s_1,s_2)$ - nacisk powierzchniowy, $\alpha(v;\ s_1,s_2)$ - lokalne ściskanie. Parametry s_i wyznaczają położenie tworzącej na kierownicach. Funkcja $F(v;s_1,s_2)$ zależy od własności geometrycznych nieodkształconych powierzchni ciał.

Równania typu (3.1), (3.2) prawdopodobnie po raz pierwszy zostały ułożone przez A.N.Grubina.

Przekształcimy równania (3.1) i (3.2) na zmienne bezwymiarowe. Niech równania krzywych, ograniczających obszar ω, mają następującą postać:

$$x - f_i\ (v;\ s_1,s_2) = 0; \quad (i = 1,2).$$

Oznaczymy przez l długość odcinka tworzącej, wzdłuż którego występuje zetknięcie ściśniętych powierzchni ciał.
Założymy

$$v = \xi l; \quad x = \eta f_1(v;s_1,s_2) \leq 0; \quad x = \eta f_2(v;\ s_1,s_2) \geq 0, \tag{3.4}$$

gdzie

$$0 \leq \xi \leq 1; \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Następnie

$$\alpha(v;s_1,s_2)=l\beta(\xi,s_1,s_2);\quad p_i(\xi,\eta;s_1,s_2)=P\,l^{-2}q_i(\xi,\eta,s_1,s_2),\tag{3.5a}$$

$$f_i(v;s_1,s_2)=l\varphi_i(\xi;s_1,s_2);\quad F(v;s_1,s_2)=l^{-1}\Phi(\xi;s_1,s_2);\quad \vartheta_j=Pl^{-2}\Theta_j.\tag{3.5b}$$

Równanie (3.1) będzie posiadało wtedy następującą postać:

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1}^{2}(-1)^k q_k(\xi',\eta';s_1,s_2)\,\varphi_k(\xi';s_1,s_2)\,d\xi'd\eta' = 1.\tag{3.6}$$

Tu funkcje q_1 i q_2 oznaczają nacisk powierzchniowy p odpowiednio w dolnej i górnej półpłaszczyznach (v,x).

Równanie (3.2) przechodzi w układ równań, odpowiadających położeniu punktu M(v,x) w górnej i dolnej półpłaszczyznach (v,x). Mamy więc:

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)\int_0^1\int_0^1 \sum_{k=1} (-1)^k G_{ik}(\xi,\eta;\xi',\eta';s_1,s_2)q_k(\xi',\eta';s_1,s_2)d\xi'd\eta' =$$
$$= \beta(\xi;s_1,s_2) - \Phi(\xi;s_1,s_2)\,\varphi_i^{\,2}(\xi;s_1,s_2)\,\eta^2.\tag{3.7}$$

Tu:

$$G_{ik}(\xi,\eta;\xi',\eta';s_1,s_2) = \varphi_k(\xi;s_1,s_2)\Big\{(\xi-\xi')^2 +$$
$$+\left[\eta\varphi_i(\xi;s_1,s_2)-\eta'\varphi_k(\xi';s_1,s_2)\right]^2\Big\}^{-1/2}.\tag{3.8}$$

Równania (3.6) i (3.7) zawierają niewiadome funkcje q_k, φ_k i β, określające, przy założonym parametrze l, rozkład nacisków powierzchniowych, kształt krzywych, ograniczających obszar ściskania w górnej i dolnej półpowierzchniach (v,x) i ściskanie lokalne. Ostatnie, w odróżnieniu od przypadku, kiedy zetknięcie początkowe zachodzi w jednym punkcie, jest funkcją współrzędnej v lub ξ. Do równań (3.6) i (3.7) należy dołączyć warunek zerowania się kontaktowego ciśnienia na krzywych, opisanych przez równania (3.3):

$$q_k(\xi, 1; s_1, s_2) = 0; \qquad (k = 1,2). \tag{3.9}$$

Przy badaniu oddziaływania kontaktowego w przekładniach zębatych parametr l jest wyznaczany bezpośrednio z warunków zagadnienia. W dalszej części pracy przyjmiemy, że parametr l jest znany.

W związku z obecnością małych, co do bezwzględnej wartości, funkcji φ_j w wyrażeniu podpierwiastkowym w G_{ik}, równania (3.6) i (3.7) są słabo nieliniowymi.

Równania (3.6) i (3.7), wraz z warunkami (3.9) są niewystarczające do rozwiązania zagadnienia kontaktowego. Aby upewnić się w tym, wystarczy w przybliżeniu zastąpić układ równań (3.6) i (3.7) i warunki (3.9) przez układ równań algebraicznych, stosując metodę siatek. Dodatnia różnica pomiędzy ilością niewiadomych wartości poszukiwanych funkcji w węzłach siatki i ilością równań, zmniejszoną o jedność, równa się ilości wartości funkcji $\beta(\xi, s_1, s_2)$ w węzłach, leżących na osi $O\xi$.

W celu otrzymania dodatkowych równań należy skorzystać z minimalnych właściwości nacisków powierzchniowych (1.1). W danym przypadku własności te wyrażają się warunkami minimum operatora

$$J = \iint\limits_{(\omega)} p^2(v', x'; s_1, s_2)\, dv'\, dx' =$$

$$= P^2 l^{-2} \int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_{k=1}^{2} (-1)^k q_k^2(\xi', \eta'; s_1, s_2)\, \varphi_k(\xi'; s_1, s_2)\, d\xi'\, d\eta'. \tag{3.10}$$

Obszarem Ω określenia poszukiwanych funkcji q_k, φ_k i β jest kwadrat w płaszczyźnie (ξ,η), o boku równym jedności. Podzielmy kwadrat Ω na n^2 kwadratów ω_{rs} o bokach $\frac{1}{n}$ i przedstawmy całki, zawarte w równaniach (3.6) i (3.7) i warunek (3.10) jako sumy całek w kwadratach ω_{rs}. Każdą z całek podług obszaru ω_{rs}, nie zawierającego w ustalonym punkcie $M(\xi,\eta)$ osobliwości typu r^{-1}, wyrazimy w przybliżeniu jako iloczyn powierzchni ω_{rs}, równej $\frac{1}{n^2}$ i wartości funkcji podcałkowej w środku kwadratu ω_{rs}.

Całkę J_{rs}, rozciągającą się na element ω_{rs}, zawierającą ustalony punkty $M(\xi,\eta)$, można przedstawić w następującej postaci:

$$J_{rs} = 2\sqrt{\pi}\frac{q_k(\xi_k, \eta_s; s_1,s_2)\,\varphi_k(\xi_r;s_1,s_2)}{n\sqrt{\varphi_k(\xi_r; s_1, s_2)}}. \qquad (3.11)$$

W ten sposób układ równań (3.6) i (3.7) jest w przybliżeniu zastąpiony układem słabo nieliniowych równań algebraicznych względem zmiennych

$$\Phi^{(k)}_{rs} = q_k(\xi_r,\eta_s;s_1,s_2)\,\varphi_k(\xi_r;s_1,s_2), \qquad (3.12)$$

$$\Psi_{kr} = \varphi_k^2(\xi_r;s_1,s_2); \quad \beta_r = \beta(\xi_r;s_1,s_2). \qquad (3.13)$$

Niewiadome $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{j-1}, \beta_{j+1},\ldots,\beta_n$, przy określonym j stają się "zbędne", tzn. warunkują niewyznaczalność układu, o czym już wspomniano wyżej.

Rozpatrzymy układ równań algebraicznych, wypływających z równań (3.7). Ustalając j, założymy:

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{j-1} = \beta_{j+1} = \ldots = \beta_n = 0; \quad \beta_j = 1. \qquad (3.14)$$

Wtedy równania, wypływające z (3.7) i (3.9), tworzą określony układ. Będziemy rozwiązywali ten układ metodą częściowej linearyzacji.

W celu uzyskania wyjściowego przybliżenia, założymy pod znakiem pierwiastka kwadratowego, zawartego w G_{ik}:

$$|\varphi_i| = |\varphi_k| = \lambda b l^{-1}, \tag{3.15}$$

gdzie:

$$b = \sqrt{\frac{4Q(\theta_1 + \theta_2)\bar{R}_1 \bar{R}_2}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2}}; \quad Q = \frac{P}{l}; \quad \bar{R}_i = \frac{1}{l}\int_0^l R_i(v; s_1, s_2)\,dv. \tag{3.16}$$

Tu R_i jest promieniem krzywizny nieodkształconej powierzchni ciała w płaszczyźnie przekroju prostopadłym do odcinka tworzącej, wzdłuż którego występuje początkowe zetknięcie. Parametr λ jest wielkością stałą, której należy przed przystąpieniem do obliczeń nadać pewną ustaloną wartość. Przeznaczenie tego parametru jest takie same, jak przeznaczenie analogicznego parametru, który był rozpatrzony w przypadku ściskania ciał o punktowym zetknięciu początkowym.

Rozwiązując uzyskany tą metodą liniowy układ równań, odszukamy odpowiadające w pierwszym przybliżeniu warunkom (3.14) wartości poszukiwanych funkcji q_k, φ_k i φ_k^2 w środkach kwadratów ω_{rs}. Oznaczymy te wartości niewiadomych odpowiednio przez x_{kj} i y_{kj}. Odszukanie dalszych przybliżeń przy warunkach (3.14) jest bezcelowe, ponieważ podstawowy układ równań jest nieliniowy.

Przejdziemy do budowy przybliżonego rozwiązania przy dowolnych wartościach β_i. Dowolnej wartości β_j, przy zerujących się $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n$, odpowiadają przybliżone rozwiązania $\beta_j x_{kj}$ i $\beta_j y_{kj}$ wyjściowego układu słabo nieliniowych równań algebraicznych. Ogólne rozwiązanie zagadnienia w pierwszym przybliżeniu przyjmie postać:

$$q_k(\xi_r, \eta_s; s_1, s_2)\,\varphi_k(\xi_r; s_1, s_2) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, x_{kj}\,(\xi_r, \eta_s; s_1, s_2) \ldots \tag{3.17}$$

$$\varphi_k^2\,(\xi_r; s_1, s_2) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, y_{kj}\,(\xi_r; s_1, s_2). \tag{3.18}$$

Stałe β_j są dowolne. Aby wyznaczyć te stałe, należy zestawić równanie (3.6) i warunek (3.10). Z równania (3.6) wyznacza się jedną ze stałych β_j. Z warunku (3.10) wynika, że występuje minimum sumy

$$S = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (-1)^k \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_{kj} (\xi_r, \eta_s; s_1, s_2)\right]^2}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j y_{kj} (\xi_r; s_1, s_2)\right]^{1/2}} \tag{3.19}$$

Warunki minimum S prowadzą do układu nieliniowych równań algebraicznych względem stałych β_j.

W tym przypadku można również przeprowadzić proces iteracyjny, obliczając mianownik $\left[\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j y_{kj}\right]^{1/2}$ we wzorze (3.19) ze wzoru (3.15), następnie znaleźć wyjściowe przybliżenia β_j z układu liniowych równań algebraicznych, wynikających z warunków minimum S, wyjściowe przybliżenia β_j podstawić do $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j y_{kj}$ w równaniu (3.19) itd.

Układ równań (3.6) i (3.7), jak również warunki minimum operatora (3.10) są nieliniowe. Jak z tego wynika, może istnieć kilka rzeczywistych gałęzi poszukiwanych rozwiązań. Powstaje problem wyznaczenia gałęzi rozwiązania wieloznacznego metodami liczbowymi, omówionymi przez nas wyżej. Jako jeden ze środków badania proponujemy zastosować możliwość zmiany parametru λ w równości (3.15). Nadając wielkości λ szereg dodatnich wartości $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ i stosując dla każdej z tych wartości opisany przez nas proces iteracyjny, jak gdyby "sondujemy" obszar możliwego występowania poszukiwanych gałęzi. Obecność gałęzi ujawnia się na podstawie szybkości zwierania się (zbieżności) procesu iteracyjnego. Jest zrozumiałe, że proponowana przez nas metoda jest możliwa jedynie przy użyciu współczesnych elektronowych maszyn liczących.

4. O DYNAMICZNYM ŚCISKANIU KONTAKTOWYM I ZDERZANIU SIĘ CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

Przejdziemy do rozpatrzenia dynamicznych zagadnień kontaktowych. W teorii zjawisk towarzyszących zderzaniu się ciał sprężystych, opracowanej przez H.Hertza, pomija się siły bezwładności, powstające przy odkształcaniu zderzających się ciał. Poniżej rozpatrujemy metodę, zezwalającą na zbadanie wpływu wspomnianych sił bezwładności na podstawowe wielkości, charakteyzujące dynamiczne kontaktowe oddziaływanie wzajemne ciał. Rozpatrzymy zagadnienie tylko dla przypadku kontaktowego oddziaływania ciał pod warunkiem początkowego ich zetknięcia w jednym punkcie.

Będziemy nazywali rozwiązania elastodynamicznych równań quasistatycznymi, o ile te rozwiązania będą uzyskane przy założeniu tak małych sił bezwładności, zależnych od lokalnego odkształcania się ciała, że można je pominąć. Quasistatyczne rozwiązania zawierają czas t jako parametr. Jak wiadomo, te rozwiązania są podstawą teorii sprężystego zderzenia, zaproponowanej przez H.Hertza.

Przekształcenie Laplace'a - Carsona (L.C.) zezwala na sprowadzenie rozwiązania dynamicznego zagadnienia teorii sprężystości do rozwiązania zagadnienia quasistatycznego w obszarze odwzorowań. Na podstawie układu dynamicznych równań Lame'go, przekształconych według Laplace'a - Carsona, otrzymamy:

$$u_k^*(M,p) = v_k^*(M,p) + \varrho \cdot p \iiint\limits_{(v)} \sum_{i=1}^{3} v_{(k)i}(N;M)\dot{u}_{io}(N)\, d V_N -$$
$$- \varrho p^2 \iiint\limits_{(v)} \sum_{i=1}^{3} v_{(k)i}(N,M) u_i^*(N;p)\, d V_N. \tag{4.1}$$

Tu $u_k^*(M,p)$ są składnikami odwzorowania przemieszczenia dynamicznego w punkcie M; $v^*(M;p)$ - są składnikami odwzorowania quasistatycznego przemieszczenia w tym samym punkcie, $v_{(k)i}(N,M)$ - składniki tensora Greena, $\dot{u}_{oi}(N)$ - składowe początkowej prędkości punktów ciała, ϱ - gęstość, p - parametr przekształcenia L,C., V - objętość ciała. Początkowe przemieszczenia punktów ciała przyjęte są jako równe zeru.

Równanie (4.1) ustala związek między dynamicznymi i quasistatycznymi przemieszczeniami.

Niech punkt M leży na powierzchni ciała w obszarze lokalnych odkształceń. Założymy, że początkowe zetknięcie nieodkształconych powierzchni ciał zachodzi w jednym punkcie. W tym przypadku, zgodnie z teorią H.Hertza, wielkości $v_{(k)i}(N,M)$ są statycznymi przemieszczeniami sprężystej półprzestrzeni z płaską granicą.

Dobierzemy prostokątny układ współrzędnych i oznaczenia w ten sposób, jak to np. przedstawiono w znanej książce A.Love'a Założymy, że $\dot{u}_{10} = \dot{u}_{20} = 0$ i rzut $\dot{u}_{30}$ jest jednakowy dla wszystkich punktów ciała. Założenia te odpowiadają zderzeniu ciał, poruszających się z prędkościami, skierowanymi wzdłuż wspólnej normalnej do ich powierzchni w punkcie ich początkowego zetknięcia.

Jak wiadomo w tym przypadku podstawowe znaczenie posiada składnik $u_3(M,t)$. Aby znaleźć przybliżoną wartość tego składnika założymy:

$$u_3^*(N;p) = u_3^*(M;p) + \left[u_3^*(N;p) - u_3^*(M;p)\right] \cong$$
$$\cong u_3^*(M;p) + \left[(v_3^*(N;p) - v_3^*(M;p)\right]. \tag{4.2}$$

Założymy również w przybliżeniu:

$$u_i^*(N;p) \cong v_i^*(N;p); \quad (i = 1,2). \tag{4.3}$$

Na podstawie tych stosunków, z trzeciego równania układu (4.1) otrzymamy:

$$u_3^*(M;p) = v_3(M;p) + \left(1+\varrho p^2 \iiint\limits_{(v)} v_{(3)3}(M,N)\, d\,V_N\right)^{-1} \times$$
$$\times \left\{\varrho p\, \dot{u}_{o3} \iiint\limits_{(v)} v_{(3)3}(M,N)\, d\,V_N - \varrho p^2 \iiint\limits_{(v)} \sum_{i=1}^{3} v_{(3)i}(N;M) v_1(N;p)\, d\,V_N\right\}. \tag{4.4}$$

Równość (4.4) odpowiada pierwszemu przybliżeniu w odniesieniu do rzeczywistych wartości odwzorowań przemieszczeń dynamicznych. Ograniczymy się do tego przybliżenia. Wprowadzimy oznaczenie

$$n = \left[\varrho \iiint\limits_{(v)} v_{(3)3}(N,M)\, d\,V_N\right]^{-1/2} = f(M). \tag{4.5}$$

Przechodząc do funkcji pierwotnych, otrzymamy na podstawie równości (4.4):

$$u_3(M,t) = v_3(M,t) + \frac{\dot{u}_{30}}{n}\sin nt - \varrho n^2 \iiint_{(v)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} v_{(3)i}(N,M) \times \right.$$

$$\left. \times \left[v_c(N,t) - n \int_0^t v_i(N,t_1) \sin n(t-t_1)\, dt_1 \right] \right\} d\,V_N. \quad (4.6)$$

Równość (4.6) zezwala na wyprowadzenie równań, które precyzują teorię uderzenia, opracowaną przez H.Hertza.

Quasistatyczna teoria uderzenia, rozwinięta przez H.Hertza, jest słuszna jedynie przy dość długim czasie trwania uderzenia, który to czas wielokrotnie przekracza okres najbardziej wolnych drgań własnych zderzających się ciał. Równość (4.6) umożliwia dokonanie wstępnej oceny słuszności tej wyjściowej propozycji teorii quasistatycznej. Określając okres T drgań o częstotliwości n, otrzymamy:

$$T = \frac{2\pi}{C_L} \sqrt{\frac{1}{\pi} \iiint_{(v)} \frac{dV}{r}}. \quad (4.7)$$

Tu C_L jest prędkością rozchodzenia się podłużnych fal w nieograniczonej płycie. Równocześnie założyliśmy, że punkt M odpowiada środkowi układu współrzędnych, dlatego r jest odległością punktu N od środka układu współrzędnych.

Obliczając T dla kuli stalowej i porównując wynik z czasem trwania uderzenia kul stalowych, podanym przez A.N.Dinnika, można stwierdzić, że T jest około czterokrotnie mniejszy od czasu trwania uderzenia, wyznaczonego na podstawie teorii quasistatycznej. To dowodzi, że pominięcie lokalnych sił bezwładności może doprowadzić do dostrzegalnych błędów jakościowych i ilościowych.

Składnik $\frac{1}{n}\dot{u}_{30}$ po prawej części równości (4.6) również może osiągnąć 10% maksymalnego lokalnego ściskania, wyznaczonego na podstawie quasistatycznej teorii.

Ułożymy przybliżone równanie teorii zderzenia dwóch ciał, korzystając z równości (4.1). Oznaczymy dynamiczne lokalne (miejscowe) ściskanie przez $\alpha(t)$, miejscowe ściskanie teorii quasistatycznej oznaczymy przez $\alpha^{(o)}(t)$. Mamy więc:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - P(t), \tag{4.8}$$

gdzie $P(t)$ jest siłą oddziaływania zderzających się ciał o masach m_1 i m_2.

Następnie na podstawie quasistatycznej teorii otrzymamy:

$$\alpha^{(o)}(t) = (\theta_1+\theta_2) \iint\limits_{(\omega)} \frac{p(x',y',t)\, dx'dy'}{r(0,0;x', y')}, \tag{4.9}$$

$$v_3^{(j)}(0,t) = \theta_j \iint\limits_{(\omega)} \frac{p(x',y',t)\, dx'dy'}{r(0,0;x', y')}. \tag{4.10}$$

Tu j oznacza numer kolejny ciał zderzających się, θ_j - stałe sprężystości teorii kontaktowej H. Hertza, $v_3^{(j)}(0,t)$ - rzut wektora przemieszczeń $\vec{v}_3(j)$ początku układu $Ox_1x_2x_3(j)$ na oś $Ox_3(j)$. Kierunki osi układów współrzędnych $Ox_1x_2x_3(j)$ są wskazane w cytowanej wyżej pracy A. Love'a. Nacisk powierzchniowy wyliczony na podstawie teorii quasistatycznej, oznaczono przez $p(x',y',t)$, obszar ściskania przez ω, $z(0,0;x',y')$ odległość punktu $M'(x',y')$ od początku układu. Z (4.9) i (4.10) i z teorii quasistatycznej wynika:

$$v_3^{(j)}(0,t) = \frac{\theta_j}{\theta_1 + \theta_2} \alpha^{(o)}(t) = \frac{k\theta_j}{\theta_1+\theta_2} P^{\frac{2}{3}}(t). \tag{4.11}$$

Z drugiej strony:

$$\alpha(t) = u_3^{(1)}(0,t) + u_3^{(2)}(0,t). \tag{4.12}$$

Aby otrzymać zgrubsza przybliżone równanie, wiążące $\alpha(t)$ i $\alpha^{(o)}(t)$ założymy w równaniu (4.6), że rzuty $v_i(N,t)$ $(i = 1,2)$

są równe zeru, a funkcja $v_3(N,t)$ jest równa $v_3(0,t)$. Wtedy na podstawie równości (4.11) - (4.12) otrzymamy przybliżony związek:

$$\alpha(t) \cong \sum_{j=1}^{2} \frac{\dot{u}_{3o}^{(j)}}{M_o^{(j)}} \sin n_o^{(j)} t + \frac{k}{\theta_1 + \theta_2} \int_0^t P^{\frac{2}{3}}(t_1) \, x$$

$$x \sum_{j=1}^{2} \theta_j \, n_o^{(j)} (t - t_1) \, dt_1; \qquad (4.13)$$

tutaj

$$n_o^{(j)} = f^{(j)}(0). \qquad (4.14)$$

Zależności (4.8) i (4.13) określają miejscowe ściskanie $\alpha(t)$ i siłę oddziaływania $P(t)$. Przy dużych $n_o^{(j)}$ równanie (4.13) przechodzi w znany wzór teorii H.Hertza.

Dla przypadku ciał o jednakowym kształcie, wymiarach, masie i o jednakowych stałych sprężystości θ_j z równań (4.8) i (4.13) otrzymamy:

$$\alpha(t) \cong \frac{2}{m \, n_o^2} P(t) + P^{\frac{2}{3}}(t). \qquad (4.15)$$

W ten sposób, w tym przypadku wzór H.Hertza jest uzupełniony przez człon, zależący w sposób liniowy od $P(t)$. Użyteczność, uzyskanych w wyniku dość niedokładnych uproszczeń, zależności (4.13) - (4.15) i ich rola w teorii zderzenia podlegają dalszym badaniom.

Zderzenie ciał sprężystych wywołuje pojawienie się różnych wahadłowych ruchów ich elementów. Te niestacjonarne ruchy drgające rozchodząc się w ciele, mogą w przyszłości przyjąć postać ruchów stacjonarnych, do których w szczególności należą powierzchniowe fale Rayleigh'a.

Rozpatrzymy możliwy układ powstawania przy zderzeniu niestacjonarnych procesów wahadłowych, stosując zasadę metody zaproponowanej przez S.P.Timoszenkę przy badaniu poprzecznego uderzenia ciała sprężystego o sprężysty pręt.

Teoria S.P.Timoszenki w istocie opiera się na rozkładzie przemieszczenia punktu zetknięcia się uderzającego ciała i pręta na dwie składowe: ściskanie lokalne α i wielkość, zależną od odkształcania pręta jako całości. Tą wielkością jest ugięcie pręta y. Miejscowe ściskanie α w tym przypadku wyznacza się na podstawie teorii H.Hertza.

Zgodnie z przedstawioną powyżej zasadą należy stwierdzić, że należy nanieść pewne poprawki do kinematycznego warunku zetknięcia się, który stanowi podstawę współczesnej teorii statycznego i dynamicznego kontaktowego oddziaływania wzajemnego ciał sprężystych.

Założymy, że zetknięcie początkowe ma miejsce tylko w jednym punkcie. Oznaczymy przemieszczenie punktów powierzchni ciał wzdłuż wewnętrznych normalnych do powierzchni nieodkształconych przez $u_3^{(j)}$. Układ współrzędnych dobieramy tak, jak to jest np. przedstawione w dziele A.Loove'a.

Założymy:

$$u_3^{(j)}(M,t) = w^{(j)}(M,t) + v^{(j)}(M,t), \tag{4.16}$$

gdzie $w^{(j)}(M,t)$ - przemieszczenia wzdłuż normalnych, wywołane ściskaniem lokalnym, $v^{(j)}(M,t)$ - przemieszczenia wzdłuż normalnych, wywołane nielokalnym odkształcaniem ciał. Właśnie przemieszczenia $v^{(j)}(M,t)$ są powodem powstawania tych stacjonarnych procesów wahadłowych, o których wspominaliśmy wyżej.

Kinematyczny warunek zetknięcia przyjmie następującą postać:

$$w^{(1)}(M,t) + w^{(2)}(M,t) = \alpha(t) - v_o(t) - v(M,t) - f(M); \tag{4.17}$$

tutaj

$$\alpha(t) = w^{(1)}(0,t) + w^{(2)}(0,t), \tag{4.18}$$

$$v_o(t) = v^{(1)}(0,t) + v^{(2)}(0,t), \tag{4.19}$$

$$v(M,t) = v^{(1)}(M,t) + v^{(2)}(M,t). \tag{4.20}$$

Ograniczając się do przedstawienia przybliżonego, analogicznego do zastosowanego przez H.Hertza, sprowadzimy warunek (4.17) do następującej postaci:

$$w^{(1)}(M,t) + w^{(2)}(M,t) = \alpha(t) - \left[A + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0\right] x^2 - - xy\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_0 - \left[B + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0\right] y^2 + \ldots \quad (4.21)$$

Warunek (4.21) ustala związek między lokalnymi procesami kontaktowego odkształcania i odkształcaniem ściskanych ciał jako całości.

W szczególności równanie (4.21) ujawnia znaczny wpływ krótkofalowych drgań powierzchniowych elementów ciał na procesy, powstające przy ich zderzaniu się. W szczególności wpływ ten może być istotny przy $A = B = 0$.

Zagadnienie powstawania nielokalnych procesów falowych przy zderzaniu się ciał jest niezwykle złożone i powinno być tematem oddzielnych badań.

Na tym miejscu ograniczymy się jedynie do wskazania metody badań.

Skupimy uwagę na tych efektach, powstających przy uderzeniu, które są przyczyną powstawania fal powierzchniowych w dostatecznej odległości od źródła zmiany.

Jak wiadomo, analityczne wyrażenie przemieszczeń, które określają ruch cząstek ciała sprężystego przy rozchodzeniu się powierzchniowych fal, zawierają nieokreślone parametry. Takimi parametrami są amplitudy fal powierzchniowych (dylatacyjnych i skrętnych) na powierzchni podziału ośrodków. Między tymi parametrami istnieje jeden związek.

Założymy, że przemieszczenia, określające fale powierzchniowe, powstają w obszarze ściskania ω. Wtedy wyrażenie względnych przemieszczeń $v(M,t)$ będzie zawierało dwa niezależne parametry.

Zgodnie z (4.21), rozważania zagadnienia kontaktowego będzie też zawierało te dwa nieokreślone parametry.

W szczególności nieokreślone parametry wejdą do analitycznego wyrażenia nacisku powierzchniowego $p(M,t)$.

Nieokreślone parametry można wyznaczyć na podstawie zasady wariacji (1.1) i zagadnienie badania fal powierzchniowych, powstających przy zderzaniu się ciał sprężystych staje się w ten sposób rozwiązane całkowicie.

Otrzymano 20 czerwca 1961 r.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПОСТАНОВКИ И МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЭЛАСТОСТАТИЧЕСКИХ И ЭЛАСТОДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Резюме

Вопрос раздела контактных давлений, поставленный как вариационная задача для интеграла (1.1), рассмотрен для случая начального касания поверхностей тел в одной точке и вдоль отрезка прямой.

В первом случае нелинейное интегральное уравнение свели к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая решается по методу частичной линеаризации.

В другом случае предложен численный метод решения при использовании современных счетных машин.

Рассмотрены некоторые коротковолновые колебательные явления, которые сопутствуют соударению упругих тел (при псевдостатическом решении).

SOME GENERALIZATIONS CONCERNING FORMULATION AND METHODS OF STATIC AND DYNAMIC CONTACT PROBLEMS SOLUTIONS

Summary

The problem of contact pressures formulated as a variant problem for an integral (1.1) was considered for a case of initial touch in one point and along a section of a straight line.

In the first case respecting unlinear integral equations were reduced to the system of unlinear algebraic equations, which are solved by methods of partial linearization.

In the second case a method of number solution with use of electronic computers has been given.

Some wave phenomena accompanying a collision of classic bodies.